arXiv:2611.30960v1 [math.MG] 23 Nov 2026

$C^{m,\ \alpha}$-Carnot 群中的可求 rectifiability

KENNEDY OBINNA IDU 和 FRANCESCO PAOLO MAIALE

摘要。在任意齐性维数为 Q 的 Carnot群 $\mathbb{G}$ 中，对于每个 $m \geq 1$ 和 $\alpha \in [0,1]$，我们通过具有互补垂直切子群的$\mathbf{C}^{m\ \alpha}_{\mathbb{G}}$ -正则曲面刻画有限豪斯多夫测度集合的可整流性。该判据将正下密度与由此类曲面周围的管状邻域进行依测度逼近结合起来。在几乎处处的点，只需一个管状邻域半径 $\lambda r^{m+\alpha}$ 即可满足 $\alpha > 0$；而对于 $\alpha = 0$，估计必须对每个 λr^{m}、$\lambda > 0$ 都成立。管状逼近无需额外的密度假设，即可将$\mathbf{C}^{1}_{\mathbb{G}}$-可整流性提升为 $(m,\ \alpha)$ 类。

证明结合了环境正规形多项式喷流、Remez 型赋范不等式和惠特尼延拓。在拓扑维数至少为二时，通过非特征次水平集进行定量体积逼近，可以得到约化边界的高阶可整流性。特别地，对于具有 $L^{q}{}_{\text{loc}}$ 强制项的水平泊松方程弱解（$q > \max\{Q,\ 2\}$ 有限），几乎处处的子水平集都具有二阶可整流的约化边界。

1. 引言

将可整流集的经典理论从欧几里得空间推广出去，一直是几何测度论的核心主题；参见 [4,43] 关于其与调和分析和奇异积分的联系，参见 [16,18,19]。可整流集是指这样一种集合：尽管可能非常不规则，但除去一个零测集后，可以分解为若干由正则曲面刻画的部分。Federer 的定义 [23,第 3.2 节。14], 通过几乎处处的利普希茨像覆盖来定义可整流性；这一概念在度量空间中仍有意义，但通常无法捕捉 Carnot 群中的内在正则曲面。欧几里得空间中以利普希茨图描述的等价刻画，在此并不能直接适用；参见 [4,35]。一种自然的替代方案，是仿照将光滑子流形视为非临界水平集的做法，采用 Franchi、Serapioni 和 Serra Cassano 提出的正则曲面， [29,32,33],这种方法尤其适用于低余维情形。Carnot 群中的不同可整流性概念通常并不等价，因为分层几何与投影、内在图以及 Whitney 型延拓问题之间存在复杂的相互作用 [6,27,31,55]。由此引出以下问题。

问题 （可整流性刻画）。 找出度量空间中任意阶可整流性的必要且充分的几何与定量 判据，尤其是
在 Carnot 群中。

定量判据是尺度不变的估计，用于刻画小尺度下的逼近，通常通过 β-数 [17,21] 来表述。在欧几里得空间中，这个问题可追溯至 Anzellotti 和 Serapioni [10], ；近期研究给出了 [21] 中$\mathbf{C}^{1,\ \alpha}$-可整流性以及 [56] 中任意阶可整流性的定量判据；参见综述 [49]。欧几里得空间中的补充判据则通过平方函数 [34] 和平均离散曲率 [45] 来刻画$\mathbf{C}^{1,\ \alpha}$-可整流性。基于近似切空间的刻画是经典结果 [48, 定理 15。19],，而尖锐的高阶基准结果是 [56,定理 5。4]。用本文的记号表示,

2020年 数学主题分类。 主要分类号：28A75；次要分类号：43A80、53C17。关键词与短语。 高阶可整流性、Carnot 群、惠特尼延拓。1

在相关豪斯多夫测度满足 σ-有限的条件下，它证明了可数$\mathbf{C}^{m,\,\alpha}$-可整流性；其依据是每个半径为 εr^m 的管状邻域之外的逼近，以及当 $\alpha > 0$ 时，在一个半径为 $\lambda r^{m+\alpha}$ 的管状邻域之外的逼近，且不需要下密度假设。

在海森堡群中，一阶近似切空间刻画已在 [50, 定理 3.14 和 3.15] 中得到证明。对于 $0 < \alpha \leq 1$和 $n < k \leq 2n$，Idu 和 Maiale 通过近似切抛物面，在正下密度条件下刻画了低余维的 $\mathbf{C}^{1}_{,H}{}^{\alpha}$ -可整流性 [36, 定理 1.1 和命题 1.2]。他们在注 5.2 中指出，该论证可推广到任意 Carnot 群中的余维一情形，因为当水平补空间为一维时，其中唯一一个例外引理便显然成立。其他一阶结果包括 Merlo 针对余维一测度提出的 Marstrand–Mattila 判据 [52] ，以及 Antonelli 和 Merlo 针对具有正下密度、有限上密度且平坦切对象（至多相差常数倍）唯一的测度所建立的表示与密度定理 [7, 9]。

本文的主要贡献是刻画任意阶 $m \geq 1$ 和任意指数 $\alpha \in [0, 1]$ 下的内在可整流性，其方法是管状逼近与正下密度（定理 1.2 和 1.5）。该结果适用于任意 Carnot群，以及所有存在竖直互补切子群的维数。相对于 $\mathbf{C}^{1}_{,\,H}{}^{\alpha}$ 判据而言， [36], 本文处理了任意阶数以及这些切空间几何的完整范围。它给出了 Santilli 高阶欧几里得判据 [56],在 Carnot群中的对应结果，并增加了正下密度假设。该假设仅用于一阶情形：高阶步骤定理 1.3无需密度假设。

在 Carnot 群中，具有垂直切子群的曲面具备欧几里得空间中不存在的两个特征。首先，切对象是垂直齐次子群，它们是分层的，但不一定是 Carnot（注 2.3），因此次黎曼 Whitney 与 Lusin 工具通常不能直接应用于参数子群 $\mathbb{W}$ 上。其次，如果一个 $\mathbb{G}$- 正则曲面是 $\mathbb{W}$ 上的内在图，那么图函数沿 $\mathbb{W}$ 的左不变向量场不一定正则：根据 Baker–Campbell–Hausdorff 公式，在固定的 $\mathbb{W}$-方向上对 $w \mapsto w{\cdot}\phi(w)$求导，可能会对定义函数在更高层方向上的变化求导。核心的高阶步骤，是从依测度逼近中恢复相容的环境喷射，而无需对内在图参数化求导。在一阶图块上，标准形多项式刻画逼近曲面，而赋范不等式则将正密度子集上的多项式值控制转化为对所有环境导数直至 m 阶的控制。将其应用于局部多项式之差，便可得到构造整流曲面所需的 Whitney 相容性估计，使其成为环境$\mathbf{C}^{m\,\alpha}_{\mathbb{G}}$ ，函数的非临界水平集。

在 $\alpha = 1$ 结论是$(m,\ 1)$，而非$(m + 1,\ 0)$。在 $\mathbb{R}^n$ 两种可整流性概念一致 [10, 命题 3.2], ，因为 $C^{m,\,1}$ 图与一个 C^{m+1}图在一个测度很小的集合之外相同。在 Carnot 群的正余维情形中，这一步 Lusin 型步骤必须作用于延拓在曲面上的最高阶导数，而该曲面是 Haar 零集，因此几乎处处的 Pansu 可微性无法提供任何信息；此外，内在参数化的图映射不必沿参数子群正则；要做到这一点，需要一种超越此处所用 Whitney 工具的适配迹喷流延拓定理。在欧几里得空间中，Brena、De Lellis 和 Franceschini [14] 证明$\mathbf{C}^{\infty}$-可整流性适用于维数至少为二的平稳整积分层的支撑集。相关结果还涉及欧氏变分簇的二阶可整流性 [51, 57] 以及极小面积流奇异集的可整流性 [20];

这类高阶判据也可能对次黎曼变分问题有所帮助。

1.1. 主要结果。设 $N := \dim \mathbb{G}$，其中 Q 为齐性维数，设 $1 \le k \le N$，并令 $k_{\mathrm{m}} := Q - (N-k)$。$k$维 $\mathbb{G}$-正则曲面（定义 3.1）的切子群是垂直的，且存在齐性补群；也就是说，它们属于第 2.2 节中的集合 $\mathrm{V}(\mathbb{G}, k)$。当且仅当 $\mathrm{V}(\mathbb{G}, k) \neq \emptyset$ 时，此类曲面才存在；否则，下文所有陈述均为空（注2.10）。在定义 2.7 的低余维范围 $\max\{1, N-v\} \le k \le N$ 内，每个存在补群的 k维齐次子群都是垂直的。阈值描述了只要子群存在，它的类型便为何种。$\mathrm{V}(\mathbb{G}, k)$ 这一族在此范围以下也可能非空。我们用 $\Theta^{s}_{*}(A, p)$、$\Theta^{*s}(A, p)$ 和 $\Theta^{s}(A, p)$ 分别表示 $\mathrm{H}^{s} \llcorner A$在 p 处的下、上和精确 s维密度（更多详情见第 2 节）。

管状逼近是在环境空间中某个 $\mathbb{G}$-正则曲面周围的管状邻域之外，按照归一化的$\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-测度来衡量的；当 $\alpha > 0$ 时，其半径为 $r^{m+\alpha}$ 量级；而当 $\alpha = 0$ 时，对每个 $\lambda > 0$，半径为 λr^{m}（一个测度论意义下的小-$o(r^{m})$ 条件）。

定义 1.1. 设 $\alpha \in [0,1]$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le k \le N$。若集合 $E \subset \mathbb{G}$ 满足以下条件，则称其属于类 $\mathfrak{S}_{m,\alpha}(k)$：$E$ 是 $\mathrm{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-可测的，$\mathrm{H}^{k_{\mathrm{m}}}(E) < \infty$，并且对于 $\mathrm{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-几乎处处的 $p \in E$，存在一个 k维、$\mathbb{G}$- 正则且属于类 (m, α) 的曲面 $S = S_p$（其意义见定义 3.1），满足 $p \in S$ 及以下性质：

(a) 若 $\alpha > 0$，则存在常数 $\lambda = \lambda(p) \ge 0$，使得

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^{k_{\mathrm{m}}}} \mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}\Big(E \cap B_r(p) \cap \big\{q \in \mathbb{G} \,:\, d(q,S) > \lambda\, r^{m+\alpha}\big\}\Big) = 0; \tag{1.1}$$

(b) 若 $\alpha = 0$，则对每个 $\lambda > 0$，

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^{k_{\mathrm{m}}}} \mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}\Big(E \cap B_r(p) \cap \big\{q \in \mathbb{G} \,:\, d(q,S) > \lambda\, r^{m}\big\}\Big) = 0. \tag{1.2}$$

定理 1.2. 设 $\alpha \in [0,1]$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le k \le N$。若对于 $H^{k_{\mathrm{m}}}$-几乎处处的 $p \in E$，$E \in \mathfrak{S}_{m\alpha}(k)$ 且 $\Theta^{k_{\mathrm{m}}}_{*}(E, p) > 0$，则 E 关于 $H^{k_{\mathrm{m}}}$ 是 $(k, \mathbb{G})$- 可整流的，类别为 (m, α)，其意义见定义 3.3。

定理 1.2 的高阶部分 在一阶可求直性得到确立后，无需密度假设。

定理 1.3. 设 $\alpha \in [0,1]$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le k \le N$。若 $E \in \mathfrak{S}_{m,\,\alpha}(k)$ 关于 $H^{k_{\mathrm{m}}}$ 是 $(k, \mathbb{G})$-可整流的，类别为 $(1, 0)$，则 E 关于 $H^{k_{\mathrm{m}}}$ 是 $(k, \mathbb{G})$-可整流的，类别为 (m, α)。

注 1.4。根据 定理 1.3，正下密度仅通过 定理 1.2 中的 定理 5.2发挥作用；该定理将测度意义下的近似相切转化为紧片段上的一致两两平坦性。在欧几里得空间中，无论是一阶 [48,定理 15。19]还是更高阶 [56, 定理 5。4]，都不需要密度假设；在一阶情形下，该集合可由利普希茨图覆盖，而根据拉德马赫定理，这些图是 C^{1}-可整流的。在海森堡群中，内蕴拉德马赫定理成立 [58]，但有些 Carnot 群存在定义在竖直子群上的内在 Lipschitz图，它们处处都不具备内蕴可微性 [39]。即使在海森堡群中，[50, 定理 3。15] 中的密度假设是否必要，[49, 也曾被列为未解问题，见定理8.7及其后的注释]，这一问题最近已得到解决 [37]。作者正在研究任意 Carnot 群中相应的密度问题。

反过来，只需满足可整流性和有限测度，无需其他假设。

定理 1.5。 设 $\alpha \in [0,1]$、 $m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le k \le N$。若 $E \subset \mathbb{G}$ 是$(k,\mathbb{G})$-可整流的，且属于(m,α) 类，并且 $H^{k_{\mathrm{m}}}(E) < \infty$，则 $E \in \mathfrak{S}_{m,\alpha}(k)$ 以及

$$\Theta_*^{k_{\mathrm{m}}}(E,p) > 0 \qquad \textit{for } \mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}\textit{-almost every } p \in E. \tag{1.3}$$

证明。若 $k = N$，取 $S_p = \mathbb{G}$。令 $k < N$ 和 $s := k_{\mathrm{m}}$。根据定义 3.3，存在k维的 $\mathbb{G}$-正则曲面 S_i，属于 (m,α) 类，且 $\mathrm{H}^s(E \setminus \bigcup_i S_i) = 0$；集合$A_i := E \cap S_i \setminus \bigcup_{j<i} S_j$ 两两不交，并覆盖 E，除去一个零测集。每个 S_i 都是博雷尔集，因为它是形如 $f^{-1}(0) \cap \Omega$ 的集合的可数并；而 $\mu_i := \mathrm{H}^s \llcorner (E \setminus S_i)$ 是一个有限拉东测度，且 $\mu_i(S_i) = 0$。因此，将定理 2.1(ii)], 的密度估计应用于推论 3.6 的证明中所述情形，可得 μ_i 在 S_i中 H^s-几乎处处的上 Federer s-密度为零；另见 [23, 2.10.19(4)]。由于中心闭球属于定义该密度的集合，且其直径至多为 $2r$，我们得到

$$\lim_{r \downarrow 0} r^{-s}\mathcal{H}^s\big((E \setminus S_i) \cap B_r(p)\big) = 0 \qquad \text{for } \mathcal{H}^s\text{-a.e. } p \in A_i.$$

在这种情况下， p 取 $S = S_i$，并且 $\lambda = 0$ 如果 $\alpha > 0$。式（1.1）和（1.2）中的例外集于是包含于（$E \setminus S_i$） $\cap B_r(p)$中，因此$E \in \mathfrak{S}_{m,\ \alpha}(k)$。

对于密度断言，若 $k = N$，则由哈尔测度的勒贝格密度定理可得结论。令 $k < N$。将覆盖细化为相对紧的曲面片后，我们可以假设 $\nu_i := \mathcal{H}^s \llcorner S_i$ 是有限的。根据 [40, 命题 2.3(ii)–(iii) 和 2.17] （此处给出的是闭球版本；开球版本可由 $B_r \subset B_r$ 和$\nu_i(B_r(p)) \ge \nu_i(B_{r/2}(p))$推出，它与 $\nu_i(B_r(p))$ 由局部 Ahlfors 正则性可知具有可比性），

$$\frac{\nu_i((S_i \setminus E) \cap B_r(p))}{\nu_i(B_r(p))} \longrightarrow 0 \qquad \text{for } \mathcal{H}^s\text{-a.e. } p \in E \cap S_i.$$

在这种情况下， p 局部阿尔福斯下界给出$\mathcal{H}^s(E \cap B_r(p)) \ge \frac{1}{2}\nu_i(B_r(p)) \ge c_p r^s$ 对所有充分小的 r均成立。或者，密度的存在性和正性可由 [40,推论 3.6], 应用于 $E \cap S_i$得到。□

结合定理 1.2，这表明一个 $\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-可测集 E 具有有限 $\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-测度，当且仅当 (m,α) 类可整流，且 $E \in \mathfrak{S}_{m,\alpha}(k)$ 和正下密度（1.3）几乎处处成立。

在第5.3节 中，我们将这些结果应用于任意维数至少为二的 Carnot群中的局部有限周长集：其约化边界为 (m,α)类可整流，当且仅当它满足管状条件（推论 5.6），因为正下密度自动成立（引理 5.5）；并且，只要该集合在体积意义下以 $o(r^{Q-1+m+\alpha})$ 阶被 $\mathbf{C}^{m\ \alpha}_{\mathbb{G}}$,具有不消失的水平梯度的函数的子水平集所逼近，例如多项式（引理 5.7），上述结论便成立。对于周长拟极小集，开代表的拓扑边界与约化边界仅相差一个零测集，因此这些结论也适用于该拓扑边界（注 5.9）。

作为偏微分方程的一项具体应用，对于水平泊松方程的弱解（例如狄利克雷极小解），足够可积的强迫项会在几乎处处的子水平集的约化边界上产生二次体积速率，从而得到二阶可整流性（命题5.10）。最后，当阶数等于 $\mathbb{G}$ 的步数时，覆盖正则曲面也是欧几里得 C^1 子流形（第 5.4 节）。

论文结构。第 2 节和第 3 节回顾 Carnot 群框架、正则曲面以及近似切空间判据。第 4 节阐述 Whitney 延拓、放大、标准形和喷射选择工具，并由此第 5 节汇集起来证明定理 1.2、1.3 和5.2。

2. 预备知识

2.1. 分层群与 Carnot 群。 若单连通幂零李群 $\mathbb{G}$ 的李代数存在分解，则称其为分次群

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{\iota} \mathfrak{g}_i, \qquad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}, \tag{2.1}$$

其中 $\mathfrak{g}_j = \{0\}$ 适用于 $j > \iota$，且 $\mathfrak{g}_\iota \neq \{0\}$。若此外还满足以下条件，则称其为第 ι 阶 *Carnot*（或分层）群

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_{j+1}, \qquad j = 1, \dots, \iota - 1. \tag{2.2}$$

Set $h_i := $维 $\mathfrak{g}_1 + \cdots +$维 $\mathfrak{g}_i$, $h_0 := 0$, $\ell := h_1$, $N := h_\iota =$维 $\mathfrak{g}$，且 $Q := \sum_{i=1}^{\iota} i$维 $\mathfrak{g}_i$ to 表示齐性维数。

我们固定一个适配于 (2.1) 的基 $X_1, \dots, X_N$，即 $X_{h_{i-1}+1}, \dots, X_{h_i}$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的一组基，并将第 l 个坐标赋予次数 $d_l := j$（当 $h_{j-1} < l \le h_j$ 时）。根据定理 1.3，指数映射是一个整体微分同胚 [13, 28], ，我们通过指数坐标 $x \mapsto \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_N X_N)$ 将 $\mathbb{G}$ 与 $\mathbb{R}^N$ 视为同一对象。于是 $e = 0$, $x^{-1} = -x$，且$\mathbb{R}^N = \mathbb{G}^1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{G}^\iota$，其中层 $\mathbb{G}^i = \exp(\mathfrak{g}_i)$ 未必是一个子群。我们用 $|\cdot|$ 表示使适配基成为正交基的欧几里得范数。膨胀 $\delta_\lambda(x) = (\lambda^{d_1} x_1, \dots, \lambda^{d_N} x_N)$，$\lambda > 0$，是群自同构。

注记 2.1。 根据 Baker–Campbell–Hausdorff（BCH）公式，

$$x \cdot y = x + y + \tfrac{1}{2}[x, y] + \sum_{j=3}^{\iota} c_j(x, y), \tag{2.3}$$

其中 c_j 的括号长度为 j；参见 [13, 定理 1.3.28]。由于膨胀是自同构，我们有 $(x \cdot y)_l = x_l + y_l + P_l(x, y)$，其中 P_l 是一个多项式，在 (x, y) 中为 d_l 次齐次，只依赖于次数严格小于 d_l 的坐标（特别地，当 $d_l = 1$时，$P_l \equiv 0$）并满足 $P_l(x, 0) = P_l(0, y) = 0$。

我们固定一个齐性距离 d，即一个诱导欧几里得拓扑且满足 $d(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda d(x, y)$ 的左不变距离，并设 $\|x\| := d(x, e)$；于是

$$\|\delta_\lambda x\| = \lambda \|x\|, \qquad \|x^{-1}\| = \|x\|, \qquad \|xy\| \le \|x\| + \|y\|.$$

任意两个齐次距离都是双 Lipschitz 等价的。它们的范数在紧集 $\{x : \sum_l |x_l|^{1/d_l} = 1\}$ 上的比值为正且连续，齐次性则将这些界推广到 $\mathbb{G}$。设 $B_r(x)$ 和 $B_r(x)$ 分别为开球和闭球，$d(x, S) := \inf_{y \in S} d(x, y)$，并令 $\mathcal{H}^s$ 表示关于 d的 s维豪斯多夫测度；参见 [23, 第 2.10 节.2]。对于拉东测度 μ 和 $s \ge 0$，我们设

$$\Theta^s_*(\mu, x) := \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s}, \qquad \Theta^{*s}(\mu, x) := \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s},$$

对于下密度/上密度，当二者相等时，将其公共值记为 $\Theta^s(\mu, x)$。我们将 $\Theta^s_*(A, x)$ 简写为：$= \Theta^s_*(\mathcal{H}^s \llcorner A, x)$，对于 Θ^{*s} 和 Θ^s 也作类似记号。勒贝格测度 $\mathcal{L}^N$ 是 $\mathbb{G}$ ([13, 1.3.21]) 的哈尔测度，并且 $\mathcal{L}^N(B_r(p)) = r^Q \mathcal{L}^N(B_1(e))$。

对于一个多重指标 $J \in \mathbb{N}_0^N$，记 $|J| := j_1 + \cdots + j_N$，并将 $d(J) := \sum_{i=1}^N d_i j_i$ 分别称为它的长度和次数。

定义 2.2。若多项式是单项式 x^J 的线性组合，且满足 $d(J) \le m$，则称其齐次次数至多为 m；若其中仅出现满足 $d(J) = m$ 的单项式，则称其为 m 次齐次多项式。

将每个 X_i 视为 $\mathbb{G}$上的对应左不变向量场，由 [26,第 1C 节] 可知，存在齐次多项式 $\mathcal{Q}_{ik}$，其次数为 $d_k - d_i$，使得

$$X_i = \partial_{x_i} + \sum_{d_k > d_i} \mathcal{Q}_{ik}(x)\, \partial_{x_k}.$$

记 $\mathbf{X}^J := X_1^{j_1} \cdots X_N^{j_N}$，这是一个左不变微分算子，相对于膨胀的齐次次数为$d(J)$。

2.2. **投影与 Grassmann 流形**。回顾一下，$\mathbb{G}$ 的一个齐次子群是指闭李子群 $\mathbb{L}$，满足对所有 $\lambda > 0$，均有 $\delta_\lambda \mathbb{L} = \mathbb{L}$。

注 2.3。齐次子群在指数坐标下是线性子空间，并继承分次结构。事实上，$\mathbb{L}$ 是闭的，因此是一个嵌入子流形，所以路径 $t \mapsto \delta_t p$在 $t = 0$处延拓为 e 后，在 $\mathbb{L}$ 中连续，并将每个 $p \in \mathbb{L}$ 连接到 e。因此，$\mathbb{L}$ 是连通的，且 $\mathbb{L} = \exp(\mathfrak{h})$，其中 $\mathfrak{h} := \text{李}(\mathbb{L})$。空间 $\mathfrak{h}$ 在$D\delta_2(e)$作用下不变，因而也在其到各层 $\mathfrak{g}_i$上的谱投影作用下不变。因此 $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{\iota} (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i)$，且 $\mathbb{L} = \mathbb{L}^1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}^\iota$，其中 $\mathbb{L}^i \subseteq \mathbb{G}^i$。所以每个齐次子群都是一个分次群，具有受限的膨胀和 BCH 乘积 (2.3)。然而，它未必是 Carnot 群：$\mathbb{L}^1$ 可能无法生成李$(\mathbb{L})$的高层。这是本文需要克服的主要问题之一。

注记 2.4。若 $\mathbb{L} \le \mathbb{G}$ 是一个齐次子群，其齐性维数为 $Q_{\mathbb{L}} := \sum_{i=1}^{\iota} i \dim \mathbb{L}^i$，则其哈尔测度 $\mu_{\mathbb{L}}$ 满足 $\mu_{\mathbb{L}}(\delta_\lambda A) = \lambda^{Q_{\mathbb{L}}} \mu_{\mathbb{L}}(A)$。球的缩放性质使$\mu_{\mathbb{L}}$ 成为 Ahlfors $Q_{\mathbb{L}}$-正则测度，因此$\mathcal{H}^{Q_{\mathbb{L}}} \llcorner \mathbb{L}$ 非零且局部有限。它具有左不变性，故由哈尔测度的唯一性，它是 $\mu_{\mathbb{L}}$ 的常数倍。

若齐次子群 $\mathbb{L}$ 满足 $\mathbb{L} = \mathbb{L}^1$，则称其为水平子群；若对所有$j \ge 2$都有 $\mathbb{L}^j = \mathbb{G}^j$，则称其为垂直子群；垂直子群是正规的。

定义 2.5（分裂）。若两个齐次子群 $\mathbb{W}$、$\mathbb{V}$ 满足$\mathbb{W} \cap \mathbb{V} = \{0\}$ 且 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \cdot \mathbb{V}$，则称它们互补；若 $\mathbb{W}$ 是正规子群，则记作 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}$。

对于 $0 \le k \le N$，令 $\mathrm{G}(\mathbb{G}, k)$ 表示由所有具有互补齐次子群的 k维齐次子群构成的集合，令 $\mathrm{V}(\mathbb{G}, k) \subseteq \mathrm{G}(\mathbb{G}, k)$ 表示其中的垂直元素，并定义 $\mathrm{G}(\mathbb{G}) := \bigcup_{k=0}^N \mathrm{G}(\mathbb{G}, k)$ 为内在格拉斯曼流形。以下标准投影性质见 [27, 50]；关于海森堡群，参见命题 2.15] ；关于齐性群中水平子群 $\mathbb{V}$ 与其正交补 $\mathbb{V}^\perp$的分裂，参见定理 2.13] $\mathbb{G} = \mathbb{V}^\perp \rtimes \mathbb{V}$。

定理 2.6。若 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}$ 具有 $\mathbb{V}$ 水平和 $\mathbb{W}$ 垂直分量，则每个 $x \in \mathbb{G}$ 都有唯一分解 $x = \pi_{\mathbb{W}}(x) \cdot \pi_{\mathbb{V}}(x)$，其中 $\pi_{\mathbb{W}}(x) \in \mathbb{W}$ 且 $\pi_{\mathbb{V}}(x) \in \mathbb{V}$，并且

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbb{W}}(x^{-1}) &= \pi_{\mathbb{V}}(x)^{-1} \pi_{\mathbb{W}}(x)^{-1} \pi_{\mathbb{V}}(x), & \pi_{\mathbb{V}}(x^{-1}) &= \pi_{\mathbb{V}}(x)^{-1}, \\
\pi_{\mathbb{W}}(\delta_\lambda x) &= \delta_\lambda \pi_{\mathbb{W}}(x), & \pi_{\mathbb{V}}(\delta_\lambda x) &= \delta_\lambda \pi_{\mathbb{V}}(x), \\
\pi_{\mathbb{W}}(xy) &= \pi_{\mathbb{W}}(x) \pi_{\mathbb{V}}(x) \pi_{\mathbb{W}}(y) \pi_{\mathbb{V}}(x)^{-1}, & \pi_{\mathbb{V}}(xy) &= \pi_{\mathbb{V}}(x) \pi_{\mathbb{V}}(y).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

此外，常数 $C_{\mathbb{W},\mathbb{V}} :=$ 最大值$\{1,$上确界$_{\|x\|=1}(\|\pi_{\mathbb{V}}(x)\| + \|\pi_{\mathbb{W}}(x)\|)\}$ 是有限的，并且对所有 $x \in \mathbb{G}$，

$$\|\pi_{\mathbb{V}}(x)\| + \|\pi_{\mathbb{W}}(x)\| \le C_{\mathbb{W},\mathbb{V}}\|x\|, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &C_{\mathbb{W},\mathbb{V}}^{-1}\|\pi_{\mathbb{V}}(x)\| \le d(x,\mathbb{W}) \le \|\pi_{\mathbb{V}}(x)\|, \\ &C_{\mathbb{W},\mathbb{V}}^{-1}\|\pi_{\mathbb{V}}(x)^{-1}\pi_{\mathbb{W}}(x)\pi_{\mathbb{V}}(x)\| \le d(x,\mathbb{V}) \le \|\pi_{\mathbb{V}}(x)^{-1}\pi_{\mathbb{W}}(x)\pi_{\mathbb{V}}(x)\|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

证明。由因子的唯一性可得这些恒等式。根据 (2.3)，第一层坐标在乘积下相加，因此 $\mathbb{G} = \mathbb{W}\cdot\mathbb{V}$ 给出 $\mathfrak{g}_1 \subseteq$ 李$(\mathbb{W})$ +李$(\mathbb{V})$，而高层位于李$(\mathbb{W})$中，因为 $\mathbb{W}$ 是垂直的。由于指数映射是单射且 $\mathbb{W}\cap\mathbb{V} =$ {0}，该和为直和，即 $\mathfrak{g} =$ 李$(\mathbb{W})$ $\oplus$李$(\mathbb{V})$。由于 $\mathbb{W}$ 是正规子群，乘法映射处处具有可逆微分且为双射，因此其逆映射以及两个投影都是光滑的。齐次性和单位球面的紧致性给出 (2.5)。对于$w \in \mathbb{W}$，将该界应用于 $w^{-1}x$，得到 $d(x,$ $\mathbb{W})$的下界；而取 $w = \pi_{\mathbb{W}}(x)$可得上界。对于 $v \in \mathbb{V}$，$\pi_{\mathbb{W}}(x^{-1}v) = \pi_{\mathbb{V}}(x)^{-1}\pi_{\mathbb{W}}(x)^{-1}\pi_{\mathbb{V}}$ (x)给出另一个下界，而取 $v = \pi_{\mathbb{V}}(x)$可得其上界。□

由（2.4），$\pi_{\mathbb{V}}$：$\mathbb{G} \to \mathbb{V}$ 是一个与膨胀交换的同态，也就是说，它是定义定义 2.14意义下的 h-同态。如果 $\mathbb{V}$ 是 c维的，并且固定了 $\mathbb{V}$的一组基，我们将 $\Pi_{\mathbb{V}} :=$ 坐标$_{\mathbb{V}} \circ \pi_{\mathbb{V}}$：$\mathbb{G} \to \mathbb{R}^c$ 记作群元素的坐标向量 $\pi_{\mathbb{V}}(x)$。投影之间的这种区别在第 4 节中很重要。

定义 2.7（阈值）。设

$$t_{\mathbb{G}} := \min\{s \in \{0,\dots,N\} \,:\, \mathcal{G}(\mathbb{G},k) = \mathcal{V}(\mathbb{G},k) \text{ for every } s \le k \le N\}.$$

$\mathbb{G}$ 的低余维阈值为 $v := N - t_{\mathbb{G}}$；因此，当 $N - v \le k \le N$时，内在格拉斯曼流形中的所有 k 维元素都是竖直的。

v 的取值取决于群，正如下列例子所示。这些例子依赖于以下对存在补群的竖直子群的刻画。

命题 2.8。若 $S_1 \subseteq \mathfrak{g}_1$是一个线性子空间，且 $\mathfrak{w} := S_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_\iota$，则竖直子群 $\mathbb{W} =$指数映射$(\mathfrak{w})$ 存在互补齐次子群，当且仅当对于某个阿贝尔子空间 $\mathfrak{h}$，有 $\mathfrak{g}_1 = S_1 \oplus \mathfrak{h}$；此时 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes$ 指数映射$(\mathfrak{h})$。此外，$\mathbb{W}$ 的每个齐性补群都具有这种形式，即为水平且阿贝尔的。

证明。令 $\mathbb{V} =$ exp$(\mathfrak{h})$ 为 $\mathbb{W}$ 的齐性补群。根据注 2.3，$\mathfrak{h}$ 是分层的；由于 $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{w} =$ {0} 且 $\mathfrak{w}$ 包含每个层 $\mathfrak{g}_j$（其中 $j \ge 2$），我们得到 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_1$。乘法映射 $\mathbb{W}\times\mathbb{V} \to \mathbb{G}$ 是光滑满射，因此根据萨德定理，$\dim\mathbb{W} + \dim\mathbb{V} \ge N$。于是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{w}\oplus\mathfrak{h}$ 且 $\mathfrak{g}_1 = S_1 \oplus \mathfrak{h}$。此外，$\mathfrak{h}$ 是一个子代数，因此$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_2 =$ {0}。

反之，设 $\mathfrak{g}_1 = S_1 \oplus \mathfrak{h}$，其中 $\mathfrak{h}$ 是阿贝尔的。则 $\mathfrak{h}$ 是一个子代数，$\mathbb{V} :=$ exp$(\mathfrak{h})$ 是一个水平齐次子群，且 $\mathbb{W}$ 是正规的，因此 $\mathbb{W}\mathbb{V}$ 是一个子群。由于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{w}\oplus\mathfrak{h}$，逆函数定理表明 $\mathbb{W}\mathbb{V}$ 包含 e 的一个邻域；开子群也是闭的，因此由连通性可知 $\mathbb{W}\mathbb{V} = \mathbb{G}$。最后，$\mathbb{W}\cap\mathbb{V} = \{0\}$，因为指数映射是单射且 $\mathfrak{w}\cap\mathfrak{h} = \{0\}$。□

例2.9。下面给出几个具体例子：

- 在 $\mathbb{H}^n$中，如 [50, 命题 2.17], 所证明的，有 $t_{\mathbb{H}^n} = n+1$，因此 $v = n$ 且低余维范围为 $n+1 \le k \le 2n+1$。

• 令 $V = \mathrm{span}\{X_1, \dots, X_4\}$ 和 $Z = \mathrm{span}\{Z_1, Z_2\}$。六维 H型代数 $\mathfrak{g} = V \oplus Z$ 的非零括号为

$$[X_1, X_2] = [X_3, X_4] = Z_1, \qquad [X_1, X_3] = -[X_2, X_4] = Z_2,$$

例如，参见 [12, (4.2)]。括号为 $\omega_1 Z_1 + \omega_2 Z_2$，其中

$$\omega_1 = X_1^* \wedge X_2^* + X_3^* \wedge X_4^*, \qquad \omega_2 = X_1^* \wedge X_3^* - X_2^* \wedge X_4^*.$$

对于 $(a, b) \neq (0,0)$，形式 $a\omega_1 + b\omega_2$ 的 Pfaffian 为 $a^2 + b^2 \neq 0$，因此 V 中不存在对它各向同性的三维子空间。因此，当 $\dim S = 3$ 时，$[S, S] = Z$。非垂直齐次子代数 $S \oplus Z'$ 的维数为 $\dim Z' \leq 1$，故 $\dim S \leq 2$，总维数为 ≤ 3。因此，对于 $4 \leq k \leq 6$，$\mathcal{G}(\mathbb{G}, k) = \mathcal{V}(\mathbb{G}, k)$。

锐性由互补子代数可得

$$\mathfrak{w}_0 = \mathrm{span}\{X_1, X_2, Z_1\}, \qquad \mathfrak{h}_0 = \mathrm{span}\{X_3, X_1 + X_4, Z_1 - Z_2\}.$$

事实上，$[X_3, X_1 + X_4] = Z_1 - Z_2$，它们的水平部分在 V 中互补，中心部分在 Z 中互补。二步BCH公式首先唯一确定水平因子，然后唯一确定中心因子。因此，$\exp(\mathfrak{w}_0)\exp(\mathfrak{h}_0) = \mathbb{G}$，且交为平凡的，所以 $t_{\mathbb{G}} = 4$ 且 $\upsilon = 2$。

• 在由 $r \geq 3$ 个生成元生成的自由二步群中，两个线性无关的水平向量永不交换。根据命题 2.8，因此，竖直子群仅在维数为 $N - 1$ 和 N时才有补子代数

$$\mathfrak{w} = \mathrm{span}\{X_2, \dots, X_r\} \oplus \mathrm{span}\{[X_i, X_j] \ : \ 1 \leq i < j \leq r, \ (i, j) \neq (1, 2)\}$$

定义了一个维数为 $N - 2$ 的非竖直子群 $\exp(\mathfrak{w})$，其补子群为 $\exp \mathrm{span}\{X_1、 [X_1, X_2]\}$，这同样由二步BCH公式得出。

余维为一且有补子群的子群，其一维补子位于 $\mathfrak{g}_1$ 或 $\mathfrak{g}_2$ 中。若是后一种情况，该子群将包含 $\mathfrak{g}_1$，进而包含 $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_2$，这不可能。因此，补子是水平的，而该子群是竖直的，从而证明了 $\upsilon = 1$。

注2.10。本文的结果仅要求相关的 k 维子群是竖直且有补子的，并且这些结果适用于每个 $1 \leq k \leq N$。若 $\mathbb{W} \in \mathbf{V}(\mathbb{G}, k)$ 有水平补空间 $\mathbb{V}$，则 $\Pi_{\mathbb{V}}$ 是一个光滑的 h-同态，映到 $\mathbb{R}^{N-k}$，其核为 $\mathbb{W}$，因此 $\mathbb{W}$ 是一个任意光滑类的 k 维 $\mathbb{G}$-正则曲面（定义 3.1）。反过来，如定义3.2之后所示，这类曲面的切子群包含于 $\mathbf{V}(\mathbb{G}, k)$ 中。因此，当 $\mathbf{V}(\mathbb{G}, k) \neq \emptyset$ 时，这些结论并非空泛。阈值 υ 标示了 $\mathbf{G}(\mathbb{G}, k)$ 中每个元素都是竖直元素的范围，但在该阈值以下，$\mathbf{V}(\mathbb{G}, k)$ 也可能非空。例如，设 $\mathbb{G} = \mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$，其中 $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{span}\{X, Y, U\}$，$\mathfrak{g}_2 = \mathrm{span}\{T\}$，且 $[X, Y] = T$ 是唯一非零括号。水平子群 $\exp(\mathrm{span}\{X, U\})$ 的补子为正规子群 $\exp(\mathrm{span}\{Y, T\})$，而每个三维齐次子群都包含 T，因为 $\mathfrak{g}_1$ 不是子代数；因此 $t_{\mathbb{G}} = 3$ 且 $\upsilon = 1$。尽管如此，$\exp(\mathrm{span}\{X, T\}) \in \mathbf{V}(\mathbb{G}, 2)$，其阿贝尔补子为 $\exp(\mathrm{span}\{Y, U\})$。并非其中每个二维竖直子群都有补子：根据命题 2.8，$\exp(\mathrm{span}\{U, T\})$ 就没有补子，因为 $\mathfrak{g}_1$ 的每个二维阿贝尔子空间都包含 U。

注记 2.11。 一个分裂垂直子群可能具有多个水平补子群，而其第一层的欧几里得正交补不一定是阿贝尔的。我们通过第一层赋予 $\mathcal{V}(\mathbb{G}, k)$ 度量。若 $P_{\mathbb{W}^1}$ 是 $\mathbb{G}^1$ 到 $\mathbb{W}^1$的正交投影，则我们令

$$\rho(\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2) := \|P_{\mathbb{W}_1^1} - P_{\mathbb{W}_2^1}\|_{\mathrm{op}}, \qquad \mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2 \in \mathcal{V}(\mathbb{G}, k). \tag{2.7}$$

在范围 $N-v\le k\le N$ 内，这也是 $\mathcal{G}(\mathbb{G},\ k)=\mathcal{V}(\mathbb{G},\ k)$ 上所采用的拓扑。

根据注 2.4，每个 $\mathbb{W}\in\mathcal{V}(\mathbb{G},\ k)$ 的豪斯多夫维数为

$$Q_{\mathbb{W}}=\dim\mathbb{W}^1+\sum_{j\ge2}j\dim\mathfrak{g}_j=Q-(N-k).$$

因此，对于下文考虑的垂直维数，我们作如下设定

$$k_{\mathrm{m}}:=Q-(N-k),\qquad 1\le k\le N. \tag{2.8}$$

2.3. 内在正则函数。从本小节起，环境群$\mathbb{G}$ 为 Carnot 群。其齐次子群仍可能只是分层的。

定义 2.12。设 $\Omega\subseteq\mathbb{G}$ 为开集，$m\in\mathbb{N}_0$，且 $\alpha\in[0,1]$。函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 若满足以下条件，则称为内在$(m,\ \alpha)$-正则，记作 $f\in\mathbf{C}^{m,\alpha}_{\mathbb{G}}(\Omega)$：

- 对于 $m=0$，f 在 $\alpha=0$时连续，并且在 $0<\alpha\le1$时关于 d局部 α-Hölder 连续；
- 对于 $m\ge1$，$\mathbf{X}^Jf$对每个满足 $d(J)\le m$ 的 J，都存在且在 Ω 上连续；并且当 $0<\alpha\le1$时，对于每个紧集 $K\Subset\Omega$ 以及每个满足 $d(J)=m$ 的 J，

$$\sup_{x\ne y\in K}\frac{|\mathbf{X}^Jf(x)-\mathbf{X}^Jf(y)|}{d(x,y)^\alpha}<\infty.$$

此外，我们记 $\mathbf{C}^m_{\mathbb{G}}(\Omega):=\mathbf{C}^{m,0}_{\mathbb{G}}(\Omega)$，并称其中的元素为内在 m-正则函数。对于 $F=(F_1,\dots,F_c)\in[\mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\Omega)]^c$，我们记 $\nabla_HF(p):=(X_jF_i(p))_{i\le c,\,j\le\ell}$表示水平雅可比矩阵。

一个齐次次数至多为 m 且中心位于 x_0 的齐次次数多项式$\sum_{d(J)\le m}a_J(x_0)(x_0^{-1}x)^J/J!$。对于 $f\in\mathbf{C}^m_{\mathbb{G}}(\Omega)$ 和 $x_0\in\Omega$，泰勒多项式$P_m[f](x_0,\cdot)$是唯一满足上述形式的多项式（见 [15, 第 2] 节），满足

$$\mathbf{X}^Jf(x_0)=\mathbf{X}^JP_m[f](x_0,x)\big|_{x=x_0}\qquad\text{for all } d(J)\le m, \tag{2.9}$$

也就是说，

$$P_m[f](x_0,x)=\sum_{d(J)\le m}a_J(x_0)\,\frac{(x_0^{-1}x)^J}{J!}, \tag{2.10}$$

其中，根据 [15,公式 (2.10)] 和 [59, 公式 (2.9)]，

$$a_J(x_0)=\sum_{\substack{|I|\le|J|\\ d(I)=d(J)}}\beta_{JI}\mathbf{X}^If(x_0), \tag{2.11}$$

对于仅依赖于 $\mathbb{G}$ 和适配基的普适常数 β_{JI}，当 $d(I)=d(J)$、$|I|=|J|$ 以及 $I\ne J$ 时，有 $\beta_{JJ}=1$和 $\beta_{JI}=0$。

下一个定理的两个逐点断言源自 [26, 定理 1.42 和推论 1。44]；关于这一类，另请参见 [15, 定理 2。12], 而在二阶群中，参见 [11, 定理 1]。最后一个断言中的一致 Hölder 余项是 第 4 节中所采用的形式。

定理 2.13。令 $\mathbb{G}$ 为 *Carnot*，且 $f\in\mathbf{C}^m_{\mathbb{G}}(\Omega)$，满足 $m\ge1$。则对于每个 $x_0\in\Omega$，

$$\limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-P_{m-1}[f](x_0,x)|}{d(x,x_0)^m}<\infty,\qquad\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)-P_m[f](x_0,x)|}{d(x,x_0)^m}=0.$$

此外，若 $f \in \mathbf{C}^{m\,\alpha}_{\mathbb{G}}$，(Ω) 满足 $0 < \alpha \leq 1$，则对于每个紧集 $K \Subset \Omega$，存在 C、$r_0 > 0$，使得

$$|f(x) - P_m[f](x_0, x)| \leq C d(x, x_0)^{m+\alpha}, \qquad \forall\, x_0 \in K,\ \forall\, x \in \Omega \ \ s.t.\ \ d(x, x_0) < r_0.$$

证明。对于 $x_0\overline{B}_r(e) \subset \Omega$ 集合

$$\eta_m(x_0, r) := \max_{d(J)=m} \sup_{\|z\| \leq r} \left|\mathbf{X}^J f(x_0 z) - \mathbf{X}^J f(x_0)\right|.$$

分层泰勒不等式 [26, 定理 1。42]（另见 [26,推论 1。44]）给出了常数 b_m、$C_m \geq 1$，它们仅取决于 m、群和齐次范数，使得任意 $g \in C^\infty(\mathbb{G})$ 其导数 $\mathbf{X}^J g(x_0)$、$d(J) \leq m$均为零的函数都满足

$$|g(x_0 h)| \leq C_m \|h\|^m \max_{d(J)=m} \sup_{\|z\| \leq b_m \|h\|} |\mathbf{X}^J g(x_0 z)|. \tag{2.12}$$

事实上，[26, 推论 1。44] 通过差值 $\mathbf{X}^J g(x_0 z) - \mathbf{X}^J g(x_0)$ 对余项进行界定；当 g 在 x_0 处的喷流为零时，这些差值可化为 $\mathbf{X}^J g(x_0 z)$。此外，无论取哪一族齐次次数为 m 的左不变算子来求上确界，对于光滑函数，根据庞加莱–伯克霍夫–维特定理和齐次性，其中每一个算子都是有序算子 $\mathbf{X}^J$ 的线性组合，其中 $d(J) = m$；这只会改变常数 C_m。

通过光滑化，我们转而考虑$\mathbf{C}^m_{\mathbb{G}}(\Omega)$。令 $x_0 B_{b_m\|h\|}(e) \subset \Omega$，取在该紧集附近等于 1 的固定函数 $\chi \in C^\infty_c(\Omega)$，并对具有 ε 很小的光滑核 $\rho_\varepsilon \in C^\infty_c(B_\varepsilon(e))$，考虑$f_\varepsilon(x) := \int \rho_\varepsilon(y) f(y^{-1}x)\, dy$。由 $\mathbb{G}$ 的幺模性，$f_\varepsilon(x) = \int \rho_\varepsilon(xz^{-1}) f(z)\, dz$，当 ε 很小时，它在 supp(χ) 的某个邻域上光滑。由左不变性，

$$\mathbf{X}^J f_\varepsilon(x) = \int \rho_\varepsilon(y)\, \mathbf{X}^J f(y^{-1}x)\, dy \quad \text{for } d(J) \leq m \implies \mathbf{X}^J f_\varepsilon \to \mathbf{X}^J f$$

局部一致地。将 (2.12) 应用于 $g_\varepsilon := \chi f_\varepsilon - P_m[\chi f_\varepsilon](x_0, \cdot)$。由 (2.9)，对于 $d(J) \leq m$，$\mathbf{X}^J g_\varepsilon(x_0) = 0$。对于 $d(J) = m$，齐次性使 $\mathbf{X}^J P_m[\chi f_\varepsilon](x_0, \cdot)$ 为常数，等于 $\mathbf{X}^J f_\varepsilon(x_0)$，因此对于 $\|z\| \leq b_m\|h\|$，$\mathbf{X}^J g_\varepsilon(x_0 z) = \mathbf{X}^J f_\varepsilon(x_0 z) - \mathbf{X}^J f_\varepsilon(x_0)$。令 $\varepsilon \to 0$，并对系数使用 (2.11)，得到

$$\left|f(x_0 h) - P_m[f](x_0, x_0 h)\right| \leq C_m \|h\|^m \eta_m(x_0, b_m\|h\|) \quad \text{if } x_0 \overline{B}_{b_m\|h\|}(e) \subset \Omega. \tag{2.13}$$

高阶导数的连续性使得（2.13）的右端在每个 x_0 处为 $o(\|h\|^m)$，这就是第二个极限。由（2.11）可知，$P_m[f](x_0, \cdot) - P_{m-1}[f](x_0, \cdot)$ 关于 $h = x_0^{-1}x$ 是 m 次齐性的，因此 $O(\|h\|^m)$；结合（2.13）即得第一个断言。最后，若 $K \Subset \Omega$ 且 $K B_{b_m r_0}(e) \Subset \Omega$，则有限个 $\mathbf{X}^J f$, $d(J) = m$ 在该紧加厚集上具有一个共同的 α-赫尔德常数，因此对于 $x_0 \in K$ 和 $\|h\| < r_0$，有 $\eta_m(x_0, b_m\|h\|) \leq C\|h\|^\alpha$，而（2.13）给出了赫尔德估计。□

本文始终采用 [54] 意义下的 Pansu 可微性。设 $\mathbb{G}_1$、$\mathbb{G}_2$ 是带有膨胀 δ^1_λ、δ^2_λ 和齐性距离 d_1、d_2 的分次群。

定义 2.14。群同态 $L : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ 若满足*h*-同态 的条件，即$L \circ \delta^1_\lambda = \delta^2_\lambda \circ L$ 对所有 $\lambda > 0$均成立。当 $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ 为 Carnot 群时，映射 $f\colon \Omega \to \mathbb{G}_2$，$\Omega$ 为*Pansu* 可微 的开集，则称其在 $x \in \Omega$ 处可微，若存在 h-同态 $d_H f(x) : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$，使得

$$d_2\big(f(x)^{-1} f(x'),\, d_H f(x)(x^{-1}x')\big) = o(d_1(x, x')) \qquad \text{as } x' \to x.$$

每个 $F \in [\mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\Omega)]^c$ 在每个 $p \in \Omega$处均为庞苏可微，其微分为$d_H F(p)(q) = \nabla_H F(p)\,(q_1, \ldots, q_\ell)^T$，其中 q_i是 q的指数坐标。由定理 2.13 可逐分量得到这一结论，其中 定理 2.13 中的 $m = 1$第一层上的上述线性映射根据式（2.3）是一个 h-同态。

3. 内在可整流性

3.1. 内在正则曲面。 我们从主要定义开始。

定义 3.1。 设 $1 \le k \le N$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in [0,1]$。集合 $S \subset \mathbb{G}$ 是一个 k维$\mathbb{G}$类正则曲面 $(m,\ \alpha)$（类 m，若 $\alpha = 0$），当且仅当每个 $p \in S$ 都有一个开邻域 Ω，且存在函数 $f \in [\mathbf{C}^{m,\alpha}_{\mathbb{G}}, (\Omega)]^{N-k}$ 使得：

(a) 对每个 $q \in \Omega$，Pansu 微分 $d_H f(q) : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^{N-k}$是满射，且其核在 $\mathbb{G}$中有一个齐性补群；(b) $S \cap \Omega = \{q \in \Omega : f(q) = 0\}$。

按照约定 $\mathbb{R}^0 = \{0\}$，到 $\mathbb{R}^0$ 的唯一映射是满射，其核为 $\mathbb{G}$，因此任何类的 N维正则曲面恰好是 $\mathbb{G}$ 的开子集。对于类 1，这一概念最初在余维一的海森堡群中由 [29] 引入，在低余维中由 [32] 引入；而在 Carnot 群中，超曲面的相关概念由 [31] 引入；另见 [50, 定义 2。10] 此外，关于 Carnot 群中低余维的情形，见 [27, 40]。

定义 3.2. 设 S 是一个属于类 1、$p \in S$ 的 k 维 $\mathbb{G}$-正则曲面，且 f 是一个局部定义函数。S 在 p 处的齐次切子群 为

$$T_p S := \{q \in \mathbb{G} \ : \ d_H f(p)(q) = 0\}.$$

注意，$T_p S$ 不依赖于 f [40, 引理 2.14(iii)]，并且根据定义 3.1(a) 属于 G($\mathbb{G}, k$)。由于 $d_H f(p)$ 的取值属于第一层群 $\mathbb{R}^{N-k}$，它在每个高层上都为零；因此 $T_p S$ 是垂直且正规的，所以 $T_p S \in$ V($\mathbb{G}, k$)。根据命题 2.8，$T_p S$ 的每个补群都是水平的；这种补群 $\mathbb{V}_p$ 通常不是典范的，且 $\mathbb{G} = T_p S \rtimes \mathbb{V}_p$。按照 [40] 的术语，$p$ 是 f 的一个分裂正则点。

定义3.3. 设 $1 \le k \le N$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in [0,1]$。若一个 $\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-可测集 $E \subset \mathbb{G}$ 满足：存在可数多个 k 维 $\mathbb{G}$-正则曲面 S_i，它们属于类 (m,α)，且 $\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}(E \setminus \bigcup_i S_i) = 0$，则称其为 $(k,\mathbb{G})$-类 $(, \alpha)$ 可整流集。

对于 $m = 1$ 和 $\alpha = 0$，这就是 [29, 32, 50] 的低余维 Heisenberg 设定中的正则曲面可整流性。此外，[30] 证明了二阶 Carnot 群中约化边界的余维一可整流性。

定义 3.4。 设 $1 \le k \le N$, $\mathbb{W} \in \mathcal{V}(\mathbb{G}, k)$，且 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}$ 的 $\mathbb{V}$ 为水平。若集合 $\Sigma \subset \mathbb{G}$ 是定义在 $(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ 上的一个内在图，则称其为内在图，当且仅当 $\Sigma = \{w \cdot \phi(w) : \ w \in U\}$，其中某些 $U \subset \mathbb{W}$ 和 ϕ 满足 $U \to \mathbb{V}$。对于 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in [0,1]$，若 U 在 $\mathbb{W}$ 中是开集，Σ 是一个 k 维的 $\mathbb{G}$- 正则曲面，且属于类 (m,α)，则记为 $\phi \in \mathbf{C}^{m,\alpha}_{\mathbb{W},\mathbb{V}},(U)$，并且

$$T_{w\cdot\phi(w)}\Sigma \cap \mathbb{V} = \{0\} \qquad \text{for every } w \in U.$$

我们称这样的图块为分裂正则，并记为 $\mathbf{C}^{m}_{\mathbb{W},\mathbb{V}} := \mathbf{C}^{m,0}_{\mathbb{W},\mathbb{V}},$。

一个内在$\mathbf{C}^1_H$ 图是指其图函数属于$\mathbf{C}^1_{\mathbb{W}类\mathbb{V}}$，这与 [40, 定义 2.13]一致。记号$\mathbf{C}^{m,\alpha}_{\mathbb{W},\mathbb{V}}$，约束的是图，而不是图函数，因为我们从不要求 ϕ 沿$\mathbb{W}$的左不变向量场可微，而这可能并不成立。对于 $\phi : \ U \subset \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ 我们记 $\Phi_\phi(w) := w \cdot \phi(w)$，因此 $\Phi_\phi(U)$就是图块。与 $\mathbb{V}$ 的横截性是开性质，因此内在隐函数定理在缩小后给出分裂正则片。以下局部表示见 [40, 引理 2.14(i)]，，其证明由 [40, 引理 2.10 和 2.12]推出。

定理 3.5。 设 $S \subset \mathbb{G}$ 是一个 k维的 $\mathbb{G}$正则曲面，属于1类， $p \in S$，并且$\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}$满足 $\mathbb{W} \in V(\mathbb{G}, k)$ 以及 $T_pS \cap \mathbb{V} = \{0\}$。则存在 p的一个开邻域Ω 、一个包含 $\pi_{\mathbb{W}}(p)$的开集 $U \subset \mathbb{W}$ ，以及一个连续的 $\varphi \in \mathbf{C}^1_{\mathbb{W},\, \mathbb{V}}(U)$ ，使得

$$S \cap \Omega = \{w \cdot \varphi(w) \ : \ w \in U\}.$$

特别地，对于每个 $w \in U$， $T_{w\cdot\varphi(w)}S \cap \mathbb{V} = \{0\}$。

由命题 2.8 应用于 $\mathbb{W}$ 可知，子群 $\mathbb{V}$ 是水平的。在 [40] 中，假设 T_pS 是沿着 $\mathbb{V}$、以 $\mathbb{W}$ 为底的内在图；这等价于 $T_pS \cap \mathbb{V} = \{0\}$。事实上，若 $\pi_{\mathbb{W}}(t_1) = \pi_{\mathbb{W}}(t_2)$，其中 t_1, $t_2 \in T_pS$，则 $t_1^{-1}t_2 = \pi_{\mathbb{V}}(t_1)^{-1}\pi_{\mathbb{V}}(t_2) \in T_pS \cap \mathbb{V}$；因此 $\pi_{\mathbb{W}}|_{T_pS}$ 是单射，故由域不变性定理可知它是开映射，且其像是 $\mathbb{W}$ 中包含 e 的膨胀不变开邻域，因而等于整个 $\mathbb{W}$。

3.2. **近似切子群**。

定义 3.6。 按照 [56], , 设 $s > 0$，令 μ 为 $\mathbb{G}$ 上的拉东测度，并设 $x \in \mathbb{G}$。 μ 在 x 处的 s 维近似上切锥 为

$$\mathrm{Tan}^{*s}(\mu, x) := \{v \in \mathbb{G} \ : \ \Theta^{*s}(\mu \llcorner \mathcal{X}(x, v, \varepsilon), x) > 0 \text{ for every } \varepsilon > 0\},$$

其中 $\mathcal{X}(x,\ v,\ \varepsilon) := \{y \in \mathbb{G} :\ d(v,\ \delta_r(x^{-1}y)) < \varepsilon$ 对某个 $r > 0\}$成立。这些方向锥是开集，因为它们是连续映射下开球逆映射的并集。

对于带有水平补空间 $\mathbb{V}$ 的 $x \in \mathbb{G}, \mathbb{W} \in \mathcal{V}(\mathbb{G},\ k)$，以及 $\eta > 0$，顶点为 x、轴为 $\mathbb{W}$、孔径为 η 的锥为

$$\mathcal{C}(x, \mathbb{W}, \mathbb{V}, \eta) := \{z \in \mathbb{G} \ : \ \|\pi_{\mathbb{V}}(x^{-1}z)\| \le \eta \, \|\pi_{\mathbb{W}}(x^{-1}z)\|\}. \tag{3.1}$$

以下结果是 [56,引理 3.6]的齐次群版本。为完整起见，我们给出证明。

引理 3.7。 固定 $1 \le k \le N$。设 $A \subset \mathbb{G}$ 是 $H^{k_{\mathrm{m}}}$-可测的且局部 $H^{k_{\mathrm{m}}}$-有限的，$x \in \mathbb{G}$，并且 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}$ 满足 $\mathbb{W} \in V(\mathbb{G}, k)$。以下各项等价:

(i) $\mathrm{Tan}^{*k_{\mathrm{m}}}(H^{k_{\mathrm{m}}} \llcorner A, x) \subseteq \mathbb{W}$; (ii) 对于每个 $\eta > 0$, $\Theta^{*k_{\mathrm{m}}}($ $H^{k_{\mathrm{m}}} \llcorner (A \setminus C(x, \mathbb{W}, \mathbb{V}, \eta))\ x) = 0$; (iii) 对于每个 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{r \downarrow 0} r^{-k_{\mathrm{m}}} \mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}\Big(A \cap B_r(x) \cap \{z \in \mathbb{G} \ : \ \|\pi_{\mathbb{V}}(x^{-1}z)\| > \varepsilon r\}\Big) = 0.$$

证明。由于 $k \ge 1$, $s := k_{\mathrm{m}} > 0$, 且 $\mathbb{V}$ 由命题 2.8 可知是水平的。记 $\mu := \mathrm{H}^s \llcorner A$ 为一个局部有限拉东测度， $h(g) := \|\pi_{\mathbb{W}}(g)\|$, 以及 $v(g) := \|\pi_{\mathbb{V}}(g)\|$ （两个函数均连续且一阶齐次）。对于 $\eta > 0$, 令 $D_\eta := \{g :\ v(g) > \eta h(g)\}$, 于是 $A \setminus \mathrm{C}(x, \mathbb{W}, \mathbb{V}, \eta) = A \cap xD_\eta$。

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。若 $K \subset \mathbb{G} \setminus \mathrm{Tan}^{*s}(\mu, x)$ 是紧集，则

$$\Theta^{*s}(\mu \llcorner \mathcal{X}(x, K), x) = 0, \quad \mathcal{X}(x, K) := \{y \ : \ \delta_r(x^{-1}y) \in K \text{ for some } r > 0\}. \tag{3.2}$$

这里，$\mathrm{X}(x, K) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x\{\delta_t u :\ u \in K,\ 1/n \le t \le n\}$ 是紧集的可数并，因此是博雷尔集。每个 $u \in K$ 都有 $\varepsilon_u > 0$ 满足 $\Theta^{*s}(\mu \llcorner \mathrm{X}(x, u, \varepsilon_u)\ x) = 0$, 且有限个球 $B_{\varepsilon_u}(u)$ 覆盖 K，因此 $\mathrm{X}(x, K)$ 包含于有限个此类锥的并中。假设 (i) 成立并固定 $\eta > 0$。紧集 $K_\eta := \{\|g\| = 1,\ v(g) \ge \eta h(g)\}$ 与 $\mathbb{W}$不相交，因此也与 $\mathrm{Tan}^{*s}(\mu, x)$ 不相交；又 $D_\eta \subset \{\delta_t u :\ t > 0,\ u \in K_\eta\}$，故由 (3.2) 得到 (ii)。反过来，假设 (ii) 成立并令 $u \notin \mathbb{W}$。则 $v(u) > 0$，由连续性和齐次性可得 $\eta, \varepsilon > 0$ 满足 $\mathrm{X}(x, u, \varepsilon) \subset xD_\eta$; 因此 $\Theta^{*s}(\mu \llcorner \mathrm{X}(x, u, \varepsilon)\ x) = 0$ 且 $u \notin \mathrm{Tan}^{*s}(\mu, x)$ 。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)。若 $z \in B_r(x)$ 且 $v(x^{-1}z) > \varepsilon r$，则 $v(x^{-1}z) > (\varepsilon/C_{\mathbb{W},\,\mathbb{V}})h(x^{-1}z)$ 根据（2.5），故 (iii) 中的集合包含于 $A \cap xD_{\varepsilon/C_{\mathbb{W},\,\mathbb{V}}}$。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). 固定 $\eta > 0$，选取满足 $\tau := \varepsilon(1+\eta^{-1}) < 1$ 的 $\varepsilon > 0$，并令 $F(r) := \mu(B_r(x) \cap xD_\eta)$，以及 $E_\varepsilon(r) := A \cap B_r(x) \cap \{z : v(x^{-1}z) > \varepsilon r\}$。若 $z \in A \cap B_r(x) \cap xD_\eta$，但 $z \notin E_\varepsilon(r)$，则 $h(x^{-1}z) < \eta^{-1}v(x^{-1}z) \le \eta^{-1}\varepsilon r$，因此 $\|x^{-1}z\| \le h(x^{-1}z) + v(x^{-1}z) < \tau r$。于是 $F(r) \le \mu(E_\varepsilon(r)) + F(\tau r)$，反复迭代可得，

$$\frac{F(r)}{r^s} \le \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{js} \frac{\mu(E_\varepsilon(\tau^j r))}{(\tau^j r)^s} \le \frac{1}{1-\tau^s} \sup_{0<t\le r} \frac{\mu(E_\varepsilon(t))}{t^s}.$$

对于固定的 r，集合 $B_{\tau^n r}(x) \cap xD_\eta$ 递减至空集，因为 $x \notin xD_\eta$。因此，局部有限性给出 $F(\tau^n r)/r^s \to 0$，从而迭代过程合理；而 $s > 0$ 保证几何级数收敛。由 (iii)，右端趋于零。□

条件 (i) 不涉及 $\mathbb{V}$。因此，如果 (ii) 或 (iii) 对 $\mathbb{W}$的一个水平补空间成立，那么它对其他任何水平补空间也成立；在 定理 1.2 和5.2的证明中改变补空间时，这一点会被默认为已知。

4. 惠特尼延拓与适配图喷流

本节汇集 定理 1.2和5.2证明所需的工具。更确切地说，第 4.1 节回顾惠特尼延拓定理，该定理将闭集上的相容喷流转化为环境空间中的 $\mathbf{C}^{m\,\alpha}_{\mathbb{G}}$，其函数的非临界水平集是正则曲面（引理 4.4）。第 4.2 节在固定的一阶图块 M上展开工作。具体而言，引理4.5将经过 M 中一点的正则曲面转化为分裂投影的标准形多项式；引理 4.6确定 M 的放大；引理 4.7利用其在 M 的正密度子集上的取值对标准形多项式进行界定；而引理 4.8则选取相容喷流，并由此构造正则曲面。这些结果用于 定理 1.3证明的步骤 2–4。

4.1. 惠特尼延拓。对于闭集 $F \subset \mathbb{G}$ 上的实值喷流 $\{f_J\}_{d(J)\le m}$ 和 $x_0 \in F$，令 $P_m[\{f_J\}_{d(J)\le m}](x_0,\cdot)$ 表示多项式 (2.10)，其系数由 (2.11) 给出，其中每个 $\mathbf{X}^I f(x_0)$ 都替换为 $f_I(x_0)$。将以 x_0 为中心、齐次次数至多为 m 的多项式映射到其喷流 $(\mathbf{X}^J P(x_0))_{d(J)\le m}$ 的线性映射，由 (2.9) 中的唯一性可知是单射，因而也是双射，因为两个空间的维数均为 $\#\{J : d(J) \le m\}$。由同一唯一性，每个这样的多项式都是其自身的泰勒多项式（另见 [15, 命题 2.13]），因此 (2.11) 是逆映射。所以

$$\mathbf{X}^J P_m[\{f_I\}_{d(I)\le m}](x_0,x)\big|_{x=x_0} = f_J(x_0), \qquad d(J) \le m. \tag{4.1}$$

我们使用 Vodopyanov–Pupyshev 的惠特尼延拓定理 [59,定理 4],的如下表述： [15, 定理 2.17]。

定理 4.1。设 $m \in \mathbb{N}$, $F \subset \mathbb{G}$ 闭，且 $\{f_J\}_{d(J)\le m}$ 是定义在 F 上的实值喷流，使得 （i）$\sup_K |f_J| < \infty$ 对每个紧集 $K \subset F$ 以及每个 $d(J) \le m$ 均成立，并且 （ii）对每个 $\bar{x} \in F$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\left| f_J(y) - \mathbf{X}^J P_m[\{f_I\}_{d(I)\le m}](x,y) \right| \le \varepsilon\, d(x,y)^{m-d(J)} \tag{4.2}$$

每当 $x \ne y \in F \cap B_\delta(\bar{x})$ 且 $d(J) \le m$。则存在 $u \in \mathbf{C}^m_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$，使得对每个 $d(J) \le m$，都有 $\mathbf{X}^J u|_F = f_J$。

定义 4.2。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $m < \gamma \leq m+1$。闭集$F \subset \mathbb{G}$上的喷流 $\{f_J\}^{d(J)\leq m}$ 属于 Lip(γ, F)，若存在 $C_F > 0$，使得对所有 $x, y \in F$ 以及 $d\,(J) \leq m$,

$$|f_J(x)| \leq C_F, \qquad \left|f_J(y) - \mathbf{X}^J P_m[\{f_I\}_{d(I)\leq m}](x,y)\right| \leq C_F\, d(x,y)^{\gamma - d(J)}. \tag{4.3}$$

我们记 $u \in \mathrm{Lip}(\gamma,\ \mathbb{G})$，如果导数 $\mathbf{X}^J u$，$d(J) \leq m$存在，并且其喷流在整个群 $F = \mathbb{G}$上满足 (4.3)。$F = \mathbb{G}$。

定理 4.3。设 $m \in \mathbb{N}, \alpha \in (0,1]$,和 $F \subset \mathbb{G}$ 为闭集。如果 $\{f_J\}^{d(J)\leq m} \in \mathrm{Lip}(m+\alpha, F)$，则存在 $u \in \mathrm{Lip}(m+\alpha, \mathbb{G})$，使得对于所有 $d(J) \leq m$都有 $\mathbf{X}^J u|_F = f_J$。确切地说，$u \in \mathbf{C}^{m\,\alpha}_{\mathbb{G}}\,(\mathbb{G})$。

这就是 [59, 定理 2 和引理 6]，，其表述见 [15, 定理 2。21]。最后的包含关系是 [15,引理 2。20]。注意，根据 (4.1)，(4.3) 中的多项式项在 $y \to x$ 时趋于 $\mathrm{X}^J u(x)$，因此每个 $\mathrm{X}^J u$都是连续的。如果 $d(J) = m$，则该项关于 $x^{-1}y$是零次齐次的，因此等于 $\mathrm{X}^J u(x)$，而 (4.3) 就是 α-赫尔德估计。

引理 4.4。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in [0,1]$，设 $\mathbb{V}$ 为维数为 $1 \leq c < N$ 的水平子群，设 V_1、...、V_c 为 李($\mathbb{V}$) 的一组基，并设 $F \in [\mathbf{C}^{m\,\alpha}_{\mathbb{G}}\,(\mathbb{G})]^c$。如果对于 $i = 1$、...、c，在集合 $K \subset \mathbb{G}$ 上有 $F = 0$ 和 $V_i F = e_i$，那么 K 包含于一个类为 (m, α) 的、$\mathbb{G}$-正则的 $N-c$) 维曲面中。

证明。矩阵 $(V_j F_i(q))_{i,\ j}$ 在给定基下表示 $d_H F(q)|_{\mathbb{V}}$，因此

$$\Omega := \left\{q \ :\ \|(V_j F_i(q))_{i,j} - I_c\|_{\mathrm{op}} < \tfrac{1}{2}\right\}$$

是开集，包含 K，并且对于 $q \in \Omega$，$d_H F(q)|_{\mathbb{V}}$ 可逆。对于这样的 q，$d_H F(q)$ 是满射，且 ker $d_H F(q) \cap \mathbb{V} = \{0\}$。此外，对于 $g \in \mathbb{G}$，存在 $v \in \mathbb{V}$，使得 $d_H F(q)(v) = d_H F(q)(g)$, 因此 $gv^{-1} \in$ker $d_H F(q)$。所以，正规齐次子群 ker $d_H F(q)$ 由 $\mathbb{V}$ 补充；根据定义 3.1，集合 $F^{-1}(0) \cap \Omega$ 是一个包含 K 的、类为 (m, α) 的 $\mathbb{G}$-正则 $(N-c)$ 维曲面。□

4.2. 适配图喷流与正则选择。由于参数子群 $\mathbb{W}$不一定是 Carnot 群（注 2.3），Carnot 群上的 Whitney 定理和 Lusin 定理不适用于这些子群，因此我们将在 $\mathbb{G}$上处理环境喷射。在本小节中，我们固定 $1 \leq k \leq N$、一个子群 $\mathbb{W} \in \mathrm{V}(\mathbb{G}, k)$，以及一个具有分裂 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}$的水平子群 $\mathbb{V}$。令 $c := \dim \mathbb{V} = N - k$ 和 $s := k_{\mathrm{m}}$，并通过 Lie($\mathbb{V}$) 的一组基 $V_1, \ldots, V_c$ 将 $\mathbb{V}$ 与 $\mathbb{R}^c$ 等同。我们用 $\Pi_{\mathbb{V}} \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}^c$ 表示到 $\mathbb{V}$ 上的分裂投影的坐标；该投影是一个齐次同态，且在$\mathbb{V}$上等于恒等映射，因此 $V_i \Pi_{\mathbb{V}} = e_i$。最后，$M = \Phi_\phi(U)$ 是定义在开集 $U \subset \mathbb{W}$ 上、取值于 $\mathbb{V}$ 的分裂正则 C^1_H 内在图。我们取 M 为相对紧集，且其闭包包含于一个更大的分裂正则图坐标图中。因此，对于每个 $x \in M$，$\mathbb{V}$ 都是 $T_x M$ 的补空间，并且 $\mathrm{H}^s(M) < \infty$，依据 [40, 定理 2.17]。

附属于某一点的常数，例如 C_p，r_p，ω_p 在引理4.5 和 L_p 在引理 4.8中，都只是逐点成立；而紧片段上的一致性，只有在引理 4.8的证明步骤 3 中通过引理 A.3才能获得。

我们将 $\mathcal{N}^m_{\mathbb{V}}$记为由齐次次数不超过 m 的标量多项式 P组成的有限维空间 P，其中对于所有 $x \in \mathbb{G}$ 和 $v \in \mathbb{V}$，有 $xv(= P)\, x$，或者等价地，对于任意分裂 $\mathbb{G} = \mathbb{T} \rtimes \mathbb{V}$，都有 $P = P \circ \pi_{\mathbb{T}}$。该空间既不依赖于基点，也不依赖于 $\mathbb{V}$ 的补空间，并且对于每个 $P \in \mathcal{N}^m_{\mathbb{V}}$，都有 $V_i P \equiv 0$。

引理4.5。设 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha\in[0,1]$，令 S 为一个 k 维的 $\mathbb{G}$ 正则曲面，其类为 (m,α)，并令 $p\in S$ 满足 $T_pS\cap\mathbb{V}=\{0\}$，使得 $\mathbb{G}=T_pS\rtimes\mathbb{V}$。那么，当 $\alpha>0$ 时，存在 $r_p>0$、$C_p<\infty$，以及带有 $R_p(p)=\Pi_{\mathbb{V}}(p)$ 的 $N_{\mathbb{V}}^{m}]^c$，使得

$$|\Pi_{\mathbb{V}}(q)-R_p(q)|\le\begin{cases}C_p\,d(p,q)^{m+\alpha}, & \alpha>0,\\ \omega_p(d(p,q))\,d(p,q)^m, & \alpha=0,\end{cases}\tag{4.4}$$

对每个 $q\in S\cap B_{r_p}(p)$ $\omega_p(r)\downarrow 0$，当 $r\downarrow 0$ 时均成立。

证明。如果 $c=0$，则无需证明。令 $c>0$，并令 $F\in[\mathbf{C}_{\mathbb{G}}^{m\,\alpha}$，$(\Omega)\,]^c$ 在 p 的某个开邻域 Ω 中定义S。由于 $\ker d_HF(p)=T_pS$ 被 $\mathbb{V}$ 补充，映射 $d_HF(p)|_{\mathbb{V}}$ 可逆。因此，以 $(d_HF(p)|_{\mathbb{V}})^{-1}\circ F$ 替换 F 后，不妨设$d_HF(p)|_{\mathbb{V}}=\mathrm{Id}$。令 $\varpi\colon\ \mathbb{G}\to\mathbb{V}$ 为分裂 $T_pS\rtimes\mathbb{V}$ 的投影，并写作$g=\tau(g)\cdot\varpi(g)$，其中 $\tau(g)\in T_pS$。由（2.4），ϖ 是一个 h-同态，因此在指数坐标中是线性的；由（2.3），τ 是多项式并且与膨胀交换。

令 $P:=P_m[F](p,\cdot)$ 和 $P(\tau,v):=P(p\cdot\tau\cdot v)$，其中 $\tau\in T_pS$和 $v\in\mathbb{V}$是一个取值于 $\mathbb{R}^c$的多项式。我们使用乘积膨胀 $(\tau,v)\mapsto(\delta_t\tau,\delta_tv)$，在这种膨胀下，$v$ 的次数为一。对于它们，$P=P_1+\cdots+P_m$可分解为常数项为零的齐次分量，因为 $F(p)=0$，且根据 $d_HF(p)$的归一化，$P_1(\tau,v)=v$。记多项式 Q的次数为 r 的分量为 $[Q]_r$，令 $\psi_1:=0$；对于 $2\le r\le m$，定义取值于 $\mathbb{R}^c\cong\mathbb{V}$的多项式 ψ_r，它定义在 T_pS上，齐次次数为 r，如下：

$$\psi_r(\tau):=-\big[\widehat{P}(\tau,\psi_{<r}(\tau))\big]_r,\qquad \psi_{<r}:=\sum_{h<r}\psi_h.\tag{4.5}$$

对于 $P-P_1$ 的每个单项式的齐次次数都至少为二。因此，将一个一次v因子替换为 ψ_r 会得到次数至少为 $r+1$的项。因此，将 $\psi_{<r}$替换为 $\psi_{<r}+\psi_r$，只会通过 $P_1=v$改变次数至多为 r 的部分，而次数为 r 的分量变为$\psi_r+[P(\tau,\ \psi_{<r})]_r=0$。因此，$\psi_p:=\sum_{r=2}^m\psi_r$（$\psi_p:=0$ 若 $m=1$）满足 $\psi_p(e)=0$，并且

$$P\big(p\cdot\tau\cdot\psi_p(\tau)\big)=O(\|\tau\|^{m+1})\qquad\text{as }\tau\to e.\tag{4.6}$$

现在我们可以将候选多项式定义为

$$R_p(x):=\Pi_{\mathbb{V}}(p)+\Pi_{\mathbb{V}}(\tau(g))+\psi_p(\tau(g)),\qquad g:=p^{-1}x.\tag{4.7}$$

对于 $m=1$，$R_p(x)=\Pi_{\mathbb{V}}(x)-\varpi(p^{-1}x)$。一般而言，$R_p$ 是关于 g 的次数至多为 m 的齐次次数多项式，因此根据 (2.3)，它也是关于 x 的多项式。由于对于 $v'\in\mathbb{V}$，$\tau(gv')=\tau(g)$，它在 $\mathbb{V}$ 的左陪集上为常数，因此 $R_p\in[\mathbf{N}_{\mathbb{V}}^{m}]^c$。此外，$R_p(p)=\Pi_{\mathbb{V}}(p)$，因为 $\psi_p(e)=0$。

令 $q\in S\cap B_{r_p}(p)$，其中 $r_p>0$ 将在下文固定，满足 $B_{r_p}(p)\subset\Omega$，且 r_p 不超过定理 2.13 对于 $K=\{p\}$ 的半径 r_0，并设 $\tau:=\tau(p^{-1}q)$ 和 $v:=\varpi(p^{-1}q)$。由于 $\Pi_{\mathbb{V}}$ 是一个在 $\mathbb{V}$ 上等于恒等映射的同态，我们有

$$\Pi_{\mathbb{V}}(q)=\Pi_{\mathbb{V}}(p)+\Pi_{\mathbb{V}}(\tau)+v\implies\Pi_{\mathbb{V}}(q)-R_p(q)=v-\psi_p(\tau).$$

由于 $F(q)=0$，定理 2.13 给出：若 $\alpha>0$，则 $|P(q)|\le Cd(p,q)^{m+\alpha}$；若 $\alpha=0$，则 $|P(q)|=o(d(p,q)^m)$；而 (2.5) 和 (4.6) 给出

$$|P(p\cdot\tau\cdot\psi_p(\tau))|\le Cd(p,q)^{m+1}.$$

映射 $\Gamma_\tau(w):=P(p\cdot\tau\cdot w)$，$w\in\mathbb{V}$ 满足 $D_w\Gamma_e(0)=\mathrm{Id}$，因此当 τ 接近 e 且 w 位于以 0 为中心的一个欧几里得球内时，$\|D_w\Gamma_\tau-\mathrm{Id}\|_{\mathrm{op}}\le\frac12$。我们选取足够小的 r_p，使得这个球包含 v 和对每个 $q\in S\cap B_{r_p}(p)$ 都成立的 $\psi_p(\tau)$。沿线段积分可得

$$|v-\psi_p(\tau)|\le2|\Gamma_\tau(v)-\Gamma_\tau(\psi_p(\tau))|\le2|P(q)|+2Cd(p,q)^{m+1},$$

这就证明了 (4.4)。取例如 $\omega_p(r) := \sup(\{0\} \cup \{|\Pi_{\mathbb{V}}(q) - R_p(q)|\, d(p,q)^{-m} : \ q \in S,\ 0 < d(p,q) \le r\})$ for $r < r_p$，即可得到关于 $\alpha = 0$ 的结论。□

例。在 $\mathbb{H}^1$ 中，使用权为 (1, 1,2) 的指数坐标，其乘积为

$$(x,y,t)\cdot(x',y',t') = (x+x', y+y', t+t'+\tfrac{1}{2}(xy'-yx')).$$

令 $\mathbb{W} = \{x = 0\}$、$\mathbb{V} = \{y = t = 0\}$、$\Pi_{\mathbb{V}}(x,y,t) = x$，且 $X = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_t$。由 $F(x,y,t) = x - y^2 - t$ 定义的曲面$S = \{F = 0\}$ 在 0 附近是正则的，因为 $XF = 1 + y/2$，且其切空间为 $T_0S = \mathbb{W}$。对于 $w = (0, y, s) \in \mathbb{W}$，

$$F(w\cdot(v,0,0)) = (1+\tfrac{y}{2})v - y^2 - s \overset{(4.5)}{\Longrightarrow} \psi_2(w) = y^2 + s.$$

由于 $(x,y,t) = (0,y,t+xy/2)\cdot(x,0,0)$，环境多项式为 $R_0(x,y,t) = y^2 + t + \frac{1}{2}xy$，其齐次次数为三，在 $\mathbb{V}$ 的左陪集上为常数，且 $R_0(0) = 0$且 $XR_0 \equiv 0$。对于 0 附近的 $q = (x, y, t) \in S$，有 $x = y^2 + t = O(\|q\|^2)$ 和 $y = O(\|q\|)$，由此得到 (2,1) 正规形估计：

$$|\Pi_{\mathbb{V}}(q) - R_0(q)| = \tfrac{1}{2}|xy| = O(\|q\|^3).$$

此外，$X(\Pi_{\mathbb{V}} - R_0) = 1$ 是引理 4.4中要求的横截性。

引理 4.6. 对每个 $a \in M$，

$$\mathcal{H}^s \llcorner \delta_{1/r}(a^{-1}M) \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{H}^s \llcorner T_aM \qquad \text{locally as } r \downarrow 0.$$

证明。令 $F \in [\mathrm{C}^1_{\mathbb{G}}(\Omega)]^c$ 在 a 附近定义 M，使得 $M \cap \Omega' = \{F = 0\} \cap \Omega'$ 在 a 的某个邻域 $\Omega' \subset$ 内成立。由于 $\mathbb{V}$与 $\ker d_HF(a) = T_aM$互补，点 a对 F而言是分裂正则的，按 [40] 中的意义。对于水平偏移 $b = 0$，[40, 引理 3.4] 指出，限制在 $\delta_{1/r}(a^{-1}\{F = 0\})$ 上的 s 维 Hausdorff（或球面）测度弱*收敛到限制在 $\ker d_HF(a) = T_aM$上的同一测度。H^s 的归一化使这些测度相差一个固定因子，而膨胀后的 $\delta_{1/r}(a^{-1}\Omega')$ 穷尽 $\mathbb{G}$，因此紧支集测试函数无法区分 M 与 $\{F = 0\}$，对于 $r \ll 1$ 均如此。□

下面的估计将图像中正测度子集上的界转化为余集不变多项式所有环境导数的界。

引理 4.7. 设 $K \subset M$ 为紧集，且 $m \in \mathbb{N}$。对于每个 $\theta > 0$，存在 c_0、$r_0 > 0$，使得满足以下性质：若 $x \in K$、$0 < r < r_0$、$P \in [N^m_{\mathbb{V}}]^c$，且 $Z \subset M \cap B_r(x)$ 是博雷尔集，并且 $H^s(Z) \ge \theta r^s$，则在 $\mathbb{R}^c$ 上取欧几里得范数时，

$$\sum_{d(J)\le m} r^{d(J)}|\mathbf{X}^J P(x)| \le c_0^{-1} \sup_Z |P|. \tag{4.8}$$

证明。若 $c = 0$，则无需证明。设 $c > 0$，并注意只需考虑标量情形 P，因为对每个分量应用该情形并求和，再将 c_0 替换为 c_0/c，即可得到一般情形。令 $\pi_{\mathbb{W}}$ 为分裂 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}$ 的投影，并由注 2.4 写作 $|\cdot|_{\mathbb{W}} := \mathrm{H}^s \llcorner \mathbb{W}$，这是 $\mathbb{W}$ 上的哈尔测度。由于 $g \in \pi_{\mathbb{W}}(g)\mathbb{V}$，每个 $P \in \mathrm{N}^m_{\mathbb{V}}$ 都满足 $P(g) = P(\pi_{\mathbb{W}}(g))$。

由于 K 是紧集且 $\pi_{\mathbb{W}}$ 连续，因此存在开集 $U' \Subset U$ 和 $r_0 > 0$，使得对于每个 $x \in K$，$\pi_{\mathbb{W}}(M \cap B_{r_0}(x)) \subset U'$。根据定理 1.1],，内蕴面积公式 [40,的面积因子在 U 上连续；由引理 3.2], 可得 $J_0 < \infty$，对于每个博雷尔 $B \subset U'$，$\mathrm{H}^s(\Phi_\phi(B)) \le J_0|B|_{\mathbb{W}}$。

图映射 $\Phi_\phi : U \to M$ 是一个同胚，其逆映射为 $\pi_{\mathbb{W}}|_M$，因此只要 $Z \subset M$ 是博雷尔集，$\pi_{\mathbb{W}}(Z)$ 就是博雷尔集。固定陈述中所述的 x、r、P 和 Z。于是

$Z = \Phi_\phi(\pi_{\mathbb{W}}(Z))$，因此 $|\pi_{\mathbb{W}}(Z)|_{\mathbb{W}} \geq \theta r^s/J_0$。记 $x = w_x v$，其中 $w_x := \pi_{\mathbb{W}}(x)$和$v := \pi_{\mathbb{V}}(x)$。由 (2.4)，

$$\pi_{\mathbb{W}}(x^{-1}y) = v^{-1}\big(w_x^{-1}\pi_{\mathbb{W}}(y)\big)v.$$

因此，$\pi_{\mathbb{W}}(x^{-1}Z)$ 可由 $\pi_{\mathbb{W}}(Z)$ 先在 $\mathbb{W}$ 中作左平移，再通过 v^{-1} 共轭得到。在指数坐标下，这个共轭是线性映射 $\mathrm{Ad}_{v^{-1}}|_{\mathfrak{w}} = \exp(-\mathrm{ad}_{\log v}|_{\mathfrak{w}})$，$\mathfrak{w} := $李$(\mathbb{W})$；其行列式为 1，因为 $\mathrm{ad}_{\log v}$ 在理想 $\mathfrak{w}$ 上是幂零的。因此 $|\pi_{\mathbb{W}}(x^{-1}Z)|_{\mathbb{W}} = |\pi_{\mathbb{W}}(Z)|_{\mathbb{W}}$。

令 $\widetilde{P}(z) := P(x \cdot \delta_r z)$，并令 $Z' := \delta_{1/r}\pi_{\mathbb{W}}(x^{-1}Z)$。左平移和膨胀~保持次数界，并将 $\mathbb{V}$ 的左陪集映射为 $\mathbb{V}$ 的左陪集，因此 $P \in \mathcal{N}^m_{\mathbb{V}}$。左不变向量场的齐次性给出 $\mathbf{X}^J\widetilde{P}(e) = r^{d(J)}\mathbf{X}^J P(x)$；并且根据 $\mathbb{V}$-~不变性，P，$\sup_{Z'}|P| = \sup_Z |P|$。此外，根据（2.5），$Z'$ 属于紧集$B' := \mathbb{W} \cap \underline{B}_{C'}(e)$，其中 $C' := C_{\mathbb{W},\,\mathbb{V}}$，且 $|Z'|_{\mathbb{W}} = r^{-s}|\pi_{\mathbb{W}}(x^{-1}Z)|_{\mathbb{W}} \geq \kappa := \theta/J_0$。

尚需找到仅依赖于 m、C' 和 κ 的 $c_0 > 0$，使得

$$\sum_{d(J)\leq m} |\mathbf{X}^J\widetilde{P}(e)| \leq c_0^{-1}\sup_{Z'}|\widetilde{P}|$$

~对每个 $P \in \mathcal{N}^m_{\mathbb{V}}$以及每个满足 $Z' \subset B'$ 的博雷尔集 $|Z'|_{\mathbb{W}} \geq \kappa$。在有限维~~空间 $\mathcal{N}^m_{\mathbb{V}}$ 上，左侧由 (2.9) 中的唯一性可知是一个范数，$P \mapsto \sup_{B'}|P|$ 也同样如此。事实上，一个在 B' 上为零的多项式，在 $\mathbb{W}$上也为零，因为 B' 在~中具有非空内部 $\mathbb{W}$，因此由 $\mathbb{V}$不变性可知它处处为零。于是，只需用$\sup_{B'}|P|$ 来控制~$\sup_{Z'}|P|$。反证如下：

若不存在这样的界，则有 $P_j \in \mathcal{N}^m_{\mathbb{V}}$ 以及博雷尔集 $Z'_j \subset B'$，使得 $\sup_{B'}|P_j| = 1$、$|Z'_j|_{\mathbb{W}} \geq \kappa$，且 $\sup_{Z'_j}|P_j| \to 0$。取一个子列后，$P_j \to P_\infty$ 在 B' 上一致收敛，且 $\sup_{B'}|P_\infty| = 1$，并且 $Z'_j \subset \{w \in B' :\ |P_\infty(w)| \leq \eta_j\}$ 对某个$\eta_j \to 0$成立。在指数坐标下，$P_\infty|_{\mathbb{W}}$ 是一个非零多项式，因此其零集为$|\cdot|_{\mathbb{W}}$- 零测集，且 $|\{w \in B' :\ |P_\infty(w)| \leq \eta\}|_{\mathbb{W}} \to 0$ 当 $\eta \downarrow 0$ 时成立。这与 $|Z'_j|_{\mathbb{W}} \geq \kappa$ 矛盾。□

因此，引理 4.7是关于 $\mathbb{W}$的 Remez 型不等式。M 的图结构仅通过面积界$\mathcal{H}^s(\Phi_\phi(B)) \leq J_0|B|_{\mathbb{W}}$。

引理 4.8。设 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in [0,1]$，且设 $A \subset M$ 为 H^s-可测，并满足

$$\Theta^s_*(A,p) > 0 \qquad \textit{for } \mathcal{H}^s\textit{-a.e. } p \in A. \tag{4.9}$$

假设对 H^s-几乎处处的 $p \in A$，存在一个取值于 $\mathbb{R}^c$ 的多项式 R_p（回顾 $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^c$），满足以下性质：

(i) $R_p \in [\mathcal{N}^m_{\mathbb{V}}]^c$；(ii) $R_p(p) = \Pi_{\mathbb{V}}(p)$；(iii) 若 $\alpha > 0$，则对某个 $L_p < \infty$，

$$\lim_{r\downarrow 0} r^{-s}\mathcal{H}^s\Big(A \cap B_r(p) \cap \{q\ :\ |\Pi_{\mathbb{V}}(q) - R_p(q)| > L_p r^{m+\alpha}\}\Big) = 0;$$

若 $\alpha = 0$，则同一极限对 r^m 以及任意常数 $L > 0$都成立。

那么，除去一个 H^s-零测集，A 可被可数多个紧集 $K \subset A$ 覆盖，并且在每个紧集上，喷流

$$A_J(p) := \mathbf{X}^J R_p(p), \qquad p \in K, \quad d(J) \leq m, \tag{4.10}$$

逐分量属于 $\mathrm{Lip}(m+\alpha,\ K)$ 若 $\alpha > 0$，并且逐分量满足 定理 4.1 的假设，若 $\alpha = 0$，对于多项式 R_p 的一个博雷尔选择，满足

(i)–(iii) （由 注 4.9唯一确定）。因此， A 除去一个 $\mathcal{H}^s$-零测集外，由可数多个 k-维的 $\mathbb{G}$-正则曲面构成，类别为 $(m,\ \alpha)$。

证明。 **第 1 步（约化）**。 去除一个 $\mathcal{H}^s$-零测集既不改变密度，也不影响例外集估计。因此，我们可以假设 A 是博雷尔集，且每个$p \in A$ 满足（4.9），并存在一个满足 (i)–(iii) 的多项式。由于 $A \subset M$ 和$\mathrm{H}^s(M) < \infty$，测度 $\mu := \mathcal{H}^s \llcorner A$是有限的。若 $c = 0$，则 $k = N$，喷流为空；由内正则性可得这些紧集，而 $\mathbb{G}$ 本身就是任意正则性类别的正则曲面，并覆盖 A。因此，我们还可以假设 $c > 0$。

第 2 步（博雷尔选择）。 取 $B_1, \dots, B_{D_m}$作为 $\mathcal{N}^m_{\mathbb{V}}$, $D_m := \dim \mathcal{N}^m_{\mathbb{V}}$的一组基，并且对于 $\xi = (\xi_{bi}) \in Y := \mathbb{R}^{D_m \times c}$，令 $R^\xi := (\sum_b \xi_{bi} B_b)_{i \le c}$。对于 $L, r > 0$ 以及 $(p, \xi) \in A \times Y$，令

$$\beta_L(p, \xi, r) := r^{-s} \mu\big(B_r(p) \cap \{z \ :\ |\Pi_{\mathbb{V}}(z) - R^\xi(z)| > L r^{m+\alpha}\}\big)$$

且 $\omega_{L,n}(p, \xi) := \sup\{\beta_L(p, \xi, r) :\ \ r \in \mathbb{Q},\ 0 < r < 1/n\}$。定义$\beta_L$ 的被积函数关于 (p, ξ, z) 联合博雷尔可测，因此根据 Tonelli 定理， $\beta_L(\cdot, \cdot\ r)$ 和 $\omega_{L,n}$ 均为博雷尔可测。将引理 A.1 应用于 $\varphi := |\Pi_{\mathbb{V}} - R^\xi|$ 和 $\gamma := m + \alpha$，可得

$$\sup_{0<r<1/(2n)} \beta_{2^{m+\alpha}L}(p, \xi, r) \le 2^s \omega_{L,n}(p, \xi). \tag{4.11}$$

因此， R^ξ 在 p 处满足 (iii)，当且仅当存在某个 $L \in \mathbb{N}$，使得当$\alpha > 0$时，$\omega_{L,n}(p, \xi) \to 0$ as $n \to \infty$；并且当 $\alpha = 0$ 时，对每个 $L \in \{1/h :\ h \in \mathbb{N}\}$ 都成立。条件 (ii) 关于 (p, ξ) 是闭的，因此满足 (i)–(iii) 的配对 (p, ξ) 的关系是 $\mathbb{G} \times Y$ 的一个博雷尔子集，其投影为 A。将引理 A.2 应用于 $X = \mathbb{G}$ 和 $\mu = \mathrm{H}^s \llcorner A$，可得一个博雷尔映射 $p \mapsto \xi(p)$，使得 $R^{\xi(p)}$ 在几乎处处的 p 处满足 (i)–(iii)。删去一个零测集后，可假定此性质在 A 上成立；从现在起记 $R_p := R^{\xi(p)}$（根据注 4.9，这就是假设中的多项式）。

步骤 3（紧片段）。设 $g_{L,n}(p) := \omega_{L,n}(p, \xi(p))$ 是 A 上的博雷尔函数。若 $\alpha > 0$，则博雷尔集 $A^{(j)} := \{p \in A : g_{j,n}(p) \to 0$ 作为 $n \to \infty\}$ 由步骤 2 覆盖 A；若$\alpha = 0$，则对每个 $h \in \mathbb{N}$，$g_{1/h,n} \to 0$ 在 A 上。将引理 A.3 应用于每个 $A^{(j)}$ 上的 μ，其对应的函数为 $g_{j,n}$（分别在 A 上，取所有 $g_{1/h,n}$），映射为 $p \mapsto \xi(p)$，指数为 s，原密度测度为 $\nu = \mu = \mathrm{H}^s \llcorner A$；传至 $A^{(j)}$ 时保持不变。结合 (4.11)，除去一个零测集外，这覆盖了 A，所用的是紧集 K，其上：

(a) $p \mapsto \xi(p)$ 连续；(b) 存在 $c_1, r_1 > 0$，使得对每个 $p \in K$ 和 $0 < r < r_1$，$\mu(B_r(p)) \ge c_1 r^s$；(c) 若 $\alpha > 0$，则存在 $L > 0$，使得

$$\sup_{p \in K} r^{-s} \mu\big(B_r(p) \cap \{|\Pi_{\mathbb{V}} - R_p| > L r^{m+\alpha}\}\big) \to 0$$

as $r \downarrow 0$. If $\alpha =$ 0 th相同 holds with r^m in pl位置 f $r^{m+\alpha}$, f对于每个 $L > 0$。对于 (c)，应用 (4.11)，令 $\xi = \xi(p)$，取 $L = j$，并在 $\alpha > 0$ 时将 $2^{m+\alpha}$ 吸收到管常数中；若 $\alpha = 0$，则取 $L = 1/h$，使 $2^m/h \le \Lambda$ 对给定的管常数 Λ 成立。然后，$g_{L,\ n} \to 0$ 在 K 上一致成立。

步骤 4（惠特尼相容性）。我们比较 R_p 和 R_q 在一个二者都近似于 $\Pi_{\mathbb{V}}$的公共集合上。正的下密度和较小的例外集为引理 4.7提供了足够的测度，从而将这种比较转化为对所有导数的界。

令 c_0, r_0 由引理 4.7 给出，并取 K和 $\theta = c_1/2$。对于不同的 $p, q \in K$，设$\sigma := d(p, q)$，并令 $\eta_\sigma := (2^{m+\alpha} + 1) L \sigma^\alpha$，若 $\alpha > 0$，其中 L 如 (c) 中所述；若 $\alpha = 0$，则对固定的 $\eta > 0$ 令 $\eta_\sigma := \eta$。由于 $B_\sigma(q) \subset B_{2\sigma}(p)$，将条件 (c) 应用于半径为 2σ 的 p

以及半径为 σ 的 q（对于 $\alpha=0$，管常数为 $2^{-m-1}\eta$ 和 $\eta/2$），可知当 σ 小于某个与 p,q 无关的 $\sigma_*>0$（若 $\alpha=0$，则还依赖于 η）时，两个例外集的测度均至多为 $(c_1/4)\sigma^s$。根据 (b)，它们在 $A\cap B_\sigma(q)$ 中的补集是一个博雷尔集 $Z_{p,q}$，满足 $\mu(Z_{p,q})\geq(c_1/2)\sigma^s$，并且

$$|\Pi_{\mathbb{V}}(z)-R_p(z)|+|\Pi_{\mathbb{V}}(z)-R_q(z)|\leq\eta_\sigma\sigma^m,\qquad z\in Z_{p,q}. \tag{4.12}$$

应用 引理 4.7 于 $x=q$，取 $r=\sigma$ 和 $Z=Z_{p,\,q}$，对 $R_q-R_p\in[\mathcal{N}_{\mathbb{V}}^m]^c$，可得对于 $\sigma<\delta_0:=\min\{\sigma_*,r_0,r_1\}$，有以下导数不等式：

$$|\mathbf{X}^J(R_q-R_p)(q)|\leq c_0^{-1}\eta_\sigma\,\sigma^{m-d(J)},\qquad d(J)\leq m. \tag{4.13}$$

步骤 5（惠特尼条件）。由于 R_p 的齐次次数至多为 m，它就是在 p处的泰勒多项式。因此，由喷流 $\{A_I(p)\}^{d(I)\leq m}$确定的多项式为 R_p，并且满足

$$A_J(q)-\mathbf{X}^JP_m[\{A_I\}_{d(I)\leq m}](p,q)=\mathbf{X}^J(R_q-R_p)(q).$$

由 (a)，函数 A_J 在 K上连续，因而有界。若指定了 $\alpha=0$ 和 $\varepsilon>0$，取 $\eta:=c_0\varepsilon$，则 (4.13) 对所有满足 $d(p,q)<\delta_0$ 的 $p\neq q\in K$ 都是小-o 条件 (4.2)，因此对每个 $\bar{x}\in K$，在 $K\cap B_{\delta_0/2}(\bar{x})$ 上均成立，且关于 $\bar{x}$一致。若 $\alpha>0$，则对邻近点对，它给出定义 4.2 中 $\gamma=m+\alpha$ 对应的界；对于其余点对，左端有界。增大常数即可得到喷流断言。

步骤 6（结论）。设 K 是这些紧集中的一个。对每个分量应用定理 4.1（当 $\alpha=0$ 时）和定理 4.3（当 $\alpha>0$ 时），得到 $\Xi\in[\mathrm{C}_{\mathbb{G}}^{m,\alpha}(K,(\mathbb{G})^{\mathrm{c}})]^c$，其中 $\mathbf{X}^J\Xi=A_J$ 在 K 上满足 $d(J)\leq m$。多项式映射 $\Pi_{\mathbb{V}}$ 是光滑的，因此 $F:=\Pi_{\mathbb{V}}-\Xi\in[\mathrm{C}_{\mathbb{G}}^{m,\alpha}(K,(\mathbb{G})^{\mathrm{c}})]^c$。对于 $p\in K$，我们有 $F(p)=\Pi_{\mathbb{V}}(p)-R_p(p)=0$。此外，每个 V_i 都是 X_1、……、X_ℓ 和 $m\geq1$ 的线性组合，因此 $V_i\Xi(p)=V_iR_p(p)=0$，因为 $V_iR_p\equiv0$；由于 $V_i\Pi_{\mathbb{V}}=e_i$，我们得到 $V_iF(p)=e_{i0}$。根据引理 4.4，K 包含于一个 k 维的 $\mathbb{G}$-正则曲面中，该曲面属于类 (m,α)，并且可数多个这样的集合 K 覆盖 A，除去一个 H^s-零测集。□

注 4.9. 对每个满足 $\Theta_*^s(A,p)>0$ 的 $p\in A$，至多有一个多项式满足引理 4.8 的 (i)–(iii)。特别是，在定理 1.3 中，选定的喷流不依赖于由哪些曲面得到这些多项式。事实上，设 R,R' 在这样的 p 处满足 (i)–(iii)，令 $P:=R-R'\in[\mathrm{N}_{\mathbb{V}}^m]^c$，并取满足 $\mathrm{H}^s(A\cap B_r(p))\geq3\theta r^s$ 的 $\theta>0$，其中 r 足够小。若 $\alpha>0$，令 $\eta_r:=(L+L')r^\alpha$，其中 L,L' 是 R,R' 的管常数；若 $\alpha=0$，固定 $\eta>0$，令 $\eta_r:=\eta$，并对二者使用管常数为 $\eta/2$ 的 (iii)。当 r 足够小时，从 $A\cap B_r(p)$ 中去掉两个例外集后，剩余集合包含一个博雷尔集 Z_r，满足 $\mathrm{H}^s(Z_r)\geq\theta r^s$，且 $|P|\leq\eta_r r^m$ 在 Z_r 上成立。由引理 4.7 取 $K=\{p\}$ 可得$r^{d(J)}|\mathbf{X}^JP(p)|\leq c_0^{-1}\eta_r r^m$，其中 $d(J)\leq m$。令 $r\downarrow0$，再在 $\alpha=0$ 时令 $\eta\downarrow0$，可知 $\mathbf{X}^JP(p)=0$，其中 $d(J)\leq m$，因此由 (2.9) 的唯一性可得 $P\equiv0$。

5. 高阶可整流性

现在我们证明一阶判据和高阶判据（定理 1.3），并将二者结合起来得到定理 1.2。高阶信息由作用于一阶图块的分裂投影 $\Pi_{\mathbb{V}}$ 上的标准形环境喷流编码，而整流曲面则是环境$\mathbf{C}_{\mathbb{G}}^{m,\alpha}$ 类函数的非临界水平集。

5.1. **一阶可整流性**。 下述判据是一般 Carnot 群情形下 [50, 定理 315] 的对应结果。Antonelli 和 Merlo [9] 通过切测度刻画 Carnot群中的可整流测度：这些切测度是齐次子群的哈尔测度的倍数；而近似切空间（见 [48, 定义 1517] ）则留待未来研究。对于具有正下密度的 $\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}} \llcorner E$ ，若切测度是某个 $\mathbb{W}_p \in \mathcal{V}(\mathbb{G}, k)$ 的哈尔测度的倍数，则可推出 定理 5.2中的切条件；该条件只约束 E 在小尺度下集中于哪些方向。Marstrand–Mattila 型判据允许平坦切测度随尺度变化；在余维一情形下的结果见 [52] ，而具有正规补群的切子群情形见 [8] 。包含中心的真竖直子群，包括海森堡群中的所有真竖直子群，都没有正规补群，因为幂零群的每个非平凡正规子群都与中心相交。该判据的证明使用了局部水平补群、可测切空间选取、紧块一致化以及惠特尼延拓。首先，我们陈述一个关于补群局部稳定性的技术引理。

引理 5.1。 设 $\mathbb{W}_0 \in V(\mathbb{G}、 k)$ ，并设 $\mathbb{V}_0$ 为一个水平补空间。则对于 $\mathbb{W}_0$ 在 $V(\mathbb{G}、 k)$的某个邻域中的每个 $\mathbb{W}$ ，都有 $\mathbb{G} =\mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}_0$ 。此外，在同一 $\mathbb{W} \leftrightarrow \mathbb{W}^1$下，空间 $V(\mathbb{G}、 k)$ 是 $\mathfrak{g}_1$中所有$(k - N + \ell)$维子空间所成 *Grassmann* 流形的一个开子集。特别地，它是波兰空间。

证明。如命题 2.8 的证明所示，设 $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{W}_0^1 \oplus$李$(\mathbb{V}_0)$，其中李$(\mathbb{V}_0)$是阿贝尔的。邻近的 ($k - N + \ell$)维子空间是线性映射 L 的图： $\mathbb{W}_0^1 \to$ 李$(\mathbb{V}_0)$，因此仍与李$(\mathbb{V}_0)$互为补空间。于是横截性是开性质，并且对于每个这样的横截 S，命题 2.8 给出 $\mathbb{G} = \mathbb{W}_S \rtimes \mathbb{V}_0$，其中 $\mathbb{W}_S$: = 指数映射$(S \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_\iota)$ 是垂直的且为 k维。由于 V$(\mathbb{G}、 k)$ 中的每个元素都可写成 $\mathbb{W}_S$ ，其中 $S = \mathbb{W}^1$，两个断言均得证。□

固定 $1 \le k < N$。根据引理 5.1， $\mathcal{V}(\mathbb{G}， k)$ 是一个紧集 Grassmann 流形的开子集，因此是局部紧且第二可数的，所以它可由可数个开集 $\mathcal{U}_a$ 覆盖，这些开集由 $a \in \mathbb{N}$ 索引，并且在 $\mathcal{V}(\mathbb{G}, k)$ 中具有紧闭包；每个开集都对应一个水平子群 $\mathbb{V}_a$ ，使得 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}_a$ 对每个 $\mathbb{W} \in \mathcal{U}_a$ 都成立。通过一个固定的基将 $\mathbb{V}_a$ 与 $\mathbb{R}^{N-k}$ 进行识别，并且对于 $\mathbb{W} \in \mathcal{U}_a$，令 $\varpi_{a,\,\mathbb{W}} \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}^{N-k}$ 为到 $\mathbb{V}_a$ 上的分裂投影的坐标表示。根据定理 2.6， $\varpi_{a,\,\mathbb{W}}$ 是一个 h-同态，并且

$$\ker \varpi_{a,\mathbb{W}} = \mathbb{W}, \qquad \varpi_{a,\mathbb{W}}|_{\mathbb{V}_a} = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}_a}. \tag{5.1}$$

映射 $\varpi_{a,\,\mathbb{W}}$ 仅取决于第一层坐标，在这些坐标上，它是沿 $\mathbb{W}^1$ 到 Lie$(\mathbb{V}_a)$ 的线性投影。因此，分裂 $\mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}_a$ 的投影关于 $(\mathbb{W}， x)$ 连续地变化，并且由$\mathcal{U}_a$ 的紧致性和齐次性可得常数$0 < c_a \le 1 \le C_a^*$以及一个非减函数 ω_a ，满足当 $t \downarrow 0$ 时 $\omega_a(t) \to 0$ ，从而对所有 $x \in \mathbb{G}$、 $v \in \mathbb{V}_a$ 以及 $\mathbb{W}$， $\mathbb{W}' \in \mathcal{U}_a$,

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{W},\mathbb{V}_a} &\le C_a^*, \qquad c_a|v| \le \|v\| \le c_a^{-1}|v|, \\ |\varpi_{a,\mathbb{W}}(x) - \varpi_{a,\mathbb{W}'}(x)| &\le \omega_a(\rho(\mathbb{W}, \mathbb{W}'))\|x\|, \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $C_{\mathbb{W},\,\mathbb{V}_a}$ 是定理 2.6 中关于分裂 $\mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}_a$的常数，该常数关于 $\mathbb{W}$连续变化，并且 $|v|$ 是坐标的欧几里得范数。之所以成立这种比较，是因为 $\mathbb{V}_a$ 是水平的，在其上 $\|\cdot\|$ 具有一次齐次性。

定理 5.2。 令 $1 \le k \le N$，并令 $E \subset \mathbb{G}$ 为 $H^{k_{\mathrm{m}}}$-可测函数，且对 $H^{k_{\mathrm{m}}}(E) < \infty$以及对 $H^{k_{\mathrm{m}}}$-几乎处处的 $p \in E$都有 $\Theta_*^{k_{\mathrm{m}}}(E, p) > 0$。假设对于 $H^{k_{\mathrm{m}}}$-几乎处处的 $p \in E$，存在 $\mathbb{W}_p \in V(\mathbb{G}, k)$ 使得

$$\mathrm{Tan}^{*k_{\mathrm{m}}}(\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}} \llcorner E, p) \subseteq \mathbb{W}_p. \tag{5.3}$$

则 E 是 $(k, \mathbb{G})$-可整流的，类别为 $(1, 0)$，其含义见 定义 *3.3*。

证明。若 $k = N$，结论显然成立，因为 $\mathbb{G}$ 本身就是一个 N 维正则曲面。因此设 $k < N$，并令 $s := k_{\mathrm{m}}$， $c := N - k$，以及 $\mu := \mathrm{H}^s \llcorner E$。我们还可以假设 $\mu(E) > 0$，并将 E 替换为一个 Borel代表（该代表存在，因为 H^s 是 Borel正则的，且 $\mathrm{H}^s(E) < \infty$），从而 E 是 Borel集。于是， μ 是 Polish空间 $\mathbb{G}$ 上的有限拉东测度，根据 [41, 定理 17.10–17.11]。

步骤 1（近似切空间的博雷尔选取）。 我们使用上文讨论中固定的坐标图。对于 j， $n \in \mathbb{N}$、$p \in \mathbb{G}$ 以及 $\mathbb{W} \in \mathcal{U}_a$，令

$$\zeta_{a,j,n}(p, \mathbb{W}) := \sup\left\{ r^{-s}\mu\left(B_r(p) \cap \left\{ q \ : \ |\varpi_{a,\mathbb{W}}(p^{-1}q)| > \tfrac{r}{j} \right\}\right) \ : \ r \in \mathbb{Q},\ 0 < r < \tfrac{1}{n} \right\}.$$

对于固定的有理数 r，上确界中的量是 r^{-s} 乘以 μ 对 q 上联合博雷尔函数 $\mathbf{1}_{\{d(p,q)<r\}}\mathbf{1}_{\{|\varpi_{a,\mathbb{W}}(p^{-1}q)|>r/j\}}$ 的积分，因此根据 Tonelli 定理，每个 $\zeta_{a,\,j,\,n}$ 都是博雷尔的。若 $\eta \ge 2/j$ 且 $0 < r < 1/(2n)$，则将引理 A.1 应用于 $\varphi := |\varpi_{a,\,\mathbb{W}}(p^{-1}\cdot)|$， $\gamma := 1$ 和 $L := 1/j$，可得

$$r^{-s}\mu(B_r(p) \cap \{q \ : \ |\varpi_{a,\mathbb{W}}(p^{-1}q)| > \eta r\}) \le 2^s \zeta_{a,j,n}(p, \mathbb{W}).$$

因此，对于每个 j，当 $n \to \infty$ 时，$\zeta_{a,\,j,\,n}(p, \mathbb{W}) \to 0$ 当且仅当

$$\lim_{r \downarrow 0} r^{-s}\mu(B_r(p) \cap \{q \ : \ |\varpi_{a,\mathbb{W}}(p^{-1}q)| > \eta r\}) = 0 \qquad \text{for every } \eta > 0. \tag{5.4}$$

在 $\mathbb{V}_a$ 齐次范数与坐标的欧几里得范数可比，因此由 $\Rightarrow$引理 3.7 的 (i)蕴含 (iii) 可知，将其应用于分裂 $\mathbb{W}_p \rtimes \mathbb{V}_a$ （而非事先固定的 $\mathbb{W}_p$ 补空间），则 5.4) 对满足 $\mathbb{W} = \mathbb{W}_p$ 的 $\mathbb{W}_p \in \mathcal{U}_a$均成立，其中 5.3)。因此，博雷尔集

$$\mathcal{R} := \bigcap_{j,i \ge 1} \bigcup_{n_0 \ge 1} \bigcap_{n \ge n_0} \{(p, a, \mathbb{W}) \ : \ \zeta_{a,j,n}(p, \mathbb{W}) < \tfrac{1}{i}\} \subset \mathbb{G} \times \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Y} := \bigsqcup_a (\{a\} \times \mathcal{U}_a),$$

具有满 μ-测度的投影，并且引理 A.2 给出了一个博雷尔映射 $p \mapsto (a(p)\ \mathbb{W}_p)$，使得对于 μ-几乎处处的 p，有 $(p, a(p)\ \mathbb{W}_p) \in \mathrm{R}$。因此， $a(p)$ 选取了一个包含所选 $\mathbb{W}_p$ 的坐标图，并且它在下面的每个紧块上都变为常数。为简化记号，以下均采用这一 $\mathbb{W}_p$ 的选取，并记为 $\varpi_p := \varpi_{a(p)}$, $\mathbb{W}_p$，从而对于 μ-几乎处处的 p，(5.4) 中以 ϖ_p 代替 $\varpi_{a,\,\mathbb{W}}$ 仍然成立。根据引理 3.7 的蕴含关系 (iii)$\Rightarrow$(i)，应用于 $\mathbb{W}_p \rtimes \mathbb{V}_{a(p)}$，所选的 $\mathbb{W}_p$ 对于 μ-几乎处处的 p 满足 (5.3)。

第 2 步（紧片段与一致平坦性）。移除下密度假设或（5.4）不成立的零测集。在每个坐标图上，将引理 A.3 应用于原测度 $\mu = \mathcal{H}^s \llcorner E$、映射 $p \mapsto \mathbb{W}_p$、对每个 j 的函数 $p \mapsto \zeta_{a,j,n}(p, \mathbb{W}_p)$，以及取 $\nu = \mu$ 和指数 s 的下密度界。结合**第 1 步**中的有理半径比较，可得到可数个紧集 K，它们覆盖 E，至多差一个零测集。在每个 K 上，坐标图指标 a 为常数， $p \mapsto \mathbb{W}_p$ 连续，并且存在常数 $b > 0$ 和半径 $r_0 > 0$，使得

$$\mu(B_t(q)) \ge b t^s \qquad \text{for all } q \in K \ \text{ and } \ 0 < t < r_0.$$

此外，对每个 $\eta > 0$,

$$\sup_{p\in K} r^{-s}\mu\big(B_r(p)\cap\{z\ :\ |\varpi_p(p^{-1}z)|>\eta r\}\big)\longrightarrow 0.$$

固定这样的 K，令 $\mathbb{V}:=\mathbb{V}_a$，并记 $L:=c_a^{-1}C_a^*$。那么 $|\varpi_p(g)|\le L\|g\|$ 对$p\in K$一致成立。固定 $\varepsilon>0$并令 $\delta:=\min\{1/2,\varepsilon/(4L)\}$。如果 $p,q\in K$, $r:=d(p,q)>0$，且$|\varpi_p(p^{-1}q)|>\varepsilon r$, 则由同态性质得到包含关系

$$B_{\delta r}(q)\subset B_{2r}(p)\cap\{z\ :\ |\varpi_p(p^{-1}z)|>(\varepsilon/4)(2r)\}.$$

对于足够小的 r，左侧的 μ-测度至少为 $b\delta^s r^s$，而右侧的测度为 $o(r^s)$，且关于 $p\in K$ 一致。这对于充分小的 r 来说是不可能的，并且关于 p,q 一致，因此

$$\limsup_{r\downarrow 0}\left\{\frac{|\varpi_p(p^{-1}q)|}{d(p,q)}\ :\ p,q\in K,\ 0<d(p,q)<r\right\}=0. \tag{5.5}$$

最后， $p\mapsto\varpi_p$ 在 K 上由（5.2）一致连续。

步骤 3（惠特尼延拓）。如果 $X_1,\dots,X_\ell$是固定的水平基（即水平层的一个基），则在 K 上规定取 $\mathbb{R}^c$ 值的一阶喷射为

$$F_0(p):=0,\qquad F_{J_i}(p):=\varpi_p(\exp X_i),\quad i=1,\dots,\ell,$$

其中 J_i 是满足 $\mathbf{X}^{J_i}=X_i$的多重指标。该喷流在 K上有界，因为 $p\mapsto\varpi_p$是连续的，且 K 是紧集。该喷流在 p 处的一阶多项式（换言之，第 4.1 节的 P_1 多项式）为

$$P_p(q)=\varpi_p(p^{-1}q),$$

并且，对每个水平基向量 X_i,

$$X_iP_p(q)=\varpi_p(\exp X_i).$$

因此，对于 p， $q\in K$,

$$\big|F_{J_i}(q)-X_iP_p(q)\big|=\big|\varpi_q(\exp X_i)-\varpi_p(\exp X_i)\big|=o(1)$$

当 $d(p,\ q)\to 0$时一致成立，这是由 $p\mapsto\varpi_p$的一致连续性得出的。这是惠特尼条件中的导数部分。对于函数值部分，（5.5）给出

$$|F_0(q)-P_p(q)|=|\varpi_p(p^{-1}q)|=o(d(p,q)).$$

因此，该喷流满足一阶惠特尼相容条件。逐分量应用 定理 4.1 可得映射

$$F\in[\mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})]^c$$

使得 $F=0$和 $d_HF(p)=\varpi_p$在 K上。对于每个 $p\in K$，我们有 $F(p)=0$，而 (5.1) 给出 $d_HF(p)|_{\mathbb{V}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$，也就是说，在 $\mathbb{V}$的固定坐标中， $V_iF(p)=e_i$。根据引理 4.4，K 包含在一个 k维的 1-正则曲面中。对集合 K 取可数并，即得证明。□

5.2. **主要定理的证明。** 定理 1.2 从单点处的管状逼近中得到近似切空间。

引理 *5.3.* 设 $1 \le k \le N$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0,1]$ 和 $s := k_{\mathrm{m}}$。设 $E \subset \mathbb{G}$ 是 H^s-可测且局部 H^s-有限的，设 $p \in E$，并设 S 是一张经过 p、属于 (m,α) 类的 k 维 $\mathbb{G}$-正则曲面，使得对于某个 $\lambda \ge 0$，若 $\alpha > 0$，则 *(1.1)* 对 $S_p = S$ 成立；并且对于每个 $\lambda > 0$，若 $\alpha = 0$，则 *(1.2)* 对 $S_p = S$ 成立。设 $\mathbb{V}_p$ 是 $\mathbb{W}_p := T_pS \in V(\mathbb{G}, k)$ 的一个水平补空间。那么

$$\lim_{r \downarrow 0} r^{-s} \mathcal{H}^s \Big(E \cap B_r(p) \cap \{ q \ : \ \|\pi_{\mathbb{V}_p}(p^{-1}q)\| > \varepsilon r \} \Big) = 0 \qquad \text{for every } \varepsilon > 0, \tag{5.6}$$

因此 $\mathrm{Tan}^{*s}\left(H^s \llcorner E, p\right) \subseteq \mathbb{W}_p$。

证明。我们首先证明 S 与 $p \cdot \mathbb{W}_p$ 的通常一阶相切性。若 F 是 S 的局部定义函数，则对于靠近 p 的 $b \in S$，一阶泰勒公式给出

$$d_H F(p)(p^{-1}b) = o(d(p,b)).$$

h-同态 $d_H F(p)$ 的核为 $\mathbb{W}_p$，并且将其限制在……上得到一个同构

$$L_p := d_H F(p)|_{\mathbb{V}_p} : \mathbb{V}_p \longrightarrow \mathbb{R}^{N-k}.$$

由于 $d_H F(p) = L_p \circ \pi_{\mathbb{V}_p}$，$L_p^{-1}$ 有界，再加上水平子群 $\mathbb{V}_p$ 上齐次范数与欧几里得范数的可比性，可得

$$\|\pi_{\mathbb{V}_p}(p^{-1}b)\| = o(d(p,b)) \qquad \text{as } b \to p \text{ in } S. \tag{5.7}$$

固定 $\varepsilon > 0$ 和 $0 < \delta < \varepsilon/(4C_{\mathbb{W}_p,\mathbb{V}_p})$。若 $q \in E \cap B_r(p)$ 且 $d(q,S) \le \delta r$，则取满足 $d(q,b) \le 2\delta r$ 的 $b \in S$。于是 $d(p,b) \le (1+2\delta)r$，因此 (5.7) 对所有此类 b 的选取都是一致的。由于 $\pi_{\mathbb{V}_p}$ 是一个 h-同态，(5.7) 和 (2.5) 对所有充分小的 r 给出

$$\|\pi_{\mathbb{V}_p}(p^{-1}q)\| \le \|\pi_{\mathbb{V}_p}(p^{-1}b)\| + \|\pi_{\mathbb{V}_p}(b^{-1}q)\| \le o(r) + 2C_{\mathbb{W}_p,\mathbb{V}_p}\delta r < \varepsilon r.$$

因此，对于所有充分小的 r，

$$E \cap B_r(p) \cap \{ q \ : \ \|\pi_{\mathbb{V}_p}(p^{-1}q)\| > \varepsilon r \} \subseteq E \cap B_r(p) \cap \{ q \ : \ d(q,S) > \delta r \}.$$

右侧集合的归一化 $\mathcal{H}^s$-测度趋于零。事实上，若 $\alpha > 0$，则 $\lambda r^{m+\alpha} \le \delta r$ 对所有充分小的 r 均成立；若 $\alpha = 0$ 且 $m = 1$，则使用带管常数 δ 的 (1.2)；若 $\alpha = 0$ 且 $m > 1$，则使用任意固定的管常数以及 $r^m = o(r)$。这就证明了 (5.6)，而 引理 3.7给出了切锥的包含关系。□

高阶判据的证明，定理 1.3，分为四个步骤。步骤 1 将一阶覆盖细化为图块。步骤 2 限制到一个片的密度部分 A（此处每个片上的正下密度是推导得到的，而非预先假设）。步骤 3 将管估计转化为 $\Pi_{\mathbb{V}}$ 在 A上的标准形环境喷流。步骤 4 选取相容喷流，并将正则曲面构造为非临界零点集。

证明定理 *1.3*。若 $k = N$，结论显然成立，因为 $\mathbb{G}$ 是一个 N维正则曲面。令 $k < N$。将 E 替换为博雷尔代表不会改变任何逼近或可整流性结论，因此我们可以假设 E 是博雷尔集。

步骤 1。 根据假设，E是$(k,\ \mathbb{G})$类可整流的$(1,\ 0)$。利用定理 3.5 和第二可数性对所得的正则曲面进行细化，可得到一个可数覆盖，除去一个$\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$零测集后，由分裂正则内在$\mathbf{C}^1_H$ 图块构成。将这些图块选为较大正则图坐标图中的相对紧子图块。在较大坐标图的紧闭包上应用 [40, 命题 2。17], 中的局部上 Ahlfors 界，可知每个图块的$\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$测度有限。

步骤 2。 固定一个分裂正则图块

$$M = \Phi_\phi(U), \qquad \Phi_\phi(w) = w \cdot \phi(w), \qquad \phi : U \subset \mathbb{W} \to \mathbb{V},$$

来自这个覆盖，其中 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}$ 以及 $\mathbb{V}$ 是为该片选取的水平补空间。因此，我们处于第 4.2 节的情形。只需证明 $E \cap M$ 除去一个 $\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-零测集外，可由 $\mathbb{G}$ 类别为 (m, α) 的正则曲面覆盖。令 $c := N - k, s := k_{\mathrm{m}}$, $\nu := \mathcal{H}^s \llcorner M$，并且

$$A := \left\{ a \in E \cap M \ : \ \Theta^{*s}(\mathcal{H}^s \llcorner (M \setminus E), a) = 0 \right\}.$$

测度 ν 是局部倍增的，并且根据 s，局部 Ahlfors [40, 正则17]。将微分定理 [40, 命题 2.3(ii)–(iii)], 应用于 $\nu \llcorner (M \setminus E)$ 相对于 ν，因此得到

$$\frac{\nu((M \setminus E) \cap B_r(a))}{\nu(B_r(a))} \longrightarrow 0, \qquad \text{for } \nu\text{-almost every } a \in E \cap M,$$

而局部上 Ahlfors 界推出 $r^{-s}\nu((M \setminus E) \cap B_r(a)) \to 0$。因此， A 在 $E \cap M$中具有全$\mathcal{H}^s$-测度；由于定义中的上极限可取有理半径，故它是博雷尔集。只需覆盖 A。由于 $M \setminus A \subseteq (M \setminus E) \cup ((E \cap M) \setminus A)$，其中第二个集合是$\mathcal{H}^s$-零测集，而第一个集合在 A的每一点处上 s密度均为零，

$$\lim_{r \downarrow 0} r^{-s} \mathcal{H}^s\big((M \setminus A) \cap B_r(a)\big) = 0 \qquad \text{for every } a \in A. \tag{5.8}$$

固定 $a \in A$ 并考虑这些重缩放

$$M_{a,r} := \delta_{1/r}(a^{-1}M), \qquad A_{a,r} := \delta_{1/r}(a^{-1}A).$$

L引理 4.6 给出 $\mathcal{H}^s \llcorner M_{a,\,r} \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{H}^s \llcorner T_aM$。此外，对每个 $R < \infty$，(5.8) 给出

$$\mathcal{H}^s\big((M_{a,r} \setminus A_{a,r}) \cap B_R(e)\big) = r^{-s}\mathcal{H}^s\big((M \setminus A) \cap B_{Rr}(a)\big) \longrightarrow 0.$$

因此

$$\mathcal{H}^s \llcorner A_{a,r} \overset{*}{\rightharpoonup} \mathcal{H}^s \llcorner T_aM. \tag{5.9}$$

齐次子群球面的哈尔测度为零，这是由 [40, 引理 3。5] 得出的。因此，将 [3,命题 1.62(b)], 的连续集结论应用于 $B_1(e)$，可得$r^{-s}\mathcal{H}^s(A \cap B_r(a))$ 收敛到正的有限数 $\mathcal{H}^s(T_aM \cap B_1(e))$。特别地，$A$ 在每一点都有正的下 s密度。

步骤 3。 我们证明， A 的几乎处处点给出一个多项式 R_a ，满足 引理 4.8的条件 (i)–(iii)，其中 $\Pi_{\mathbb{V}}$ 如第 4.2 节所述。固定满足定义中的 $\mathfrak{S}_{m,\,\alpha}(k)$ 逼近性质的 $a \in A$ ，并令 S_a 为经过 a、逼近它的一个 k 维 $\mathbb{G}$-正则曲面，其类别为 $(m,\ \alpha)$。我们首先确定 S_a 的切空间。

设 $\mathbb{V}'$ 是 T_aS_a的一个水平补空间。 引理 5.3应用于 S_a 和 A，其例外集包含于 E的例外集中，得

$$\lim_{r \downarrow 0} r^{-s}\mathcal{H}^s\Big(A \cap B_r(a) \cap \{q \ : \ \|\pi_{\mathbb{V}'}(a^{-1}q)\| > \varepsilon r\}\Big) = 0 \qquad \text{for every } \varepsilon > 0.$$

由 $\pi_{\mathbb{V}'}$的齐次性，极限下的量等于 $\mathrm{H}^s(A_{a,r} \cap O_\varepsilon)$，其中$O_\varepsilon := B_1(e) \cap \{z : \|\pi_{\mathbb{V}'}(z)\| > \varepsilon\}$ 是开集。由 (5.9) 和 [3,命题 1.62(a)], 的开集估计可得 $\mathrm{H}^s(T_aM \cap O_\varepsilon) = 0$。由于 $\mathrm{H}^s \llcorner T_aM$ 是 T_aM上的哈尔测度，它对 T_aM的每个非空相对开子集赋予正测度，因此 $T_aM \cap O_\varepsilon = \emptyset$ 对每个$\varepsilon > 0$都成立。于是 $T_aM \cap B_1(e) \subseteq \ker \pi_{\mathbb{V}'} = T_aS_a$，并且 $T_aM \subseteq T_aS_a$ 由膨胀不变性可得。两者都是拓扑维数为 k的垂直齐次子群，因此必有

$$T_aS_a = T_aM. \tag{5.10}$$

由于片 M 在固定分裂 $\mathbb{G} = \mathbb{W} \rtimes \mathbb{V}$下是分裂正则的，其切空间$T_aM$ 与 $\mathbb{V}$横截。因此 (5.10) 给出

$$T_aS_a \cap \mathbb{V} = \{0\}.$$

由于 T_aS_a 是垂直的且维数相加，因此这就是分裂

$$\mathbb{G} = T_aS_a \rtimes \mathbb{V} = T_aM \rtimes \mathbb{V}.$$

现在，利用 引理4.5 将其应用于 S_a 在 a处，我们得到多项式 $R_a \in [\mathcal{N}_{\mathbb{V}}^m]^c$，满足 $R_a(a) = \Pi_{\mathbb{V}}(a)$ 且对于某个 $r_a > 0$,

$$|\Pi_{\mathbb{V}}(b) - R_a(b)| \le C_a d(a,b)^{m+\alpha} \qquad \text{for } b \in S_a \cap B_{r_a}(a)$$

当 $\alpha > 0$时。当 $\alpha = 0$时，右侧为 $\widetilde{\omega}_a(d(a,b))d(a,b)^m$，其中 $\widetilde{\omega}_a$ 可取为非递减函数，且在零点处趋于零。

我们声称 R_a 在 a处也满足引理 4.8 的条件 (iii)。令 $D_a := \Pi_{\mathbb{V}} - R_a$。光滑环境多项式关于齐性距离是局部Lipschitz的。事实上，在紧集 K上，有 $|x-y| \le C_K d(x,y)$，因为对于 $h := x^{-1}y$，$y - x = h + P(x,h)$，其中 P是多项式，且由 (2.3) 得 $P(x,0) = 0$，而对于 $\|h\| \le 1$，$|h| \le C\|h\|$。因此，缩小 r_a后，存在 $L_a < \infty$ 使得 D_a 在 $B_{r_a}(a)$上是 L_a-Lipschitz的。固定 $0 < 2r < r_a$ 和 $q \in A \cap B_r(a)$。选择 $b_j \in S_a$ 使得

$$d(q,b_j) \longrightarrow d(q,S_a).$$

由于 $a \in S_a$，有 $d(q,S_a) \le d(q,a) < r$。因此，对于所有充分大的 j，$d(q,b_j) < r$以及 $d(a,b_j) < 2r < r_a$。对于 $\alpha > 0$,

$$|D_a(q)| \le L_a d(q,b_j) + C_a(2r)^{m+\alpha}.$$

令 $j \to \infty$，并增大一个依赖于 a 的常数 $C \ge 1$，得到

$$|\Pi_{\mathbb{V}}(q) - R_a(q)| \le Cd(q,S_a) + Cr^{m+\alpha}$$

当 $\alpha > 0$ 时。对于 $\alpha = 0$，同样的论证给出

$$|\Pi_{\mathbb{V}}(q) - R_a(q)| \le Cd(q,S_a) + \omega_a(r)r^m, \qquad \omega_a(r) := 2^m\widetilde{\omega}_a(2r) \longrightarrow 0.$$

这也涵盖了 $d(q,S_a) = 0$，而无需在 S_a 中存在最近点。由于 $A \subset E$ 和 S_a 在 a 处以定义 1.1 的意义逼近 E，这就给出了条件 (iii)。事实上，先假设 $\alpha > 0$，并令 $\lambda(a)$ 为定义 1.1 所提供的管常数。选择 $\Lambda > C(\lambda(a)+1)$。于是，前面的估计给出，对于所有充分小的 r,

$$\begin{aligned} &A \cap B_r(a) \cap \{q : |\Pi_{\mathbb{V}}(q) - R_a(q)| > \Lambda r^{m+\alpha}\} \\ &\qquad \subseteq E \cap B_r(a) \cap \{q : d(q,S_a) > \lambda(a) r^{m+\alpha}\}. \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{r\downarrow 0} r^{-k_{\mathrm{m}}} \mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}\Big(A \cap B_r(a) \cap \{q \ : \ |\Pi_{\mathbb{V}}(q) - R_a(q)| > \Lambda r^{m+\alpha}\}\Big) = 0.$$

当 $\alpha = 0$ 时，固定任意的 $\Lambda > 0$，选择管常数 $\lambda < \Lambda/(2C)$，然后取 r 足够小，使得 $\omega_a(r) < \Lambda/2$。同样的论证给出

$$\begin{aligned} &A \cap B_r(a) \cap \{q : |\Pi_{\mathbb{V}}(q) - R_a(q)| > \Lambda r^{m}\} \\ &\qquad \subseteq E \cap B_r(a) \cap \{q \ : \ d(q,S_a) > \lambda r^{m}\}, \end{aligned}$$

且后一个集合的归一化测度趋于零。由于 Λ 是任意的，条件 (iii) 在 $\alpha = 0$ 时也成立。因此，R_a 在 $\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-几乎处处的 $a \in A$ 满足 (i)–(iii)。

步骤 4。 集合 A 由步骤 2 可知是博雷尔集，且其 $\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-测度有限，因为 $A \subset E$。由步骤 2 和步骤 3 可知， A 满足引理 4.8的假设，因此可得出可数多个k维 $\mathbb{G}$正则曲面 $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ ，其类别为 (m， α) ，使得

$$\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = 0.$$

由于 $E \cap M$ 与 A 仅相差一个 $\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-零测集，同一族也覆盖 $E \cap M$ ，除去一个零测集。对第 1 步中得到的可数个一阶图块 M 求和，得到一个可数族由 (m, α) 类的 k 维 $\mathbb{G}$-正则曲面组成的族，其覆盖 E ，除去一个 $\mathcal{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-零测集，证明至此完成。 □

因此，我们终于可以给出主要结果的证明。

定理 1.2 的证明。对于 $\mathrm{H}^{k_{\mathrm{m}}}$-几乎处处的 $p \in E$， 令 S_p 为经过 p、由定义 1.1 给出的 (m, α) 类 $\mathbb{G}$-正则曲面，并设 $\mathbb{W}_p := T_p S_p \in \mathrm{V}(\mathbb{G}, k)$。由引理 5.3， $\mathrm{Tan}^{*k_{\mathrm{m}}}(\mathrm{H}^{k_{\mathrm{m}}} \llcorner E, p) \subseteq \mathbb{W}_p$。由于具有正下密度，定理 5.2 表明 E 是 (1, 0) 类的 $(k, \mathbb{G})$-可整流集，定理 1.3 即得结论。 □

5.3. **有限周长集**。 在本小节中，我们始终假设 $N \geq 2$，因此超曲面的维数为 $k = N - 1 \geq 1$。在一般的 Carnot 群中， Don、Le Donne、Moisala 和 Vittone [22] 用可数多个具有锥性质的集合覆盖有限周长集的约化边界；这一结论可能弱于由正则曲面实现的可整流性。记 $|A| := \mathcal{L}^N(A)$ 表示 Haar 体积， d_{cc} 表示与 $X_1, \ldots, X_\ell$ 相关的 Carnot–Carathéodory 距离， 而 $B_r^{cc}(x)$ 表示其开球；我们采用 [5, 定义 4.11 和 4.15]。

定义 5.4 （局部有限周长）。 可测集 $E \subset \mathbb{G}$具有局部有限周长，当且仅当 $X_1\chi_E, \ldots, X_\ell\chi_E$是拉东测度。其周长测度 $P_H(E; \cdot)$ 是 $D_H\chi_E$ 的全变差：$= (X_1\chi_E, \ldots, X_\ell\chi_E)$。其约化边界 $\mathcal{F}E$是由满足以下条件的 x 构成的集合：对于每个 $r > 0$， $P_H(E; B_r^{cc}(x)) > 0$ ；极限 $\nu_E(x) := \lim_{r \downarrow 0} D_H\chi_E(B_r^{cc}(x))/P_H(E; B_r^{cc}(x))$ 存在，并且 $|\nu_E(x)| = 1$。

在 Haar零测集 上改变 E 不会改变这些对象中的任何一个，因此我们可以假设 E是博雷尔集。空间 $(\mathbb{G}, d_{cc}, \mathcal{L}^N)$ 是完备的、倍增的，并且支持弱 (1,1)-庞加莱不等式； [38], 而 P_H 是其在 [53]意义下的周长。事实上，对于局部Lipschitz u，根据 Pansu 定理， $|\nabla_H u| \leq \mathrm{lip}\, u$ 几乎处处成立；对于光滑的 u，等式成立，并且光滑函数可在周长意义下逼近 [28]。因此， [1, 2] 的结果适用。

引理 5.5。 设 $E \subset \mathbb{G}$ 具有局部有限周长。则 FE 是博雷尔集， $H^{Q-1} \llcorner FE$是局部有限的，并且对于 H^{Q-1}-几乎处处的 $x \in FE$ ，存在 $t_x > 0$ 使得

$$\begin{aligned} c\, t^{Q-1} \leq \mathcal{H}^{Q-1}(\mathcal{F}E \cap B_t(x)) \leq C\, t^{Q-1}, \\ \min\{|E \cap B_t(x)|, |B_t(x) \setminus E|\} \geq c\, t^Q, \end{aligned} \qquad 0 < t < t_x, \tag{5.11}$$

其中 c、 $C > 0$ 仅取决于 $\mathbb{G}$ 和 d。

证明。 由于 $r \mapsto P_H(E; B_r^{cc}(x))$ 和 $r \mapsto D_H\chi_E(B_r^{cc}(x))$ 是左连续的，并且对于固定的 r，它们关于 x 是博雷尔函数（作为下半连续函数之差），所以定义ν_E 的极限可以沿有理半径取得，并且 $\mathcal{F}E$ 是博雷尔集。

根据 [5, 定理 4.16 和 (4.17)], ，它们陈述了 [1] 在 Carnot 群中对局部有限周长集的结果， $P_H(E; \cdot)$ 集中于 $\mathcal{F}E$，并且在 $P_H(E; \cdot)$-几乎处处的点处，其在 d_{cc}-球上的密度具有双侧 $(Q-1)$ 维界，常数

仅依赖于 $\mathbb{G}$。由 [5, (4.18)] 可知，它与 $\mathcal{S}^{Q-1} \llcorner \mathcal{F}E$相当，后者由 d_{cc} 构造，并采用归一化 ω_{Q-1}，因此也与 $\mathcal{H}^{Q-1} \llcorner \mathcal{F}E$相当，因为对于相同的距离和归一化，$\mathcal{H}^{Q-1} \le \mathcal{S}^{Q-1} \le 2^{Q-1}\mathcal{H}^{Q-1}$。

体积界来自 [2,定理 5.4],，该定理涉及有限周长集，因此我们进行截断。对于 $x_0 \in \mathbb{G}$ 和 $\rho' > 0$，令 $B_\rho := B_\rho^{cc}(x_0)$。余面积公式 [53,命题 4.2] 对于 $d_{cc}(x_0, \cdot)$ 给出：对几乎处处的 $\rho < \rho'$，有 $P_H(B_\rho; B_{\rho'}) < \infty$，随后次模性 [53, 命题 4.7]给出

$$P_H(E \cap B_\rho; \mathbb{G}) = P_H(E \cap B_\rho; B_{\rho'}) \le P_H(E; B_{\rho'}) + P_H(B_\rho; B_{\rho'}) < \infty.$$

在 B_ρ 内部，该截断与 E具有相同的 $D_H\chi$、约化边界和小尺度体积密度，因此 [2, 定理 5.4] 表明，E 及其补集在 $P_H(E; \cdot)$-几乎处处的点都具有正的下体积密度，其常数仅取决于倍增常数和庞加莱常数。最后，d_{cc} 和 d 双 Lipschitz 等价，所有界均可转移到 d 的球以及 $\mathcal{H}^{Q-1}$的归一化上。□

在余维一情形下，每个垂直超平面子群都由一条水平直线补足（命题 2.8），因此定理 1.2 和 1.5 适用于 $k = N - 1$ 和 $k_{\mathrm{m}} = Q - 1$。

推论 5.6。设 $E \subset \mathbb{G}$ 具有局部有限周长，$m \in \mathbb{N}$，且 $\alpha \in [0, 1]$。那么，若且唯若 FE满足对每个球 $B \subset \mathbb{G}$均有 $F^E \cap B \in \mathfrak{S}_{m,\ \alpha}(N-1)$，它才关于 H^{Q-1} 是 $(N-1, \mathbb{G})$-可整流的，且属于 (m, α) 类。

证明。对每个球 B，由引理 5.5 可知，$\mathrm{F}E \cap B$ 是博雷尔集，且具有有限的 H^{Q-1}-测度。若它属于 $\mathfrak{S}_{m,\alpha}(N-1)$，则根据定理 1.2，它是 (m, α) 类的可整流集：由引理 5.5 可知，正下密度假设成立，因为以 B 中的点为中心的足够小的球仍包含在 B 内。可数多个球覆盖 $\mathbb{G}$。反之，若 $\mathrm{F}E$ 是 (m, α) 类的可整流集，则每个 $\mathrm{F}E \cap B$也都是如此，并且定理 1.5 适用。□

仅凭体积信息即可验证管状条件。

引理 5.7。设 $E \subset \mathbb{G}$ 具有局部有限周长，$m \in \mathbb{N}$，且 $\alpha \in [0, 1]$。假设对于 H^{Q-1}-几乎处处的 $p \in FE$，存在 p 的开邻域 Ω_p 以及 $g_p \in \mathbf{C}_{\mathbb{G}}^{m,\alpha}(\Omega_p)$，其中 $g_p(p) = 0$ 且 $\nabla_H g_p(p) \neq 0$，使得

$$\left|(E \triangle \{g_p < 0\}) \cap B_r(p)\right| = o(r^{Q-1+m+\alpha}) \qquad as\ r \downarrow 0. \tag{5.12}$$

那么，关于 H^{Q-1}，FE 是 $(N-1, \mathbb{G})$类 (m, α) 可整流的。

例如，g_p 可以是齐次次数至多为 m 的多项式。对于 $\alpha > 0$，一般形式不能化为多项式形式，因为将 g_p 替换为其泰勒多项式会使 $\{g_p < 0\} \cap B_r(p)$ 改变一个体积为 $O(r^{Q-1+m+\alpha})$的集合；而对于 $\alpha = 0$，这两种形式等价。这些界由泰勒定理以及证明命题5.10中步骤 4 所用的估计得出。论证中需要小o 阶；一个 $O(r^{Q-1+m+\alpha})$ 阶只能将 (1.1) 中的例外集估计为一个常数倍的 $\lambda^{-1} r^{Q-1}$。

证明。固定 $n \in \mathbb{N}$。将引理 A.3 应用于 $\mu := \mathrm{H}^{Q-1} \llcorner (\mathrm{F}\ E \cap B_n(e))$，其中 $\nu_1 := \mathrm{H}^{Q-1} \llcorner \mathrm{F}\ E$（下界和上界，指数 $Q-1$），以及 $\nu_2 := \mathrm{L}^N \llcorner E$, $\nu_3 := \mathrm{L}^N \llcorner (\mathbb{G} \setminus E)$（下界，指数 Q），再应用引理 5.5。于是，除去一个 H^{Q-1}-零测集后，$\mathrm{F}E \cap B_n(e)$ 可由紧集 K 覆盖；对于这些紧集，存在 $c, C, t_K > 0$，使得 (5.11) 对每个 $x \in K$ 及每个 $t \in (0, t_K)$ 都成立，其中取 $c = c'$ 和 $C = C'$。要完成证明，只需证明这样的集合 K 是 (m, α) 类可整流的。

令 $\nu := \mathcal{H}^{Q-1} \llcorner \mathcal{F}E$。引理 5.5 中的界 使 ν 局部渐近倍增。对于这类测度，闭球构成 Vitali 关系 [23, 2.8。17], 再结合密度定理 .9。 [23, 2以及双边界，将闭球的结果推广到开球，可得

$$\frac{\nu(K \cap B_r(p))}{\nu(B_r(p))} \longrightarrow 1 \qquad \text{for } \nu\text{-a.e. } p \in K.$$

结合 ν 的下界，即可证明对于 H^{Q-1}-几乎处处的 $p \in K$， $\Theta_*^{Q-1}(K,p) > 0$。固定满足 (5.12) 的 $p \in K$，缩小 Ω_p，使得 $\nabla_H g_p \neq 0$ 在其上成立，并令 $D_p := \{q \in \Omega_p : g_p(q) < 0\}$，以及 $S_p := g_p^{-1}(0) \cap \Omega_p$。于是 S_p 是一张经过 p、属于 (m,α) 类的 $\mathbb{G}$-正则超曲面，因为在余维一情形下，$d_H g_p(q)$ 的核可由一条水平直线补足（命题 2.8）。固定 $\lambda > 0$，并设 $\eta := \lambda r^{m+\alpha}$， $a := \eta/10$，且

$$F_r := K \cap B_r(p) \cap \{q \ : \ d(q, S_p) > \eta\}.$$

若 $m + \alpha = 1$ 且 $\lambda \geq 1$，则 $F_r = \emptyset$，因为 $p \in S_p$；否则，对于所有充分小的 r，都有 $a < r/10$。选取互不相交的球 $B_a(q_i)$，满足 $q_i \in F_r$，其五倍膨胀覆盖 F_r。当 r 充分小时，这些球包含于 $B_{2r}(p) \cap \Omega_p$ 中且避开 S_p，并且 $5a < t_K$。每个球都可由径向膨胀路径连通，因此 g_p 在其上符号恒定；在 $q_i \in K$ 处应用 (5.11) 中的体积界，得到 $|(E \triangle D_p) \cap B_a(q_i)| \geq c' a^Q$。由于 $F_r \subset \mathrm{F}E$，由 (5.11) 中的上界及互不相交性可得

$$\mathcal{H}^{Q-1}(F_r) \leq C' \sum_i (5a)^{Q-1} \leq \frac{C' 5^{Q-1}}{c'} a^{-1} \big|(E \triangle D_p) \cap B_{2r}(p)\big| = o(r^{Q-1}).$$

因此， K 满足定义 1.1 在 p 处的管状条件，且 $S = S_p$，对每个$\lambda > 0$均成立，包括端点 $\alpha = 0$。因此$K \in \mathfrak{S}_{m,\,\alpha}(N-1)$。由于其正下密度已在上文证明，应用定理 1.2 并取 $k = N-1$ 可知 K 是$(m,\ \alpha)$ 类的可整流集，证毕。□

推论 *5.8.* 设 $m \in \mathbb{N}$、 $\alpha \in [0,1]$ 和 $\Omega \subset \mathbb{G}$ 为开集，且 E 在 Ω 中具有局部有限周长，其约化边界为 FE，位于 Ω 中。那么，FE 是 $(N-1,\mathbb{G})$- 可整流的，且属于 (m,α) 类，当且仅当对每个满足 $B \subset \Omega$ 的球 B，$F^E \cap B \in \mathfrak{S}_{m,\alpha}(N-1)$；若对 H^{Q-1}-几乎处处的 $p \in FE$，条件 *(5.12)* 成立，则该结论成立。

证明。 引理 5.5 和 5.7 以及 推论 5.6 的证明可以原样应用于 Ω内的球和紧块，并在截断步骤中取 $B^{cc}_{\rho'}(x_0) \subset \Omega$。 □

注 5.9。 (i) 对于 $m = 1$ 和 $\alpha = 0$，条件（5.12）表明完整放大在 L^1_{loc} 中收敛到一个垂直半空间。一般来说，这对 $\mathcal{H}^{Q-1}$-几乎处处的点 $\mathcal{F}$都成立这一点尚未解决，但在二阶 Carnot 群中已知成立，并且对某些其他群类也成立 。这刻画了 引理 5.7 在 $(m,\alpha) = (1,0)$处的假设。

(ii) 设 D 在开集 U 中具有局部有限周长，并且在该处是 K-拟极小的，也就是说，只要 $D \triangle F \Subset V \Subset U$，且 V为开集，就有 $P_H(D; V) \leq K P_H(F; V)$。设 B为一个满足 $B \subset U$的 d_{cc}-球。由余面积公式给出的一个此类球经过平移和膨胀可知，每个 d_{cc}-球都有有限周长。因此，次模性意味着 $D \cap B$具有有限周长。给定开集 $V \Subset B$ 以及 $D \cap B$ 的一个竞争集 F，满足 $(D \cap B) \triangle F \Subset V$，令 $F = F \cup (D \setminus B)$。于是 $D \triangle F \Subset V$。周长的局部性给出 $P_H(D \cap B; V) = P_H(D; V) \leq K P_H(F; V) = K P_H(F; V)$，这正是定义 3.1]所要求的。对于定理 4.2 的开代表以及备注 5.4],之后的讨论， [42, 的本质边界为 $\partial D \cap U$，因此根据定理 5.3]和定理 4.16], $\mathrm{H}^{Q-1}((\partial D \setminus \mathrm{F}D) \cap U) = 0$。由于可整流性不受零测集影响，$\partial D \cap U$ 是 类的可整流集

(m,α) 当且仅当 $\mathcal{F}D\cap U$ 是如此；根据 推论 5.8，特别是当 5.12 在 $\mathcal{H}^{Q-1}$-几乎处处的点处对 $\mathcal{F}D\cap U$ 成立时，结论成立。

下文中， $W^{j,q}_H$ 表示弱水平导数阶数不超过 j 的 Sobolev空间。

命题5.10。 设 $\Omega\subset\mathbb{G}$ 为开集，设 $g\in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 对某个有限的 $q>\max\{Q,2\}$ 成立，并设 $u\in W^{1,2}_{H,\mathrm{loc}}(\Omega)$ 是 $-\sum_{i=1}^{\ell}X_i^2u=g$ 在 Ω 中的弱解。例如， u 可局部极小化泛函

$$\mathcal{J}_g(v;V):=\int_V\left(\frac{1}{2}|\nabla_H v|^2-gv\right)\mathrm{d}x,\qquad V\Subset\Omega,$$

在紧支撑扰动下。对 *Lebesgue* 几乎处处的 $t\in\mathbb{R}$, $E_t:=\{u<t\}$ 在 Ω 中具有局部有限周长，且其在 Ω 中的约化边界是 $(N-1,\mathbb{G})$ 类的 *(2,0)*-可整流集。若 $\iota\le 2$，则覆盖超曲面可选为欧几里得 C^1。

证明。步骤1（正则性）。设 $Q>2$。向量场 X_i 无散，因此 $X_i^*=-X_i$ ，且 u 是一个分布解。由于 $g\in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，由 [24, 定理6.1和推论4.13] 可得 $u\in W^{2,q}_{H,\mathrm{loc}}(\Omega)$，而由 [24, 定理5.15] 可得 $u\in\Gamma_{2-Q/q}$ 局部成立，其中 $1<2-Q/q<2$。根据 $\Gamma_{1+\gamma}$ 在 [24]中的定义， $X_iu\in\Gamma_{1-Q/q}$ 局部成立，因此 u 有一个属于 $C^1_{\mathbb{G}}(\Omega)$ 的代表。若 $Q\le 2$，则该群是维数至多为二的欧几里得群，且经典内部估计适用。设 $H_u:=(X_iX_ju)_{i,j\le\ell}$。每个第二层向量场 X_k 都是交换子 $[X_i,X_j]$ 的线性组合，因此弱导数 X_ku 是相应的 $X_iX_ju-X_jX_iu$ 的线性组合，而 $X_iX_ju-X_jX_iu$ 是 $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中的固定函数。步骤 2（逐点二阶展开）。设 p 是这些函数及 H_u 的一个共同 L^q-Lebesgue点。由 (2.9)，连续代表的取值 $u(p)$ 和 $X_iu(p)$，以及 Lebesgue值 $X_ku(p)$ 和 $X_iX_ju(p)$，$i\le j\le\ell$，确定一个齐次次数至多为二的多项式 T_p。那么 $X_iX_jT_p\equiv(H_u(p))_{ij}$ 对 $i>j$ 也成立，因为对于弱导数，关系 $[X_i,X_j]=\sum_k c_{ij}^kX_k$ 成立，因此 Lebesgue值满足 $(H_u(p))_{ij}-(H_u(p))_{ji}=\sum_k c_{ij}^kX_ku(p)$；而 $X_kT_p\equiv X_ku(p)$，因为当 $d_k=2$ 时，X_kT_p 为常数。[38]，的庞加莱不等式给出界 $|B_\rho|\approx\rho^Q$，再结合通常的望远镜求和论证，即可得到缩放后的 Morrey不等式

$$\operatorname{osc}_{B_\rho(x)}w\le C\rho\left(|B_{C\rho}(x)|^{-1}\int_{B_{C\rho}(x)}|\nabla_H w|^q\right)^{1/q}\qquad\text{for } q>Q.$$

将此应用于在 p 处消失的连续函数 $w=X_j(u-T_p)$。由于 p 是 H_u 的一个 L^q-Lebesgue点，莫里不等式给出 $\sup_{B_{Cr}(p)}|\nabla_H(u-T_p)|=o(r)$。沿着从 p 出发、长度至多为 Cr 且包含在 $B_{Cr}(p)$ 中的水平曲线积分，并将固定常数 C 适当增大后，

$$h_p(r):=\sup_{B_r(p)}|u-T_p|\le Cr^2\left(\frac{1}{|B_{Cr}(p)|}\int_{B_{Cr}(p)}|H_u(x)-H_u(p)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}=o(r^2).$$

步骤 3（余面积选择）。令 Z_0 为一个博雷尔·哈尔零集，其中包含上述所有不是公共勒贝格点的点，并令 $Z:=Z_0\cup\{\nabla_H u=0\}$。根据命题 4.2] ，局部余面积公式 [53, 表明，对于几乎处处的 E_t ，其周长局部有限；并且在 Ω 的一个可数穷尽上，

$$\int_{\mathbb{R}}P_H(E_t;V\cap Z)\,\mathrm{d}t=\int_{V\cap Z}|\nabla_H u|\,\mathrm{d}x=0.$$

因此，周长–豪斯多夫比较从几乎所有约化边界中排除了 Z。固定这样一个边界上剩余的点 p。

步骤 4（估计）。由连续性， $u(p) = t$，因此 $P_p := T_p - t$ 满足 $P_p(p) = 0$ 和$\nabla_H P_p(p) \neq 0$。符号不匹配出现在 $\{|P_p| \leq h_p(r)\} \cap B_r(p)$ 中。选取水平 X，使得 $XP_p(p) \neq 0$，并选取一个与 $\exp(\mathbb{R}X)$ 互补的垂直超平面 $\mathbb{W}$。在坐标 $x = pw\exp(sX)$ 中选取一个小的乘积邻域，使得 XP_p 保持同一符号，且 $|XP_p|$ 有正的下界。在这些坐标中，哈尔测度是 $|\cdot|_{\mathbb{W}} \otimes \mathrm{L}^1$，的推前测度的一个常数倍，因为 $\exp(sX)$ 的共轭作用保持 $\mathbb{W}$ 上的哈尔测度，这与引理 4.7 的证明相同。对于足够小的 r，该邻域包含 $B_r(p)$，而沿 s 的单调性保证每个纤维上的区间长度至多为 $C_p h_p(r)$。此外， $B_r(p)$ 的投影具有哈尔测度 $O(r^{Q-1})$。于是由富比尼定理可得

$$|(E_t \triangle \{P_p < 0\}) \cap B_r(p)| \leq C_p h_p(r) r^{Q-1} = o(r^{Q+1}).$$

应用推论 5.8 于 $m = 2$、 $\alpha = 0$和 $g_p : = P_p$。欧几里得结论则可由第 5.4 节中的简短论证推出。□

我们将命题5.10 作为一个例子，其中（5.12）由一个方程推出，而非作为假设。其结论也可以由$\mathbf{C}^2_{\mathbb{G}}$ 的 [15, 定理 11] 的卢津逼近以及余面积公式得到，因为 u 几乎处处二阶近似可微；这一路径或许允许比我们用于 $q > \max\{Q、2\}$的更弱的可积性条件，我们用它来保证$\mathbf{C}^1_{\mathbb{G}}$ 正则性（第 1 步）和逐点展开（第 2 步）。余面积论证涉及固定函数的几乎每个水平集，而推论 5.6 和引理 5.7适用于每个具有局部有限周长的单独集合。

5.4. 欧几里得正则性。回顾一下， ι 是 $\mathbb{G}$的阶数。如果 $m \geq \iota$，则每个 k维$\mathbb{G}$正则曲面 S，其类为（m， α），都是 k维的 C^1 子流形，且属于 $\mathbb{R}^N$；因此，在定理 1.2的假设下， E 除去一个$\mathrm{H}^{k_{\mathrm{m}}}$零测集外，可以由可数多个这样的子流形覆盖。事实上，令 $f \in [\mathbf{C}^{m\,\alpha}_{\mathbb{G}}$， （$\Omega$）$]^{N-k}$ 在局部定义 S。由于 $d_l \leq \iota \leq m$对每个 l都成立，定义 2.12已经要求沿整个适配标架 X_1，……， X_N具有连续导数 $X_l f$。按照定理 2.13的证明进行光滑化， $f_\varepsilon \to f$和 $X_l f_\varepsilon \to X_l f$在局部一致。由于每个 ∂_{x_j}都是 X_1、……、 X_N的组合，且系数为多项式， $f \in C^1$（Ω）。于是， $\nabla_H f$就是将欧几里得雅可比矩阵 Df 应用于 X_1、……、 X_ℓ所得的结果，因此 $d_H f$的满射性给出秩 $Df = N - k$，隐函数定理适用。在 $\mathbb{H}^1$中，当 $\iota = 2$时，阈值是尖锐的。事实上，在 $\mathbb{H}^1$ 中存在类为 1 的 $\mathbb{H}$正则曲面，其欧几里得豪斯多夫维数为 $5/2$ [44]。我们不知道在更高阶的群中是否需要 $m \geq \iota$。

附录 A. 可测选择与紧片段

我们汇集三个标准的测度论结果。 引理 A.1 用于引理 4.8 和定理 5.2的证明中，引理 A.2 用于同样的两个证明中，而引理 A.3 用于引理 4.8 和5.7 以及定理 5.2的证明中。

引理 A.1。 设 μ 是定义在 $\mathbb{G}$上的 *Borel*测度，设 $p \in \mathbb{G}$ 和 $s, \gamma \geq 0$，并设$\varphi : \mathbb{G} \to [0, \infty]$ 是博雷尔集。对于 $L, r > 0$，令

$$\beta_L(r) := r^{-s} \mu(B_r(p) \cap \{\varphi > L r^\gamma\}).$$

那么，只要 $r < \varrho < 2r$，就有 $\beta_{2^\gamma L}(r) \leq 2^s \beta_L(\varrho)$。特别地，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，

$$\sup_{0<r<1/(2n)} \beta_{2^\gamma L}(r) \leq 2^s \sup\{\beta_L(\varrho) : \varrho \in \mathbb{Q},\ 0 < \varrho < 1/n\}.$$

证明。若 $r < \varrho < 2r$，则 $B_r(p) \subset B_\varrho(p)$，$L\varrho^\gamma \le 2^\gamma L r^\gamma$，且 $r^{-s} \le 2^s \varrho^{-s}$。为证明第二个断言，取一个有理数 $\varrho \in (r, 2r)$，使得 $\varrho < 1/n$。□

在本附录余下部分中，μ 是 Polish空间 X上的有限 Borel测度，且μ-可测表示相对于 μ 的完备化可测。

引理 A.2。设 Y 是非空 *Polish*空间，且 $R \subset X \times Y$ 是一个博雷尔集，其到 X 的投影具有满 μ-测度。那么存在一个博雷尔映射 $y : X \to Y$，使得$(x, y(x)) \in R$ 对 μ-几乎处处的 $x \in X$成立。

证明。首先注意，R 的投影 P 是解析集，因此是普遍可测的 [41, 定理 21。10], 所以假设是有意义的。Jankov–von Neumann 一致化定理给出一个普遍可测映射 $y_0 : \mathrm{P} \to Y$，使得 $(x, y_0(x)) \in \mathrm{R}$；参见 [41, 定理 18.1 和 29。9]在 P 之外将 y_0 延拓为一个常数。根据 Lusin 定理 [41, 定理 17。12], ，存在闭集 $F_h \subset X$，满足 $\mu(X \setminus F_h) < 2^{-h}$，且 $y_0|_{F_h}$ 连续。因此，y_0 在满测度的博雷尔集 $F := \bigcup_h F_h$上是博雷尔的；令 $y := y_0$ 在 F 上成立，并在 F 之外令 y 为常数，即得到所需映射。□

引理 A.3。设 $X = \mathbb{G}$，且 $A \subset \mathbb{G}$ 为 μ-可测。假设给定

(a) 一个从 $A \to Y$ 映射到 *Polish*空间 Y 的 μ-可测映射 Ψ；*(b)* μ-可测函数 $g_{i,\ n}$ 的可数多个序列：$A \to [0, \infty]$、$i \in I$，其中 $g_{i,\ n} \to 0$ 在 A 上按 $n \to \infty$ μ-几乎处处成立；*(c)* $\mathbb{G}$ 上的局部有限*Borel*测度 ν_1、…、ν_{n_0}，指数 s_1、…、$s_{n_0} \ge 0$，以及集合 J_-、$J_+ \subset \{1, \ldots, n_0\}$，这些集合可能相互重叠，并且对于 μ-几乎处处的 $x \in A$，$\Theta^{s_j}_*(\nu_j,\ x) > 0$ 对于 $j \in J_-$，而 $\Theta^{*s_j}(\nu_j,\ x) < \infty$ 对于 $j \in J_+$。

如果不需要其中某些数据，就令 Y 为一个点、$I = \emptyset$或 $n_0 = 0$。那么，除去一个 μ-零测集，A 可由可数多个紧集 $K \subset A$ 覆盖，使得 $\Psi|_K$ 在 K 上一致连续，对每个 $i \in I$都成立 $g_{i,\ n} \to 0$，并且存在某个 c_K，使得$r_K > 0$对所有$x \in K$ 和 $0 < r < r_K$都成立，

$$\nu_j(B_r(x)) \ge c_K r^{s_j} \quad \text{for } j \in \mathcal{J}_-, \qquad \nu_j(B_r(x)) \le c_K^{-1} r^{s_j} \quad \text{for } j \in \mathcal{J}_+.$$

证明。去掉一个 μ-零测集后，我们可以假设 A 是博雷尔集，并且假设在 A的每一点都成立。固定 $t > 0$，由法图引理，映射 $x \mapsto \nu_j(B_t(x))$ 是下半连续的。因此，对于 h、$k \in \mathbb{N}$，由点 $x \in A$组成的集合$D_{h,k}$ 满足：对每个有理数$t \in (0, 1/k)$，$\nu_j(B_t(x)) \ge t^{s_j}/h$ 对 $j \in \mathrm{J}_-$ 成立，且$\nu_j(B_t(x)) \le h t^{s_j}$ 对 $j \in \mathrm{J}_+$成立；该集合是博雷尔集，而这些集合覆盖 A。将任意的 $r \in (0, 1/(2k))$与区间$(r/2, r)$和$(r, 2r)$中的有理半径比较可知，对所有此类 r，相同的界在$D_{h,k}$上成立，只需将 h 替换为 $2^{s_*} h$，其中 $s_* := \max\{0, s_1, \ldots, s_{n_0}\}$。因此，下面的紧集$K \subset D_{h,k}$ 满足结论，其中 $c_K := (2^{s_*} h)^{-1}$ 且 $r_K := 1/(2k)$。

固定 h、k 和 $\varepsilon > 0$，并将 I 枚举为 $\mathbb{N}$ 的子集。叶戈罗夫定理 [25, 定理 2.33]（应用于 $\min\{g_{i,n}, 1\}$，它与 $g_{i,n}$ 一样在相同集合上一致收敛到 0），应用于第 i 个序列，误差为 $2^{-i-2}\varepsilon$；再将 Lusin定理 [41, 定理 17.12]，应用于 Ψ，误差为 $\varepsilon/4$，可得一个 μ-可测集 $D' \subset D_{h,k}$，满足 $\mu(D_{h,k} \setminus D') < \varepsilon/2$，且在该集合上每个 $g_{i,n} \to 0$ 都一致收敛，并且 Ψ 连续。根据内正则性 [41, 定理 17.11]，D' 包含一个紧集 K，满足 $\mu(D' \setminus K) < \varepsilon/2$。取 $\varepsilon = 1/l$, $l \in \mathbb{N}$，并令 h, k 遍历 $\mathbb{N}$，即可得到可数族。□

致谢

作者感谢 Mario Santilli（拉奎拉大学）在本项目早期阶段进行的启发性讨论并提供了宝贵反馈。

本文的数学结果和论证由作者在项目开展过程中完成；该项目始于2024年。最后阶段使用了大语言模型协助进行文字编辑、内容呈现和数学论证核验；作者对最终内容承担全部责任。

参考文献

[1] L. Ambrosio，Ahlfors正则度量测度空间中有限周长集的一些精细性质，《数学进展》159（2001年），第1期，51–67，https://doi.org/10.1006/aima.2000.1963。[2] ,倍增度量测度空间中有限周长集的精细性质，《集合值分析》10（2002年），第2-3期，111–128，https://doi.org/10.1023/A:1016548402502。[3] L. Ambrosio、N. Fusco和D. Pallara，有界变差函数与自由不连续问题，《牛津数学专著》，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000年。[4] L. Ambrosio和B. Kirchheim，度量空间与Banach空间中的可整流集，《数学年刊》318（2000年），第3期，527–555，https://doi.org/10.1007/s002080000122。[5] L. Ambrosio、B. Kleiner和E. Le Donne，Carnot群中有限周长集的可整流性：切超平面的存在性，《几何分析杂志》19（2009年），第3期，509–540，https: //doi.org/10.1007/s12220-009-9068-9。[6] G. Antonelli和E. Le Donne，Pauls可整流与纯Pauls不可整流的光滑超曲面，《非线性分析》200（2020年），论文编号111983，30页，https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111983。[7] G. Antonelli和A. Merlo，Carnot群中的可整流测度：密度的存在性，《几何分析杂志》32（2022年），论文编号239，https://doi.org/10.1007/s12220-022-00971-7。[8] , Carnot群中的可整流测度：Marstrand–Mattila可整流性判据，《函数分析杂志》283（2022年），第1期，论文编号109495，https://doi.org/10.1016/j.jfa.2022.109495。arXiv:2202.12741。[9] ,Carnot群中的可整流测度：表示，《变分法与偏微分方程》61（2022年），论文编号7，https://doi.org/10.1007/s00526-021-02112-4。[10] G. Anzellotti和R. Serapioni，C^k-可整流集，《纯粹与应用数学杂志》453（1994年），1–20，https://doi.org/10.1515/crll.1994.453.1。[11] G. Arena、A. O. Caruso和A. Causa，二阶Carnot群上的泰勒公式，《伊比利亚美洲数学评论》26（2010年），第1期，239–259，https://doi.org/10.4171/RMI/600。[12] V. V. Balashchenko，六维广义Heisenberg群上的不变结构，《克拉古耶瓦茨数学杂志》35（2011年），第2期，209–222。[13] A. Bonfiglioli、E. Lanconelli和F. Uguzzoni，分层李群及其子拉普拉斯算子的势理论，《数学中的施普林格专著》，施普林格，柏林，2007年。[14] C. Brena、C. De Lellis和F. Franceschini， C^∞ 平稳变分簇的可整流性，2025年。arXiv:2503.00649。[15] M. Capolli、A. Pinamonti和G. Speight，Carnot群上实值函数的 C^k Lusin逼近定理，《印第安纳大学数学杂志》72（2023年），第4期，1327–1365，https://doi.org/10.1512/iumj.2023.72.9773。[16] V. Chousionis、K. Fässler和T. Orponen，Heisenberg群中 C^1、$^\alpha$ 内在图上的奇异积分的有界性，《数学进展》354（2019年），论文编号106745，https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106745。[17] , Heisenberg群中的内在Lipschitz图与垂直 β-数，《美国数学杂志》141（2019年），第4期，1087–1147，https://doi.org/10.1353/ajm.2019.0028。[18] G. David和S. Semmes， $\mathbb{R}^n$中的奇异积分与可整流集。超越Lipschitz图，《星丛》193卷，法国数学学会，1991年。[19] _____, 一致可整流集的分析及其上的分析，《数学调查与专著》38卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1993年。[20] C. De Lellis和A. Skorobogatova，极小面积整数流奇异集的精细结构I：平坦奇异点的奇异度，《分析创新文献》2025年，论文编号3，61页，https://doi.org/10.15781/y8xg-xv26。[21] G. Del Nin和K. O. Idu， C^1、$^\alpha$-可整流性的几何判据，《伦敦数学学会杂志》（第2辑）105（2022年），第1期，445–468，https://doi.org/10.1112/jlms.12520。

[22] S. Don、E. Le Donne、T. Moisala和D. Vittone，Carnot群中有限周长集的一个可整流性结果，《印第安纳大学数学杂志》71（2022年），第5期，2233–2258，https://doi.org/10.1512/iumj.2022.71.9028。[23] H. Federer，《几何测度论》，施普林格，1969年。[24] G. B. Folland，幂零李群上的次椭圆估计与函数空间，《阿克数学》13（1975年），161–207，https://doi.org/10.1007/BF02386204。[25] ，《实分析：现代技术及其应用》，第2版，约翰·威立父子出版公司，纽约，1999年。[26] G. B. Folland和E. M. Stein，齐性群上的Hardy空间，《数学笔记》28卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1982年。[27] B. Franchi和R. Serapioni，Carnot群中的内在Lipschitz图，《几何分析杂志》26（2016年），第3期，1946–1994，https://doi.org/10.1007/s12220-015-9615-5。[28] B. Franchi、R. Serapioni和F. Serra Cassano，依赖于向量场的Meyers–Serrin型定理与变分积分的松弛，《休斯敦数学杂志》22（1996年），第4期，859–890。[29] , Heisenberg群中的可整流性与周长，《数学年刊》321（2001年），479–531，https://doi.org/10.1007/s002080100228。[30] , 二阶Carnot群中有限周长集的结构，《几何分析杂志》13（2003年），第3期，421–466，https://doi.org/10.1007/BF02922053。[31] , Carnot群中的正则超曲面、内在周长与隐函数定理，《分析与几何通讯》11（2003年），第5期，909–944，https://doi.org/10.4310/CAG.2003.v11.n5.a4。[32] , Heisenberg群中的正则子流形、图与面积公式，《数学进展》211（2007年），第1期，152–203，https://doi.org/10.1016/j.aim.2006.07.015。[33] _____, Heisenberg群中内在Lipschitz函数的可微性，《几何分析杂志》21（2011年），第4期，1044–1084，https://doi.org/10.1007/s12220-010-9178-4。[34] S. Ghinassi，C^1、α 参数化与可整流性的充分条件，《芬兰科学院数学年刊》45（2020年），第2期，1065–1094，https://doi.org/10.5186/aasfm.2020.4557。[35] K. O. Idu、V. Magnani和F. P. Maiale，齐性群中 k-可整流性的刻画，《数学分析及其应用杂志》500（2021年），第2期，论文编号125120，20页，https://doi.org/10.1016/j. jmaa.2021.125120。[36] K. O. Idu和F. P. Maiale，Heisenberg群中低余维的 C^1、α-可整流性，《度量空间的分析与几何》12（2024年），第1期，论文编号20230105，https://doi.org/10.1515/agms-2023-0105。[37] Kennedy Obinna Idu，没有下密度条件的Heisenberg群中的可整流性，《几何分析杂志》36（2026年），第11期，356，https://doi.org/10.1007/s12220-026-02558-y。[38] D. Jerison，满足Hörmander条件的向量场的庞加莱不等式，《杜克数学杂志》53（1986年），第2期，503–523，https://doi.org/10.1215/S0012-7094-86-05329-9。[39] A. Julia、S. Nicolussi Golo和D. Vittone，处处不可微的内在Lipschitz图，《伦敦数学学会通报》53（2021年），第6期，1766–1775，https://doi.org/10.1112/blms.12540。arXiv:2101.02985。[40] , Carnot群中内在图的面积与余面积公式，《数学杂志》301 2，1369 2022 1406，10 1007 00209 021 02916 2（），第–期，https://doi.org/ 。/s - - - 。[41] A. S. Kechris，经典描述集合论，《数学研究生教材》156卷，施普林格出版社，纽约，1995年。[42] J. Kinnunen、R. Korte、A. Lorent和N. Shanmugalingam，度量空间中具有拟极小边界曲面的集合的正则性，《几何分析杂志》23（2013年），第4期，1607–1640，https://doi.org/10. 1007/s12220-012-9299-z。[43] B. Kirchheim，可整流度量空间：豪斯多夫测度的局部结构与正则性，《美国数学会会刊》121（1994年），第1期，113–123，https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1994-1189747-7。[44] B. Kirchheim和F. Serra Cassano，Heisenberg群中内在正则曲面的可整流性与参数化，《比萨高等师范学院科学类年刊》（第5辑）3（2004年），第4期，871–896，https: //doi.org/10.2422/2036-2145.2004.4.07。[45] S. Kolasiński，通过平均离散曲率研究测度的高阶可整流性，《伊比利亚美洲数学评论》33（2017年），第3期，861–884，https://doi.org/10.4171/RMI/958。[46] E. Le Donne和T. Moisala，半生成嘉诺代数及其在次黎曼周长中的应用，《数学杂志》299（2021年），第3-4期，2257–2285，https://doi.org/10.1007/s00209-021-02744-4。arXiv:2004.08619。[47] M. Marchi，一类Carnot群中具有常内在法向量的集合的正则性，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）64（2014年），第2期，429–455，https://doi.org/10.5802/aif.2853。

[48] P. Mattila，《欧几里得空间中集合与测度的几何学》，剑桥高等数学研究丛书，第44卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[49] ，《可整流性：综述》，伦敦数学学会讲义丛书，第483卷，剑桥大学出版社，剑桥，2023年。[50] P. Mattila、R. Serapioni 和 F. Serra Cassano，《海森堡群中内在可整流性的刻画》，《比萨高等师范学院科学类年刊》（第5辑）9（2010），第4期，687–723，https://doi.org/10.2422/2036-2145.2010.4.02。[51] U. Menne，《局部有界一阶变分的积分变分簇的二阶可整流性》，《几何分析杂志》23（2013），第2期，709–763，https://doi.org/10.1007/s12220-011-9261-5。[52] A. Merlo，《Carnot群中1-余维测度的Marstrand–Mattila可整流性判据》，《分析与偏微分方程》16（2023），第4期，927–996，https://doi.org/10.2140/apde.2023.16.927。[53] M. Miranda Jr.，《“良好”度量空间上的有界变差函数》，《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）82（2003），第8期，975–1004，https://doi.org/10.1016/S0021-7824(03)00036-9。[54] P. Pansu，《Carnot–Carathéodory度量与秩一对称空间的拟等距》，《数学年刊》（第2辑）129（1989），第1期，1–60，https://doi.org/10.2307/1971484。[55] S. D. Pauls，《以Carnot群为模型的可整流性概念》，《印第安纳大学数学杂志》53（2004），第1期，49–82，https://doi.org/10.1512/iumj.2004.53.2293。[56] M. Santilli，《集合的高阶可整流性与近似可微性》，《印第安纳大学数学杂志》68（2019），第3期，1013–1046，https://doi.org/10.1512/iumj.2019.68.7645。[57] ，《有界平均曲率变分簇的二阶可整流性》，《变分法与偏微分方程》60（2021），第2期，论文第81号，17页，https://doi.org/10.1007/s00526-021-01922-w。[58] D. Vittone，《海森堡群中的利普希茨图与流》，《Forum Math. Sigma》10（2022），论文第e6号，https://doi.org/10.1017/fms.2021.84。[59] S. K. Vodopyanov 和 I. M. Pupyshev，《Carnot群上函数延拓的Whitney型定理》，《西伯利亚数学杂志》47（2006），第4期，601–620，https://doi.org/10.1007/ s11202-006-0072-z。

(Kennedy Obinna Idu) 加拿大安大略省多伦多市 M5S 2E4，多伦多大学数学系。电子邮件地址: idu@math.toronto.edu

(Francesco Paolo Maiale) 格兰萨索科学研究所，意大利拉奎拉 F. Crispi大道7号，邮编 67100。电子邮件地址: francescopaolo.maiale@gssi.it