arXiv:2611.30958v1 [nucl-th] 23 Nov 2026

迈向维格纳超多重态对称性的百年：从头算视角

Phong Dang[1], * 和 Feng Pan[2, 3, 1]

[1] *Department of Physics and Astronomy, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803, USA*
[2] *Department of Physics, School of Science, Huzhou Normal University, Huzhou 313000, China*
[3] *Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China*

随着 2037 年维格纳超多重态理论百年纪念日的临近，本文借助近期发展的 *ab initio* 对称性适配模型（SAM），提供了现代视角。我们首先考察这种对称性在双核子数据和电弱过程中的经验基础，并追溯其如何从强力中涌现，历经有效场论、量子色动力学大-N_c 极限、相似重整化群以及格点计算。随后，我们回顾其发展历程：从早期有限的关注，到兴趣复兴，再到现代代数方法与第一性原理研究的重新兴起。这场复兴的核心是用于计算 U(3) 和 U(4) 耦合与重耦合系数的新型基于零空间的算法。它们消除了近九十年来一直存在的瓶颈，并以开源库 u3lib 和 u4lib 的形式发布。在此基础上，SAM 成为首个大规模 *ab initio* 壳模型，同时编码 Elliott 的空间U(3)对称性和维格纳的自旋-同位旋 U(4)对称性，从而区分具有相同二次卡西米尔本征值的各个超多重态。初步结果表明，自旋-同位旋对称性在高精度手征相互作用中占主导地位，并抑制轻核中的自旋-同位旋极化率。最后，我们探讨 SAM 在未来十年有望推动的研究方向。

关键词：Wigner超多重态对称性、SU(4) 自旋-同位旋对称性、核 *ab initio* 计算、对称性适配方法、核壳模型、手征有效场论、耦合系数

I. 引言

浩瀚的宇宙由四种基本相互作用支配：将天体系统聚拢在一起的引力、驱动电并使磁体旋转的电磁力、支撑放射性过程的弱力，以及在极小尺度上维系物质的强力。在这些相互作用中，正如其名称所彰显的那样，强力是最强大的一种；这不仅是因为它从夸克-胶子等离子体诞生之初便塑造了我们的宇宙，
还因为它蕴含着如此巨大的能量，一旦释放出来，便可以为服务于人类的所有基础设施提供动力。

截至目前，描述强力的最佳理论是标准模型（SM）中的量子色动力学（QCD）理论。根据该模型，物质由称为费米子和玻色子的基本粒子组成。前者分为两大类，即夸克和轻子。夸克有六种，其中两种——上夸克（u）和下夸克（d）——通过强力结合形成质子（uud）和中子（udd）。这些核子随后通过强力的残余作用相互作用——这种作用通常被称为强核力，它从核子的内部结构中泄露出来，使其结合成原子核。这种力与静电库仑相互作用协同作用，决定有多少质子和中子能够形成原子核，而弱相互作用则支配这些原子核彼此转化的过程。

尽管核力如此复杂，核素图中仍反复出现涌现现象，并且理论与实验前沿一直在持续探索这些现象 [1, 2]。早在核物理和量子力学发展的初期，20世纪伟大的物理学家尤金·保罗·维格纳便发现，质子和中子之间的核力基本相同，不受各自自旋的影响[3, 4]。这一观点受到海森堡发现同位旋对称性 [5]的启发，如今通常称为超多重态对称性、自旋-同位旋交换对称性、SU(4)或U(4)对称性（这些名称体现了该对称性所依据的数学结构）。维格纳致力于推动人们对基础物理学的理解，这最终为他赢得了世界上最负盛名的科学奖项——诺贝尔奖。1963年，他因“对原子核和基本粒子理论的贡献，特别是发现并应用基本对称性原理”而获奖 [6]。如今，维格纳的工作仍持续影响着前沿研究，其影响已超越核物理学和粒子物理学，延伸至众多领域，从量子化学到凝聚态科学，从原子物理学到先进的量子计算。

* pdang5@lsu.edu

自超多重态对称性提出以来的九十年间，人们对它的兴趣经历了显著起伏，其历史上的重要里程碑概括于图1中。20世纪40年代和20世纪50年代，人们对这一观点关注有限，主要是因为Mayer [7, 8], Jensen、Haxel和Suess [9]提出的自旋-轨道壳模型取得了巨大成功——该模型明确依赖于会破坏SU(4)对称性的自旋轨道力——从而使学界将注意力转向另一种范式。1962年，美国劳伦斯利弗莫尔国家实验室首次在中质量原子核中观测到同量异位类似态（IASs），这使人们对该领域的兴趣重新高涨 [10] ，并为富中子系统中对称性的恢复提供了有力证据。此后的几十年里，人们通过大色数（大 N_c） [11, 12]和大散射长度极限下描述核力的有效场论（EFT）、手征有效场论（χEFT）、相似重整化群（SRG） [15—19] 以及SU(3)味对称点处的量子色动力学格点计算，阐明了它与量子色动力学的联系 [20, 21], ；近年来，纠缠抑制理论也为此提供了依据 [22]。值得注意的是，这种对称性已应用于原子核和核物质的格点模拟 [23—28] 以缓解量子蒙特卡罗（QMC）的符号问题。与此同时，代数模型不断发展，通过赝SU(4)和代理SU(4)方案，将这种对称性应用于重核 [29, 30]。最近，人们通过二次卡西米尔不变量，在无芯壳模型（NCSM）波函数中识别出维格纳对称性的特征，并对其对 β衰变的影响进行了探究 [31]。然而，长期以来，人们始终未能建立一种实用的从头算框架，直接利用这种对称性开展大规模、现实的壳模型计算。

本综述源于两个相互汇聚的背景，即2037年维格纳发现的百年纪念日临近，以及近期推出的从头算对称性适配模型（SAM） [32], ——这是首个同时编码空间U(3)（由Elliott提出）和自旋-同位旋U(4)（由维格纳提出）的多体量级核结构模型。SAM建立在过去三年开发的使能技术之上，其中最引人注目的是用于计算U(3) [33]和U(4) [34]群的耦合与重耦合系数的新型通用算法。这些问题近九十年来一直是悬而未决的挑战，也阻碍了真正全面的维格纳对称性壳模型理论的发展。SAM及其系数计算引擎是DeepSANE（**D**eep-learning and **S**ymmetry-adapted**A**b-initio **N**uclear modeling, an AI-ready **E**cosystem）[1], 的一部分；DeepSANE是一个面向对称性适配从头算核建模的开源生态系统，目前我们正在积极构建这一生态系统。

本综述余下部分安排如下。第II 节阐述维格纳对称性的经验与理论基础。第III 节追溯其在核素图上的历史脉络。第IV 节综述为 SAM 奠定基础的从头算对称性适配方法。第V 节介绍新提出的耦合与重耦合系数算法，这是实现该方法的关键技术。第VI 节介绍 SAM 及其早期结果的意义。第VII 节总结本综述，并提出未来十年 SAM 有望解决的若干研究方向。

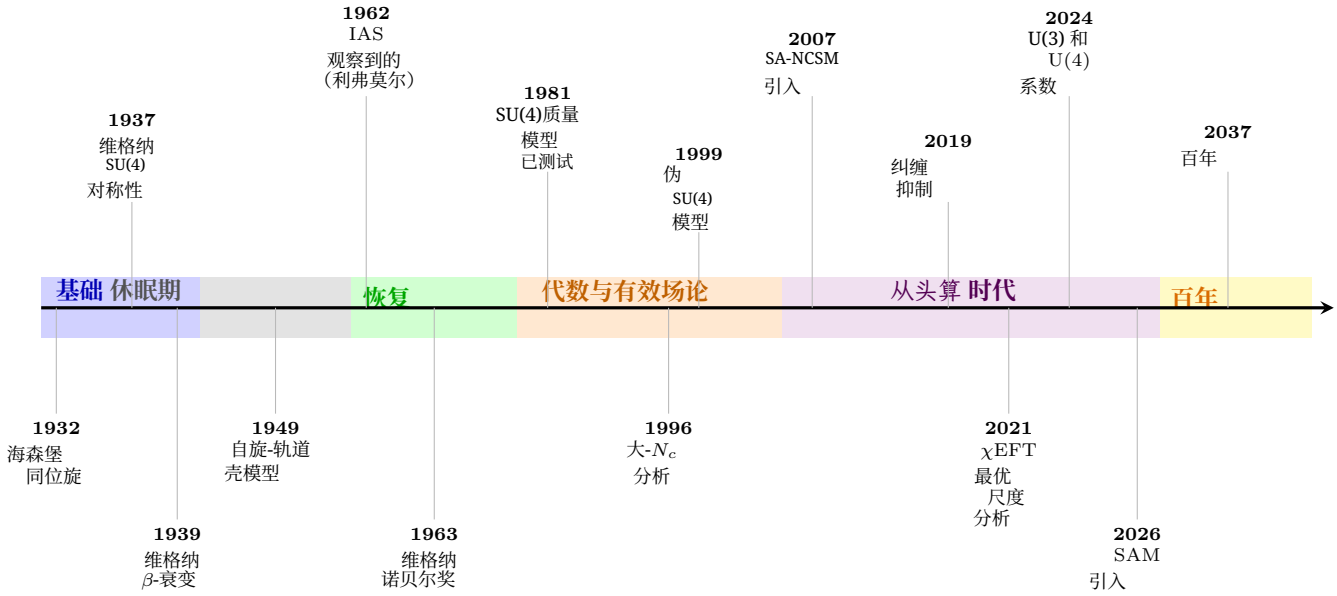

图 1. Wigner超多重态对称性历史上的重要里程碑，按 er 排列 a.

[1] 请参阅 DeepSANEGitHub 组织： https://github.com/Deep-SANE。

II. 维格纳超多重态对称性的基础

A. 双核子系统的实验证据

超多重态对称性的基本概念是，核力主要取决于空间坐标[3]，且在自旋和同位旋变换下相对保持不变。大量实例表明，这种近似对称性确实存在。本小节将回顾维格纳对称性的一些经验依据，包括低能（通常指实验室系动能和相对动量均低于数百兆电子伏）双核子系统的结合能和散射数据；这些数据有助于揭示核力的性质。

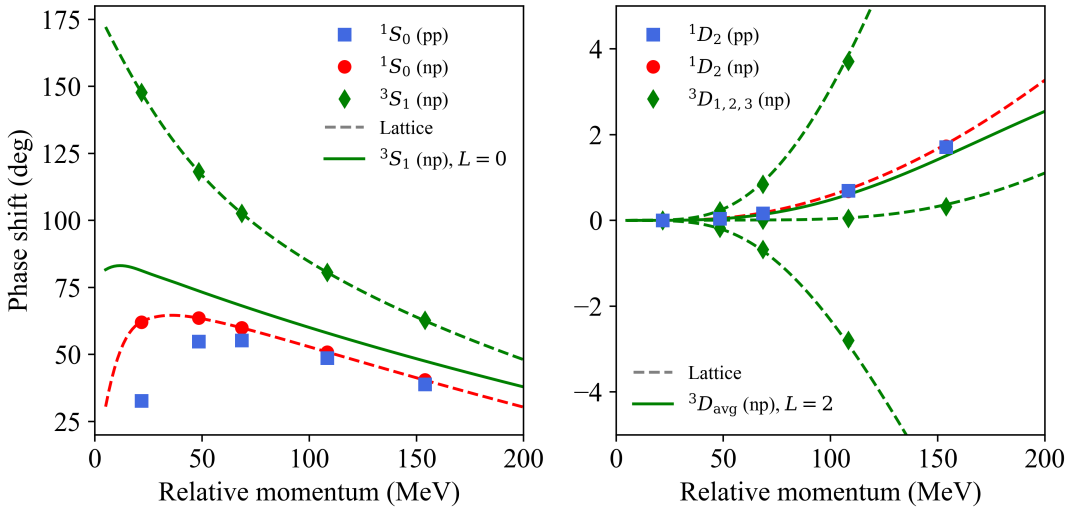

图 2. 低能核子-核子散射相移随相对动量的变化。标记表示奈梅亨分波分析的数据 [35], ，而虚线和实线来自中子-质子格点计算 [14]。左图展示了三个 s 波道；虚线包括自旋单态 $^1S_0$ （蓝色方块表示质子-质子，红色圆圈表示中子-质子）和自旋三重态道 $^3S_1$ （绿色菱形表示中子-质子）；绿色实线表示限制在 $L = 0$ 范围内的格点相移 $^3S_1$ 。右图展示了 d 波相移，其中质子-质子和中子-质子的自旋单态道 $^1D_2$ 分别以蓝色方块和红色圆圈表示，而自旋三重态道 ^3D_J （总角动量为 $J = 1,\ 2,\ 3$）则以带绿色菱形标记的虚线表示。绿色实线表示三个自旋三重态道在所有总角动量上的平均值，轨道角动量限制为 $L = 2$。

1. *The nuclear force is almost spin symmetric*

在低能区，两个核子之间的散射过程主要由 s 波主导。对于由一个中子和一个质子（np）组成的系统，自旋三重态道 $^3S_1$包含三个自旋对称态，而自旋单态道 $^1S_0$则对应一个自旋反对称态。如果自旋对称性是核力的一种精确对称性，那么这四种态将完全相同。实验依据表明，核力对自旋近似具有不变性。

首先，我们来考察结合能。三重态道形成了最轻的复合原子核——氘核，其结合能较小，为 2.225 兆电子伏。与此同时，单态道并不束缚，但其阈态接近于零。这种情况暗示存在一种近似对称性，因为只需对核力作微小改变，两个道就会变得相同。具体而言，如果相互作用略微减弱，三重态将不再束缚；如果相互作用略微增强，单态就会受到束缚 [11, 14]。

其次，可以认为，两个道的散射长度差异悬殊—— $^3S_1$ 和 $^1S_0$分别约为 5.4 飞米和 -20飞米——表明该对称性遭到了严重破缺。不过，这并不排除核力存在偶然对称性的可能，因为在近束缚或近非束缚的情形下，即使核势发生微小变化，散射长度也可能发生剧烈改变 [11, 15], ；中子-质子系统正是这种情形。此外，与核力的自然尺度——即 π 介子的康普顿波长 $\lambda_\pi = 1/M_\pi \approx 1.5$ 飞米 [36]——相比，两个散射长度都异常大，这表明相互作用接近维格纳对称性的极限 [37]。这是因为当散射长度 $a^{(s)}$ 时，其中

s 表示道 $^1S_0$ 或 $^3S_1$，趋于无穷大时， s波散射振幅 [13]

$$\mathcal{A}^{(s)} = -\frac{4\pi}{M}\frac{1}{1/a^{(s)} + ip} \tag{1}$$

变得与自旋道无关，而仅取决于核子动量 p，反映出一种相对于自旋的不变性。

第三，从中子-质子散射相移中也可以观察到自旋对称性的特征。图2 展示了奈梅亨分波分析 [35] 对高精度核子-核子散射的结果，以及核晶格计算 [14]的结果。如左图所示， $^1S_0$ 与 $^3S_1$ 中子-质子相移之间存在相对较大的差异，这是由于张量力的存在混合了 $^3S_1$ 和 $^3D_1$ 道，从而掩盖了对称性 [14]的存在。一旦通过将格点计算限制为 $L = 0$ 仅 [14], 来移除张量力的影响，单重态和三重态相移便呈现出非常相似的形状；更重要的是，它们彼此十分接近。这种接近意味着，只需对核力的强度进行小幅调整，就能使这两个相移变得相似，暗示着近似自旋对称性的存在。在 d波散射中还可以找到另一项有力证据。如右图所示，三个自旋三重态道 $^3D_{J=1,2,3}$ 具有非常不同的相移；具体而言，其中两个为正，另一个为负。然而，可以对这三个道的相移取平均，同时将格点计算限制为$L = 2$ [14] （同样是为了移除张量力产生的混合）。值得注意的是，在对三个内禀自旋取向进行平均后， d波散射相移在自旋单重态道和自旋三重态道之间几乎完全相同。文献 [15], 中展示了一个类似的思想：作者通过一阶微扰加入自旋-轨道力和张量力，计算了加权平均相移。研究发现，对于 d波和 g波，在质心动量分别达到约250兆电子伏和400兆电子伏之前，单重态道和三重态道之间都保持一致；这也说明了维格纳对称性的长程性质，因为对于更高的分波，对短程效应的敏感性会降低 [15]。此外，作者还提供了证据表明，正如大L 展开所预言的那样，对于奇数-L 分波，自旋-同位旋对称性受到严重破坏。

2. *The nuclear force is almost isospin symmetric*

为考察核相互作用的同位旋对称性，可以考虑由两个相同粒子组成的体系，即两个质子（pp）或两个中子（nn）。对于 s波散射，由于波函数的反对称化，该体系只能处于自旋单重态， $^1S_0$。表I 给出了从 pp 和 nn 散射中提取的散射长度和有效程参数；其中，前者的数值已针对库仑排斥进行了修正，从而能够仅推断强核力的性质。显然，pp 与 nn 道之间的差异极小：散射长度约为 3%，有效程约为 7%。

表 I. pp（库仑修正）和 nn 散射的散射长度与有效程，数据引自 [38]。

道	散射长度（飞米）	有效程（飞米）
pp	-17.1 ± 0.2	2.84 ± 0.03
nn	-16.6 ± 0.5	2.66 ± 0.15

从散射相移中也可以看出核力近似具有同位旋不变性。在图2中，pp 和 np 的两个自旋单态道几乎完全相同。事实上，对于 s波，从相对动量约为 50 兆电子伏开始，平均而言，两道相移之间的差异约为 2.8 度；与相移的尺度相比，这一差异可以忽略不计。类似地，对于 d波，相对动量在 0 到 200 兆电子伏之间时，偏差也非常小。

3. *The nuclear force is almost spin-isospin symmetric*

在以上各小节中，我们分别提供了强核力具有自旋对称性和同位旋对称性的证据。综合关于结合能、相移、散射长度和有效程的所有论据，可以得出结论：低能核相互作用近似具有自旋-同位旋交换对称性（维格纳对称性） [3], ；在其精确极限下，核力会平等对待双核子系统的六个 s波自旋-同位旋态，关于这一极限的示意图见文献 [32] 的图 1。

B. 强核力中维格纳《对称性》的涌现

由于核结构是底层夸克和胶子涌现出的现象，因此，理解维格纳自旋-同位旋对称性如何从如此复杂的结构中涌现至关重要。迄今，人们已从多个互补的研究方向，运用 χ有效场论对该对称性的涌现开展了大量研究，概述如下。

1. *Large-N_c QCD and χEFT.*

由于量子色动力学在低能下具有非微扰性质，因此无法从夸克和胶子的自由度出发来构建核力模型。相反，点状质子和中子之间的相互作用是通过有效场论框架来描述的。20 世纪 90 年代末，Kaplan、Savage 和 Manohar [11, 12] 考察了双核子系统的手征拉格朗日量，其中包含两个领头阶算符

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}C_S(N^\dagger N)^2 - \frac{1}{2}C_T(N^\dagger \boldsymbol{\sigma} N)^2, \tag{2}$$

其中， N 表示同位旋双重态二分量旋量， $\boldsymbol{\sigma}$ 代表泡利矩阵。第一项在自旋和同位旋变换下保持不变，而第二项则破坏这种对称性。作者发现，双体核力具有 SU(4) 对称性，修正量约为 $C_T/C_S \approx 5\%$。在分析大-N_c 极限下通过交换夸克和胶子来描述重子-重子相互作用的图时，他们发现了一个影响更深远的结果；尽管现实中， $N_c = 3$，这种方法简化了强子的结构，进而也简化了对其性质的分析。研究发现，在这一极限下，不保持自旋和同位旋对称性的相互作用算符会受到 $1/N_c^2$ 的抑制，而与自旋和同位旋无关的算符则在组合意义上得到增强，从而使精确的超多重态对称性随 $N_c \to \infty$ 而涌现。

2. *Lattice QCD at the SU(3)-flavor symmetric point.*

进入21世纪，随着千万亿次级超级计算机的投入使用和现代数值技术的发展，Beane等人利用物理奇夸克质量，在 SU(3)味对称性的极限下——此时上夸克、下夸克和奇夸克的质量相同——对轻核开展了最先进的格点量子色动力学计算。研究发现，自旋单态道和自旋三重态道中都存在束缚态： $^1S_0$ 的束缚能为15.9兆电子伏， $^3S_1$ [20] 的束缚能为19.5兆电子伏； $^1S_0$ 的散射长度为2.33飞米， $^3S_1$ [21]的散射长度为1.82飞米。这些结果暗示，超多重态对称性在量子色动力学的 SU(3)对称点涌现。

3. *Entanglement suppression.*

最近，Beane 等人提出了一种关于强核力如何产生这种对称性的新见解 [22]。具体而言，他们利用低能散射数据，研究了中子-质子系统的 S矩阵在自旋空间中的纠缠能力。这种描述能够分析超越第IIA节所讨论的乘积态的纠缠态。通过确定与手征拉格朗日量的精确超多重态对称性相对应的、为零的纠缠能力， $C_T = 0$ 在方程（2）中，作者将维格纳对称性的涌现归因于红外区强相互作用的纠缠抑制。值得注意的是，连接这两种现象的潜在机制尚不清楚，作者将其称为一种猜想。

4. *Optimal resolution scale.*

Mehen、Stewart 和 Wise [13] 率先探究了维格纳对称性从核子场的有效二体拉格朗日量中涌现的尺度。他们发现，在低动量和大散射长度的极限下——即 $1/a^{(s)} \ll p \ll \Lambda$，其中 $a^{(s)}$ 与方程（1）中的相同，且尺度 Λ 估计约为 400 兆电子伏——对称性的修正受到 $(1/a^{^1S_0} - 1/a^{^3S_1})$ 和 p/Λ [13]的幂次抑制。Lee等人最近指出，要使对称性修正按 $1/N_c^2$ 的尺度变化（如参考文献 [11], 所示），有效

理论需要采用所谓的最优分辨率尺度，约为 500 兆电子伏 [14]。有趣的是，这一动量尺度也正是基于 χ有效场论得到的现实相互作用发挥最佳效用的尺度。因此，他们的发现有力表明，在未来的核结构计算中，应当重视大 N_c 极限下强相互作用的维格纳对称性及其他涌现性质 [14]。

5. *Renormalization of the nuclear force.*

Arriola 及其同事在一系列论文中研究了核相互作用的重整化尺度中维格纳对称性的涌现 [15–19]。在文献 [16, 17], 中，作者考察了相似重整化群流演化过程中，动量空间中核相互作用的对角矩阵元 $V(p,\ p)$ 和完全非对角矩阵元 $V(p,\ 0)$。这一思路的主要动机是，超多重态对称性意味着 $^1S_0$ 和 $^3S_1$ 道中的核势相同 [15]。通过考察不同 SRG 截止下的 Argonne AV18 势 [39] ，作者报告称，在 $\lambda \approx 3$ 飞米$^{-1}$ ≈ 590 兆电子伏的动量尺度上实现了维格纳对称性；这一结果与文献 [13, 14] 中先前发现的分辨率尺度定性一致，更重要的是，它不依赖于核力的细节 [19]。

C. 维格纳《对称性》与电弱过程

在本节前文中，我们只讨论了由两个核子及其相互作用构成的最轻核系统。由此自然会产生一个问题：维格纳对称性是否也适用于结构更加复杂的原子核？事实上，最常用于支持超多重态结构的例子是 β衰变[4], ，这是一个同位旋翻转过程，由核结构与弱力的耦合引发，可将原子核中的质子转变为中子，反之亦然。维格纳对称性对这一过程至关重要，其原因在于，衰变的主导算符，即矢量流的费米算符和长波长极限下轴矢量流的 Gamow–Teller（伽莫夫–特勒，GT）跃迁算符 [31, 40], 都是 SU(4) 群的生成元。SU(4) 群为这种对称性提供了数学框架，后文第IID节将对此进行介绍。这意味着 β衰变主要发生在同一自旋-同位旋超多重态内，因此在很大程度上受到母核与子核波函数超多重态内容之间重叠的保护。下文将在表II 中列举若干理论和实验视角的实例，以说明维格纳对称性的重要性。

表 II. 维格纳对称性对 β-衰变影响的示例。前五行概括了母核与子核具有相似超多重态内容的跃迁，后三行则是超多重态结构重叠较小的原子核之间的衰变。$\log_{10}(ft)$ 的数值取自以下文献： ^{6}He $\to$ ^{6}Li 衰变道见参考文献 [41] ， ^{8}Li $\to$ ^{8}Be 衰变道见参考文献 [42] ， ^{10}C $\to$ ^{10}B* 衰变道见参考文献 [43] ， ^{18}Ne $\to$ ^{18}F $\to$ ^{18}O 衰变道见参考文献 [11] 。

衰变	$(J^\pi,\ T) \to (J^\pi,\ T)$	对数 $_{10}(ft)$
^{6}He $\to$ ^{6}Li	$(0^+,\ 1) \to (1^+,\ 0)$	2.910
^{10}C $\to$ ^{10}B* (0.71 兆电子伏)	$(0^+,\ 1) \to (1^+,\ 0)$	3.483
^{18}F $\to$ ^{18}O	$(1^+,\ 0) \to (0^+,\ 1)$	3.554
^{18}Ne $\to$ ^{18}F	$(0^+,\ 1) \to (1^+,\ 0)$	3.096
^{18}Ne $\to$ ^{18}F* (1.04 兆电子伏)	$(0^+,\ 1) \to (0^+,\ 1)$	3.473
^{8}Li $\to$ ^{8}Be* (3.03 兆电子伏)	$(2^+,\ 1) \to (2^+,\ 0)$	$\geq$ 5.6
^{18}Ne $\to$ ^{18}F* (1.08 兆电子伏)	$(0^+,\ 1) \to (0^-,\ 0)$	7.012
^{18}Ne $\to$ ^{18}F* (1.70 兆电子伏)	$(0^+,\ 1) \to (1^+,\ 0)$	4.477

让我们来考察表 II 中的前五个例子。最先进的 从头算 计算 [31, 32] 和壳模型结果 [11]表明， ^{6}Li、 ^{6}He、 ^{10}C、 ^{18}Ne、 ^{18}F、 ^{18}O 的基态以及 ^{10}B* 在 0.71 兆电子伏处和 ^{18}F*在 1.04 兆电子伏处的激发态，均主要由六维超多重态（对应于 U(4) 表示）主导$[1, 1, 0, 0]$,，见第 II D 节）。这些衰变道主要发生在同一超多重态内。因此，它们的 $\log_{10}(ft)$ 值非常相似这一事实，支持了维格纳对称性的存在。

^{18}F* 在 1.70 兆电子伏处的激发态与基态具有相同的（$J^\pi,\ T$），因此同样主要由与基态相同的超多重态构成。然而，由于波函数中与其他超多重态的混合增强， ^{18}Ne 的基态到该激发态的衰变，比到 ^{18}F基态的衰变小约一个数量级。从 ^{18}Ne到 ^{18}F* 在 1.08 兆电子伏处的激发态的第一类禁戒跃迁发生在超多重态之外，并涉及宇称改变，因此要弱得多，约低四个数量级

比到基态的衰变小 [11]。Ref. [31]中近期展示的另一个例子是从 ^{8}Li 基态到 ^{8}Be*第一激发态的衰变 ^{8}Be [44]的基态也是如此）。尽管末态主要是 U(4)标量（因此 [34]不分解为非零同位旋；因此，该跃迁比表 II 中前五个例子弱约一百倍。

近期 χ有效场论的发展，通过引入二体轴流 [45–48]，增强了从头算计算 β衰变率的预测能力。值得注意的是，Gysbers等 [45] 在无需经验淬灭因子 [49]的情况下，实现了从氚到锡的 β衰变率高精度预测。Muli等近期首次分析了二体流对超多重态结构的影响，研究对象为 $A = 8$ 体系之间的 β衰变 [31]。研究发现，在单体层次，由于波函数的超多重态内容之间重叠很小，跃迁受到强烈抑制（如上一段所述）；然而，二体流能够在不同超多重态之间诱导跃迁，从而使这些衰变产生约30%的较大二体修正 [46]。此外，二体流的主导分量可以用二体 SU(4) 生成元表示；因此，将这些算符限制在双粒子态上时，它们是对角的，相较于标准 χ有效场论幂次计数，其影响得到增强 [31]。近期在无π有效场论框架内对 ^{3}He磁矩和 ^{3}H 伽莫夫–特勒矩阵元的研究发现，库仑修正出人意料地比预期的有效场论标度小一至两个数量级 [50]。在 SU(4) 基中分析这些修正后发现， ^{3}He磁矩修正在对称性破缺的二阶被抑制，使修订后的幂次计数估算（$\sim 0.11\%$）与计算得到的0.18%相当一致；然而，对于 ^{3}H 伽莫夫–特勒矩阵元，SU(4) 对称性破缺仅使修正在一阶被抑制（$\sim 0.92\%$），因此，其观测到的更小数值（0.075%）只能得到部分解释。

超多重态对称性与 $\beta\beta$衰变之间的关系 [51], 早已得到研究。在文献 $\beta\beta$中，Vogel 和 Zirnbauer 考察了自旋-同位旋极化力的粒子-粒子分量对双中微子 $M_{2\nu\beta\beta}$ 衰变矩阵元 0^{+} 的影响。该矩阵元连接两个偶偶核的基态，并发现随着粒子-粒子强度的变化，矩阵元会经过零点。为更好地理解这一现象，他们研究了一个示意性的 SO(8) 哈密顿量（第III C 节综述了 O(8) 模型），并观察到这一零点恰好对应于精确的 SU(4) 极限，在该极限下，粒子-粒子相互作用强度等于配对强度。此外，已证明该哈密顿量的基态是全对称 SU(4) 超多重态的最高权态；因此， β^{+} 强度以及 $M_{2\nu\beta\beta}$ 都必须在 SU(4) 极限下消失。尽管维格纳对称性在重核中遭到破缺，但本工作所展示的 $M_{2\nu\beta\beta}$ 强烈抑制现象阐明了为何矩阵元的计算极具挑战性。在文献 [52], 中，Vogel、Ericson 和 Vergados 推导了双 GT 算符和费米算符的求和规则。不同于 β衰变（其 GT 和费米求和规则是精确且与模型无关的），双跃迁算符一般只能满足近似的求和规则。在良好同位旋或良好维格纳 SU(4) 对称性的极限下，这些求和规则变得精确；对于具有 $N - Z \gg 1$的泡利阻塞核，它们仍是有用的近似。作者指出，双 GT 算符只激发末态偶偶核的双类似态和双 GT 态，这两类态共同耗尽了求和规则；而双 β^{+} 强度对于 $N > Z$恒等为零。他们进一步指出，带有“错误”同位旋或 SU(4) 表示的振幅仅以二次形式进入求和规则，因此适度的对称性破缺基本不会改变这些规则。由此，超多重态对称性为双电荷交换强度提供了有用的指导，并确定了其极度抑制的尺度，其中 2ν 模式仅耗尽约 10^{-4} 的双 GT 求和规则。

D. 群论框架

1. *The special unitary group SU(4)*

暂且不考虑核子的空间自由度（稍后将在第 VI 节中重新纳入），则核子可占据四种自旋-同位旋态， $|m_s m_t\rangle$, 即 $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$。这些态构成特殊酉群 SU(4) 的基本表示，并在 15 个群生成元的作用下按 SU(4) 四重态变换。这些生成元是自旋矢量 $\mathbf{S}^{m_s}$、同位旋矢量$\mathbf{T}^{m_t}$ 以及 Gamow–Teller 双张量 $\mathbf{GT}^{m_s m_t}$ 的张量分量。图 3 展示了这些生成元的作用，它们可分为五组：

- 升算符： S_{+}, GT_{+0}, T_{+}, GT_{0+}, GT_{++};
- 降算符： S_{-}, GT_{-0}, T_{-}, GT_{0-}, GT_{--};
- 自旋升、同位旋降算符： GT_{+-};
- 自旋降、同位旋升算符： GT_{-+};

- 自旋-同位旋保持算符： S_0、 T_0、 GT_{00}。

自旋算符 $\{S_+, S_0, S_-\}$ 和同位旋算符 $\{T_+, T_0, T_-\}$ 构成两个子群 $\mathrm{SU}_S(2)$ 和 $\mathrm{SU}_T(2)$，形成群-子群链 $\mathrm{SU}(4) \supset \mathrm{SU}_S(2) \otimes \mathrm{SU}_T(2)$。

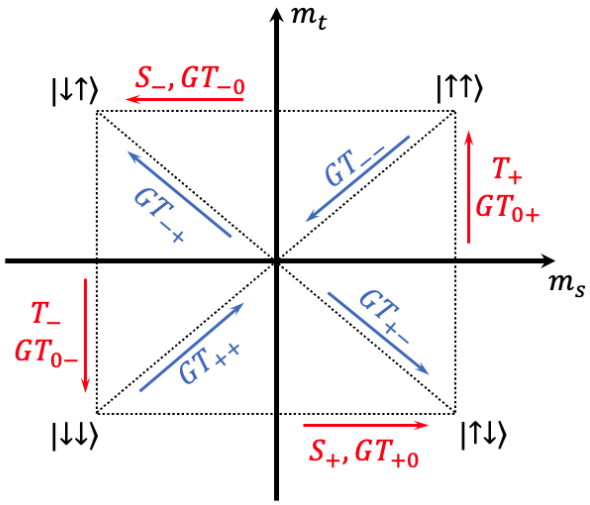

图 3. SU(4) 基本表示的权图。四个自旋-同位旋单粒子态通过 15 个群生成元构成 SU(4) 四重态。

2. *Classification of nuclear states*

从单个粒子推广到多粒子系统，只需加入数算符 A——也称为重子数 [13]——即可轻松处理对称性；该算符统计系统中的核子总数。数算符与上述 15 个生成元共同构成酉群 U(4)，而原子核的量子态可以标记为

$$|[n_{14}n_{24}n_{34}n_{44}]\ \zeta\ S\ M_S\ T\ M_T\rangle\,, \tag{3}$$

前四个非负整数（$n_{14} \geq n_{24} \geq n_{34} \geq n_{44} \geq 0$）构成一个 U(4) 不可约表示（irrep），并表示可分布到各个单粒子自旋-同位旋态 [34]中的核子数上限。最后四个量子数则表示整个原子核的集体自旋和同位旋及其投影。由于在一个 U(4) 不可约表示中，同一对（S，T）可能多次出现，因此必须引入额外标记来追踪这种简并。Draayer [53] 的早期工作采用了两个重数标记（分别用于自旋和同位旋），并通过类似的投影过程构造了 Elliott 的 SU(3) 对称性中的轨道角动量标记 [54]。Hecht 和 Pang [55] 的另一项工作则通过只考虑关于 S 和 T不存在简并的 U(4) 不可约表示，避开了这一问题。本文采用单个重数标记 ζ；这一标记最早由 Racah [56, 57] 提出，近期已用于构造参考文献 [34, 58–60]中的 U(4) $\supset \mathrm{SU_S}(2) \otimes \mathrm{SU_T}(2)$ 基态。

需要指出的是，尽管有些作者采用这种以 U(4) 不可约表示 [34, 58–61], 为基础的标记方案，但文献中更常见的是用包含三个量子数（$PP'P''$）的 SU(4) 不可约表示来表示该对称性；这与 U(4) 不可约表示之间可以通过简单的转换建立联系

- $P = (n_{14} + n_{24} - n_{34} - n_{44})/2$, $P' = (n_{14} - n_{24} + n_{34} - n_{44})/2$ 和 $P'' = (n_{14} - n_{24} - n_{34} + n_{44})/2$ 根据维格纳的原始约定 [55]; g
- $P = n_{14} - n_{24}$, $P' = n_{24} - n_{34}$ 和 $P'' = n_{34} - n_{44}$ 根据 Draayer 的约定 [53]。

尽管这两种不可约表示标记方案保留了核系统的自旋-同位旋内容，但它们会丢失核子数信息， $A = \sum_i n_{i4}$。开发者可以自行选择最方便的方案。

按照 U(4) 群表示进行变换的张量，其厄米共轭定义如下。对于秩为 $[n_{14}n_{24}n_{34}n_{44}]$ 的 U(4) 张量，其共轭张量的秩为 $[n_{14} - n_{44}\, n_{14} - n_{34}\, n_{14} - n_{24}\, 0]$。根据上述 SU(4) 不可约表示的定义，SU(4) 张量的共轭遵循以下规则：对于维格纳约定，$(PP'P'') \rightarrow (PP' - P'')$；对于 Draayer 约定，$(PP'P'') \rightarrow (P''P'P)$。

3. *Hamiltonian with Wigner's symmetry*

根据定义，对于自旋-同位旋变换具有对称性的原子核哈密顿量必须与 SU(4) 群的所有生成元对易，即，

$$[H, \mathbf{S}] = [H, \mathbf{T}] = [H, \mathbf{GT}] = 0, \tag{4}$$

其中 **S**、**T** 和 **伽莫夫–特勒** 均对给定原子核中的核子求和。此类哈密顿量的一个著名例子是 Elliott 的 SU(3) 型 [62–65] 它由 SU(3) 群生成元的乘积和幂构成，称为完整基算符 [66–68] （其中也包括卡西米尔不变量）。这类哈密顿量完全作用于空间自由度，因此在自旋-同位旋空间的旋转下保持不变。参考文献 [69], 中还提出了一组较少为人所知的自旋与同位旋标量，也可纳入具有 SU(4) 对称性的原子核哈密顿量中。

4. *Casimir invariants*

对于任意（特殊）酉群，卡西米尔不变量是由群生成元的乘积构成、并与所有群生成元对易的算符。它们的本征值是不可约表示标记的多项式，且与子群量子数无关。对于 U(N) [SU(N)] 群，有 N [$N-1$] 个卡西米尔算符。在最简单的角动量代数 SU(2) 中，算符 J^2 是二次的，也是该特殊酉群唯一的卡西米尔算符。对于 U(4) 群，有四个卡西米尔算符；一阶算符是数算符$\langle \mathfrak{C}_1 \rangle = A = n_{14} + n_{24} + n_{34} + n_{44}$；二次、三次和四次算符定义如下

$$\mathfrak{C}_2 = E_{ij}E_{ji},\ \mathfrak{C}_3 = E_{ij}E_{jk}E_{ki} \text{ and } \mathfrak{C}_4 = E_{ij}E_{jk}E_{kl}E_{li}, \tag{5}$$

其中， E_{ij} ($1 \le i,\ j \le 4$) 是群-子群链 U(4) $\supset$ U(3) $\supset$ U(2) $\supset$ U(1)[34, 70] 中的十六个规范生成元，并默认对双指标求和。利用参考文献 [71] 附录 B 中的技术以及参考文献 [34],给出的矩阵元，我们得到 U(4) 不可约表示的卡西米尔不变量的以下本征值

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{C}_2 \rangle =& n_{14}(n_{14}+3) + n_{24}(n_{24}+1) + n_{34}(n_{34}-1) + n_{44}(n_{44}-3), && (6)\\
\langle \mathfrak{C}_3 \rangle =& n_{14}^3 + n_{24}^3 + n_{34}^3 + n_{44}^3 + 6n_{14}^2 + 3n_{24}^2 - 3n_{44}^2 \\
& - n_{14}(n_{24}+n_{34}+n_{44}) - n_{24}(n_{34}+n_{44}) - n_{34}n_{44} \\
& + 9n_{14} - n_{24} - 5n_{34} - 3n_{44}, && (7)\\
\langle \mathfrak{C}_4 \rangle =& n_{14}^4 + n_{24}^4 + n_{34}^4 + n_{44}^4 + 9n_{14}^3 + 5n_{24}^3 + n_{34}^3 - 3n_{44}^3 \\
& - n_{14}^2(n_{24}+n_{34}+n_{44}-27) - n_{24}^2(n_{14}+n_{34}+n_{44}-5) \\
& - n_{34}^2(n_{14}+n_{24}+n_{44}+5) - n_{44}^2(n_{14}+n_{24}+n_{34}+3) \\
& - n_{14}(8n_{24}+6n_{34}+4n_{44}-27) - n_{24}(4n_{34}+2n_{44}+11) - 13n_{34} - 3n_{44}. && (8)
\end{aligned}$$

SU(4) 群的卡西米尔不变量的显式公式，是 Burdet、Maguin 和 Partensky [72], 以及 Danos 和 Gillet [73]根据维格纳的 SU(4) 标记约定推导的。在参考文献 [74], 中，我们针对 Draayer 的约定并采用略有不同的归一化，推导了这些算符的本征值。通过将 U(4) 量子数简单替换为 SU(4) 量子数 [71]，即可直接得到 SU(4) 卡西米尔不变量的本征值。我们还对卡西米尔不变量施加以下共轭关系

$$\mathcal{C}_2(PP'P'') = \mathcal{C}_2(P''P'P),\ \mathcal{C}_3(PP'P'') = -\mathcal{C}_3(P''P'P) \text{ and } \mathcal{C}_4(PP'P'') = \mathcal{C}_4(P''P'P) \tag{9}$$

通过调用保持其代数性质的线性映射

$$\mathcal{C}_2 = 2\mathfrak{C}_2,\ \mathcal{C}_3 = 4(\mathfrak{C}_3 - \mathcal{C}_2) \text{ and } \mathcal{C}_4 = \mathfrak{C}_4 - \mathcal{C}_3. \tag{10}$$

SU(4) 卡西米尔本征值的最终表达式为

$$\langle \mathcal{C}_2 \rangle = \frac{3}{2}(P^2 + P''^2) + 2P'^2 + 2(P + P'')P' + PP'' + 6(P + P'') + 8P', \tag{11}$$

$$\langle \mathcal{C}_3 \rangle = \frac{3}{2}(P - P'')[P^2 + P''^2 + 2(PP' + P'P'' + PP'') + 2(3P + 2P' + 3P'' + 4)], \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{C}_4 \rangle =& \frac{1}{64}[21(P^4 + P''^4) + 16P'^4 + 4P^3(14P' + 7P'' + 42) + 4P''^3(14P' + 7P + 42) \\ &+ 32P'^3(4 + P + P'') + 72P'^2(P^2 + P''^2) + 30P^2P''^2 + 24PP'P''(3P + 2P' + 3P'') \\ &+ (288P'^2 + 896P' + 960)(P + P'') + 24P^2(16P' + 9P'') + 24P''^2(16P' + 9P) \\ &+ 384PP'P'' + 576(P^2 + P''^2) + 512P'^2 + 640PP'' + 1024P'].\end{aligned} \tag{13}$$

III. 维格纳《对称性》在整个核素图上的历史概述

A. 早期的质疑与壳模型时代

维格纳超多重态理论最初受到的反响相对谨慎。20世纪40年代和20世纪50年代，核壳模型的发展占据主导地位，该模型具有很强的自旋-轨道耦合 [7–9]，这使得迈耶和延森与维格纳共同获得了1963年诺贝尔奖。自旋轨道力明确破坏了 SU(4) 对称性，而它在重现观测到的原子核幻数方面发挥着至关重要的作用，这意味着对于超出 p-壳层的原子核，超多重态方案将遭到严重破坏。

B. 通过同位旋模拟态实现恢复

1962年，劳伦斯利弗莫尔国家实验室的安德森、黄和麦克卢尔报告了首次在中质量原子核中观测到同量异位类似态，这一发现使局面发生了重大变化 [10]。同量异位类似态是指存在于相邻同量异位素中、属于同一同位旋多重态且能量相近的态。这表明，尽管人们认为自旋轨道力在重同位素中十分重要，同位旋对称性（进而超多重态对称性）仍得以保持。

一年后　后来，弗兰齐尼和拉迪卡蒂 [75] 提出了一种利用能量比检验对称性的方法

$$R(T_z) = \frac{E(A, T_z) - E(A, T_z - 2)}{E(A, T_z - 1) - E(A, T_z - 2)}, \tag{14}$$

该能量比源自　基于 SU(4) 群二次卡西米尔不变量构建的原子核质量公式　：

$$E(A, T_z) = a(A) + b(A)\mathcal{C}_2, \tag{15}$$

其中，系数 a 和 b 是质量 A的函数。如果超多重态模型成立，该比值应与 A无关。他们发现，对于范围广泛的富中子中重原子核（$N - Z \gg 1$），该比值的实验值与理论预言相符，这为维格纳对称性在中子滴线附近的恢复提供了首个证据。有趣的是，维格纳获得诺贝尔奖仅比利弗莫尔的惊人发现晚一年，不过该奖项表彰的是他对物理学中对称性所作贡献的广泛影响。

C. 代数模型的应用与检验

在20世纪余下的时间里，超多重态模型的应用逐渐增多。基于式（15）中二次 SU(4) 卡西米尔算符的初始原子核质量公式，加入库仑修正和壳修正[76]，高阶卡西米尔项 [72, 77]，以及魏茨¨萨克型贡献 [78]后得到了改进。在每种情况下，SU(4) 公式的均方根误差都略优于魏茨¨萨克公式。大约在同一时期，Chakraborty、Kota 和 Parikh 证明，式（14）中的比值对对称性的破缺并不敏感，因此不是一种恰当的检验方法 [79]。后来，在90年代中期，Van Isacker、Warner 和 Brenner 提出了一种更为敏感的检验方法，即采用双结合能差 [80]

$$\delta V_{np}(N, Z) = \frac{1}{4}\{[E(N, Z) - E(N - 2, Z)] - [E(N, Z - 2) - E(N - 2, Z - 2)]\}, \tag{16}$$

该量已知在偶偶自共轭原子核中异常偏大。用式（15）中的结合能替代后，对这一现象给出了非常直观的解释，并进一步支持了维格纳对称性的存在。此外，作者观察到，对于处于 sd壳层中的偶偶自共轭原子核，随着质量增加，双结合能差先减小，然后在接近该壳层末端时重新增大，这同样意味着超多重态对称性的恢复 [80]。几年后，人们在无限核物质质量模型中研究了双结合能差 [81]。

通过壳模型计算，对该对称性进行了更严格的检验。具体而言，研究人员采用谱分布方法，证实 sd壳层 [82, 83] 中存在显著的 SU(4)破缺。值得注意的是，Vogel 和 Ormand [84]通过计算若干sd壳层和 fp壳层原子核的壳模型波函数与二次 SU(4) 卡西米尔算符本征态之间的重叠，量化了该对称性的优劣——重叠较大表明维格纳对称性主导波函数，而重叠较小则意味着对称性破缺（关于这一方法的进一步讨论将在第VI 节介绍 SAM 时展开）。尽管大多数情况下都存在对称性破缺，作者还是发现，沿钙同位素链趋近中子滴线时，超多重态结构有所恢复。

配对关联提供了另一种情境，展现维格纳对称性如何将核结构与代数描述联系起来。自旋-同位旋框架兼容同位旋矢量配对和同位旋标量配对，使人们能够在共同的空间中考察二者之间的竞争。这一联系构成了 O(8)配对模型以及相互作用玻色子模型（IBM）的扩展形式 IBM-4 的基础，后者包含这两类配对 [85, 86]。除配对之外，赝 SU(4) 和代理SU(4)方案还将超多重态框架的应用扩展到更重的原子核 [30, 87]。总的来说，这些进展表明，即使维格纳对称性遭到显著破坏，它仍持续为核建模提供指引。

连接这些模型的代数结构可用 LST耦合方案来表述，其中轨道角动量、自旋和同位旋均被显式处理。设 $\{a^\dagger_{\omega,\sigma,\tau},\ a_{\omega,\sigma,\tau}\}$ 为球壳模型中的一组价核子产生与湮灭算符，其中 $\omega = 1,\ 2,\ \cdots,\ \Omega \equiv \sum_l (2l+1)$ 是空间指标，而 σ 和 τ分别表示自旋和同位旋的第三分量，各自取值为 $1/2$ 或 $-1/2$。由 $\{\Pi^\dagger_{\phi_k}|0\rangle = \prod_{i=1}^{k} a^\dagger_{\omega_i,\sigma_i,\tau_i}|0\rangle\}$提供的多粒子乘积态总数 $\mathcal{N}_t$，其中 $|0\rangle$ 为价核子真空态，$\phi_k \equiv \{\omega_1,\sigma_1,\tau_1,\cdots,\omega_k,\sigma_k,\tau_k\}$ 表示所涉及的全部子指标集合，其表达式为

$$\mathcal{N}_t = \sum_{k=0}^{4\Omega} \frac{(4\Omega)!}{k!(4\Omega-k)!} = 2^{4\Omega}. \tag{17}$$

这一结果是泡利不相容原理的直接推论；该原理将任意非零多粒子乘积态中产生算符的最大数量限制为 4Ω。算符集合 $\{Q_{\phi_k,\phi'_{k'}} = \Pi^\dagger_{\phi_k}\Pi_{\phi'_{k'}},\ 0 \le k,k' \le 4\Omega\}$生成酉群 U($2^{4\Omega}$) [88, 89]。多粒子乘积（Fock）态集合 $\{\Pi^\dagger_{\phi_1}|0\rangle,\cdots,\Pi^\dagger_{\phi_{4\Omega}}|0\rangle\}$张成一个承载酉群 U($2^{4\Omega}$) 的基本不可约表示 $[1,0,\cdots,0]$ 的复线性空间。子集$\{\Pi^\dagger_{\phi_k},\ \Pi_{\phi_k}\}$ 满足 $k=1,\ 2$，并且 $H_{\phi\phi'} = \Pi^\dagger_{\phi_1}\Pi_{\phi'_1}$ 生成 O(8Ω $+1$) 群。因此，有嵌入 U($2^{4\Omega}$) $\supset$O(8Ω $+1$)，其分支规则为 $[1,0,\cdots,0]\downarrow(1_2,\ \cdots,\ 1_2)$；其中 $(1_2,\ \cdots,\ 1_2)$ 具有 4Ω 个分量，等于1_2，表示 O(8Ω $+1$) 的基本旋量表示。

O(8Ω $+1$) 的最大非平凡子群是由 $\{\Pi^\dagger_{\phi_2},\Pi_{\phi_2},H_{\phi\phi'}\}$ 生成的 O(8Ω)，其分支规则为：

$$\begin{array}{l} \mathrm{O}(8\Omega+1)\downarrow \quad \mathrm{O}(8\Omega) \\ (\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})\downarrow(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2},\frac{1}{2})\oplus(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}), \end{array} \tag{18}$$

其中，O(8Ω) 的表示 $(1_2,\cdots,1_2,1_2)$由 $\{\Pi^\dagger_{\phi_k}|0\rangle\}$ 张成，其中 k 为偶数；而 $(1_2,\cdots,1_2,-\frac{1}{2})$ 由 $\{\Pi^\dagger_{\phi_k}|0\rangle\}$ 张成，其中 k 为奇数。O(8Ω) 的两个重要约化链是 O(8Ω) $\supset$U(4Ω) 和 O(8Ω) $\supset$O(8) $\otimes$ O(Ω)：

$$\mathrm{O}(8\Omega) \begin{array}{l} \nearrow [\mathrm{O}(8)\supset \mathrm{U}(4)\supset \mathrm{SU}_S(2)\otimes \mathrm{SU}_T(2)]\otimes \mathrm{O}(\Omega) \\ \searrow \mathrm{U}(4\Omega)\supset [\mathrm{U}(4)\supset \mathrm{SU}_S(2)\otimes \mathrm{SU}_T(2)]\otimes [\mathrm{U}(\Omega)\supset \mathrm{O}(\Omega)]. \end{array} \tag{19}$$

上文未列出的相关分支规则及其他相关群链的部分列表见[90–94]。在（19）所示的上方 O(8) $\otimes$O(Ω) 基底中，当 Ω ≥ 3 时，可采用约化 O(Ω) $\supset$ SO$_L$(3) 对基矢量进行分类，其中 L 表示轨道角动量。在（19）所示的下方 U(4) $\otimes$U(Ω) 基底中，当 Ω ≥ 3 [62–64]时，可采用 U(Ω) $\supset$ O(Ω) $\supset$ SO$_L$(3) 或 U(Ω) $\supset$SU(3) $\supset$ SO$_L$(3) 对基矢量进行分类。无论采用哪种方式，（19）所示的两条群链都涉及约化 U(4) $\supset$ SU$_S$(2) $\otimes$SU$_T$(2)，因此这一框架特别适用于 LST耦合方案下的核壳模型计算。

众所周知，同类核子对之间的配对相互作用（即 nn 和 pp）在整个核素图中都发挥着关键作用，决定着配对能隙、奇偶质量差以及低位集体态的结构等现象。然而，当中子数与质子数大致相等（$N \approx Z$）时，会出现一个额外的自由度：中子-质子配对在能量上变得具有竞争力，并能显著影响 $N \approx Z$ 原子核中的核动力学。O(8) 模型 [85] 旨在描述局限于 O(Ω)零广义资历子空间内的同位旋矢量和同位旋标量配对相互作用，如（19）所示。由于能够平等地处理 $T = 0$和 $T = 1$ 配对道之间的竞争，该模型长期以来一直受到实验和理论领域的关注。在 LST耦合方案下实现的同位旋矢量加同位旋标量配对哈密顿量的代数构造，最早由 [85], 提出，其显式矩阵表示则由 [90, 95]推导得出。随后， [96–98], 开展了 O(8) 模型的进一步分析与应用，探究其对配对关联、核结合能及低位激发谱的影响。文献 l 给出了电荷无关平均场哈密顿量的精确解，其中包括与轨道相关的单粒子能量以及同位旋矢量和同位旋标量配对相互作用。在这些解中，同位旋矢量和同位旋标量配对强度取为相等，从而保持 U(4)对称性，并使模型能够得到解析处理。

Pan 及其合作者随后将 LST耦合方案中的 O(8) 模型扩展为 O$_{\mathcal{S}T}$(8) 模型[101], ，其中 $\mathcal{S}$ 表示由特定拟轨道和拟自旋分解产生的拟自旋。在这一扩展框架中，研究表明，同位旋矢量 $\mathcal{S} = 0$ 对和 $T = 1$ 对分别与熟知的 $J = 0$对和 $T = 1$ 对完全对应，而同位旋标量 $\mathcal{S} = 1$ 对则由 J-奇对的线性组合构成。这一构造使得配对哈密顿量能够用于在统一的代数框架内估算同位旋矢量和同位旋标量配对相互作用。通过将模型拟合到 sd壳层中填充至半满时、 $A = 18$–28 的偶偶核和奇奇核的选定低能 $J = 0^+$ 能级，并将结果与原始 O(8) 模型的结果进行比较，研究表明，就这些原子核的束缚能和少数 $J = 0^+$ 激发能级而言，在能谱的低能部分可以忽略同位旋标量配对相互作用。

仅考虑平均场加同位旋矢量配对相互作用时，对这些原子核基态或最低的 $J = 0^+$ 态中 nn、pp 和 np 配对的贡献进行了估算。研究发现，奇奇 $N = Z$ 原子核中同位旋矢量 np 配对对结合能的贡献，系统性地大于偶偶核中的贡献，这反映出当价质子数和中子数均非零时，同位旋矢量关联的作用增强。此外，还评估了这些原子核最低 $J = 0^+$ 态中的同位旋标量 np 对含量。结果清楚地表明， $N = Z$ 和 $N = Z \pm 2$ 原子核最低 $J = 0^+$ 态中的同位旋标量对含量会随价核子数增加，尤其是在偶偶核中。这些结果表明，同位旋标量配对相互作用的强度与本征态中的同位旋标量对含量并非一回事。因此，能量贡献较小并不意味着同位旋标量配对关联较弱。

出于同样的动机，人们对相互作用玻色子模型进行了扩展，使其能够容纳两种配对道。在 [86], 中，引入了自旋为 $S = 0$ 的同位旋矢量 s和 d对，以及自旋为 $S = 1$ 的同位旋标量 s和 d对作为构成单元，由此产生了所谓的 IBM-4。该模型推广了早期的 IBM-3，后者仅包含同位旋矢量 s和 d对，因而忽略了同位旋标量配对道 [102]。明确纳入这两种配对类型，使 IBM-4 特别适合描述 $N \approx Z$ 区域内的原子核，因为在该区域，预计 $T = 0$ 和 $T = 1$关联会共存并相互竞争。

IBM-4 最大的动力学对称群是 U$_{sdST}$(36)，其中包含丰富的子群链谱系，分别对应于各种物理极限。这些对称性极限已被广泛用于解释 $N \approx Z$ 原子核的结构。例如，人们利用 U$_{sd}$(6) $\otimes$U$_{ST}$(6) 和 O$_{sdST}$(36) 群链 [103], 分析了 $N = Z$原子核基态中 $T = 0$ 对的奇偶交错现象。在一项相关研究中，自共轭原子核 ^{74}Rb 的基态 $T = 1$带和激发 $T = 0$ 带在 O$_{sdST}$(36) 极限下得到了解释，揭示了不同配对机制的共存 [104]。此外，在带有 $n_d = 0$的 U$_{sST}$(6) $\oplus$ U$_{dST}$(30) 极限下研究了四粒子关联，并阐明了它们与 O(8) 模型的联系。在 IBM-4 中，维格纳自旋-同位旋对称性等价于 O$_{ST}$(6) 极限，凸显了其在描述同位旋标量配对关联方面的重要性。

IBM-4 对称性极限的适用性，还可由邻近区域的经验成功进一步佐证。IBM-1 的 O(6) 极限长期以来被认为能够描述 γ-软原子核 [105], ，而 IBM-3 的 O$_{sd}$(18) $\supset$O$_{d}$(15) $\oplus$ O$_{sT}$(3) 极限已被证明能够产生在某些重$N = Z$ 原子核 [106, 107]中观测到的形状共存现象。这些观察表明，从 IBM-4 的 O$_{sdST}$(36) 极限导出的群链，对质子滴线附近、质量数为 $A \sim 60$–100 [108] 的 $N \approx Z$ 原子核尤其重要。在这一质量区域，形变、配对与壳效应之间的竞争会引发各种结构现象，使其成为检验 IBM-4 框架预测的理想场所。

文献 [109] 研究了该模型的简化版本，该版本仅限于 $L = 0$ 扇区。虽然这一简化模型无法完全涵盖 O(8) 模型的全部物理内涵 [85], ，但在偏离对称性极限时，发现二者的差异非常小。这表明，即使在截断空间中， $L = 0$ 中中子-质子配对的基本物理也能得到有效描述。

通道。因此，尽管存在这些细微差异，完整模型和简化模型都各自能够为理解中子-质子配对在 $N \approx Z$ 原子核中的作用提供有益见解，并从不同角度揭示其背后的核动力学。

除 IBM-4 框架外，人们还发展了其他理论方法。20 世纪 90 年代末，Van Isacker、Juillet 和 Nowacki 针对重核提出了赝 SU(4) 模型，适用于 pf壳层 [87], ，其理论动机源于拟自旋对称性的概念 [110–113]。在这一框架中，物理自旋被拟轨道与拟自旋分解方案中的拟自旋所取代。这种替换有助于更有效地截断核壳模型，并提供一种近似对称性，可用于描述中质量和重核中的伽莫夫-特勒跃迁及其他自旋相关可观测量。近期，赝 SU(4) 模型已被用于描述自共轭 β核的衰变 $N = Z$，这些原子核的质量数为 $58 \leq A \leq 70$ [29]。值得注意的是，研究表明，实验观测到的伽莫夫-特勒强度分布支持 $A = 70$ 的赝 SU(4) 对称性恢复，这表明在核素图的某些区域中，这种对称性可能近似成立。人们持续研究拟自旋对称性的微观起源，包括无质量强子的手征对称性 [114], 、张量力的作用 [115], ，以及随着核相互作用的动量分辨率降低而出现的拟自旋对称性 [116]。

近来，沿着 [117, 118] 在 $A = 60$–90 质量区提出的代理 SU(3) 方案，代理 SU(4) 模型也得到了发展 [30]。这种方法将代理 SU(3) 的理念拓展至自旋-同位旋自由度；该理念在描述形变和集体运动方面已取得成功。正如 [30], 所指出的，代理 SU(4) 模型为理解中质量原子核中形变与配对之间的相互作用开辟了新途径。不过，作者也强调，要全面评估这一新对称性方案的预测能力及其局限性，仍需进一步的理论发展和实验研究。尤其是，系统研究伽莫夫-特勒跃迁、电磁性质以及双β衰变的核矩阵元，将有助于检验代理 SU(4) 方法在不同同位素链中的稳健性。

D. 核格点有效场论

在从头算 理论时代，维格纳对称性在核格点有效场论（NLEFT）中也发挥着计算层面的作用。在该理论中，核子在欧几里得时空格点上演化，其性质通过蒙特卡罗模拟提取 [28, 119, 120]。在利用该对称性的格点计算方案中，相互作用由总核子密度构造而成，该密度对全部四种自旋-同位旋分量求和；因此，相互作用在这些分量之间的 SU(4) 旋转下保持不变，从而遵循维格纳对称性 [23]。这种 SU(4) 对称相互作用具有优势，因为它能使蒙特卡罗权重保持为正，进而消除费米子符号问题；对于偶偶核，这一结论严格成立 [23, 121]。更早之前，Chen、Lee 和 Sch¨afer 在推导轻核的能量不等式时，已证明维格纳极限下欧几里得路径积分具有相关的正定性 [37]。这类相互作用已用于描述直至钙区的原子核结合 [23], 、核物质的热力学性质 [24], 以及高温稀薄物质中的团簇化 [26], ，并成功再现了 ^{12}C 的低能谱，包括霍伊尔态 [25]。近来，采用高精度手征相互作用的同一格点框架，也已应用于铍同位素 [122] 以及氧同位素的半径研究 [27]。

IV. 从头算核理论与对称性适配方法

A. 从头算研究图景

进入 21 世纪之初，χ有效场论和高性能计算的发展推动了核理论的变革。人们提出了多种从头算方法，它们秉持着共同的理念：在一个足够大的基底中描述原子核，以涵盖其组成核子的所有可能空间、自旋和同位旋构型；这些核子通过源自量子色动力学、虽为有效但足够真实的势相互作用 [123, 124]。大体而言，这些方法分为两大类 [2]。第一类是准精确方法，通过受控的截断误差求解多体薛定谔¨方程，适用于轻核，并日益扩展至中等质量系统；其中包括无芯壳模型（NCSM），它在灵活的谐振子基底中对哈密顿量进行对角化，从而得到完整能谱及相应的波函数 [125–127], 其对称性适配变体（即 SA-NCSM [44, 128, 129], 和辛无芯组态相互作用（SpNCCI）框架 [65, 130], 以及 SAM [32]）、量子蒙特卡罗（ QMC ） [131, 132], 和核格点有效场论（ NLEFT ） [28, 119, 120] （上文第 IIID 节已讨论）。第二类是近似性更强但适用范围更广的多项式标度方法，例如耦合簇（CC）理论 [133]和介质中相似性重整化群（IMSRG） [123, 134] （以及价空间 IMSRG [135]）。这些方法以较低的标度代价取代显式波函数，从而将第一性原理计算拓展至重核。关于各类方法的全面综述，请参见文献 [2, 124]。

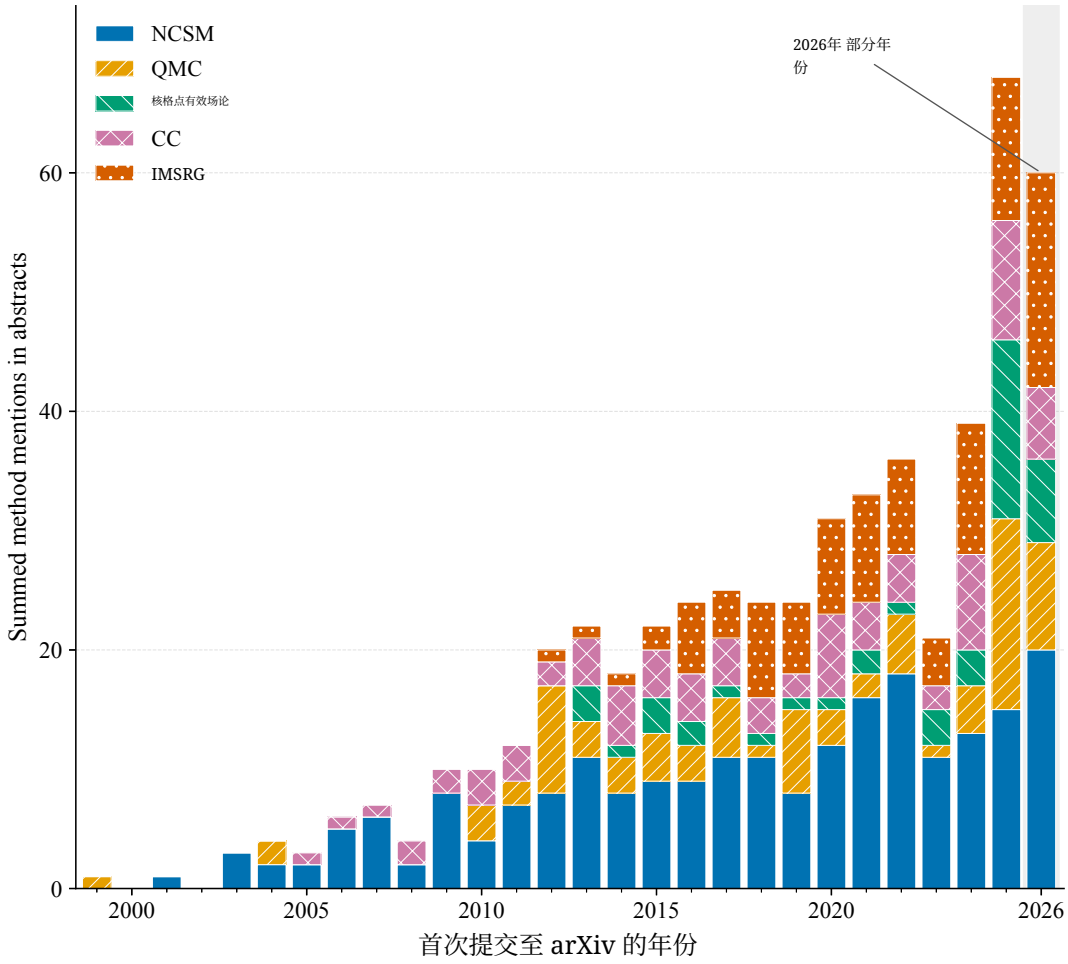

图 4。年度 arXiv 方法提及次数， *ab initio* 核理论文献库中的相关提及按首次提交年份分组。数据来自 2026 年 10 月 28 日通过公共 arXiv API检索的快照。文献库包含 1,476 条`nucl-th` 记录（包括交叉收录），其检索到的摘要中含有“*ab initio*”或“第一性原理”；按名称和选定缩写筛查摘要中是否提及这五类方法。堆叠区段分别表示无芯壳模型（NCSM，包括 SA-NCSM 及其他扩展）、量子蒙特卡罗（QMC）、核晶格有效场论（NLEFT）、耦合簇（CC）和介质中相似性重整化群（IMSRG）。每个 arXiv 标识符在每种方法下仅计数一次，不受修订版本影响。提及多种方法的论文会计入多个区段，因此每个柱形表示方法提及次数之和，而非不同论文的数量。提及次数包括综述和比较研究；未包含所检索名称的论文可能会被遗漏。阴影部分表示截至检索日期的 2026 年部分年份。

图4 展示了截至 2026 年 10 月 28 日，arXiv 上从头算核理论文献中每年提及各类方法的情况。语料库包含 1,476 条不同记录，这些记录被归入`nucl-th`，包括交叉收录的记录；其摘要中含有“从头算”或“第一性原理”，并且语料库中的每篇摘要都经过筛查，以识别五种方法族。年度计数从文献计量学视角呈现了该领域的情况；不同方法的提及可能重叠，而且不能据此认定某项计算实际采用了所提及的方法。

这些框架中有一半以上沿用了核壳层模型的表述。在该模型中，核子之间的强相互作用首先被平均场取代，从而将 A体问题简化为一组核子在附加了自旋轨道项 [7–9]的三维谐振子（三维谐振子）势中独立运动。由此得到的单粒子态

$$\psi_{\eta l j m_j m_t} = R_{\eta l}(r)\,[Y_l(\theta,\phi)\times\sigma]^{j}_{m_j}\,\tau_{m_t}, \tag{20}$$

由振子壳层 η、轨道角动量 l、总角动量 j 及其投影 m_j，以及同位旋投影 m_t标记；自旋轨道项抬升了每个壳层内的简并，以重现观测到的幻数。这种独立粒子图像本身无法捕捉导致团簇化和形变的多核子关联。因此，人们引入了相互作用版本，以恢复

这些关联：冻结一个惰性芯，并让价核子通过有效剩余相互作用相互作用。长期以来，研究者一直致力于从基本的核子-核子力推导这类相互作用，其中 Bertsch [136], Kuo 和 Brown [137], 以及 Kuo [138]做出了开创性贡献。更详尽的综述见参考文献 [123] 。在从头算 无芯框架中，芯被移除，所有核子都作为活性粒子处理。

尽管含有 A 个核子的系统允许存在最高达 A 体秩的相互作用，但这些相互作用具有层级顺序，因此实际计算只保留二体项，至多再保留三体项。为简单起见，这里我们回顾二体哈密顿量，

$$\mathbf{H} = \frac{A-1}{A}\sum_{i}^{A}\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^{A}\left[V_{ij}^{NN} - \frac{1}{A}\frac{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j}{m}\right] = \sum_{i}^{A}\mathcal{K}_i + \sum_{i<j}^{A}\mathcal{V}_{ij}^{NN}, \tag{21}$$

其中引入了两个有效算符， $\mathcal{K}$ 仅包含单体动能， $\mathcal{V}^{NN}$ 则涵盖了质心扣除所导致的二体动能以及二体核势 V^{NN}。尽管这个公式很简单，但核子的不可区分性带来了严峻挑战。因此，更方便的方法是在二次量子化框架 [139], 中进行计算，此时哈密顿量写为

$$\mathbf{H} = \sum_{\alpha\beta}\langle\alpha|\,\mathcal{K}\,|\beta\rangle\,\mathbf{a}_\alpha^\dagger\mathbf{a}_\beta + \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\langle\alpha\beta|\,\mathcal{V}\,|\gamma\delta\rangle\,\mathbf{a}_\alpha^\dagger\mathbf{a}_\beta^\dagger\mathbf{a}_\delta\mathbf{a}_\gamma, \tag{22}$$

这里我们引入简写记号 $|\alpha\rangle := |\eta l j m_j m_t\rangle$； $\mathbf{a}_\alpha^\dagger$ 是产生算符，它使一个粒子从真空中出现并占据一个单粒子态（$|\alpha\rangle = \mathbf{a}_\alpha^\dagger|0\rangle$），而 $\mathbf{a}_\alpha$ 是湮灭算符，它会湮灭同一个粒子（$|0\rangle = \mathbf{a}_\alpha|\alpha\rangle$）。为体现反对称化，这些算符满足以下反对易关系 [140]

$$\{\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{and} \quad \{\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta\} = \{\mathbf{a}_\alpha^\dagger, \mathbf{a}_\beta^\dagger\} = 0. \tag{23}$$

矩阵元——$\langle\alpha|\,\mathcal{K}\,|\beta\rangle$ 和反对称化的 $\langle\alpha\beta|\,\mathcal{V}\,|\gamma\delta\rangle$——可以通过一个名为 NuHamil 的公开 Fortran 库 [141], 进行计算，该库提供了数种现实的核相互作用。

在这一从头算 领域中，对称性适配方法（SA-NCSM、辛无芯组态相互作用、SAM）的独特之处在于其组织原则。它们并非将对称性视为计算完成后再加以测量的输出，而是将强核力的相关涌现对称性直接融入多体基中。这样一来，对称性不仅变得清晰可见，也能够得到有效利用，从而识别并保留物理上占主导地位的组态，同时控制完整 NCSM空间原本会呈爆炸式增长的维数。正是这种能力，使对称性适配方法能够将 Wigner超多重态对称性转化为可计算、可操作的工具；本文其余部分将对此加以阐述。

B. Elliott的SU(3)对称性与SA-NCSM

1. *SU(3) Classification of Nuclear States*

我们来考察三维谐振子哈密顿量每个主振子壳层的代数结构。对于 η壳层，其简并度为 $4\Omega = 2(\eta+1)(\eta+2)$（其中 $\Omega = (\eta+1)(\eta+2)/2$ 是壳层中的空间轨道数，参见第 IIIC节），可以定义在同一壳层内移动粒子的产生与湮灭算符，分别记为 $\mathbf{b}_{\alpha i}^\dagger$和 $\mathbf{b}_{\alpha i}$，其中 $i = 1$、2、.....、Ω，且 $\alpha = m_s m_t$ =↑↑、↑↓、↓↑、↓↓。这些算符的双积构成 Ω^2个生成元组成的酉群 U(Ω) 的闭合集，

$$E_{ij} = \sum_{\alpha}\mathbf{b}_{\alpha i}^\dagger\mathbf{b}_{\alpha j}, \tag{24}$$

它们满足以下共轭关系和对易关系

$$E_{ji} = E_{ij}^\dagger \quad \text{and} \quad [E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}. \tag{25}$$

生成元 E_{ij} 的作用可以理解为：在振子壳层的 Ω 维空间中，将一个粒子从第 j 个方向移至第 i 个方向。 η 壳层内的多粒子组态可以用一个 U(Ω) 不可约表示 $[n_{1\Omega} \geq n_{2\Omega} \geq \ldots \geq n_{\Omega\Omega}]$ 表示。由于自旋-同位旋标记 α 可以取四种组合之一，因此 U(Ω) 不可约表示的每个分拆 $n_{i\Omega}$ 的取值范围为 0 到 4。

如果我们用以下方式重新定义产生与湮灭算符 $i = x$、y、z 和 $\alpha = m_s m_t$，它们的双积构成 U(3) 群的 9 个生成元的闭合集合，其不可约表示包含三个量子数 $[n_{13} \geq n_{23} \geq n_{33}]$。在这种情况下，生成元 E_{ij} 的作用可解释为：在真实的三维空间中，将一个粒子从第 j 个方向移至第 i 个方向，同时保持其自旋和同位旋量子数不变。U(3) 群是 U(Ω)群的子群，因此可以将单个 U(Ω) 不可约表示分解为多个 U(3) 不可约表示，其中每个表示可能在分解中出现多次。Draayer等人 [142] 率先开发了一个用 Fortran 编写的计算机程序，用于执行这一分解过程。最近，Langr等人开发了现代 C++ 库，用于在质子 - 中子形式 [143] 和同位旋形式下进行大规模壳模型计算 [144]；后者以开源库 `untou3`的形式发布，是 `DeepSANE` 生态系统的一部分。

可以将 U(3) 群的九个生成元线性映射为一组新的算符 [145]

$$\mathcal{C}_1 = \sum_{i=1}^{3} E_{ii} \tag{26}$$

$$L_0 = E_{11} - E_{22},\ L_+ = (L_-)^\dagger = \sqrt{2}(E_{13} + E_{32}) \tag{27}$$

$$Q_0 = \frac{E_{11} + E_{22} - 2E_{33}}{\sqrt{6}},\ Q_1 = (Q_{-1})^\dagger = \frac{E_{32} - E_{13}}{\sqrt{2}},\ Q_2 = (Q_{-2})^\dagger = E_{12}. \tag{28}$$

其中，$\mathcal{C}_1$ 是用于计算不可约表示总量子的数算符（即 $\langle \mathcal{C}_1 \rangle = n_{13} + n_{23} + n_{33}$），$\{L_+, L_0, L_-\}$构成 SO(3)子群，而 Q_μ's（$\mu = 0$、± 1、± 2）是“代数”质量四极算符的张量分量，它们本身不构成一个群。去除数算符 $\mathcal{C}_1$ 后，剩下八个生成元，构成特殊酉子群SU(3)，其不可约表示由两个非负量子数（λ、μ）标记。忽略自旋和同位旋自由度，将原子核限制在单个壳层内的态，可由群-子群链 SU(3) ⊃ SO(3) ⊃ SO(2) 的量子数分类为 $|(\lambda、\ \mu)\ \kappa L M\rangle$，其中 L 是轨道角动量，其投影为 M，而 κ 是重数标记，用于记录同一个 SU(3) 不可约表示中相同 L 的重复出现。

2. A Brief History of SU(3) in Nuclear Structure

在核结构建模中采用 SU(3) 对称性有着悠久的历史，可追溯至20世纪50年代末 Elliott 的奠基性论文 [62, 63]，。在这些论文中，首次提出了此前展示的依据 SU(3) 群表示对核态进行分类的方案。进入20世纪60年代后，由于缺乏能够为这一三维群计算耦合与重耦合系数、且可扩展的计算工具，Elliott 的 SU(3) 模型发展有限。直到1973年，Draayer和Akiyama才发表了两篇论文：第一篇阐述了计算这些系数的通用算法的理论基础，第二篇作为补充，首次给出了该算法的 Fortran 实现 [146, 147]。

Draayer和Akiyama推出所谓的 SU3 软件包，为接下来几十年 SU(3) 对称性在核建模中的应用蓬勃发展铺平了道路。20世纪70年代和80年代兴起的研究包括 Rosensteel 和 Rowe 开发的辛壳模型 [148–150]，以及针对重形变核的赝SU(3)模型 [151]。在此期间，Draayer及其合作者还开发了以对称性为基础的核势，超越了传统的四极-四极相互作用；后者已知能够很好地再现转动谱。这些代数相互作用由该群的 SU(3)生成元和卡西米尔不变量构成，被称为“完整性基” [66, 67]。这一系列发展的成果，是从壳模型视角对集体行为作出诠释。具体而言，通过将质量四极矩的二次和三次幂映射到 SU(3) Casimir算符，Draayer 等人发现，液滴模型的量子数（λ，μ）与形变参数（β，γ）之间存在非常简单的关系 [152, 153]，如下所示

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{5(A\langle r^2\rangle)^2}\left(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu + 3\right), \quad \gamma = \arctan\left[\frac{\sqrt{3}(\mu+1)}{2\lambda + \mu + 3}\right], \tag{29}$$

其中，A 是核子的数量，$\langle r^2\rangle$ 是质量均方半径。这种映射首次使人们能够根据壳层模型描述推断原子核的内禀形状，尤其是

- $\lambda = \mu = 0$，则该不可约表示描述球形，
- $\lambda > 0$，$\mu = 0$，则 $0 \leq \gamma \leq \pi/6$ 对应长扁形，
- $\lambda = 0$，$\mu > 0$，那么 $\pi/6 \leq \gamma \leq \pi/3$ 对应扁椭球形。

请注意，形状变量（β，γ）可以不受限制地连续变化，而 SU(3)量子数则取离散值，且仅限于有限集合。这可以解释为液滴模型没有考虑原子核 [152]的费米子性质。反过来，SU(3)不可约表示集合是有限的，这意味着存在有限组（β，γ）值，能够满足核子 [152]的粒子性质。

在20世纪最后十年里，研究持续取得进展，重要的转变是：从一种看似玻色子的图景（其中核态仅按空间自由度分类），转向一种更现实的图景；通过张量二次量子化形式 [140, 154]，自旋对称性开始被纳入希尔伯特空间和算符结构。这一转变在很大程度上得益于高性能计算机基础设施的能力，也标志着迈向此后30年发展的第一步。

3. The Symmetry-Adapted No-Core Shell Model

进入21世纪后，代数模型仍在不断发展并得到应用（例如 pseudo-SU(3) [71, 155, 156], proxy-SU(3) [117, 118, 155], 和 quasi-SU(3) [156, 157] 方案，以及多构型动力学对称性（MUSY） [158]），与此同时，路易斯安那州立大学启动了一项雄心勃勃的计划，由 Draayer 牵头。该项目正值三项重要的技术与科学里程碑：i）具备并行处理能力的超级计算机日益强大；ii）Navr´atil、Vary 和 Barrett [125, 126], 提出了无芯壳模型；iii）Bahri 和 Draayer [140] 的工作使得人们能够通过二次量子化形式，在 SU(3)⊗SU(2)适配基底中计算任意二体算符的矩阵元。这些进展促成了如今所称的从头算对称性适配无芯壳模型（SA-NCSM）[44, 128, 129, 159–162] 的诞生，Dytrych 和 Launey 是其中的核心推动者。SA-NCSM 带来的最重要发现，是证明现实核势能够使原子核结构中自然涌现出有序的对称性模式；具体而言，核波函数由少数几个 SU(3)不可约表示主导，因此仅对应少数几种静态形状。掌握这一特征后，SA-NCSM 的创建者设计出一种策略，将庞大的 NCSM空间压缩为一组可处理的构型，这些构型对核动力学至关重要。迄今为止，SA-NCSM 仍是探索基础物理和核反应的主要模型之一 [163–165]。

SA-NCSM确立了本综述所述故事的空间对应版本：一种从现实相互作用中涌现的对称性，一旦得到识别并编码进基底，便能使大规模计算变得可行。SAM则通过加入自旋-同位旋U(4)这一对应部分，补全了这幅图景。

V. 耦合与重耦合系数：关键技术

要严格运用维格纳对称性进行核结构建模，必须能够计算（Wigner）耦合系数和重耦合（Racah）系数；这些系数通过Wigner–Eckart定理出现在每一个算符矩阵元中，数十年来一直是主要的计算瓶颈。我们近期通过对U(3)群的一种现代化求解方案，解决了这一U(4)群的难题。我们认为，这项进展是推动一种新的对称性适配方法应用于从头算核理论的关键进展之一，它将维格纳对称性从一个概念转化为实用的计算工具，也是构建SAM（第VI节）的技术基础。

A. U(3) 耦合与重耦合系数

最初由 Draayer 和 Akiyama 于 1973 [146, 147] 用 Fortran 推出的 SU(3) ⊃SO(3) 耦合系数计算工具，依赖于涉及大阶乘和交错和的超几何函数。此后，为了提高数值精度，人们使用现代编程语言对算法进行了多次改进 [166–168], ，为代数核模型提供了计算引擎。然而，这一解析表述在五十年间一直未曾改变。

2024年，Dang等人 [33] 提出了一种基于数值零空间求解器、无需解析公式的新算法。其核心思路是将基变换（从物理 SU(3) ⊃ SO(3) 基底到典范 SU(3) ⊃ SU(2)⊗U(1) 基底）和耦合系数的计算都重新表述为共享的零空间问题；具体而言，物理基态由 L_+ [145]的零空间求得，而典范耦合系数则由典范升算符生成元 E_{12} 和 E_{23}的共享零空间求得，这遵循了 Alex等人 [70] 针对任意酉群提出的一般性表述。这种方法完全避开了大型阶乘，从而解决了精度问题，并

使现代u3lib 库 [169], 具备并行处理能力和面向人工智能的技能目录，可用于智能体编排。

B. U(4) 耦合与重耦合系数

对于 U(4)，也存在类似的难题；自维格纳提出该理论以来，近九十年间，这一问题一直未能解决。尽管 Hecht 和 Pang [55], Draayer [53], Partensky 和 Maguin [170], 以及 Rowe 和 Repka [171], 取得了一些阶段性成果，但对于物理链 U(4) $\supset$ SU$_S$(2) $\otimes$ SU$_T$(2) 中任意的 U(4) 耦合与重耦合系数，仍没有通用算法和计算工具。

随着 Pan等人 [58–60] 提出新的 U(3)方法和基本耦合系数，Dang等人 [34] 构建了 u3lib 的姊妹库 u4lib [172], 。该库使用 C++ 编写，配有 Python绑定器，并支持并行处理和面向智能体的能力。除了根据 U(4)升算符生成元 [34] 的零空间，计算两条群-子群链 U(4) $\supset$ SU$_S$(2) $\otimes$ SU$_T$(2) 和 U(4) $\supset$ U(3) $\supset$ U(2) $\supset$ U(1) 的耦合系数及由此得到的重耦合系数外，该库还提供其他代数工具，例如卡西米尔不变量、基枚举、内重数和外重数、基变换等，使 u4lib 成为一个完整的计算框架，适用于 U(4)对称性及其各种应用。

u3lib和u4lib共同解决了在从头算 模型中同时编码空间U(3)和自旋-同位旋U(4)这一核心数学难题，为下一节介绍的SAM奠定了基础。这两个库均作为DeepSANE生态系统的一部分开放发布。

VI. 从头算 对称性适配模型

A. 多体基

从头算 对称性适配模型（SAM）沿袭了其前身——SA-NCSM的做法，采用大规模微观模型空间，涵盖原子核所有可能的组态，并使其中的核子通过真实核势相互作用。其开发者选择“对称性适配模型”（SAM）这一新名称有两个原因。第一，SAM是一种新的从头算 代码，构建于首批通用的高性能U(4) [34, 172] 和U(3) [33, 169] 耦合与重耦合系数引擎之上，这些引擎共同支持U(3)$\otimes$U(4)适配基底，并可依据任一对称性或两者进行筛选。第二，这一名称传达了该框架更广泛的目标：灵活涵盖高质量核力、先进的SRG方法，以及受涌现的有序模式引导的多体基。SAM并非有别于SA-NCSM，而是在继承其基截断概念的同时，融入了更多从头算 技术。与其所依托的系数库一样，SAM的源代码也是DeepSANE生态系统的一部分。

希尔伯特空间的构造方式与无芯壳模型和 SA-NCSM 的模型空间类似。具体而言，从所有核子都占据最低壳层的价空间出发，加入等于壳层间隔能的能量 $\hbar\omega$ ，将一个核子提升至下一个可用壳层，从而生成 $1\hbar\omega$ 空间。同样，将一个核子提升两个壳层，或将两个核子各提升一个壳层，即可生成 $2\hbar\omega$ 空间。此过程可以重复进行，见图5，总模型空间由参数 $N_{\max}$定义，该参数表示可添加到系统中的最大量子数。对于偶数 $N_{\max}$，波函数收敛至自然宇称态，而相反宇称态则位于奇数 $N_{\max}$ 模型空间中。还应注意，大多数核势不会混合宇称，因此，对总 $N_{\max}$ 空间有贡献的子空间相差 $2\hbar\omega$；换言之，活跃子空间为 $N_{\max}$、 $N_{\max}-2$、 $N_{\max}-4$、.....、0 或 1。

通过明确编码 U(3) 和 U(4) 对称性来构造基态。对于第 η 个壳层（简并度为 $4\Omega = 2(\eta+1)(\eta+2)$），首先确定表示空间自由度的所有 U(Ω) 不可约表示，然后生成记作 $\Gamma^4 := [n_{14}, n_{24}, n_{34}, n_{44}]$ 的共轭U(4)不可约表示，以实现反对称化。接着执行从 U(Ω) 到记作 $\Gamma^3 := [n_{13}, n_{23}, n_{33}]$ 的 U(3)不可约表示的分解 [142–144],，并引入额外的重数 α，以追踪每个 U(Ω) 不可约表示中同一 U(3) 不可约表示的多次出现。对所有壳层重复这一过程。

每个壳层分别完成后，壳层间耦合将递归进行，从最低壳层开始，如图 5所示。耦合过程中需要两个重数，即 ρ 对应 U(3)不可约表示的 [33] 和 η 对应 U(4) 不可约表示的 [34],，它们由两个不可约表示耦合而来。（注意，此重数标记 η 不应与壳层编号混淆。）获得所有壳层间 U(3) 和 U(4) 不可约表示后，将运行两种并行的分解算法：i）将每个 U(3) 不可约表示分解为轨道角动量 L ，其重数为 κ [33]；ii）将每个 U(4) 不可约表示分解为自旋 S 和同位旋 T 对，其重数为 ζ [34]。将施加两项物理约束，包括角动量耦合条件 $|L-S| \le J \le L+S$，以及 $T \ge |M_T| =$ |中子数 $-$ 和质子数|/2。该

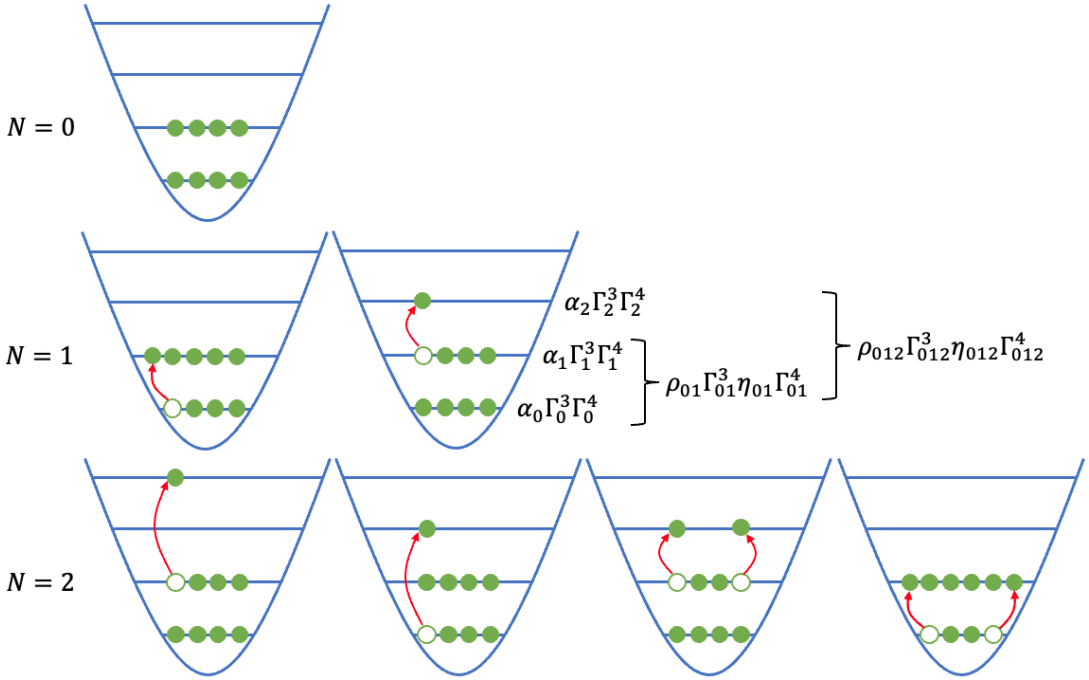

图 5. 模型空间构建示意图。第一行展示了 $0\hbar\omega$ 空间，其中所有核子都位于最低壳层。第二行展示了 $1\hbar\omega$ 空间，其中一个核子被提升到下一个可用壳层。最后一行展示了 $2\hbar\omega$ 空间，其中一个核子被提升两个壳层，或两个核子各被提升一个壳层。中间一行末尾描述了壳层间耦合过程。

完整的基底标记为

$$\Big|\underbrace{(\alpha_0\Gamma_0^3\Gamma_0^4)(\alpha_1\Gamma_1^3\Gamma_1^4)\ldots(\alpha_n\Gamma_n^3\Gamma_n^4)}_{\text{壳层内}};\ \underbrace{\rho_{01}\Gamma_{01}^3\eta_{01}\Gamma_{01}^4\cdots\rho_{0\ldots n}\Gamma_{0\ldots n}^3\eta_{0\ldots n}\Gamma_{0\ldots n}^4}_{\text{壳层间}}\ J\Big\rangle;\ \kappa L;\ \zeta ST; \tag{30}$$

其中 n 表示最高占据壳层，壳层内因子（$\alpha_i\Gamma_i^3\Gamma_i^4$）是第 i 个壳层的 U(3) 和 U(4) 不可约表示，而每个壳层间因子 $\rho_{0\cdots i}\,\Gamma_{0\cdots i}^3\,\eta_{0\cdots i}\,\Gamma_{0\cdots i}^4$ 是将第 i 个壳层耦合到已耦合的壳层 0、……、$i-1$后得到的累积不可约表示，如图 5所示。最后一次这样的耦合定义了总不可约表示$\Gamma_{0\ldots n}^3$ 和 $\Gamma_{0\ldots n}^4$，它们约化为 κL 和 ζST，并组合成总角动量 J。

B. U(3)⊗U(4) 张量形式的哈密顿量

由于 SAM 使用对称性适配基底，产生与湮灭算符被改写为良好的 U(3)⊗U(4) 张量——分别携带张量标签 $[\eta,0,0][1,0,0,0]$ 和 $[\eta,\eta,0][1,1,1,0]$，并将式（22）中的哈密顿量展开为一组单体和双体 U(3)⊗U(4) 张量。该展开通过扩展 SA-NCSM 中的 SU(3)⊗SU(2) 质子-中子张量变换推导而得 [173]，并见参考文献 [32]的补充材料。

这种张量形式还有一个优势，就是可以运用 Wigner–Eckart定理 [174]。哈密顿量一旦写成 U(3)⊗U(4) 张量，每个矩阵元便可分解为几何部分和动力学部分：几何部分完全由 U(3) 和 U(4) 耦合系数组成；动力学部分则是约化矩阵元（RME），与轨道、自旋、同位旋和总角动量量子数无关。因此，可以在便于计算的典范群链 [U(3) ⊃ U(2) ⊃ U(1)] ⊗ [U(4) ⊃ U(3) ⊃ U(2) ⊃ U(1)],中一次性计算这些约化矩阵元。该群链没有内重数（κ 和 ζ），之后只需利用耦合系数即可组装其余所有矩阵元。

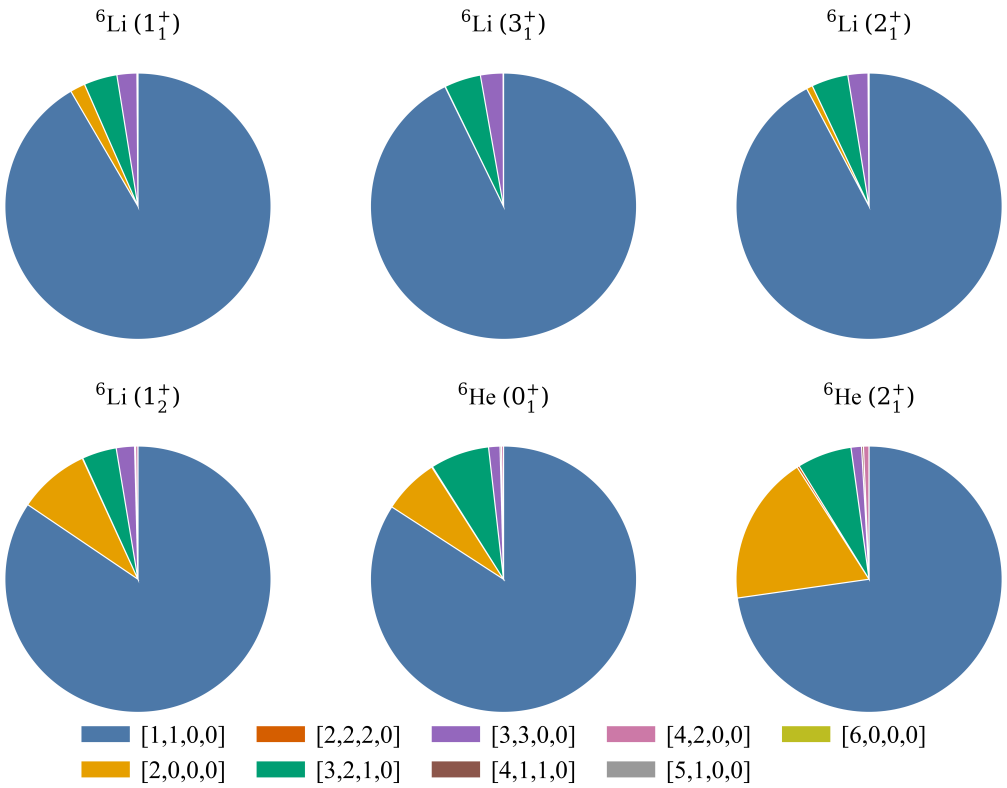

图6. ^{6}Li 和 ^{6}He低能态的U(4)不可约表示总概率，使用SAM在N2LO$^{\rm opt}$ 相互作用和 $N_{\max} = 10$ 模型空间中计算得出。每个饼图显示了所有 $\hbar\omega$ 子空间中各U(4)不可约表示概率的总和。数据取自参考文献 [32]。不可约表示根据参考文献 [34]进行了归一化。

C. SAM使能的第一性原理探测

除了作为研究核结构的计算框架外，SAM 还为考察维格纳对称性 [32]提供了三条途径。第一，U(3)⊗U(4) 张量展开能够揭示给定相互作用所包含的对称性成分——这是其他多体基不易提供的诊断信息。第二，由于基底是明确基于 U(4) 不可约表示构建的，SAM 能够解析所计算波函数的超多重态结构，从而可以探究哪些自旋-同位旋构型主导核束缚。第三，确定主导不可约表示后，便可对少体和多体计算进行模型空间截断，其计算成本低于完整的无芯壳模型空间；这只有借助对称性适配基才能实现。

直接基于U(4)不可约表示构建的多体基，相较于以往通过对角化二次卡西米尔不变量 $\mathcal{C}_2$ [31, 84]来推断超多重态内容的方法也具有优势。显式解析不可约表示，可以揭示每个不可约表示在各个 $\hbar\omega$ 子空间中的贡献大小，而不是仅对角化 $\mathcal{C}_2$所得到的整个空间的总体贡献，从而能够在每个 $\hbar\omega$ 子空间进行不可约表示选择。图6 展示了 ^{6}Li 和 ^{6}He低能态的超多重态内容。每个态都主要由单个主导U(4)不可约表示支配， $[1,1,0,0]$, 其概率约为73%至93%，直接体现了波函数中的维格纳对称性。该不可约表示的 $\mathcal{C}_2$本征值也最低，等于 $\mathbf{S}^2 + \mathbf{T}^2 + \mathbf{GT}^2$ 在物理链U(4) $\supset$ SU$_{\rm S}$(2) $\otimes$ SU$_{\rm T}$(2) 中的值（第 IID节）；因此，这或可解释为核力的自旋-同位旋极化率受到抑制。在低密度下的无限核物质中也发现了这一现象 [175]。研究还发现，对这些原子核进行U(4)不可约表示选择，最多只能将完整的NCSM空间压缩一半。因此，未来的结构计算若结合U(3)和U(4)不可约表示进行选择——这得益于SAM基组——将能更显著地缩减模型空间。

此外，适配 U(4) 的基底还能区分具有相同 $\mathcal{C}_2$值的共轭不可约表示，否则它们将无法区分。在 ^{6}Li 和 ^{6}He 的情况下，共轭不可约表示 $[2,0,0,0]$ 和 $[2,2,2,0]$, 在$\mathcal{C}_2$中简并，但其权重却有显著差异；在这些态中，前者的权重约为后者的五倍至一百多倍，见图 6。仅基于 Casimir本征值的探针无法区分

这两个不可约表示，数值计算可能会收敛到它们的混合态，而 SAM 则从构造上将二者分开。还值得一提的是，这两个共轭不可约表示承载着不同的自旋-同位旋极化模，因而对应着不同的物理。SU(3) 情形中也有类似例子；具体而言，对于具有 $\lambda > \mu$ 的两个共轭不可约表示 $(\lambda\mu)$ 和 $(\mu\lambda)$，它们拥有相同的二次卡西米尔本征值，前者对应长扁形，后者则对应扁球形。

D. 机器学习核质量

基于此前利用维格纳对称性，通过卡西米尔算符对核质量建模的研究 [72, 76–78] 以及现代机器学习技术 [176], Dang 等人 最近采用神经网络拟合已知原子核的结合能，并预测极富中子的同位素。这些同位素对快速中子俘获（ r-过程）至关重要；该过程在爆炸性天体物理环境中负责合成许多比铁更重的元素 [74]。不同于其他方法直接将 SU(3) 和 SU(4) 卡西米尔算符作为特征输入 [177–193], 作者提出了一种神经网络架构，将系数 $\{a, b, c, d, e\}$ 作为中子数和质子数的函数来学习，具体采用以下双线性公式

$$\Delta BE = aN_{\hbar\omega} + b\mathcal{C}_2[\mathrm{SU}(3)] + c\mathcal{C}_3[\mathrm{SU}(3)] + d\mathcal{C}_2[\mathrm{SU}(4)] + e\mathcal{C}_4[\mathrm{SU}(4)], \tag{31}$$

其中， ΔBE 是扣除液滴模型束缚能后的残差， $N_{\hbar\omega}$ 是谐振子量子的总数。卡西米尔算符由在主导不可约表示中求得的本征值代替。

这种看似僵化的双线性形式，有助于约束神经网络的假设空间，而无需牺牲准确性和外推能力。具体而言，作者将该模型与两种标准方法进行了基准比较：一种是将算符作为输入特征的多层感知机网络，另一种是其高斯变体。他们发现，当训练集中的数据逐渐减少时，这种架构设计的性能退化最为平缓，外推也更加稳定（表现为单中子分离能预测以及双中子星并合的元素丰度预测更加一致）。更重要的是，这种神经网络本身具有可解释性，无需借助任何事后可解释性工具（例如 Shapley加性解释），因为训练完成后，每一项对式（31）的贡献都可以直接读出。请注意，主导不可约表示的选择基于这样一种假设：现实轻核的 SAM 波函数中最低的$\mathcal{C}_2[\mathrm{SU}(4)]$ 观测结果 [32] 可推广到整个核素图，包括 SU(4) 对称性遭到严重破缺的区域；作者认为，该神经网络或许已经处理了对称性破缺，而基于 SU(4) 模型代数扩展的不可约表示选择（见第IIIC节）或许能在未来的研究中提升模型性能 [74]。

VII. 结论与未来展望

本文回顾了维格纳超多重态对称性从1937年提出到如今从头算在 SAM 中实现的历程，并从从头算理论、基本对称性、量子纠缠和机器学习等互补视角进行探讨，这些视角汇总于图7中。这种对称性稳健地显现于低能双核子散射数据、量子色动力学的大N_c 限极限、核晶格计算以及纠缠抑制论证中——所有这些证据都沿着相互汇聚的脉络发展，表明强核力近似具有自旋-同位旋不变性。数十年来，人们对这一对称性的兴趣几经起伏：起初因自旋-轨道壳模型的成功而淡化，后来又因同位旋模拟态的观测而重新兴起。如今，人们首次直接从真实的大规模核波函数中探究这一对称性。关键一步是开发出用于 U(3) 和 U(4) 耦合与重耦合系数的基于零空间的算法，解决了一个近九十年来一直存在的计算难题。基于这些系数，SAM 表明，真实的手征相互作用具有很强的 U(4) 对称性，核波函数集中于少数几个超多重态中，而这些占主导地位的不可约表示则有助于高效截断从头算模型空间。

这些结果自然引出了若干研究方向。当前最迫切的是制定系统的基组截断策略，并对截断误差作出可控估计，从而将观察到的不可约表示主导性转化为具有预测能力且可不断改进的近似方法。第二个方向是将对称性适配截断与低动量相互作用结合起来；其中，嵌入SAM基组的SRG演化势能够保持结合能收敛加快的特点 [32]，从而使该方法适用于更重的系统。第三个方向涉及弱过程；由于GT算符本身就是SU(4)生成元，决定 r-过程核合成的 β-衰变和电子俘获率自然会对其底层超多重态结构敏感，如今也已具备第一性原理能力。第四个方向是将对称性知情机器学习拓展到核质量以外，

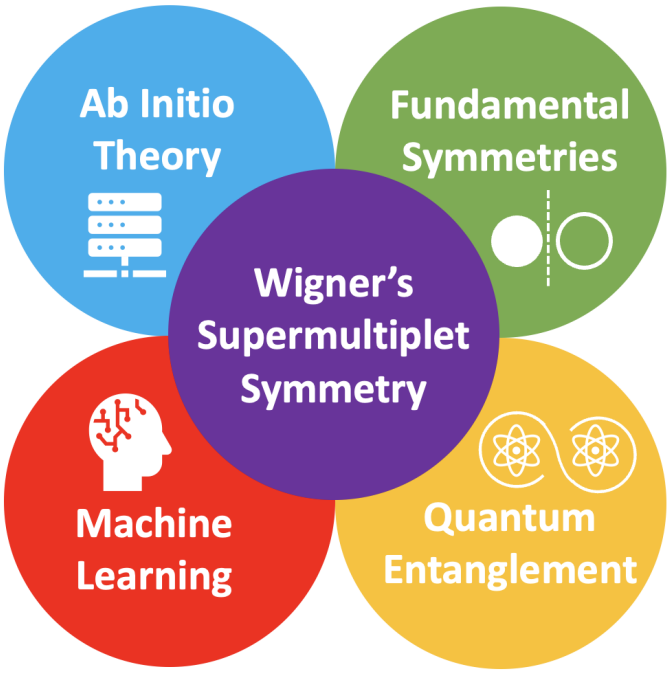

图7. 本综述考察维格纳超多重态对称性的几个视角概览（中心）。贯穿全文的四个主题是：它在SAM中的 *ab initio* 实现、它在强相互作用与弱过程基本对称性中的地位、解释其涌现的量子纠缠论证，以及它在核可观测量机器学习描述中的作用。

将受对称性启发的算符和可解释架构应用于其他同样受形变和自旋-同位旋结构影响的可观测量。

维格纳1937年的论文发表一百周年将在2037年到来。从经验观察到以量子色动力学为基础的理解，再到如今的从头算实现，这一发展轨迹似乎正迅速汇聚；本文概述的方向为未来十年指明了道路。

作者贡献

概念构思：P.D.；研究：P.D.和F.P.；撰写——初稿准备：P.D.；撰写——审阅与编辑：P.D.和F.P.；可视化：P.D.。

资金支持

P.D.获得了国际教育协会四方奖学金、路易斯安那州立大学、Quantum CodeX以及美国国家科学基金会的支持；其中，美国国家科学基金会通过核天体物理学中的开放问题与研究工具暑期学校提供资助，项目编号为OISE-1927130（IReNA）。F.P.获得了国家自然科学基金委员会项目（编号：12175097）的资助。

数据可用性

没有新的数据 本研究未创建或分析数据。本文不适用数据共享。 .

致谢

谨以此综述纪念 Jerry P. Draayer 博士。他于2026年9月13日逝世，其在 Elliott 的 SU(3) 模型、辛 Sp(3，R) 模型、SA-NCSM 以及最近的 SAM 方面的开创性工作，已经并将继续推动核结构理论的发展。作者感谢 Daniel Langr 和 Tomas Dytrych 对 DeepSANE 的代码开发所作的贡献，并感谢 Serdar Elhatisari 和 Dean Lee 提供格点相移。作者也感谢与 Anna McCoy 关于跃迁选择定则、与 Catherine Deibel 关于 β-衰变数据，以及与 Martin Savage 和 David Kaplan 关于纠缠方面的讨论。

利益冲突

作者声明不存在任何利益冲突。

缩略语

本文使用了以下缩略语：

三维谐振子 三维谐振子 耦合簇 耦合簇 有效场论 有效场论χ有效场论 手征有效场论 伽莫夫–特勒 Gamow–Teller 同位旋类似态 同量异位态 相互作用玻色子模型 相互作用玻色子模型 IMSRG 介质中相似性重整化群 不可约表示 不可约表示 MUSY 多构型动力学对称性 无芯壳模型 无芯壳模型 核格点有效场论 核格点有效场论 中子 - 中子 中子-中子 中子-质子 中子-质子 质子-质子 质子-质子 量子色动力学 量子色动力学 量子蒙特卡罗 量子蒙特卡罗 约化矩阵元 约化矩阵元 SA-NCSM 对称性适配无芯壳模型 SAM 对称性适配模型 标准模型 标准模型 辛无芯组态相互作用 辛无芯组态相互作用 相似重整化群 相似重整化群

[1] C. Aidala、A. Aprahamian、S. Bacca、P. Bedaque、L. Bernstein、J. Carlson、M. Carpenter、K. Chipps、V. Cirigliano、I. Clo¨et、A. de Gouvˆea、R. deSouza、G. Dodge、E. J. Downie、J. Dudek、R. Fatemi、A. Gade、H. Gao、S. Gardner、S. V. Greene、A. Harton、W. R. Hix、T. Horn、C. R. Howell、Y. Ilieva、B. Jacak、C. Keppel、O. Kester、J. Klein、K. Kumar、K. Leach、D. Lee、S. Lescher、C.-Y. Liu、J. Lopez、C. Lunardini、R. Milner、F. Nunes、D. Phillips、J. Piekarewicz、D. Poˇcani´c、J. Qiu、S. Quaglioni、D. Radford、R. Reed、L. Ruan、M. Savage、C. Scarlett、B. Schenke、D. T. Takaki、D. Teaney、B. VanDevender、R. Vogt、N. Wall、F. Wietfeldt、J. Wilkerson、R. Wilson、L. Winslow、S. Yennello 和 X. Zheng，*A New Era of Discovery: The 2023 Long-Range Plan for Nuclear Science*，技术报告 OSTI-2212868（美国能源部/国家科学基金会核科学咨询委员会，2023年）。[2] B. A. Brown、A. Gade、S. R. Stroberg、J. E. Escher、K. Fossez、P. Giuliani、C. R. Hoffman、W. Nazarewicz、C.-Y. Seng、A. Sorensen、N. Vassh、D. Bazin、K. W. Brown、M. A. Caprio、H. Crawford、P. Danielewicz、C. Drischler、R. F. Garcia Ruiz、K. Godbey、R. Grzywacz、L. Hlophe、J. W. Holt、H. Iwasaki、D. Lee、S. M. Lenzi、S. Liddick、R. Lubna、A. O. Macchiavelli、G. Mart´ınez-Pinedo、A. McCoy、A. Mercenne、K. Minamisono、B. Monteagudo、P. Navratil、R. Ringle、G. H. Sargsyan、H. Schatz、M.-C. Spieker、A. Volya、R. G. T. Zegers、V. Zelevinsky 和 X. Zhang，《早期高关注度 FRIB 实验的研究动机》，《物理学杂志G：核与粒子物理》**52**，050501（2025年）。

[3] E. P. Wigner，《核哈密顿量的对称性对原子核光谱学的影响》，《物理评论》51，106（1937年）。[4] E. P. Wigner，《轻核中的耦合条件与 β放射性的寿命》，《物理评论》56，519（1939年）。[5] W. Heisenberg，《论原子核的结构。I》，《物理学杂志》77，1（1932年）。[6] I. Waller，为颁发给 Eugene Wigner、Maria Goeppert Mayer 和 Hans Jensen 的1963年诺贝尔物理学奖颁奖典礼致辞（1963年）。[7] M. G. Mayer，《原子核中的闭壳层》，《物理评论》74，235（1948年）。[8] M. G. Mayer，《原子核中的闭壳层。II》，《物理评论》75，1969（1949年）。[9] O. Haxel、J. H. D. Jensen 和 H. E. Suess，《核结构中的幻数》，《物理评论》75，1766（1949年）。[10] J. D. Anderson、黄和 J. W. 麦克卢尔，《非镜像原子核中的同量异位态》，《物理评论》126，2170（1962年）。[11] D. B. Kaplan 和 M. J. Savage，《大 N **365**, 量子 244 1996 色动力学下核力的自旋-味依赖性》，《物理学快报B》（）。[12] D. B. Kaplan 和 A. V. Manohar，《 $1/N_c$ 展开下的核子-核子势》，《物理评论C》56，76（1997年）。[13] T. Mehen、I. W. Stewart 和 M. B. Wise，《大散射长度极限下的维格纳对称性》，《物理评论快报》83，931（1999年）。[14] D. Lee、S. Bogner、B. A. Brown、S. Elhatisari、E. Epelbaum、H. Hergert、M. Hjorth-Jensen、H. Krebs、N. Li、B.-N. Lu 和 U.-G. Meißner，《隐藏的自旋-同位旋交换对称性》，《物理评论快报》127，062501（2021年）。[15] A. C. Cord´on 和 E. R. Arriola，《维格纳对称性、大 N_c以及重整化单玻色子交换势》，《物理评论C》78，054002（2008年）。[16] V. S. Tim´oteo、S. Szpigel 和 E. Ruiz Arriola，《核力相似重整化群的对称性》，《物理评论C》86，034002（2012年）。[17] E. R. Arriola、V. S. Tim´oteo 和 S. Szpigel，《核对称性与相似重整化群》，PoS CD12，106 2013（）。[18] E. R. Arriola、S. Szpigel 和 V. S. Tim´oteo，《隐式与显式重整化及有效相互作用》，《物理学快报B》728，596（2014年）。[19] E. R. Arriola，《有效核子-核子相互作用及其对称性的低尺度饱和》，《对称性》8，42（2016年）。[20] S. R. Beane、E. Chang、S. D. Cohen、W. Detmold、H. W. Lin、T. C. Luu、K. Orginos、A. Parre˜no、M. J. Savage 和 A. Walker-Loud（NPLQCD合作组），《SU(3)味对称性极限下来自量子色动力学的轻核与超核》，《物理评论D》87，034506（2013年）。[21] S. R. Beane、E. Chang、S. D. Cohen、W. Detmold、P. Junnarkar、H. W. Lin、T. C. Luu、K. Orginos、A. Parre˜no、M. J. Savage 和 A. Walker-Loud，《SU(3)味对称性极限下的核子-核子散射参数》，《物理评论C》88，024003（2013年）。[22] S. R. Beane、D. B. Kaplan、N. Klco 和 M. J. Savage，《强相互作用的纠缠抑制与涌现对称性》，《物理评论快报》122，102001（2019年）。[23] B.-N. Lu、N. Li、S. Elhatisari、D. Lee、E. Epelbaum 和 U.-G. Meißner，《原子核束缚的关键要素》，《物理学快报B》797，134863（2019年）。[24] B.-N. Lu、N. Li、S. Elhatisari、D. Lee、J. E. Drut、T. A. L¨ahde、E. Epelbaum 和 U.-G. Meißner，《第一性原理核热力学》，《物理评论快报》125，192502（2020年）。[25] S. Shen、T. A. L¨ahde、D. Lee 和 U.-G. Meißner，《维格纳 SU(4) 对称性、团簇化与 ^{12}C的能谱》，《欧洲物理学杂志A》57，276（2021年）。[26] Z. Ren、S. Elhatisari、T. A. L¨ahde、D. Lee 和 U.-G. Meißner，《高温稀薄核物质中核团簇化的从头算研究》，《物理学快报B》850，138463（2024年）。[27] Z. Ren、S. Elhatisari 和 U.-G. Meißner，《氧同位素半径的从头算研究》，《物理评论快报》135，152502 2025（）。[28] D. Lee，《原子核的格点有效场论模拟》，《核与粒子科学年度评论》75，109（2025年）。[29] P. Van Isacker、A. Algora、A. Vit´ez-Sveiczer、G. G. Kiss、S. E. A. Orrigo、B. Rubio 和 P. Aguilera，《伽莫夫-特勒β衰变与赝SU(4)对称性》，《对称性》15，2001（2023年）。[30] V. K. B. Kota 和 R. Sahu，《A $=$ 60–90区域中的代理SU(4)对称性》，《物理学文献》99，065306（2024年）。[31] S. S. Li Muli、T. R. Dj¨arv、C. Forss´en 和 D. R. Phillips，《自旋-同位旋对称性在核 β衰变中的作用》，《物理评论快报》136，242501（2026年）。[32] P. Dang、D. Langr、T. Dytrych、J. P. Draayer 和 D. Kekejian，《从第一性原理揭示隐藏的维格纳对称性》（2026年），arXiv:2604.27144 [nucl-th]。[33] P. Dang、J. P. Draayer、F. Pan 和 K. S. Becker，《U(3)耦合与重耦合系数的新求值方法》，《欧洲物理学杂志 Plus》139，704（2024年）。[34] P. Dang、J. P. Draayer、F. Pan、T. Dytrych、D. Langr、D. Kekejian、K. S. Becker 和 N. Thompson，《维格纳 U(4)超多重态对称性的耦合与重耦合系数》，《欧洲物理学杂志 Plus》139，933（2024年）。[35] V. G. J. Stoks、R. A. M. Klomp、M. C. M. Rentmeester 和 J. J. de Swart，《对350兆电子伏以下所有核子-核子散射数据的分波分析》，《物理评论C》48，792（1993年）。[36] E. Epelbaum、H.-W. Hammer 和 U.-G. Meißner，《核力的现代理论》，《现代物理评论》81，1773

(2009年). [37] J.-W. Chen、D. Lee 和 T. Sch¨afer, 《维格纳对称性极限下轻核的不等式》, 《物理评论快报》93, 242302 (2004). [38] K. S. Krane, 《 *Introductory Nuclear Physics*》, 第3版（约翰·威立父子出版公司，纽约，1987年）. [39] R. B. Wiringa、V. G. J. Stoks 和 R. Schiavilla, 《具有电荷独立性破缺的精确核子-核子势》, 《物理评论C》51, 38 (1995年). [40] A. Baroni、R. Schiavilla、L. E. Marcucci、L. Girlanda、A. Kievsky、A. Lovato、S. Pastore、M. Piarulli、S. C. Pieper、M. Viviani 和 R. B. Wiringa, 《局域手征相互作用、氚的伽莫夫-泰勒矩阵元与三核子接触项》, 《物理评论C》98, 044003 (2018年). [41] D. R. Tilley、C. M. Cheves、J. L. Godwin、G. M. Hale、H. M. Hofmann、J. H. Kelley、C. G. Sheu 和 H. R. Weller, 《轻核能级 A=5、6、7》, 《核物理A》708, 3 (2002). [42] D. R. Tilley、J. H. Kelley、J. L. Godwin、D. J. Millener、J. E. Purcell、C. G. Sheu 和 H. R. Weller, 《轻核能级 A=8、9、10》, 《核物理A》745, 155 (2004). [43] P. Finlay、S. Ettenauer、G. C. Ball、J. R. Leslie、C. E. Svensson、C. Andreoiu、R. A. E. Austin、D. Bandyopadhyay、D. S. Cross、G. Demand、M. Djongolov、P. E. Garrett、K. L. Green、G. F. Grinyer、G. Hackman、K. G. Leach、C. J. Pearson、A. A. Phillips、C. S. Sumithrarachchi、S. Triambak 和 S. J. Williams, 《超允许 β^+ 发射体 ^{26}Al^{m}的高精度半衰期测量》, 《物理评论快报》106, 032501 (2011). [44] T. Dytrych、K. D. Launey、J. P. Draayer、P. Maris、J. P. Vary、E. Saule、U. Catalyurek、M. Sosonkina、D. Langr 和 M. A. Caprio, 《从第一性原理研究轻核中的集体模》, 《物理评论快报》111, 252501 (2013). [45] P. Gysbers、G. Hagen、J. D. Holt、G. R. Jansen、T. D. Morris、P. Navr´atil、T. Papenbrock、S. Quaglioni、A. Schwenk、S. R. Stroberg 和 K. A. Wendt, 《从第一性原理解决实验与理论 β衰变率之间的差异》, 《自然·物理》15, 428 (2019年). [46] G. B. King、L. Andreoli、S. Pastore、M. Piarulli、R. Schiavilla、R. B. Wiringa、J. Carlson 和 S. Gandolfi, 《轻核中弱跃迁的手征有效场论计算》, 《物理评论C》102, 025501 (2020年). [47] A. Glick-Magid、C. Forss´en、D. Gazda、D. Gazit、P. Gysbers 和 P. Navr´atil, 《用于超越标准模型研究的 ^{6}He β衰变核从头算》, 《物理学快报B》832, 137259 (2022年). [48] G. B. King, 《轻核中的伽莫夫-泰勒 β *Electroweak Structure and Reactions in Light Nuclei with Quantum* 衰变》, *Monte Carlo Methods* 2025 31 64 载于（施普林格·自然瑞士，查姆，）第–页. [49] I. S. Towner, 《原子核中自旋矩阵元的淬灭》, 《物理学报告》155, 263 (1987年). [50] H. S. Nguyen 和 J. Vanasse, 《三核子矩的库仑修正》, 《物理学杂志G：核与粒子物理》53, 095103 (2026年). [51] P. Vogel 和 M. R. Zirnbauer, 《核结构效应对双中微子双β衰变的抑制》, 《物理评论快报》57, 3148 (1986年). [52] P. Vogel、M. Ericson 和 J. D. Vergados, 《双粒子算符与双β衰变的求和规则》, 《物理学快报B》212, 259 (1988). [53] J. P. Draayer, 《SU(4) ⊃ SU(2) ⊗SU(2)投影技术》, 《数学物理学杂志》11, 3225 (1970年). [54] J. P. Draayer、D. L. Pursey 和 S. A. Williams, 《从 Gel'fand U(3)基投影得到的埃利奥特角动量态》, 《核物理A》119, 577 (1968年). [55] K. T. Hecht 和 S. C. Pang, 《论维格纳超多重态方案》, 《数学物理学杂志》10, 1571 (1969年). [56] G. Racah, 《论张量的缩并分解》, 《现代物理评论》21, 494 (1949年). [57] S. Quintero、R. Henao 和 J. Valencia, 《su(4)不可约表示的自旋–同位旋分支规则自动计算》, 《计算机物理通讯》323, 110118 (2026年). [58] F. Pan、Y. Wu、A. Li、Y. Zhang、L. Dai 和 J. P. Draayer, 《在 $SU_S(2) \otimes SU_T(2)$基中构造 U(4)不可约表示基矢量的代数投影过程》, 《欧洲物理学杂志 Plus》138, 662 (2023年). [59] F. Pan、L. Dai 和 J. P. Draayer, 《$U(4) \supset SU_S(2) \otimes SU_T(2)$的维格纳系数》, 《核物理A》1040, 122746 (2023年). [60] F. Pan、L. Dai 和 J. P. Draayer, 《维格纳超多重态对称性的基本耦合系数》, 《计算机物理通讯》296, 109025 (2024年). [61] P. Dang、G. Riczu 和 J. Cseh, 《以多构型动力学对称性描述 α类原子核的形状同核异能态》, 《物理评论C》107, 044315 (2023年). [62] J. P. Elliott, 《核壳模型中的集体运动 I：混合组态态的分类方案》, 《伦敦皇家学会会刊A辑：数学与物理科学》245, 128 (1958). [63] J. P. Elliott, 《核壳模型中的集体运动 II：本征波函数的引入》, 《伦敦皇家学会会刊A辑：数学与物理科学》245, 562 (1958). [64] J. P. Elliott 和 M. Harvey, 《核壳模型中的集体运动 III：能谱计算》, 《伦敦皇家学会会刊A辑：数学与物理科学》272, 557 (1963年). [65] A. E. McCoy、M. A. Caprio、T. Dytrych 和 P. J. Fasano, 《从从头算描述中涌现的核多体系统 sp(3, r)动力学对称性》, 《物理评论快报》125, 102505 (2020年). [66] J. P. Draayer 和 G. Rosensteel, 《$U(3) \to r(3)$完整基谱学》, 《核物理A》439, 61 (1985年). [67] R. Gilmore 和 J. P. Draayer, 《动力学群链与完整基》, 《数学物理学杂志》26, 3053 (1985年). [68] Y. Leschber、J. P. Draayer 和 G. Rosensteel, 《核转动宏观与微观哈密顿量之间的联系》, 《物理学杂志G：核物理》12, L179 (1986年).

[69] C. Quesne, 《SU(2) × SU(2)标量在 SU(4) 包络代数中》, 《数学物理学杂志》17, 1452 (1976年). [70] A. Alex、M. Kalus、A. Huckleberry 和 J. von Delft, 《显式计算 SU(N) 和 SL(N,$\mathbb{C}$) 克莱布希–戈登系数的数值算法》, 《数学物理学杂志》52, 023507 (2011). [71] V. K. B. Kota, 《SU(3) *Symmetry in Atomic Nuclei*》（Springer Singapore，2020年）. [72] G. Burdet、C. Maguin 和 A. Partensky, 《原子核对称性的检验》, 《新物理学杂志 B》54, 1 (1968年). [73] M. Danos 和 V. Gillet, 《核质量与激发态中的四重态效应》, 《Zeitschrift f”ur Physik》249, 294 (1972年). [74] P. Dang、E. Espinoza、X. Wan、M. Negro、J. P. Draayer、F. Pan、T. Dytrych、D. Langr 和 D. Kekejian, 《以可解释神经网络连接 *Ab Initio* 2026 2606 对称性与全局核质量（ ）》, arXiv：.28287 [nucl-th]. [75] P. Franzini 和 L. A. Radicati, 《论超多重态模型的有效性》, 《物理学快报》6, 322 (1963年). [76] M. Cauvin、V. Gillet、F. Soulmagnon 和 M. Danos, 《基于 SU(4) 的质量公式》, 《核物理A》361, 192 (1981年). [77] Y. V. Gaponov、N. B. Shulgina 和 D. M. Vladimirov, 《重核中的维格纳 SU(4) 对称性恢复与多体力问题》, 《核物理A》391, 93 (1982年). [78] P. V. Isacker、O. Juillet 和 B. K. Gjelsten, 《基于 SU(4) 对称性的原子核质量公式》, 《物理学基础》27, 1047 (1997年). [79] M. Chakraborty、V. K. B. Kota 和 J. C. Parikh, 《Franzini-Radicati 质量关系对维格纳超多重态对称性有何启示? 》, 《物理评论快报》45, 1073 (1980年). [80] P. Van Isacker、D. D. Warner 和 D. S. Brenner, 《由双重结合能差检验维格纳自旋-同位旋对称性》, 《物理评论快报》74, 4607 (1995年). [81] R. C. Nayak 和 V. K. B. Kota, 《无限核物质质量模型中的 SU(4) 对称性与维格纳能》, 《物理评论C》64, 057303 (2001年). [82] K. T. Hecht 和 J. P. Draayer, 《原子核中同位旋与超多重态对称性的谱分布及破缺》, 《核物理A》223, 285 (1974年). [83] R. U. Haq 和 J. C. Parikh, 《轻核中的空间对称性：(ii) SU(4 220, 349 1974) 同位旋-自旋平均》, 《核物理A》（）. [84] P. Vogel 和 W. E. Ormand, 《 sd壳层与 fp壳层原子核中的自旋-同位旋 SU(4) 对称性》, 《物理评论C》47, 623 (1993年). [85] B. H. Flowers 和 S. Szpikowski, 《LS 耦合中的准自旋》, 《物理学会会刊》84, 673 (1964年). [86] J. P. Elliott 和 J. A. Evans, 《相互作用玻色子中的内禀自旋》, 《物理学快报B》101, 216 (1981年). [87] P. Van Isacker、O. Juillet 和 F. Nowacki, 《 pf壳层原子核中的赝SU(4)对称性》, 《物理评论快报》82, 2060 (1999年). [88] M. Moshinsky 和 C. Quesne, 《将资历数与准自旋之间的关系推广到任意群》, 《物理学快报B》29, 482 (1969年). [89] B. R. Judd 和 J. P. Elliott, 《 *Topics in Atomic and Nuclear Theory*》（坎特伯雷大学出版社，基督城，新西兰，1970年）. [90] S.-C. Pang, 《LST 方案中的配对问题精确解》, 《核物理A》128, 497 (1969年). [91] V. K. B. Kota 和 J. A. C. Alcar´as, 《SO(8) 质子-中子配对模型中的态分类》, 《核物理A》764, 181 (2006年). [92] D. J. Rowe 和 M. J. Carvalho, 《O(8) 对耦合模型中的对偶关系与超多重态对称性》, 《物理学杂志 A：数学与理论》40, 471 (2007年). [93] V. K. B. Kota 和 R. Sahu, 《 *Structure of Medium Mass Nuclei: Deformed Shell Model and Spin-Isospin Interacting Boson Model* 2016 》（CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州）. [94] V. K. B. Kota 和 R. Sahu, 《原子核中的多轨道配对代数》, 《对称性》15, 497 (2023年). [95] K. T. Hecht, 《LST 准自旋群的相干态理论》, 《核物理A》444, 189 (1985年). [96] J. A. Evans、G. G. Dussel、E. E. Maqueda 和 R. P. J. Perazzo, 《可解模型中的同位旋矢量与同位旋标量配对关联》, 《核物理A》367, 77 (1981年). [97] G. G. Dussel、E. E. Maqueda、R. P. J. Perazzo 和 J. A. Evans, 《涉及竞争性配对相互作用的双能级可解模型》, 《核物理A》460, 164 (1986年). [98] J. Engel、S. Pittel、M. Stoitsov、P. Vogel 和 J. Dukelsky, 《精确可解模型中的中子-质子关联》, 《物理评论C》55, 1781 (1997年). [99] S. Lerma H.、B. Errea、J. Dukelsky 和 W. Satu-la, 《自旋-同位旋质子-中子配对哈密顿量的精确解》, 《物理评论快报》99, 032501 (2007年). [100] T. Skrypnyk, 《有理 r 矩阵、高秩李代数与可积质子-中子 BCS 模型》, 《核物理B》863, 435 (2012年). [101] F. Pan、Y. He、Y. Wu、Y. Wang、K. D. Launey 和 J. P. Draayer, 《扩展同位旋矢量与同位旋标量配对模型中的中子-质子配对修正》, 《物理评论C》102, 044306 (2020年). [102] J. P. Elliott 和 A. P. White, 《相互作用玻色子模型的同位旋不变形式》, 《物理学快报B》97, 169 (1980年). [103] P. Van Isacker 和 D. D. Warner, $T = 0$ 配对与 $T = 1$ 配对在相互作用玻色子模型中的比较, 《物理评论快报》78, 3266 (1997年). [104] V. K. B. Kota, 《滴线原子核光谱学的对称性方案》, 《物理学杂志G：核与粒子物理》25, 881 (1999年). [105] F. Iachello 和 A. Arima, 《 *The Interacting Boson Model*》（剑桥大学出版社，剑桥，英国，1987年）. [106] V. K. B. Kota, 《具有良好 s 和 d 玻色子同位旋的 IBM-3 动力学对称性极限下 N=Z 偶偶核的能谱与 E2 跃迁强度》, 《物理学年鉴》265, 101 (1998年). [107] J. N. Ginocchio, 《 $N \sim Z$ 核的新型集体运动》, 《物理评论快报》77, 28 (1996年).

[108] V. K. B. Kota，具有良好 s、d 和 sd 玻色子自旋–同位旋 Wigner 的 SU(4)∼O(6) 对称性的 IBM-4 的 O(36) 对称性极限：针对 N≈Z 奇奇核，《物理学年鉴》280，1（2000）。[109] P. Van Isacker、J. Dukelsky、S. Pittel 和 O. Juillet，费米子 SO(8) 模型及其与含有 $L = 0$ 玻色子的 IBM-4 模型的联系，《物理学杂志G：核与粒子物理》24，1261（1998）。[110] A. Arima、M. Harvey 和 K. Shimizu，赝 LS 耦合和赝 SU3 耦合方案，《物理学快报B》30，517（1969）。[111] K. T. Hecht 和 A. Adler，混合组态中优势

$$J \neq 0$$

137, 对的 129, 1969 广义资历，《核物理A》（）。[112] C. Bahri、J. P. Draayer 和 S. A. Moszkowski，核物理中的赝自旋对称性，《物理评论快报》68，2133 1992（）。[113] J. P. Draayer，费米子模型，载于 *Algebraic Approaches to Nuclear Structure: Interacting Boson and Fermion Models*，R. F. Casten 编（Harwood Academic Publishers，Chur，瑞士，1993），第423–574页。[114] A. L. Blokhin、C. Bahri 和 J. P. Draayer，赝自旋对称性的起源，《物理评论快报》74，4149（1995）。[115] H. Nakada 和 T. Inakura，张量力在赝自旋对称性中的重要性，《物理评论C》110，L051301（2024）。[116] C. R. Ding、C. C. Wang、J. M. Yao、H. Hergert、H. Z. Liang 和 S. K. Bogner，从自旋到赝自旋对称性：核结构中幻数的起源，《物理评论快报》136，052501（2026）。[117] D. Bonatsos、I. E. Assimakis、N. Minkov、A. Martinou、S. Sarantopoulou、R. B. Cakirli、R. F. Casten 和 K. Blaum，proxy-SU(3)模型对核形状、长椭球形占优及长椭球形–扁椭球形形状转变的解析预测，《物理评论C》95，064326（2017）。[118] D. Bonatsos、A. Martinou、S. K. Peroulis、T. J. Mertzimekis 和 N. Minkov，原子核中的 Proxy-SU(3) 对称性，《对称性》15，169（2023）。[119] T. A. L¨ahde、E. Epelbaum、H. Krebs、D. Lee、U.-G. Meißner 和 G. Rupak，中质量原子核的格点有效场论，《物理学快报B》732，110（2014）。[120] S. Elhatisari、N. Li、A. Rokash、J. M. Alarc´on、D. Du、N. Klein、B.-N. Lu、U.-G. Meißner、E. Epelbaum、H. Krebs、T. A. L¨ahde、D. Lee 和 G. Rupak，量子相变附近的核束缚，《物理评论快报》117，132501（2016）。[121] Z.-W. Niu 和 B.-N. Lu，无符号问题的核量子蒙特卡罗模拟，《物理评论快报》135，222504 2025（）。[122] S. Shen、S. Elhatisari、D. Lee、U.-G. Meißner 和 Z. Ren，铍同位素 ^{7}Be 至 ^{12}Be 的第一性原理研究，《物理评论快报》134，162503（2025）。[123] S. R. Stroberg、H. Hergert、S. K. Bogner 和 J. D. Holt，核壳模型的非经验相互作用：最新进展，《核与粒子科学年度评论》69，307（2019）。[124] H. Hergert，第一性原理核多体理论导览，《物理学前沿》8，379（2020）。[125] P. Navr´atil、J. P. Vary 和 B. R. Barrett，第一性原理核壳模型中 ^{12}C 的性质，《物理评论快报》84，5728（2000）。[126] P. Navr´atil、J. P. Vary 和 B. R. Barrett，大基组第一性原理无芯壳模型及其在 ^{12}C 中的应用，《物理评论C》62，054311（2000）。[127] B. R. Barrett、P. Navr´atil 和 J. P. Vary，第一性原理无芯壳模型，《粒子与核物理进展》69，131 2013（）。[128] K. D. Launey、T. Dytrych 和 J. P. Draayer，对称性引导的大规模壳模型理论，《粒子与核物理进展》89，101（2016）。[129] T. Dytrych、K. D. Launey、J. P. Draayer、D. J. Rowe、J. L. Wood、G. Rosensteel、C. Bahri、D. Langr 和 R. B. Baker，核物理：涌现对称性的关键作用，《物理评论快报》124，042501（2020）。[130] A. E. McCoy、M. A. Caprio、P. J. Fasano 和 T. Dytrych，核结构的辛无芯组态相互作用框架（2026），arXiv:2604.11940 [nucl-th]。[131] J. Carlson、S. Gandolfi、F. Pederiva、S. C. Pieper、R. Schiavilla、K. E. Schmidt 和 R. B. Wiringa，核物理中的量子蒙特卡罗方法，《现代物理评论》87，1067（2015）。[132] J. E. Lynn、I. Tews、S. Gandolfi 和 A. Lovato，核物理中的量子蒙特卡罗方法：最新进展，《核与粒子科学年度评论》69，279（2019）。[133] G. Hagen、T. Papenbrock、M. Hjorth-Jensen 和 D. J. Dean，原子核的耦合簇计算，《物理学进展报告》77，096302（2014）。[134] H. Hergert、S. K. Bogner、T. D. Morris、A. Schwenk 和 K. Tsukiyama，介质中相似重整化群：一种新颖的原子核第一性原理方法，《物理学报告》621，165（2016）。[135] S. R. Stroberg、J. D. Holt、A. Schwenk 和 J. Simonis，原子核的

$$Ab\ Initio$$

126, 极限, 022501, 2021《物理评论快报》（）。[136] G. F. Bertsch，核芯极化在二体相互作用中的作用，《核物理》74，234（1965）。[137] T. T. S. Kuo 和 G. E. Brown，有限核结构与自由核子–核子相互作用：对 ^{18}O 和 ^{18}F 的应用，《核物理》85，40（1966）。[138] T. T. S. Kuo，有限核结构与自由核子–核子相互作用：（II）。镍同位素的核芯极化与有效相互作用，《核物理A》90，199（1967）。[139] T. Dytrych，*Evidence for symplectic symmetry in ab initio no-core shell model results*，博士论文，路易斯安那州立大学（2008）。[140] C. Bahri 和 J. P. Draayer，SU(3)约化矩阵元软件包，《计算机物理通讯》83，59（1994）。[141] T. Miyagi，NuHamil：一种由手征有效

场论生成核二体和三体矩阵元的数值代码，《欧洲物理学杂志A》59，150（2023）。[142] J. P. Draayer、Y. Leschber、S. C. Park 和 R. Lopez，U(3) 在 U(N) 中的表示，《计算机物理通讯》56，279（1989）。[143] D. Langr、T. Dytrych、J. P. Draayer、K. D. Launey 和 P. Tvrd´ık，U(3) 在 U(N) 中表示的高效算法，《计算机物理通讯》244，442（2019）。[144] D. Langr 和 T. Dytrych，U(N) 到 U(3) 表示约化的高效算法：同位旋适配的核结构计算，载于 *Parallel Processing and Applied Mathematics*，《计算机科学讲义》第15581卷，R. Wyrzykowski、J. Dongarra、E. Deelman 和 K. Karczewski 编（施普林格·自然瑞士，查姆，2025），第233–243页。[145] F. Pan、S. Yuan、K. D. Launey 和 J. P. Draayer，构造 SU(3) ⊃ SO(3) 基矢量的新方法，《核物理A》952，70（2016）。[146] J. P. Draayer 和 Y. Akiyama，SU_3, 的维格纳系数和拉卡系数，《数学物理学杂志》14，1904（1973）。[147] Y. Akiyama 和 J. P. Draayer，SU_3, 维格纳系数和拉卡系数 Fortran 程序用户指南，《计算机物理通讯》5，405（1973）。[148] G. Rosensteel 和 D. J. Rowe，形变原子核的形状，《物理学年鉴》104，134（1977）。[149] G. Rosensteel 和 D. J. Rowe，集体模型的代数表述III：集体运动的辛壳模型，《物理学年鉴》126，343（1980）。[150] D. J. Rowe，核集体模型的微观理论，《物理学进展报告》48，1419（1985）。[151] R. D. R. Raju、J. P. Draayer 和 K. T. Hecht，重形变原子核耦合方案的探寻：赝 SU(3) 模型，《核物理A》202，433（1973）。[152] O. Casta˜nos、J. P. Draayer 和 Y. Leschber，形状变量与壳模型，《物理学杂志A：原子核》329，33（1988）。[153] J. P. Draayer、S. C. Park 和 O. Casta˜nos，集体模型势能面的壳模型解释，《物理评论快报》62，20（1989）。[154] J. Escher 和 J. P. Draayer，核 Sp(6,R) 模型的费米子实现，《数学物理学杂志》39，5123（1998）。[155] J. Cseh，重核中的类壳四重聚合：基于赝 SU(3) 和 proxy-SU(3) 方案的代数方法，《物理评论C》101，054306（2020）。[156] A. Gade、B. Longfellow、R. V. F. Janssens、D. D. Dao、F. Nowacki、J. A. Tostevin、A. D. Ayangeakaa、M. J. Basson、C. M. Campbell、M. P. Carpenter、J. Chung-Jung、H. L. Crawford、B. P. Crider、P. Farris、S. Gillespie、A. M. Hill、S. M. Lenzi、S. Noji、J. Pereira、C. Porzio、A. Poves、E. Rubino 和 D. Weisshaar，束流内谱学揭示稀有同位素 ^{62}Cr 中竞争性核形状，《自然·物理》21，37（2025）。[157] A. P. Zuker、J. Retamosa、A. Poves 和 E. Caurier，转动运动的球壳模型描述，《物理评论C》52，R1741（1995）。[158] J. Cseh，多构型动力学对称性的微观结构与数学背景，《物理评论C》103，064322（2021）。[159] T. Dytrych、K. D. Sviratcheva、C. Bahri、J. P. Draayer 和 J. P. Vary，轻核第一性原理无芯壳模型结果中辛对称性的证据，《物理评论快报》98，162503（2007）。[160] T. Dytrych、K. D. Sviratcheva、C. Bahri、J. P. Draayer 和 J. P. Vary，辛对称性在轻核第一性原理无芯壳模型结果中的主导作用，《物理评论C》76，014315（2007）。[161] T. Dytrych、K. D. Sviratcheva、J. P. Draayer、C. Bahri 和 J. P. Vary，第一性原理辛无芯壳模型，《物理学杂志G：核与粒子物理》35，123101（2008）。[162] T. Dytrych、K. D. Sviratcheva、C. Bahri、J. P. Draayer 和 J. P. Vary，第一性原理辛无芯壳模型中的高度形变模态，《物理学杂志G：核与粒子物理》35，095101（2008）。[163] K. D. Launey、A. Mercenne 和 T. Dytrych，从头算对称性适配框架中的核动力学与核反应，《核与粒子科学年度评论》71，253（2021）。[164] K. D. Launey、K. S. Becker、G. H. Sargsyan、O. M. Molchanov、M. Burrows、A. Mercenne、T. Dytrych、D. Langr 和 J. P. Draayer，原子核中的涌现对称性：探索核动力学及标准模型之外的物理，《SciPost物理学会议录》14，007（2023）。[165] K. D. Launey、G. H. Sargsyan、A. Mercenne、J. E. Escher 和 D. C. Mumma，核反应的从头算对称性适配方法，《粒子与核物理进展》148，104233（2026）。[166] C. Bahri、D. J. Rowe 和 J. P. Draayer，生成 SU(3) 在 SU(2) 和 SO(3) 基中的克莱布希–戈登系数的程序，《计算机物理通讯》159，121（2004）。[167] T. Dytrych、D. Langr、J. P. Draayer、K. D. Launey 和 D. Gazda，SU3lib：用于精确计算 SU(3) 维格纳系数和拉卡系数的 C++ 库，《计算机物理通讯》269，108137（2021）。[168] J. Herko、M. A. Caprio、A. E. McCoy 和 P. J. Fasano，用于 SU(3) 耦合与重耦合系数的现代 Fortran 库，《欧洲物理学杂志A》62，95（2026）。[169] D. Langr、P. Dang、T. Dytrych 和 M. Negro，u3lib：面向 U(3) 对称代数、维格纳耦合和拉卡重耦合系数的 AI 就绪计算框架（2026），arXiv:2611.26558 [nucl-th]。[170] A. Partensky 和 C. Maguin，SU(4) ⊃ SU(2) ⊗ SU(2) 链，《数学物理学杂志》19，511（1978）。[171] D. J. Rowe 和 J. Repka，su(n) 的表示与耦合系数；其在 su(4) 中的应用，《物理学基础》27，1179（1997）。[172] P. Dang、D. Langr、T. Dytrych 和 M. Negro，u4lib：面向 U(4) 对称代数、维格纳耦合和拉卡重耦合系数的 AI 就绪计算框架（2026），arXiv:2611.27235 [nucl-th]。

[173] T. Oberhuber、T. Dytrych、K. D. Launey、D. Langr 和 J. P. Draayer，使用图形处理器将核子-核子势算符变换为 SU(3) 张量形式，《离散与连续动力系统——S辑》14，1111（2021年）。[174] E. P. Wigner，《关于约化 S. R. 群表示的克罗内克积的矩阵》，载于 *The Collected Works of Eugene Paul Wigner: Part A: The Scientific Papers*，A. S. Wightman 编（Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，1993年），第 608–654 页。[175] A. A. Isayev，同位旋不对称核物质中的自旋有序相变，《物理评论C》74，057301（2006年）。[176] A. Boehnlein、M. Diefenthaler、N. Sato、M. Schram、V. Ziegler、C. Fanelli、M. Hjorth-Jensen、T. Horn、M. P. Kuchera、D. Lee、W. Nazarewicz、P. Ostroumov、K. Orginos、A. Poon、X.-N. Wang、A. Scheinker、M. S. Smith 和 L.-G. Pang，专题综述：核物理中的机器学习，《现代物理评论》94，031003（2022年）。[177] M. Li、T. M. Sprouse、B. S. Meyer 和 M. R. Mumpower，利用机器学习研究天体物理 r 过程中的原子质量，《物理学快报B》848，138385（2024年）。[178] R. Utama、J. Piekarewicz 和 H. B. Prosper，中子星壳层组成的核质量预测：贝叶斯神经网络方法，《物理评论C》93，014311（2016年）。[179] Z.-P. Gao、Y.-J. Wang、H.-L. L¨u、Q.-F. Li、C.-W. Shen 和 L. Liu，用机器学习核质量，《核科学与技术》32，109（2021年）。[180] M. R. Mumpower、T. M. Sprouse、A. E. Lovell 和 A. T. Mohan，用于核质量的物理可解释机器学习，《物理评论C》106，L021301（2022年）。[181] Y. Huang、J. Chen、J. Jia、L.-M. Liu、Y.-G. Ma 和 C. Zhang，利用物理信息引导的全连接神经网络验证和外推原子质量，《物理评论C》111，034329（2025年）。[182] C. H. Kim、K. Y. Chae 和 M. S. Smith，利用领域信息引导的激活函数稳健外推核质量预测，《物理评论C》113，024308（2026年）。[183] Y. Lu、T. Shang、P. Du、J. Li 和 H. Liang，利用可解释机器学习修正核质量模型，以弥合理论与数据之间的差距，《物理评论C》114，034310（2026年）。[184] G.-P. Liu、H.-L. Wang、Z.-Z. Zhang 和 M.-L. Liu，基于树的机器学习算法应用于理论核质量模型时的模型修复能力，《物理评论C》111，024306（2025年）。[185] Y. Lu、T. Shang、P. Du、J. Li、H. Liang 和 Z. Niu，基于卷积神经网络的核质量预测，《物理评论C》111，014325（2025年）。[186] Z. M. Niu 和 H. Z. Liang，采用结合配对与壳效应的贝叶斯神经网络方法预测核质量，《物理学快报B》778，48（2018年）。[187] R. Utama 和 J. Piekarewicz，验证核质量模型的神经网络修正，《物理评论C》97，014306 2018( )。[188] S. Qu、J.-Y. Zhang 和 M. Bao，利用贝叶斯神经网络预测核质量，《中国物理C》49，104106（2025年）。[189] V. Kejzlar、L. Neufcourt 和 W. Nazarewicz，不完美模型的局部贝叶斯狄利克雷混合，《科学报告》13，19600（2023年）。[190] E. Y¨uksel、D. Soydaner 和 H. Bahtiyar，使用机器学习模型预测核质量，《物理评论C》109，064322（2024年）。[191] W. Ye 和 N. Wan，利用机器学习技术理解理论质量模型之间的预测差异，《物理评论C》111，044317（2025年）。[192] H.-X. Liu、S. Manzhos 和 X.-H. Wu，利用经加性高斯过程回归优化激活函数的神经网络预测核质量，《物理评论C》113，014305（2026年）。[193] A. Jalili、Z. Saleki、F. Pan、A.-X. Chen 和 J. P. Draayer，混合密度泛函理论-机器学习框架下核结合能中的同位旋对称性破缺和自旋宇称效应，《物理学杂志G：核与粒子物理》53，055104 2026( )。