大型强子对撞机超外围碰撞中的高 p_T 横动量光子衍射光生过程

João V. Bulhões,[1†] and Victor P. Gonçalves[1‡]

[1] *Institute of Physics and Mathematics, Federal University of Pelotas, 354, 96010-900, Pelotas, RS, Brazil*

arXiv:2611.30966v1 [hep-ph] 23 Nov 2026

摘要

我们研究了大型强子对撞机超外围碰撞中的大横动量光子衍射光生过程，考察了不同的碰撞系统以及对 BFKL 波美子的各种描述。我们估算了截面和微分分布，其中包括对 BFKL特征函数的 NLO修正，并评估了在超外围 pp、pPb 和铅-铅碰撞中测量这一过程的前景。我们发现，截面相当可观，未来对这一道过程的测量有助于约束 BFKL动力学，并增进我们对高能量子色动力学的理解。

KEYWORDS:

High—能量量子色动力学、BFKL重求和、超外围碰撞、衍射光子 pr
oduct

[†]电子邮件： joaovitor1729@gmail.com

[‡]电子邮件： barros@ufpel.edu.br

目录

1 引言 **2**

2 形式体系 **4**

2.1 等效光子通量 .5 2.2 $\gamma^* h \to \gamma X$ 过程 .5 2.3 BFKL方法中的高 $|t|$ 光子产生 .6 2.4 BFKL特征函数 .8 2.4.1 全极点共线重求和 .9 2.4.2 BLM 标度设定 .9 2.4.3 最小敏感性原理 .11 2.4.4 特征函数之间的比较 .12

3 结果 **12**

4 总结 **16**

致谢 **18**

1 引言

在粒子物理学标准模型框架内，描述高能下的强相互作用动力学仍是一项重大的理论挑战。尽管过去几十年来，关于小 Bjorken x 下量子色动力学（QCD）的理论研究已取得长足进展，但仍有若干问题尚未解决。这一持续存在的挑战促使人们分析各种末态，并提出建设新一代对撞机；这些举措对于深化我们对强子结构的认识至关重要。

对 HERA 上 ep 碰撞的研究，特别是诸如 $ep \to eYX$这样的过程，其中 Y和 X 分别表示解离光子和质子的强子系统，已表明，分析衍射过程是约束量子色动力学动力学的一种有前景的方法（综述参见，例如，参考文献 [1]）。特别是，有人提出分析涉及被大快度间隙隔开的末态 X 和 Y 的过程，以探测巴利茨基–法丁–库拉耶夫–利帕托夫（BFKL）庞美子 [2–5]。现有的双重解离、喷注间快度间隙以及大动量转移下衍射矢量介子产生的测量 t 带来了理论挑战 [1]。在前两种情况下，强子系统之间额外的强相互作用可能会破坏由衍射硬散射产生的快度间隙。尽管衍射矢量介子产生（$\gamma p \to VX$）避免了这一问题，但它依赖于对矢量介子波函数的了解（例如，参见参考文献 [6, 7]）。相反，衍射光子产生（$\gamma p \to \gamma X$）既避免了间隙被破坏的效应，也消除了波函数的不确定性： Y 系统是单个光子，因此不会与质子残余物发生后续强相互作用；而 $\gamma \to q\bar{q}$ 的劈裂则由电磁相互作用引起。散射光子具有较大的横向动量，由此确立了硬尺度；正如 $p_T^2 \approx -t$ 在光致产生中那样，大动量转移还会使质子解离为 X 系统。因此，硬散射可用微扰量子色动力学计算；除由数据确定的 BFKL 能标外，主要的非微扰输入来自质子部分子分布函数。这些特点促使早期研究考察了 BFKL 方程的领头阶（LO）解 [8–12]。随后，参考文献 [13]估算了次领先阶（NLO）修正对高-t衍射光子产生的影响。遗憾的是，HERA 数据稀少且 ep 对撞机已停运，因此难以得出更精确的结论。

近年来，人们已经确立，强子碰撞中的光子-强子相互作用为探索高能量下量子色动力学提供了一种有效方法 [14, 15]。特别是，关于大动量转移下矢量介子光致产生的研究结果表明，这些过程在 pp、 pA和 AA 碰撞中的截面足够大，因此原则上可以在大型强子对撞机上开展实验分析 [16–21]。受这些研究结果的启发，本文首次分析了大型强子对撞机超外围碰撞中的高 p_T 光子衍射光生过程，如图1所示。反应$h_1 + h_2 \to h_1 \otimes \gamma \otimes X$，其中 $\otimes$ 表示末态中存在快度间隙，可以

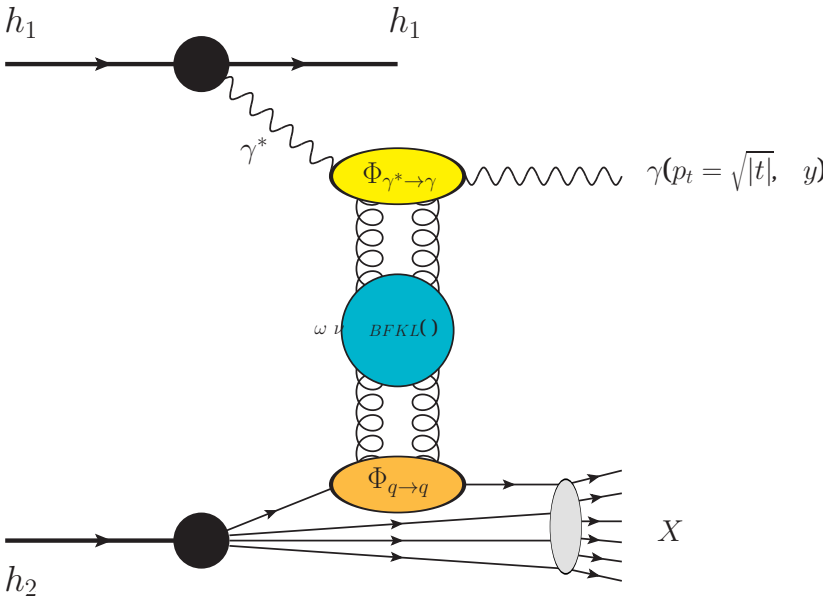


图 1：超周边碰撞中大动量转移下的衍射光子产生，$h_1 + h_2 \to h_1 \otimes \gamma \otimes X$。由 h_1 发射的光子通过$\gamma^* \to \gamma$ 冲击因子与 BFKL 阶梯耦合，而阶梯则通过 $q \to q$ 冲击因子与来自 h_2 的部分子耦合。受撞击部分子（夸克或胶子）引发一个喷注，该喷注成为系统 X 的一部分。

分解为以下几个阶段：首先，入射强子 h_1 发射一个光子，该光子涨落为一对夸克-反夸克（$q\bar{q}$）。其次，这一对粒子通过由 BFKL 阶梯表示的色单态交换，与来自靶强子的部分子（q）发生相互作用。最后，$q\bar{q}$ 对粒子湮灭为一个具有横向动量 $p_T = \sqrt{|t|}$和快度 y的实光子。在相互作用过程中，阶梯向靶部分子传递动量，导致强子h_2 解体，随后发生强子化。在冲击因子表象中，$\gamma^* p \to \gamma X$ 的散射振幅可分解为光子（$\Phi_{\gamma^*\to\gamma}$）和夸克（$\Phi_{q\to q}$）冲击因子，以及色单态构型下两个相互作用的雷吉化胶子的格林函数。在最低阶，过程由双胶子交换描述，从而得到与能量无关的截面。超出最低阶后，主要贡献来自 BFKL 波美子奇点；该奇点由沿阶梯进行（雷吉化）胶子交换的阶梯图产生。相互作用的胶子阶梯交换随后导致截面随能量增加，其具体行为由 BFKL 方程的特征函数 $\omega(\nu)$决定。

本文估算了大型强子对撞机能区超外围 pp、 p铅-铅碰撞中的高-p_T 光子衍射光生过程，并给出了总截面以及快度和横向动量分布的预测。我们采用不同精细程度的 BFKL核处理方法进行计算。特别地，我们研究了用于计算

特征函数次领头阶修正的方案对预测的影响，从而量化相关的理论不确定性。我们还将预测与现有的 HERA 数据进行比较，以约束该形式体系中唯一的自由参数——对于每种核方案而言的 BFKL 能标 s_0。因此，所得的大型强子对撞机预测不含自由参数。下文给出的结果表明，在大型强子对撞机的超外围碰撞中产生的大横动量光子产额不可忽略，这促使未来开展实验搜索，将这一末态作为研究高能区 QCD动力学的探针。

本文结构如下。下一节将介绍用于描述超外围碰撞中大 t 处光子衍射光生过程的形式体系。具体而言，我们将讨论 $\gamma^* p \to \gamma X$ 的散射振幅，并概述 BFKL 核的不同方案，以及计算中所涉及的各项要素。在第3节，我们利用 HERA 数据中的微分横动量分布来约束 BFKL 能标 s_0 ，并给出总截面能量依赖性的相应预测。此外，我们还将给出超外围 pp、 pPb 和 PbPb 碰撞中的微分分布及总截面预测。在第4节，最后总结主要结果与结论。

2 形式体系

本节介绍用于描述超外围碰撞中光子衍射光生过程的形式体系。在这些事件中，入射强子的碰撞参数大于其半径之和，因此它们之间的强相互作用受到强烈抑制。因此，光子–光子和光子–强子相互作用占主导地位，强子截面可利用等效光子近似 [14, 22, 23]计算。对于图1所示的过程，其反应式为

$$h_1 + h_2 \;\to\; h_1 \otimes \gamma \otimes X \;, \tag{1}$$

微分截面可因子化为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma\left[h_1 + h_2 \to h_1 \otimes \gamma \otimes X\right]\left(\sqrt{s_{NN}}\right)}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t} \;=\; \omega\,\frac{\mathrm{d}N_{\gamma/h_1}(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\;\frac{\mathrm{d}\sigma_{\gamma^* h_2 \to \gamma X}\left(W\right)}{\mathrm{d}t}\;, \tag{2}$$

其中 $\sqrt{s_{NN}}$ 是每核子对的强子–强子质心能量。其基本思想是，强子 h_1 以能量 ω发射一个光子，其通量为 $\mathrm{d}N_{\gamma/h_1}/\mathrm{d}\omega$。随后，该光子与靶强子 h_2 发生相互作用，其光子–强子质心能量为 $W = \sqrt{2\omega\sqrt{s_{NN}}}$。相应的微分截面为 $\mathrm{d}\sigma(\gamma^* h_2 \to \gamma X)/\mathrm{d}t$。末态光子的快度为 $y \simeq \ln\left(2\omega/\sqrt{|t|}\right)$，这意味着前向快度对应于 W的大值。以下各小节将介绍我们计算式 (2) 所用的主要要素。

2.1 等效光子通量

根据参考文献中的研究，以下我们假设质子的光子谱由参考文献中推导出的表达式描述，该表达式如下 [24], :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_{\gamma/p}(\omega)}{\mathrm{d}\omega} &= \frac{\alpha}{2\pi\omega}\left[1+\left(1-\frac{2\omega}{\sqrt{s}}\right)^2\right]\left(\ln\Omega-\frac{11}{6}+\frac{3}{\Omega}-\frac{3}{2\Omega^2}+\frac{1}{3\Omega^3}\right), \\ \text{with} \qquad \Omega &= 1+\frac{0.71\ \mathrm{GeV}^2}{Q^2_{\min}}, \qquad \text{and} \qquad Q^2_{\min} = \frac{\omega^2}{\gamma_L^2\left(1-2\omega/\sqrt{s}\right)}, \end{aligned} \tag{3}$$

其中， $\gamma_L = \sqrt{s_{NN}}/(2m_N)$为相应的洛伦兹因子， m_N为核子质量。另一方面，对于原子核对应的光子谱，我们假设 [14]

$$\frac{\mathrm{d}N_{\gamma/A}(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2Z^2\alpha}{\pi\omega}\left[\bar{\eta}\,K_0(\bar{\eta})K_1(\bar{\eta}) - \frac{\bar{\eta}^2}{2}\,\mathcal{U}(\bar{\eta})\right], \tag{4}$$

其中， $\bar{\eta} = \omega(R_{h_1}+R_{h_2})/\gamma_L$， $\mathcal{U}(\bar{\eta}) = K_1^2(\bar{\eta}) - K_0^2(\bar{\eta})$，而$K_{0,\,1}$为修正贝塞尔函数，其中 $R_A = 1.2\,A^{1/3}$ fm和 $R_p = 0.7$ fm。不额外引入间隙存活因子。强子相互作用的抑制仅通过核光子通量中的条件 $b > R_{h_1} + R_{h_2}$ 体现。

在我们的计算中，我们假设强子 h_1 向正快度方向运动。对于对称系统（即 pp 和PbPb），我们通过加入 $y \to -y$对应的贡献，纳入两种光子发射可能性，从而得到对称的快度分布。对于 pPb碰撞，我们假设可以标记未解体的强子，因此能够识别光子发射体。下文中，我们用Pbp 表示原子核发射光子、质子解体的构型，用 pPb表示质子发射光子、原子核解体的构型。

2.2 $\gamma^* h \to \gamma X$ 过程

在大动量转移下，具有出射光子与未观测末态 X 之间快度间隙的光子-强子过程 $\gamma^* h \to \gamma X$, 可描述为光子与强子中的单个部分子发生弹性散射，即 $\gamma^* q \to \gamma q$ （或 $\gamma^* g \to \gamma g$），其间通过在 t道交换色单态BFKL阶梯 [12, 25]。硬尺度由动量转移 $|t| = p_T^2$ 提供，其中 p_T 为光子的横向动量。在高能区，光子-强子质心能量为 W 时的$\gamma^* h \to \gamma X$ 截面由部分子截面 $\mathrm{d}\hat{\sigma}/\mathrm{d}t(\gamma^* q \to \gamma q)$ 与强子的部分子分布 h 卷积得到，如下所示 [13, 25]

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\gamma^* h \to \gamma X)}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_j} = \left[\frac{81}{16}\,G_h(x_j,|t|) + \sum_j\left(q_h^j(x_j,|t|) + \bar{q}_h^j(x_j,|t|)\right)\right]\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}(\gamma^* q \to \gamma q)}{\mathrm{d}t}(\hat{s})\,, \tag{5}$$

系统	$\sqrt{s}$ [太电子伏特]	光子发射体	解离强子（部分子分布函数）	$R_{h_1}+R_{h_2}$ [飞米]
pp	13.6	both	p （MMHT2014）	—
Pbp	8.16	Pb	p (MMHT2014)	7.81
pPb	8.16	p	铅（$A\times$EPPS21）	—
PbPb	5.36	both	铅（$A\times$EPPS21）	14.22

表 1：所考虑的碰撞系统。在非对称构型中，光子发射体是被标记的完整强子。最后一列给出了核光子通量中所采用的最小冲量参数，见公式（4），其中 $R_p = 0.7$ fm，且 $R_A = 1.2\,A^{1/3}$ fm；当光子由质子发射时不使用该参数，因为其通量（公式（3））与冲量参数无关。

其中 G_h 和 q_h^j 分别是胶子分布和夸克分布，在因子化尺度$|t|$处取值； x_j 是强子中由受撞击部分子携带的纵向动量分数，该部分子引发一个喷注，因此光子-部分子质心能量的平方为$s = x_j W^2$。计算公式（2）所需的单微分截面，$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$，为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \int_{x_{\min}}^{1} \mathrm{d}x_j \, \frac{\mathrm{d}\sigma(\gamma^* h \to \gamma X)}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_j} \,, \tag{6}$$

其中最小值 $x_{\min}$ 由对强子碎片质量 M_X 的实验截断确定。遵循H1测量中采用的选择条件 [26], ，我们施加 $\Delta\eta \gtrsim 3$，其中 $\Delta\eta$ 是光子与系统 X之间的快度间隙，对应于$y_{IP} = |t|/\hat{}$ $s < 0.05$，并意味着 $x_{\min} = |t|/(0.05\,W^2)$

在质子靶的计算中，我们采用通过 MMHT2014nlo68cl 获得的质子部分子分布函数 [27],。另一方面，对于解离核，式（5）中的部分子分布为 A 乘以 EPPS21 参数化方案 [29]中的每核子核PDF。本文所用碰撞系统及其质心能量、光子发射体、部分子分布函数和半径汇总于表1。

2.3 BFKL方法中的大 $|t|$ 动量转移光子产生

F按照参考文献 [12, 13], ， 部分子子过程 $\gamma^* q \to \gamma q$ i 的截面 s

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}t}(\gamma^* q \to \gamma q) = \frac{1}{16\pi \hat{s}^2} \left\{ |\mathcal{A}_{(+,+)}(\hat{s},t)|^2 + |\mathcal{A}_{(+,-)}(\hat{s},t)|^2 \right\}, \tag{7}$$

其中 $\hat{s}$ 是该子过程的质心能量平方。对于虚度为 Q^2 的入射光子，在最低共形自旋下，螺旋度振幅为 [12, 13]

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{(+,+)}(\hat{s},t) &= i\alpha\alpha_s^2 \sum_q e_q^2 \frac{\pi}{6}\frac{\hat{s}}{|t|}\int \mathrm{d}\nu \frac{\nu^2}{(1/4+\nu^2)^2}\frac{\tanh(\pi\nu)}{\pi\nu(1+\nu^2)}\left[\frac{\hat{s}}{s_0}\right]^{\omega(\nu)}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}\left[\frac{Q^2}{|t|}\right]^{-z/2} \\
&\quad\times \frac{\Gamma(1/2-i\nu-z/2)\,\Gamma(1/2+i\nu-z/2)}{|\Gamma(1/2+i\nu)|^2}\,\Gamma(z/2)\,\Gamma(z/2+1)\left[z^2+11+12\nu^2\right], \\
\mathcal{A}_{(+,-)}(\hat{s},t) &= i\alpha\alpha_s^2 \sum_q e_q^2 \frac{2\pi}{3}\frac{\hat{s}}{|t|}\int \mathrm{d}\nu \frac{\nu^2}{(1/4+\nu^2)^2}\frac{\tanh(\pi\nu)}{\pi\nu(1+\nu^2)}\left[\frac{\hat{s}}{s_0}\right]^{\omega(\nu)}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}\left[\frac{Q^2}{|t|}\right]^{-z/2} \\
&\quad\times \frac{\Gamma(3/2-i\nu-z/2)\,\Gamma(3/2+i\nu-z/2)}{|\Gamma(1/2+i\nu)|^2}\,\Gamma(z/2)\,\Gamma(z/2+1)\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

在光生过程区间（这是我们关注的区间）中，$Q^2 \ll |t|$，z 积分主要由 $\Gamma(z/2)$在 $z=0$处的极点贡献，振幅变为 [10, 13]

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{(+,+)}(\hat{s},t) &= i\alpha\alpha_s^2 \sum_q e_q^2 \frac{4\pi}{3}\frac{\hat{s}}{|t|}\int \mathrm{d}\nu \frac{\nu^2}{(1/4+\nu^2)^2}\frac{\tanh(\pi\nu)}{\pi\nu}\frac{11/4+3\nu^2}{1+\nu^2}\left[\frac{\hat{s}}{s_0}\right]^{\omega(\nu)}, \\
\mathcal{A}_{(+,-)}(\hat{s},t) &= i\alpha\alpha_s^2 \sum_q e_q^2 \frac{4\pi}{3}\frac{\hat{s}}{|t|}\int \mathrm{d}\nu \frac{\nu^2}{(1/4+\nu^2)^2}\frac{\tanh(\pi\nu)}{\pi\nu}\frac{1/4+\nu^2}{1+\nu^2}\left[\frac{\hat{s}}{s_0}\right]^{\omega(\nu)},
\end{aligned} \tag{9}$$

其中 α 为电磁耦合，e_q 为夸克电荷，s_0 为 BFKL 能标，而 $\omega(\nu)$ 为 BFKL特征函数，将在第2.4节讨论。双胶子交换（玻恩）极限对应于 $\omega(\nu)=0$。

式（9）中的振幅包含领头阶（LO）冲击因子。与文献 [13],相同，冲击因子中的强耦合保持固定，$\alpha_s = 0.21$，对于下文考虑的所有核均如此；而在次领先近似方法中，它在特征函数中取为跑动耦合。BFKL 能标参数化为

$$s_0 = c_{s_0}\,|t|\,, \tag{10}$$

其中，c_{s_0} 是一个自由参数，将利用 H1 数据为每个核确定。此式对应于参考文献 [13] 中的参数化形式 $s_0 = c_1 Q^2 + c_2|t|$，并取准实光子极限 $Q^2 \simeq 0$。在我们的分析中，光子圈中考虑了四种活跃味，因此有 $\sum_q e_q^2 = 10/9$。

2.4 BFKL特征函数

BFKL特征函数写作 [13]

$$\omega(\nu) \;=\; \bar{\alpha}_s\,\chi(\gamma)\;, \qquad \gamma \;=\; \tfrac{1}{2} + i\nu\;, \tag{11}$$

其中 $\bar{\alpha}_s \equiv N_c\alpha_s/\pi$。在领先对数近似（LLA）下， [2–5],

$$\chi^{\rm LO}(\gamma) \;=\; 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma)\;, \tag{12}$$

其中 ψ 为双伽马函数。

在次领先对数近似（NLA）下， [30, 31],

$$\chi(\gamma) \;=\; \chi^{\rm LO}(\gamma) + \bar{\alpha}_s\,\chi^{\rm NLO}(\gamma)\;, \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}\chi^{\rm NLO}(\gamma) \;=\; & \frac{4-\pi^2+5\beta_0/N_c}{12}\,\chi^{\rm LO}(\gamma) + \frac{1}{4}\left[\psi''(\gamma)+\psi''(1-\gamma)\right] - \frac{1}{4}\left[\phi(\gamma)+\phi(1-\gamma)\right] \\ & - \frac{\pi^2\cos(\pi\gamma)}{4\sin^2(\pi\gamma)(1-2\gamma)}\left\{3+\left(1+\frac{N_f}{N_c^3}\right)\frac{2+3\gamma(1-\gamma)}{(3-2\gamma)(1+2\gamma)}\right\} \\ & + \frac{3}{2}\zeta(3) - \frac{\beta_0}{8N_c}\left(\chi^{\rm LO}(\gamma)\right)^2,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\beta_0 = (11N_c - 2N_f)/3$ 以及

$$\phi(\gamma)+\phi(1-\gamma) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\gamma+m}+\frac{1}{1-\gamma+m}\right]\left[\psi'\left(\frac{2+m}{2}\right)-\psi'\left(\frac{1+m}{2}\right)\right]. \tag{15}$$

方程（14）对应重整化标度为 $\mu_R^2 = |t|$的 MS 方案。对于一般标度，NLA特征函数变为 [32]

$$\omega(\nu,\mu_R) \;=\; \bar{\alpha}_s(\mu_R)\,\chi^{\rm LO}(\gamma) + \bar{\alpha}_s^2(\mu_R)\left[\chi^{\rm NLO}(\gamma) + \frac{\beta_0}{4N_c}\,\chi^{\rm LO}(\gamma)\ln\frac{\mu_R^2}{|t|}\right]. \tag{16}$$

耦合常数在单圈近似下计算，

$$\alpha_s(\mu^2) \;=\; \frac{4\pi}{\beta_0\ln(\mu^2/\Lambda^2_{\rm QCD})}\;, \tag{17}$$

在 $N_f = 4$ 和 $\Lambda_{\rm QCD} = 0.121$ 吉电子伏特时，对应于 $\alpha_s(M_Z) = 0.118$ 匹配于 $m_b = 4.8$ 吉电子伏特。如参考文献 [30, 31], 所示，次领先阶修正 $\chi^{\rm NLO}$ 在较小时很大且为负 ν，因此纯NLA特征函数在 $\nu = 0$ 附近变为负值（见图 2），必须对微扰级数进行稳定化处理。下文中，我们考虑三种可选方案，它们的区别仅在于超出NLA精度的项。

2.4.1 全极点共线重求和

在全极点方法中 [33], ，NLA核在 $\gamma = 0$ 和1处的共线极点被重求和至所有阶，并且特征函数为 [13]

$$\omega_{\text{All-poles}} = \bar{\alpha}_s \chi^{\text{LO}}(\gamma) + \bar{\alpha}_s^2 \chi^{\text{NLO}}(\gamma) + \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!(n+1)!} \frac{(\bar{\alpha}_s + a\bar{\alpha}_s^2)^{n+1}}{(\gamma + m - b\bar{\alpha}_s)^{2n+1}} \right) - \frac{\bar{\alpha}_s}{\gamma + m} - \bar{\alpha}_s^2 \left(\frac{a}{\gamma + m} + \frac{b}{(\gamma + m)^2} - \frac{1}{2(\gamma + m)^3} \right) \right] + \{\gamma \to 1 - \gamma\} \right\}, \tag{18}$$

其中

$$a = \frac{5\beta_0}{12N_c} - \frac{13N_f}{36N_c^3} - \frac{55}{36}, \qquad b = -\frac{\beta_0}{8N_c} - \frac{N_f}{6N_c^3} - \frac{11}{12}, \tag{19}$$

以及 $\bar{\alpha}_s = \bar{\alpha}_s(|t|)$。对 n 的求和可写成闭式，表示为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!(n+1)!} \frac{(\bar{\alpha}_s + a\bar{\alpha}_s^2)^{n+1}}{(\gamma + m - b\bar{\alpha}_s)^{2n+1}} = \sqrt{(\gamma + m - b\bar{\alpha}_s)^2 + 2(\bar{\alpha}_s + a\bar{\alpha}_s^2)} - (\gamma + m - b\bar{\alpha}_s) \,. \tag{20}$$

2.4.2 BLM 标度设定

在布罗茨基-勒帕日-麦肯齐（BLM）方法中， [34], 重整化标度的选取使得与 β_0 相关的项被吸收到跑动耦合中。按照文献 [35], ，这一过程在物理（MOM）方案中完成，随后再用 MS 耦合 [32] 表示结果。该过程包括四个步骤。

（*i*）共形*mal* 和 β_0相关部分。式（14）的次领先阶修正分解为 [3 5]

$$\chi^{\text{NLO}}(\gamma) = \bar{\chi}(\gamma) + \frac{\beta_0}{4N_c} \chi^{\text{LO}}(\gamma) \left(\frac{5}{3} - \frac{\chi^{\text{LO}}(\gamma)}{2} \right), \tag{21}$$

其中，根据式（14），不依赖于 β_0 的共形部分为

$$\bar{\chi}(\gamma) = \frac{4 - \pi^2}{12} \chi^{\text{LO}}(\gamma) + \frac{1}{4} [\psi''(\gamma) + \psi''(1-\gamma)] - \frac{1}{4} [\phi(\gamma) + \phi(1-\gamma)] - \frac{\pi^2 \cos(\pi\gamma)}{4 \sin^2(\pi\gamma)(1-2\gamma)} \left\{ 3 + \left(1 + \frac{N_f}{N_c^3} \right) \frac{2 + 3\gamma(1-\gamma)}{(3-2\gamma)(1+2\gamma)} \right\} + \frac{3}{2}\zeta(3) \,. \tag{22}$$

将式（21）代入式（16），MS 特征函数为

$$\omega(\nu, \mu_R) = \bar{\alpha}_s^{\overline{\text{MS}}} \chi^{\text{LO}} + \left(\bar{\alpha}_s^{\overline{\text{MS}}} \right)^2 \left[\bar{\chi} + \frac{\beta_0}{4N_c} \chi^{\text{LO}} \left(\ln \frac{\mu_R^2}{|t|} + \frac{5}{3} - \frac{\chi^{\text{LO}}}{2} \right) \right], \qquad \bar{\alpha}_s^{\overline{\text{MS}}} \equiv \bar{\alpha}_s^{\overline{\text{MS}}}(\mu_R) \,. \tag{23}$$

（*ii*）方案变换。转变到 MOM方案相当于对耦合常数 [35, 36], 进行有限重整化

$$\begin{aligned} \alpha_s^{\overline{\rm MS}} &= \alpha_s^{\rm MOM}\left[1+T\,\frac{\alpha_s^{\rm MOM}}{\pi}\right], \qquad T = T^{\rm conf}+T^{\beta}\,, \\ T^{\rm conf} &= \frac{N_c}{8}\,\frac{17}{2}\,I\,, \qquad T^{\beta} = -\frac{\beta_0}{2}\left(1+\frac{2}{3}I\right), \end{aligned} \tag{24}$$

在朗道规范下的 MOM方案中，其中 $I=-2\int_0^1 {\rm d}x\ln x/(x^2-x+1)\simeq 2.3439$。由于 $\alpha_s/\pi=\bar{\alpha}_s/N_c$，将式（24）代入式（23），可得 NLA精度下的结果:

$$\begin{aligned} \omega(\nu,\mu_R) =& \bar{\alpha}_s^{\rm MOM}\,\chi^{\rm LO}+\left(\bar{\alpha}_s^{\rm MOM}\right)^2\left[\bar{\chi}+\frac{T^{\rm conf}}{N_c}\,\chi^{\rm LO}\right. \\ &\left.+\frac{\beta_0}{4N_c}\,\chi^{\rm LO}\left(\ln\frac{\mu_R^2}{|t|}-2\left(1+\frac{2}{3}I\right)+\frac{5}{3}-\frac{\chi^{\rm LO}}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

（*iii*）*BLM*尺度。式（ β_0依赖的项在以下条件下为零：25）

$$\hat{Q}^2(\nu) = |t|\exp\left[2\left(1+\frac{2}{3}I\right)-\frac{5}{3}+\frac{\chi^{\rm LO}(\gamma)}{2}\right], \tag{26}$$

这就是参考文献 [13, 35] 中的 ν 依赖尺度。为避免该尺度在较大 ν 时出现朗道极点，我们采用与 ν 无关的尺度（参考文献 [32] 的变体 a ），它只吸收与ν无关的项,

$$\mu_{\rm BLM}^2 = |t|\exp\left[2\left(1+\frac{2}{3}I\right)-\frac{5}{3}\right]\simeq 32\,|t|\,, \tag{27}$$

因此

$$\omega_{\rm BLM}(\nu) = \bar{\alpha}_s^{\rm MOM}(\mu_{\rm BLM})\,\chi^{\rm LO}+\left(\bar{\alpha}_s^{\rm MOM}(\mu_{\rm BLM})\right)^2\left[\bar{\chi}+\frac{T^{\rm conf}}{N_c}\,\chi^{\rm LO}-\frac{\beta_0}{8N_c}\left(\chi^{\rm LO}\right)^2\right]. \tag{28}$$

（*iv*）回到MS 方案。对式（24）求逆，$\alpha_s^{\rm MOM}=\alpha_s^{\rm MS}\,[1-T\,\alpha_s^{\overline{\rm MS}}/\pi]$，在相同的尺度 $\mu_{\rm BLM}$下，项 $T^{\rm conf}$ 相消，得到 [32]

$$\omega_{\rm BLM}(\nu) = \bar{\alpha}_s^{\overline{\rm MS}}(\mu_{\rm BLM})\,\chi^{\rm LO}+\left(\bar{\alpha}_s^{\overline{\rm MS}}(\mu_{\rm BLM})\right)^2\left[\bar{\chi}-\frac{T^{\beta}}{N_c}\,\chi^{\rm LO}-\frac{\beta_0}{8N_c}\left(\chi^{\rm LO}\right)^2\right], \tag{29}$$

这是本工作中采用的表达式，其中使用了式（17）中的单圈 $\overline{\rm MS}$ 耦合常数。

	Y						
$\lvert t\rvert$ [吉电子伏特^2]	1	2	3	5	7	10	12
1	10.8	54.6	90.0	148	245	259	252
4	6.4	3.3	4.9	8.1	11.4	16.6	20.3
6	9.0	2.2	3.2	5.1	7.1	10.2	12.4
12	13.8	4.0	2.5	2.5	3.5	4.9	5.9
25	20.1	5.9	4.8	5.1	6.4	9.2	11.4
36	23.8	6.7	5.5	6.2	7.9	11.6	14.5
100	37.5	9.0	7.3	8.3	10.8	16.1	20.5

表2：PMS尺度 $\mu_R^2/|t|$ 作为 $|t|$ 和 $Y = \ln(\hat{s}/s_0)$的函数。

2.4.3 最小敏感性原理

根据最小敏感性原理（PMS），[37, 38]，重整化标度取为可观测量对其变化最不敏感时所对应的值。与参考文献 [32, 39, 40]，一样，我们对可观测量本身进行优化，此处即采用 NLA 特征函数（16）计算的部分子截面（7）。定义 $L \equiv \ln(\mu_R^2/|t|)$和 $Y \equiv \ln(\hat{s}/s_0)$，最优标度 $L^*(|t|, Y)$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial L} \ln \frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}t}(Y, |t|; L)\bigg|_{L=L^*} = 0\,. \tag{30}$$

由于冲击因子采用领头阶并使用固定耦合常数，μ_R 依赖性完全来自核。利用 $\mathrm{d}\bar{\alpha}_s/\mathrm{d}L = -(\beta_0/4N_c)\,\bar{\alpha}_s^2$，可得

$$\frac{\partial \omega}{\partial L} = -\frac{\beta_0}{2N_c}\,\bar{\alpha}_s^3 \left[\chi^{\mathrm{NLO}}(\gamma) + \frac{\beta_0}{4N_c}\,\chi^{\mathrm{LO}}(\gamma)\,L\right], \tag{31}$$

因此，最优尺度同时取决于 $|t|$ 和 Y。与参考文献 [32, 40]，不同，我们不对 s_0进行优化。采用领头阶冲击因子时，截面随 s_0通过$(\hat{s}/s_0)^{\omega(\nu)}$单调减小，并不存在驻点。因此，$s_0 = c_{s_0}|t|$ 按照其他核的处理方式，通过拟合H1数据确定。

对于每个 $|t|$取值，最优尺度是在 Y 上以间距 $\Delta Y = 0.25$构建的网格中确定的，并在网格点之间进行线性插值。当截面存在多个驻点时，我们按照参考文献 [40]的做法，选择最平滑的驻点。若不存在驻点，则取最小敏感性点，即 $|\partial \ln(\mathrm{d}\hat{\sigma}/\mathrm{d}t)/\partial L|$ 最小处。所得尺度列于表2中，典型取值为$\mu_R^2 \simeq (2\text{–}20)\,|t|$，并随 Y增大。

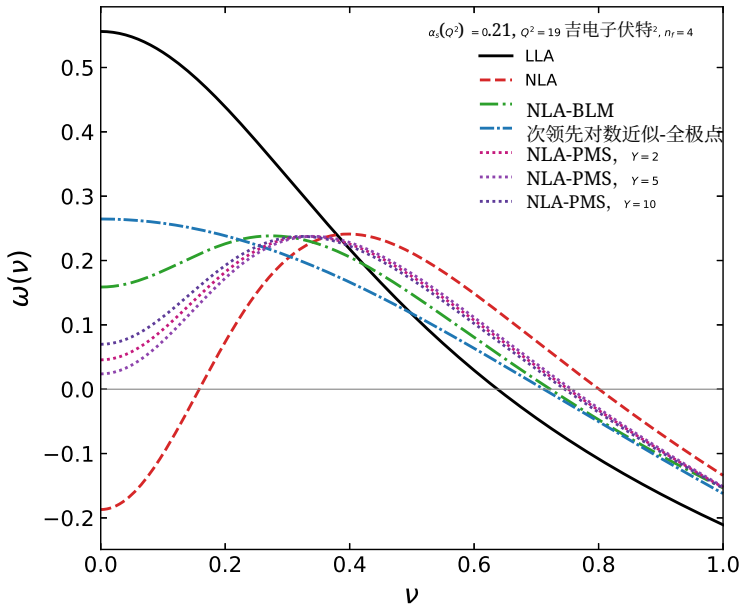


图 2：特征函数 $\omega(\nu)$ 在领先对数近似（LLA）下，见式（11）–（12）；以及在 NLA 下，取$\mu_R^2 = Q^2$，见式（16），并与 BLM（29）、全极点（18）和 PMS 方案进行比较。尺度为 $Q^2 \simeq 19$ 吉电子伏特^2, ，对应 $\alpha_s(Q^2) = 0.21$。图中展示了三个不同 $Y = \ln(\hat{}s/s_0)$取值下的 PMS 本征值，因为最优尺度取决于能量。

2.4.4 特征函数之间的比较

图2 比较了 $|t| \simeq 19$ 吉电子伏特^2, 下的 $\alpha_s = 0.21$特征函数。纯 NLA 函数在较小的 ν处为负，而三种方案给出的值为正，但小于 LLA 的值。由于较小 ν 的区域在较大 Y时占主导地位，因此 $\omega(0)$的值决定了截面随能量的增长；All-poles 方案下增长最大，PMS 方案下最小。下一节将使用这些特征函数方案，估算超外围碰撞中大横向动量光子的衍射光生过程。

3 结果

首先，为了约束 BFKL 标度 s_0，我们将预测结果与在 ep 碰撞中于 HERA 测得的实验数据进行比较。具体而言，H1 合作组测量了在 $W = 219$ 吉电子伏特处的 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}|t|$ ，其中 $|t|$ 在 4 至 36 吉电子伏特之间分为三个区间^2, ，以及截面$\sigma(W)$，其在 $4 < |t| < 36$ 吉电子伏特^2 上积分，并在 175 至 247 吉电子伏特之间的 W 四个区间内给出 [26]。

核	c_{s_0}	$\chi^2_{\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\lvert t\rvert}$
LLA	77.4	6.82
NLA-BLM	56.1	4.97
次领先对数近似-全极点	38.3	4.12
NLA-PMS	80.4	4.22

表 3：对 $s_0 = c_{s_0}|t|$ H1 的 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}|t|$ 数据进行拟合的结果，$W = 219$ 吉电子伏特 [26]。

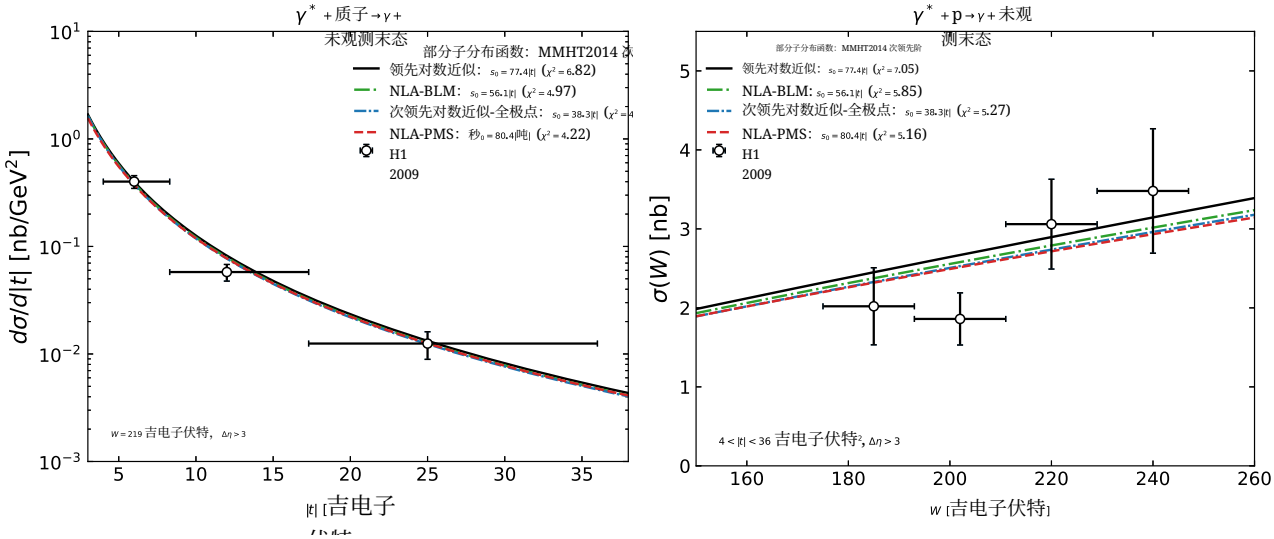


图 3：与 H1 数据 [26] 在 $\gamma^* p \to \gamma X$下的比较。**左图：**在 $W = 219$ 吉电子伏特处的 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}|t|$，用于确定各核对应的 $s_0 = c_{s_0}|t|$。**右图：**积分截面 $\sigma(W)$ 在 $4 < |t| < 36$ 吉电子伏特²范围内的能量依赖性预测。各曲线对应的 c_{s_0} 和 χ^2列于图例中。

与文献 [13]，一样，我们对 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}|t|$ 的预测结果进行 χ^2 最小化，其结果以相应区间内的平均值与数据进行比较。通过最小化下式，对每个核的参数 c_{s_0} 根据三个 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}|t|$ 数据点进行拟合

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\langle \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}|t| \rangle_i^{\mathrm{th}} - \langle \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}|t| \rangle_i^{\mathrm{H1}}}{\delta_i} \right)^2, \tag{32}$$

其中 $\delta_i = \sqrt{(\delta_i^{\mathrm{stat}})^2 + (\delta_i^{\mathrm{syst}})^2}$ 是 i阶数据点的总实验不确定度，而 $\sigma(W)$ 是一项预测。拟合结果见表 3，相应的分布与图 3左图中的 H1 数据进行了比较。右图

系统	Born	LLA	NLA-BLM	次领先对数近似-全极点	NLA-PMS
pp	6.19	29.5	16.9	19.7	14.0
Pbp	5.29×10^3	9.42×10^3	8.71×10^3	9.33×10^3	7.83×10^3
pPb	3.43×10^2	1.36×10^3	9.08×10^2	1.04×10^3	7.63×10^2
PbPb	1.19×10^6	1.70×10^6	1.69×10^6	1.76×10^6	1.56×10^6

表4：对 $1 < |t| < 100$ GeV^2 范围以及光子快度$-10 < y < 10$积分，并在光子与系统 X之间具有 $\Delta\eta > 3$ 快度间隙时的截面 [nb]

将我们对积分截面的预测与 H1 数据进行了比较；H1 数据由对拟合的 $d\sigma/d|t|$ 在 $4 < |t| < 36$ 吉电子伏特^{2}范围内积分得到。根据不同 BFKL特征函数方案得出的预测均能充分描述 HERA 数据。然而， ep碰撞中的数据有限，因此无法得出更明确的结论。

下面我们给出大型强子对撞机上超外围碰撞的预测结果。我们的工作主要受到光子-强子质心能量最大值显著提升的推动，这些能量在pp、 pPb和 $PbPb$ 碰撞中分别超过8400、1400和950吉电子伏特 [23]。与H1测量中约250吉电子伏特的能区相比，这代表着一个数量级的提升。因此，在大型强子对撞机的超外围碰撞中研究高p_T 光子的衍射光生过程，使我们能够在全新的运动学区域内探究QCD动力学对这一过程的贡献。

表 4给出了采用不同 BFKL 特征函数方案、针对各种碰撞系统的积分截面预测。这些结果是通过对光子快度以及范围 $1 < |t| < 100$ 吉电子伏特^{2}进行积分得到的。与 H1 分析一致，我们对光子与系统 $\Delta\eta > 3.0$ 之间施加了 X的快度间隙约束。 pp 碰撞截面约为 10 nb，并且对所选 BFKL 特征函数表现出敏感性。正如先前研究所预期的，玻恩项给出了截面的下限，而领先对数近似核给出了最大的预测值；但对于 PbPb 碰撞，全极点核给出的结果略大。在 PbPb 碰撞中，归一化增强了约 Z^2A倍，但部分被所探测到的较低光子能量抵消；较低的光子能量也会减弱相对于玻恩项的 BFKL 增强。在这种情况下， Z^2 因子对应于核光子通量，而 A 因子则反映了核部分子分布函数。Pbp 与 pPb 碰撞的预测有所不同，这是因为在两种构型中，光子发射体和靶的角色互换了。在 Pbp 碰撞中，原子核充当光子发射体，使截面增强约 Z^2倍。相反，在 pPb 碰撞中，原子核充当强子靶，使截面增强约 A倍。

见图4　　我们给出了衍射光子光致产生的快度分布预测　　n

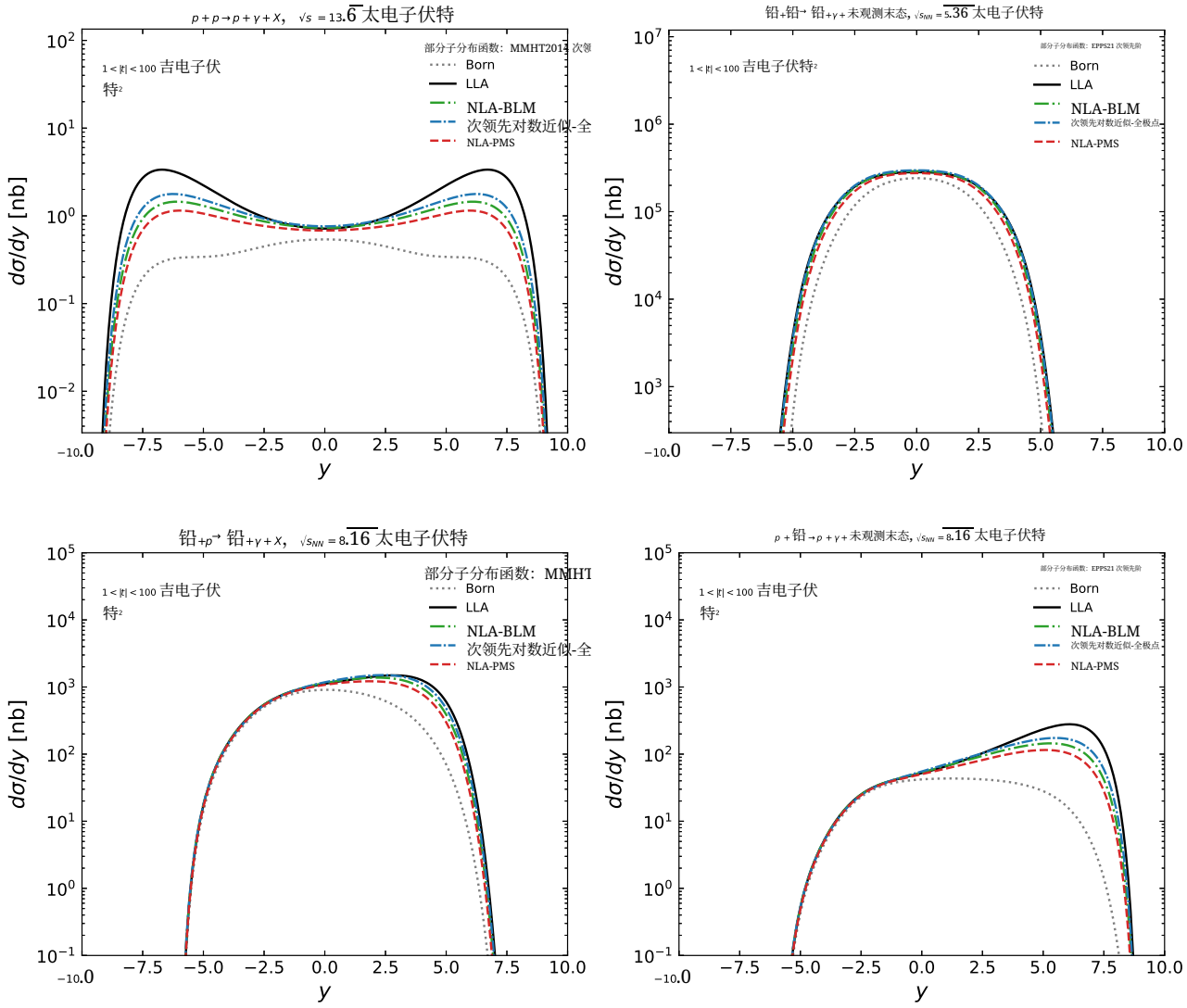


图 4：对 pp 在 $\sqrt{s} = 13.6$ 太电子伏特碰撞（左上）、 $\sqrt{s_{NN}} = 5.36$ 太电子伏特铅-铅碰撞（右上）以及 $\sqrt{s_{NN}} = 8.16$ 太电子伏特 p 铅碰撞（下方各图）中，积分范围为 $1 < |t| < 100$ 吉电子伏特^2, 的光子快度分布 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}y$。对于质子-铅碰撞，我们分别考察以原子核（左下）或质子（右下）作为光子发射源时的结果。图中展示了采用玻恩项以及领先对数近似、NLA-BLM、次领先对数近似-全极点和 NLA-PMS 核所得的预测。

pp 碰撞中在 $\sqrt{s} = 13.6$ 太电子伏特下（左上）、 $\sqrt{s_{NN}}$ =铅-铅碰撞中在5.36 太电子伏特下（右上），以及下方各面板所示 p铅碰撞中在 $\sqrt{s_{NN}} = 8.16$ 太电子伏特下的光致产生。结果通过对 $1 < |t| < 100$ 吉电子伏特^2 以上区域积分，并考虑BFKL特征函数的不同模型获得。对于 pp 和铅-铅碰撞，我们预测其分布是对称的，

正如预期，将前向或后向运动的强子作为光子发射体时的贡献相加， pp 碰撞中的光子产生比 PbPb 碰撞对量子色动力学动力学更敏感，这一点可由前向/后向快度处 BFKL 预测相对于玻恩项更大的增强看出；这是因为较大的$|y|$ 会探测更高的光子-强子质心能量，而在 pp中，这些能量本身就高于 PbPb 碰撞。对于 pPb 碰撞，图4 展示了将原子核（左下）或质子（右下）作为光子发射体时得到的结果。由于我们假设只有一个入射强子充当光子发射体，因此快度分布是不对称的。质子发射光子时，增强更大，但整体归一化较小。这些结果表明，未来使用前向探测器（例如 ALICE 拟议中的 FoCal探测器 [41–43], 预计覆盖的范围 $3.2 < y < 5.8$）对这一过程进行分析，将能够探测其背后的量子色动力学动力学。

在图 5 中，我们给出了双微分分布 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}y\mathrm{d}|t|$ 关于所产生光子的横动量平方（$|t| = p_T^2$）的预言，其中快度固定为（$y = 0$、2、4）。我们考虑了与图 4 中相同的碰撞系统，并将不同快度下的结果按因子 10^m 进行缩放，以避免曲线重叠。正如图4所预期的，随着快度增大，各预言之间的差异也随之增大，并且在 pp 碰撞中更加明显。我们发现，分布随p_T的增加而急剧下降。然而，在超外围碰撞中，仍预期会产生数量不可忽略、能量为 $p_T \approx 4$–5 吉电子伏特的光子。

4 总结

本文首次研究了大型强子对撞机中超外围碰撞的高-p_T光子衍射光生过程。其理论描述与大-$|t|$ 衍射矢量介子产生密切相关，后者已在文献中得到广泛讨论。光子末态的一个重要优势是不存在矢量介子波函数，从而简化了计算。除由 HERA 数据确定的 BFKL 能标外，主要的非微扰输入来自质子部分子分布函数。然而，由于 $q\bar{q}$ 对与末态光子之间的电磁耦合，相应截面相对于矢量介子产生受到抑制。我们计算了包含 BFKL特征函数次领先阶修正的截面，并探讨了在超外围 pp、 p铅以及 PbPb 碰撞中测量这一过程的前景。我们还将该框架与 HERA 数据进行了比较，并为超外围碰撞推导了无参数预言。我们的结果表明，所预言的截面不可忽略，未来对这一道道的实验研究有助于约束 BFKL动力学，并增进我们对高能量下量子色动力学的理解。

本文呈现的结果有力地表明，有必要通过纳入次领头阶修正来改进对光子和夸克冲击因子的理论描述（例如，参见

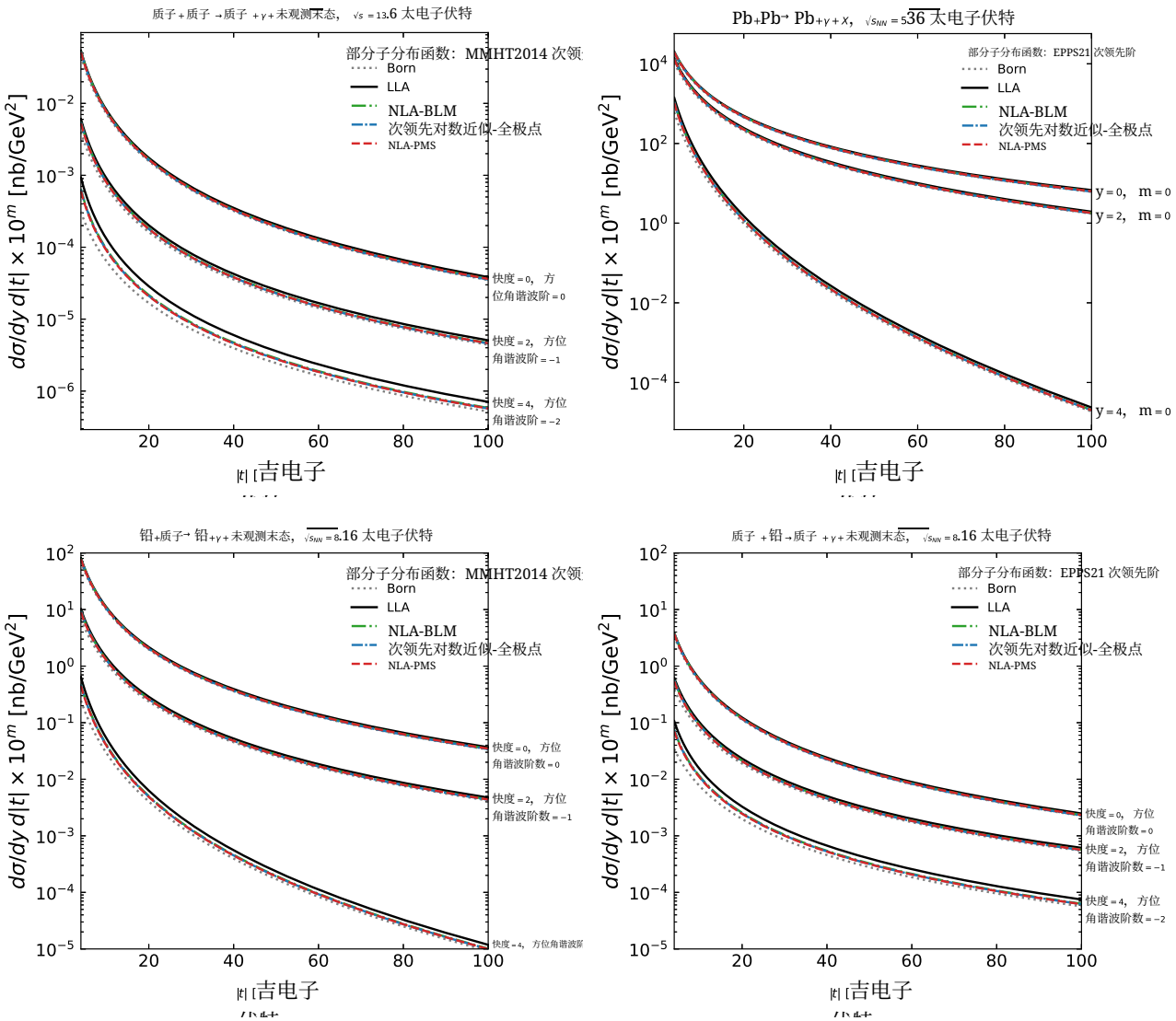


图 5：双微分分布 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}y\mathrm{d}|t|$ 是所产生光子的横动量平方（$|t| = p_T^2$）在固定快度（$y = 0$、2、4）下的函数，适用于图 4中所考虑的碰撞系统。不同快度的结果乘以因子 10^m 进行了重新缩放，以避免预测结果相互重叠。

参考文献 [32, 44–46]）。此外，这些结果也表明，有必要开展专门研究，探讨在采用现实的截断条件和探测器效率时，隔离这一末态的实验可行性。我们计划在后续工作中探讨这两个方面。

致谢

作者感谢 David D'Enterria 和 Jeremi Niedziela 进行了非常有益的讨论，这些讨论促成了本研究；同时感谢 Francesco Celiberto 就 BFKL动力学中的高阶效应开展讨论。VPG 和 JVB 获得了巴西资助机构 CNPq、CAPES（财务代码 001）、FAPERGS 和 INCT-FNA（流程编号 408419/2024-5）的部分资助。

参考文献

[1] L. Schoeffel, Prog. Part. Nucl. Phys. 65, 9 (2010), 0908.3287.[2] V. S. Fadin, E. A. Kuraev, and L. N. Lipatov, Phys. Lett. B 60, 50 (1975年).[3] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP 44, 443 (1976年).[4] E. Kuraev, L. Lipatov, and V. S. Fadin, Sov. Phys. JETP 45, 199 (1977年).[5] I. Balitsky and L. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. 28, 822 (1978年).[6] R.Enberg, J. R. Forshaw, L. Motyka, and G. Poludniowski, JHEP 09, 008 (2003年), hep-ph/0306232.[7] G. G. Poludniowski, R. Enberg, J. R. Forshaw, and L. Motyka, JHEP 12, 002 (2003年),hep-ph/0311017.[8] I. F. Ginzburg, S. L. Panfil, and V. G. Serbo, 《核物理B》284, 685 (1987年).[9] I. F. Ginzburg and D. Y. Ivanov, 《物理评论D》54, 5523 (1996年), hep-ph/9604437.[10] D. Y. Ivanov and M. Wusthoff, Eur. Phys. J. C 8, 107 (1999年), hep-ph/9808455.[11] B. E. Cox and J. R. Forshaw, J. Phys. G 26, 702 (2000年), hep-ph/9912486.[12] N. G. Evanson and J. R. Forshaw, 《物理评论D》60, 034016 (1999年), hep-ph/9902481.[13] V. P. Goncalves and W. K. Sauter, 《物理评论D》87, 054035 (2013年), 1302.2058.[14] C. A. Bertulani, S. R. Klein, and J. Nystrand, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 55, 271 (2005年), nucl-ex/0502005.[15] S. Klein and P. Steinberg, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 70, 323 (2020年), 2005.01872.[16]L. Frankfurt, M. Strikman, and M. Zhalov, Phys. Lett. B 640, 162 (2006年), hep-ph/0605160.

[17] L. Frankfurt, M. Strikman, and M. Zhalov, Phys. Lett. B 670, 32 (2008), 0807.2208.[18] V. P. Goncalves and W. K. Sauter, 《物理评论D》81, 074028 (2010年), 0911.5638.[19] V. P. Goncalves and W. K. Sauter, 《欧洲物理学杂志A》47, 117 (2011), 1004.1952.[20] V. P. Goncalves and W. K. Sauter, Phys. Lett. B 776, 424 (2018), 1710.06005.[21] J. V. Bulh˜oes, V. P. Goncalves, and W. K. Sauter, Eur. Phys. J. C 85, 480 (2025), 2504.17766.[22] V. M. Budnev, I. F. Ginzburg, G. V. Meledin, and V. G. Serbo, 《物理报告》15, 181 (1975年).[23] A. J. Baltz et al., 《物理报告》458, 1 (2008), 0706.3356.[24] M. Drees and D. Zeppenfeld, 《物理评论D》39, 2536 (1989).[25] A. H. Mueller and W.-K. Tang, Phys. Lett. B 284, 123 (1992).[26] F. D. Aaron et al. (H1), Phys. Lett. B 672, 219 (2009), 0810.3096.[27] L. Harland-Lang, A. Martin, P.Motylinski, and R. Thorne, Eur. Phys. J. C 75, 204 (2015), 1412.3989.[28] A. Buckley, J. Ferrando, S. Lloyd, K. Nordstr¨om, B. Page, M. R¨ufenacht, M. Sch¨onherr, and G. Watt, Eur. Phys. J. C 75, 132 (2015), 1412.7420.[29] K. J. Eskola, P. Paakkinen, H. Paukkunen, and C. A. Salgado, Eur. Phys. J. C 82, 413 (2022), 2112.12462.[30] V. S. Fadin and L. N. Lipatov, Phys. Lett. B 429, 127 (1998), hep-ph/9802290.[31] M. Ciafaloni and G. Camici, Phys. Lett. B 430, 349 (1998), hep-ph/9803389.[32] D. Yu. Ivanov, B. Murdaca, and A. Papa, JHEP 10, 058 (2014), 1407.8447.[33] A. Sabio Vera, 《核物理B》722, 65 (2005), hep-ph/0505128.[34] S. J. Brodsky, G. P. Lepage, and P. B. Mackenzie, 《物理评论D》28, 228 (1983).[35] S. J. Brodsky, V. S. Fadin, V. T. Kim, L. N. Lipatov, and G. B. Pivovarov, 《实验与理论物理学杂志快报》70, 155 (1999), hep-ph/9901229.[36] W. Celmaster and R. J. Gonsalves, 《物理评论D》20, 1420 (1979).[37] P. M. Stevenson, Phys. Lett. B 100, 61 (1981).

[38] P. M. Stevenson，《物理评论D》23，2916（1981）。[39] D. Yu. Ivanov 和 A. Papa，《核物理B》732，183（2006），hep-ph/0508162。[40] F. Caporale、D. Yu. Ivanov 和 A. Papa，Eur. Phys. J. C 58，1（2008），0807.3231。[41] C. Loizides 和 W. Riegler（ALICE），欧洲核子研究中心-LHCC-2024-004，ALICE-TDR-022（2024）。[42] F. Jonas（ALICE），《欧洲物理杂志网络会议》296，08001（2024）。[43] J. Park（ALICE），《欧洲物理杂志网络会议》320，00013（2025），2407.13058。[44] G. A. Chirilli 和 Y. V. Kovchegov，JHEP 06，055（2013），1305.1924。[45] G. A. Chirilli 和 Y. V. Kovchegov，JHEP 05，099（2014），[勘误：JHEP 08，075（2015）]，1403.3384。[46] D. Colferai、W. Li 和 A. M. Stasto，JHEP 01，106（2024），2311.07443。