arXiv:2611.30975v1 [math.SG] 23 Nov 2026

用于 $K(n)$-局部 Gromov–Witten 不变量的等变局部化及其在 Gopakumar–Vafa 不变量中的应用

Guangxi Yan

2026年11月24日

摘要

对于某些复定向的 $K(n)$-局部上同调理论，我们为全局 Kuranishi 图表建立了等变局部化公式和一个 Riemann–Roch 公式。我们应用这些公式计算奇素数处 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ 的属零 Gromov–Witten 不变量，得到一个以所选复定向的形式群律表示的留数公式。作为应用，我们推导出一个多重覆盖公式，将闭辛 Calabi–Yau 三维流形的属零 Morava K-理论 Gromov–Witten 不变量表示为其 Gopakumar–Vafa 不变量。

目录

1 引言 **2**

1.1 主要结果 .3 1.2 组成部分与证明策略 .5 1.3 章节安排 .6 1.4 致谢.6

I 计算与应用 **7**

2 环面作用于局部空间时的不动点轨迹与虚欧拉类 $\mathbb{P}^1$ **7**

2.1 AMS 图表与导出轨形图表之间的比较 .7 2.2 不动点集与欧拉类计算 .11 2.2.1 情形 I：单边分量。 .18 2.2.2 情形 II：梳状分量。 .20

3 计算 **27**

3.1 从一般情形约化 d至 p-幂 .27 3.2 p-主计算，假设 $[-1]x = -x$ .31 3.2.1 单边分量计算 .32 3.2.2 梳状分支计算.35 3.3 Morava K-理论中的求值映射 .44

4 卡拉比–丘三维簇的一个应用 **46**4.1 簇形式主义与全局Kuranishi图表.484.2 簇同痕与全局 Kuranishi 图表 .51

II 一般基础 **53**

5 代数拓扑准备 **53**
5.1 稳定同伦理论基础 .535.1.1 复定向环谱与 Thom 同构 .535.1.2 形式群律与留数 .555.1.3 Morava K-理论、 E-理论与 HKR 理论 .58

5.2 轨形与群作用 .59
5.2.1 作为群胚的轨形 .595.2.2 带群作用和等变局部化的轨形 .615.2.3 向量轨形丛与稳定几乎复结构 .64

5.3 对偶性与真推前映射 .65
5.3.1 Thom 同构 .655.3.2 轨形的 Pontryagin–Thom 塌缩.665.3.3 双向性与 Cheng 定理 .67

5.4 HKR 理论与推前公式.705.4.1 HKR 特征：定义 .705.4.2 黎曼–罗赫型公式 .735.4.3 环面等变推前 .785.5 等变局部化与法向欧拉类的可逆性 .81

6 全局 Kuranishi 坐标图与等变局部化 **85**
6.1 全局 Kuranishi 图表的一般方面 .856.2 全局 Kuranishi 图表的 AMS 构造 .896.2.1 AMS 构造 .906.2.2 $\mathcal{T}$ .936.2.3 AMS 构造上的稳定几乎复结构 .956.2.4 选择的独立性 .976.3 等变化推广 .986.3.1 等变全局 Kuranishi 图表与等变化定位的一般理论.986.3.2 AMS 构造的等变提升 .103**A 命题 2.10 的证明** **105****B 命题 6.20 的证明** **110**

1 引言

经典 Gromov–Witten 不变量是对映入光滑射影簇或闭辛流形的稳定映射进行的虚拟计数。代数基础可参见 [KM94； LT98a； BF97]，辛几何基础则可参见 [RT95；

LT98b； FO99； MS12； Par16] 。超越通常的有理上同调，K-理论 Gromov–Witten 理论由 Givental 和 Lee 创立 [Giv00； Lee04]。

超越普通上同调和复 K-理论，Abouzaid 和 Blumberg 构造了系数取自 Morava K-理论 [AB21]。对于 Gromov–Witten 理论，全局 Kuranishi 图表使得我们能够构造系数取自适当复定向广义上同调理论的不变量。属零构造见 [AMS21]，而任意亏格构造则发表于 [HS24；AMS24]。相关进展还包括 Bai 和 Xu 利用正规复扰动构造的整数值 Gromov–Witten 型不变量 [BX25]。Abouzaid 和 Bai 通过分裂从复配边到导出轨形配边的自然映射，构造了取值于复配边的 Gromov–Witten 不变量[AB25]。

本文研究奇素数 p 处系数取自 Morava K-理论的属零 Gromov–Witten 不变量。我们的例子[1] 是局部的 $\mathbb{P}^1$

$$X_{\mathrm{loc}} := \mathrm{Tot}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \to \mathbb{P}^1\right).$$

在普通有理上同调中，次数d 的属零局部 Gromov–Witten 不变量是 Aspinwall–Morrison 多重覆盖项 $1/d^3$，可通过环面局部化计算；例如参见 [Kon95；Hor+03]。然而，当 p 整除 d时，有理系数 $1/d^3$ 无法直接模 p约化。这引出了一个自然的问题：在 Morava K-理论中，相应的多重覆盖贡献是什么？我们针对所有正次数 d 回答了这个问题，并利用所得的局部计算研究卡拉比–丘三维簇的属零 Gromov–Witten 不变量。

1.1 主要结果

我们首先为系数取自高度为 X_{loc} 的 HKR 理论（例如 Morava E-理论；参见定义 5.14）的 E 的属零 Gromov–Witten 不变量建立两个一般性结果，其中 n 是奇素数，并假设 p满足 E^* 无 p-挠。

素数到p 因子的分离。 设 I_d^E表示 d 的次数-不变量。我们在命题 X_{loc}3.1

$$I_{md}^E = m^{-3} I_d^E, \qquad p \nmid m.$$

因此，计算归结为 p 次幂次数。

p-次幂次数的留数公式。 假设 E 的复定向满足 $[-1]_E x = -x$。那么

$$I_{p^a,\mathrm{eq}}^E = \frac{\tau_{p^a,u}(x^2) - \tau_{p^a,0}(x^2)}{u^2}, \qquad I_{p^a}^E = [u^2]\tau_{p^a,u}(x^2),$$

其中

$$\tau_{d,\,u}(f) := \mathrm{Res}_x \frac{f(x)\omega_E(x)}{[d]_E x -_E u},$$

[1]本文讨论的局部 $\mathbb{P}^1$ 多重覆盖问题也曾由 Tim Large 研究；他在 2022 年和 2023 年的研讨会报告中讨论了正特征下 Morava K- 理论 Gromov–Witten 不变量及 Aspinwall–Morrison 多重覆盖公式。我们是从他题为 [Lar22] 的报告录像中了解到这一问题的。

且 ω_E 是 E的形式群律的不变微分。这是定理 3。 6.

例如，在高度为一时，Morava E-理论 E_1 是复 K-理论的 p-完备化 $KU_p^\wedge$，因此我们的框架包含作为高度为一情形的 p-进复 K-理论。对于 E_1 上的一个特定复定向[2]，上述留数公式给出每个 $a \geq 0$ 的 $I^{E_1}_{p^a} = p^a$。

Morava K-理论中的求值映射。接着，我们将这些公式特化到 Morava K-理论 $K(n)^\sim$，并使用由整提升 $K(n)$ 诱导的复定向。这为每个正次数 d 显式地计算出局部 Gromov–Witten 不变量 $I_d^{K(n)} \in \mathbb{F}_p$。

定理 1.1。设 $p \geq 3$、$n \geq 1$，并使用 $K(n)$ 的标准 p-典型复定向。对于每个整数 $a \geq 1$，次数为 p^a 的局部不变量满足

$$I_{p^a}^{K(n)} = \begin{cases} -1 \in \mathbb{F}_3, & (p,n,a) = (3,1,1), \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{1}$$

因此，对于任意 $d \geq 1$,

$$I_d^{K(n)} = \begin{cases} d^{-3}, & p \nmid d, \\ -m^{-3}, & p = 3,\ n = 1,\ d = 3m,\ 3 \nmid m, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{2}$$

作为一项应用，我们将局部多重覆盖计算与 Ionel–Parker 的簇形式体系 [IP18]相结合。这给出了 Calabi–Yau 三维簇上 Morava K-理论 Gromov–Witten 不变量的多重覆盖公式。

对于闭辛 Calabi–Yau 三维流形 X，令 $n_{\beta,\,0}$ 表示其零亏格 Gopakumar–Vafa 不变量。这些不变量源于 Gopakumar 和 Vafa 的工作 [GV98a；GV98b]，并通过零亏格多重覆盖公式由普通有理 Gromov–Witten 不变量确定。Ionel 和 Parker[IP18]证明了它们在辛情形下的整性。

定理 1.2。设 X 为闭辛 *CY* 三维流形，且 $A \in H_2(X)$ 非零。零亏格 *Gromov–Witten* 不变量 $\mathrm{GW}_{0\,0}^{K(n)}(X, A) \in \mathbb{F}_p$ 等于下式：

(1) 若 $n > 1$ 或 $p > 3$，则

$$\mathrm{GW}_{0,0}^{K(n)}(X,A) = \sum_{A = d\beta,\ p \nmid d} n_{\beta,0} \frac{1}{d^3} \in \mathbb{F}_p$$

特别地，如果 A 不能被 p整除，那么 $\mathrm{GW}_{0\,0}^{K(n)}(X, A)$ 等于 $\mathbb{F}_p$ 中相应普通 *Gromov–Witten* 不变量的像。

(2) If $(n,p) = (1,3)$, *then*

$$\mathrm{GW}_{0,0}^{K(n)}(X,A) = \sum_{A = d\beta,\ p \nmid d} n_{\beta,0} \frac{1}{d^3} - \sum_{A = 3m\beta,\ p \nmid m} n_{\beta,0} \frac{1}{m^3} \in \mathbb{F}_p.$$

[2]这里，复定向给出了形式群律 $(x+y)/(1+xy)$，它满足 $[-1]x = -x$。这不同于标准复 K-理论的定向；对于该定向，次数为p^a 的不变量是 p^{2a} [CL25]。事实上，Thom 同构，以及由此用于定义这些不变量的欧拉类和推前，都取决于复定向的选择。

1.2 组成部分与证明策略

主要组成部分。 我们的方法使用了两个并非局限于局部 $\mathbb{P}^1$ Gromov– Wittenmoudli 空间的通用工具:

(1) 等变局部化。 Gromov–Witten 理论中的虚拟局部化最初由 Graber 和 Pandharipande 在代数框架下建立 [GP99]。最近，Hirschi 在有理等变上同调中为全局 Kuranishi 图表建立了虚拟局部化公式[Hir25，定理 5。13]。

我们为环面等变拟流形（命题 K-理论或 HKR 理论中的 Atiyah–Bott 型定位公式（命题 5.65）以及全局 Kuranishi 图表（命题 6.28）。

对于商轨形和全局 Kuranishi 图表，相关的不动点轨迹由商空间上诱导的环面作用决定，而非由表示空间上的朴素不动点条件决定 [Hir25，引理 5.8 和 5。11]。另见定义6.26。

(2) *HKR* 特征标理论与 *Riemann–Roch*。 定位公式中的不动点贡献是 E-上同调中的拟流形推前。为了计算这些贡献，我们使用 $K(n)$-局部双向性和 Hopkins–Kuhn–Ravenel 特征理论。我们建立了稳定几乎复拟流形之间推前的 Riemann–Roch 公式及其环面等变扩张（定理 5.50 和命题 5.60）。这些公式表明，经过 HKR 移动法丛的欧拉类修正后，HKR 特征标映射与推前相容，从而可以在 HKR 扇区上的有理理论 $L(E)$ 中进行计算。

同伦论方面的动机，源于广义特征与转移之间的相容性；这一相容性由 Hopkins–Kuhn–Ravenel [HKR00，定理 D] 证明，并由 Stapleton 推广至跨色特征 [Sta15，定理 2。18]。最近，Ben-Moshe 证明了与对 π-有限空间 [Ben24积分的相容性，见定理 A]。在我们的情形中，定向 Gysin 推前还需要加入由托姆类带来的额外修正。

在高度一时，HKR 构造有一种熟悉的描述，即由如下配对 $(x,\ g)$组成，其中 g 属于 x的稳定子群，并且还要求 g 具有 p-次幂阶。因此，其扇区恰好是与 p-次幂阶自同构相关联的通常扭曲扇区。相应地，我们的 Riemann–Roch 公式类似于 Kawasaki 的 Riemann–Roch 公式 [Kaw79]: 拟流形推前由这些扇区上的特征计算，并由移动法丛的欧拉类修正。

证明思路。 局部 $\mathbb{P}^1$ 的计算分为三个阶段。

(1) 几何约化。 我们首先比较 AMS 全局 Kuranishi 图表与代数几何中的障碍丛模型在 $\mathcal{M}_{0,0}(\mathbb{P}^1, d)$ 上的情形（定理 2.11）。随后，等变局部化将不变量表示为环面不动分支上的求和。欧拉类消失论证排除了除两类以外的所有分支：单边分量和具有等次数尾部的梳形分量（引理2.20）。我们描述它们的轨形结构，并计算相应的虚欧拉类（引理 2.22 和 2.25）。

(2) 素数之外的p 因子。 我们比较次数 d 和 md的等变局部化贡献，其中 $p \nmid m$。由此得到一个等变恒等映射（命题 3.2），其

非等变推论为

$$I^E_{md} = m^{-3} I^E_d.$$

因此，不含 p 因子的部分恰好给出经典的多重覆盖因子，剩余的计算则归结为 p 次幂次数的情形。

（3） p-主计算。对于 $d = p^a$，进一步的欧拉类消失消除了梳状分量中的非传递 HKR 扇区（引理2.27）。因此，只有尾部数为 p次幂的梳状分量才有贡献。

当 $[-1]_E x = -x$时，单边分量上的欧拉类之比化简为$^{x^2}$ $_{([d]_E x)^2}$。投影公式和命题3.8 继而给出单边贡献$\tau_{d,\ u}(x^2)/u^2$。对于梳状分量，HKR Riemann–Roch 将轨形推前化为对传递扇区求和。我们利用有限阿贝尔群的组合性质以及迹–留数恒等式来计算这些和。由此得到的梳状图贡献构成一个裂项求和（命题3.7（2）），恰好给出修正项$-\tau_{p^a,\ 0}(x^2)/u^2$。将其与单边贡献合并，即得定理3.6。

最后，我们将留数公式特化到整提升 $K(n)$ 并模 p 取模，从而得到定理 1.1。随后，利用零亏格簇分解（命题 4.1），即可推出其在卡拉比–丘三维簇上的应用。

后续方向。 一个自然的方向是将本文中的显式计算推广到其他带有环面作用的目标空间，包括环面簇以及 ADE 奇点的解消。这需要描述它们的环面不变模空间，并利用本文发展的局部化和 Riemann–Roch 公式计算相应的拟流形推前。对于 Springer 解消，值得探讨 Morava K理论的类比结果，以对应 Braverman、Maulik 和 Okounkov 关于等变量子上同调计算的工作 [BMO11]。

1.3 概述

本文分为两部分。第一部分包含计算与应用，第二部分则发展其背后的一般基础。

第一部分中，第 2 节比较了局部 $\mathbb{P}^1$ 的全局 Kuranishi 图表与障碍丛模型，并研究了环面不变轨迹、虚欧拉类及其消失性质。第 3 节通过分离素数到 p 的因子来计算局部 Gromov–Witten 不变量，推导出适用于 p 次幂次数的留数公式，并在 Morava K 理论中对其求值。第 4 节利用零亏格簇分解，将这些计算应用于卡拉比–丘三维簇。

第二部分给出了第一部分所用的一般性结果。第 5 节阐述轨形推前、HKR 特征标理论、Riemann–Roch 以及等变定位公式。第 6 节回顾全局 Kuranishi 图表及其构造，并在这一框架下建立等变局部化。

1.4 致谢

我感谢我的导师 Shaoyun Bai 提出这个问题，并给予我指导和有益的讨论。我感谢 Ivan Smith 和 Noah Porcelli 在剑桥与我进行了有益的交流。

我也感谢 Mark McLean 就这项工作与我进行了有益的讨论，并提出了宝贵的建议。我感谢 Jeremy Hahn 和 Keita Allen 解答我关于 Morava K-理论和色同伦论的问题。

第一部分

计算与应用

2 环面作用于局部 $\mathbb{P}^1$ 上的不动点轨迹与虚欧拉类

定义 2.1。 这里所说的局部 $\mathbb{P}^1$ 是指非紧致卡拉比–丘三维簇

$$X_{\mathrm{loc}} = \mathrm{Tot}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\right) \to \mathbb{P}^1$$

赋予标准复结构。记

$$N = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1).$$

此处使用的全局 Kuranishi 图表的定义和约定见第一部分 II；参见定义 6.1和约定 6.5。AMS 构造也在该部分回顾（第 6.2节）。

我们将重点研究模空间$\mathcal{M}_{0,\ 0}(X_{\mathrm{loc}},\ d)$。AMS 构造产生了一个全局 Kuranishi 图表 $\mathcal{K}^{\mathrm{AMS}}$ （在等价和配边意义下），但它过于抽象，无法用于计算。不过，这个模空间已经有了一个来自代数几何的模型（定义2.6）

$$\begin{array}{c} H^1\left(\Sigma, f^*N\right) \\ \big\downarrow\big\uparrow 0 \\ \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^1, d) \end{array}$$

这是一个导出轨形图表；在找到$\mathcal{M}_{0,\ 0}(\mathbb{P}^1,\ d)$的全局商表示后，我们得到了$\mathcal{M}_{0,\ 0}(X_{\mathrm{loc}},\ d)$的一个全局 Kuranishi 图表，称为 $\mathcal{K}^{\mathrm{AG}}$。这个图表是最优的，因为截面为零。我们在第一个小节中证明，$\mathcal{K}^{\mathrm{AG}}$ 在定义 $\mathcal{K}^{\mathrm{AMS}}$ 的意义下等价于6.6。

在第二个小节中，我们考虑 $\mathbb{T} = T^2$对 $N \to \mathbb{P}^1$ 的作用，它自然地定义了 $\mathbb{T}$对$\mathcal{M}_{0,\ 0}(X_{\mathrm{loc}},\ d)$ 的作用。为准备等变局部化（命题6.28），我们确定 $\mathbb{T}$对 $\mathcal{K}^{\mathrm{AG}}$的作用的不动点轨迹。对于不动点轨迹的每个连通分支，我们用层上同调表示其虚正规丛，并计算它们的 $\mathbb{T}$等变欧拉示性数。

2.1 AMS 坐标图与导出轨形图表的比较

本小节的主要结果是定理 2.11。

定义 2.2。定义

$$M_d := \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^1, d).$$

定义为从有理节点曲线到 $\mathbb{P}^1$ 的次数为 d 稳定映射的 Gromov–Witten 模空间。

引理 2.3。 M_d 是一个光滑完备复 *Deligne–Mumford* 叠。此外， $R^0\pi_* f^* N = 0$，且 $R^1\pi_* f^* N$ 是秩为 $2d-2$ 的复向量轨形丛。

证明。这是 [Hor+03] 中的经典结果。根据该处的引理 24.4.3， $\mathbb{P}^1$ 是凸的，因此 M_d 是一个光滑的 Deligne–Mumford 叠。在 §27.5 中，特别是在引理 27.5.2 中，他们将局部 $\mathbb{P}^1$ 多重覆盖问题的障碍丛识别为

$$R^1\pi_* f^*(\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}),$$

秩为 $2d-2$。

剩下只需指出 $R^0\pi_* f^* N = 0$。但注意到 $f^*N = f^*\mathcal{O}(-1) \oplus f^*\mathcal{O}(-1)$ 即可知这点成立。 $f^*\mathcal{O}(-1)$ 在 Σ 的每个不可约分支上都有负次数或零次数。该线丛的任何全纯截面在负次数分支上都为零，并且在零次数分支上为常数。由于至少存在一个负次数分支，且 Σ 是连通的，我们有 $R^0\pi_* f^* N = 0$。 □

定义 2.4. 定义

$$\mathrm{Ob}_d = R^1\pi_* f^* N.$$

作为 M_d 上的复向量轨形丛。

设 $i : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow X_{\mathrm{loc}}$ 表示零截面。沿零截面存在一个典范分裂

$$i^* T X_{\mathrm{loc}} \cong T\mathbb{P}^1 \oplus N.$$

因此，对于稳定映射 $f: \Sigma \to \mathbb{P}^1$，映射 $i \circ f : \Sigma \to X_{\mathrm{loc}}$ 的变形–阻碍理论分裂为切向部分（对应于作为到 $\mathbb{P}^1$ 的稳定映射的变形）和由 $R\Gamma(\Sigma, f^*N)$ 给出的法向部分。由于 $\mathbb{P}^1$ 是凸的，切向部分没有障碍，其变形空间是 M_d 的切空间。另一方面，根据前述引理，

$$H^0(\Sigma, f^*N) = 0, \qquad H^1(\Sigma, f^*N) = (\mathrm{Ob}_d)_{[f]}.$$

Thu是局部-$\mathbb{P}^1$ 问题在 $[f]$ 处的变形空间和阻碍空间，分别为

$$T_{[f]} M_d \qquad \text{and} \qquad (\mathrm{Ob}_d)_{[f]}.$$

特别地，这个障碍丛模型的虚拟切丛为

$$T^{\mathrm{vir}} = T M_d - \mathrm{Ob}_d\,.$$

这就是导出轨形图表

$$(M_d, \mathrm{Ob}_d, 0)$$

是局部-$\mathbb{P}^1$ 模空间问题的自然障碍丛模型。

注记 2.5。 事实上， M_d 具有全局商表示。固定一个整数 $k \geq 3$，万有曲线记为 $\mathcal{C}_d \xrightarrow{\pi} M_d$，万有稳定映射记为 f。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_d & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ M_d & & \end{array}$$

那么我们可以在 $\mathcal{C}$ 上定义一个线丛，

$$L_k = \left(\omega_{\mathcal{C}_d/M_d} \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)\right)^{\otimes k}, \tag{3}$$

事实证明，当 k 足够大时，它是相对很充足的。记 $D := k(3d-2)$ 为 L_k 在每条定义域曲线上的次数，其中使用 $\deg \omega_\Sigma = -2$，并令 $r = D + 1$。这里 d 仍表示稳定映射次数。令 $E_k = \pi_* L_k$；由于 $H^1(L_k)$ 在每个纤维上 $= 0$，由 Riemann–Roch 定理可得秩为 $E_k = r$。令 $\mathrm{Fr}(E_k)$ 表示 E_k 的标架。对于足够大的 k，每个 M_d 中点的稳定子群都忠实地作用于相应的 E_k 纤维。因此，标架丛 $\mathrm{Fr}(E_k)$ 是一个光滑复流形，并且

$$M_d \simeq [\mathrm{Fr}(E_k)/\,\mathrm{GL}(r,\mathbb{C})]$$

定义 2.6。 (1) 我们称 $(M_d, \mathrm{Ob}_d, 0)$ 为 $\mathcal{M}_{0的0}(X_{\mathrm{loc}}, d)$的导出轨形图表。

(2) 在 E_k 上选取一个厄米度量，并令 $\mathrm{Fr}_U(E_k)$ 为酉标架丛。那么我们可以定义一个全局 Kuranishi 图表

$$\mathcal{K}^{\mathrm{AG}} = \left(U(r), \mathrm{Fr}_U(E_k), \widetilde{\mathrm{Ob}}_d, 0\right) \tag{4}$$

$\widetilde{\ }$这里，Ob_d 是 $\mathrm{Ob}_d \to M_d$ 在 $\mathrm{Fr}_U(E_k)$ 上的提升。

另一方面，我们还有一个由 AMS 构造得到的抽象全局Kuranishi图表 $\mathcal{K} = (G,\ \mathcal{T},\ \mathcal{E},\ s)$。我们证明该坐标图等价于 $\mathcal{K}^{\mathrm{AG}}$，其意义见定义6.6(2)（四种基本变换见引理6.7）。由于改变 AMS 辅助数据会得到等价的坐标图，因此只需针对一种选择进行比较。

T（47）和（3）中的极化线丛提示了如下辅助数据的选取 .

- $L = p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$，其中 $p\colon X_{\mathrm{loc}} \to \mathbb{P}^1$ 是投影。在 L 上赋予从 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$ 上的标准厄米度量拉回的厄米度量和 Chern联络。[3]
- 辅助次数为 $D = \deg_\Sigma\left((\omega_\Sigma \otimes u^*L)^{\otimes k}\right) = k(3d-2)$，并且 $r = D + 1$。
- 尽管在一般构造中，我们需要有限维近似方案在 $\Omega^{0,1}_{\mathcal{C}^\circ/\mathcal{F}} \otimes_{\mathbb{C}} TM$,（紧支集截面）中稠密，但现在只需要它们在

[3]该联络的曲率形式在垂直方向上消失，因此不满足 [AMS24，定义 423]中的环境驯服条件。这里重要的是，对于稳定全纯映射的每个非收缩分支 u，拉回 $u^*\Omega$ 都是非负的，并且在 u 的微分为单射的每一点处均为正。结合收缩分支上的稳定性，这就给出了极化线丛所需的正性，并且该正性在零点集附近仍然保持。

垂直方向上稠密。事实上，我们可以选择一个足够大的复 $U(r)$-表示W，并配备一个复线性扰动映射

$$\lambda^v\colon W \to \Gamma\left(\mathcal{C}\times\mathbb{P}^1, \Omega^{0,1}_{\mathcal{C}^\circ/\mathcal{F}}\otimes_{\mathbb{C}} N\right).$$

这是因为底空间 $\mathbb{P}^1$ 是凸的，因此在 $T\mathbb{P}^1$ 方向上不存在障碍丛。此外，在 $s^{-1}(0)$ 处，所有（J-全纯）曲线都落入 $\mathbb{P}^1\subset X_{\mathrm{loc}}$。沿 p拉回：$X_{\mathrm{loc}}\to\mathbb{P}^1$，然后通过包含映射 $p^*N\hookrightarrow TX_{\mathrm{loc}}$，这个 λ^v 被提升为

$$\lambda\colon W\to\Gamma\left(\mathcal{C}\times X_{\mathrm{loc}}, \Omega^{0,1}_{\mathcal{C}^\circ/\mathcal{F}}\otimes_{\mathbb{C}} TX_{\mathrm{loc}}\right).$$

λ 位于垂直方向上，并且在垂直纤维上是常值的。

- 对于零截面中的全纯曲线，常值定义域度量应与 E_k 上的厄米度量相同，$f\colon\ \Sigma\to\mathbb{P}^1$。

对于这一选择，AMS 全局 Kuranishi 图表为

$$\mathcal{K}^{\mathrm{AMS}} = (U(r), \mathcal{T}, H_{0,0,D}\oplus\underline{W}\oplus\underline{\mathcal{H}}, s). \tag{5}$$

这里 s 是定义 6.15中针对 $g=h=0$、辅助次数 D以及上文选取的扰动空间 W 的截面。

为了证明 $\mathcal{K}^{\mathrm{AG}}$ 和 $\mathcal{K}^{\mathrm{AMS}}$ 是等价的，我们引入一个中间全局 Kuranishi 图表。在 $\mathrm{Fr}_U(E_k)$ 上，存在一个向量丛映射

$$W \xrightarrow{\lambda} \Gamma(\Sigma, \Omega^{0,1}_\Sigma\otimes f^*N) \twoheadrightarrow H^1(\Sigma, f^*N) = \widetilde{\mathrm{Ob}}_d|_{[f]}$$

令 $K_1 = \ker\left(W\to \mathrm{Ob}_d\right)$。

定义 2.7。 中间全局 Kuranishi 图表为

$$\mathcal{K}_1 = (U(r), \mathrm{Tot}(K_1), \underline{W}, s_1) \tag{6}$$

这里，截面 s_1 由向量丛嵌入 $K_1\hookrightarrow W$诱导。更严格地说，我们可以取 $\underline{\mathcal{T}_1}$ 为零截面 $\mathrm{Fr}_U(E_k)\subset\mathrm{Tot}(K_1)$ 的一个充分小邻域

注记 2.8。 $\mathrm{Tot}(K_1)$ 中的一个点由以下数据组成

- $f\colon\ \Sigma\to\mathbb{P}^1$ 是从有理结曲线 Σ 到 $\mathbb{P}^1$的全纯映射。
- F是 $(\omega_\Sigma\otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))^{\otimes k}$.$\sim$ 的酉标架
- $e\in K_1|_{(f,F)}$，即一个属于 $\ker(W\to\mathrm{Ob}_d)$ 的向量 $e\in W$。

根据 $e\in K_1$，它在 λ $\lambda(e)$ 下的像属于以下像空间

$$\Omega^0(\Sigma, f^*N)\xrightarrow{\overline{\partial}_{f^*N}}\Omega^{0,1}(\Sigma, f^*N)$$

注意到 $\ker(\partial_{f^*N})\overline{\ } = H^0(\Sigma, f^*N) = 0$，存在唯一的 $\xi\in\Omega^0(\Sigma, f^*N)$ 满足方程

$$\overline{\partial}_{f^*N}\xi + \lambda(e)|_f = 0$$

因此，我们得到一个映射 $u=(f,\ \xi)\colon\ \Sigma\to X_{\mathrm{loc}}$、一个酉标架 F，以及满足扰动的柯西–黎曼方程的 $e\in W$。

Defi义 2.9。 我们定义全局 Kuranishi 图表态射 $i\colon\ \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}^{\mathrm{AMS}}$ 如下 s:

(1) 这些群是相同的：二者都是 $U(r)$。

(2) 上述讨论给出了一个映射[4]

$$i\colon \mathrm{Tot}(K_1) \to \mathcal{T}$$
$$(f, F, e) \mapsto (\phi = \phi_F, (f, \xi), F, e)$$

这里 $\phi_F\colon\ \Sigma \to \mathbb{P}^D$ 是从标架 F得到的映射。

(3) 向量丛的映射恰好是一个直和项的包含映射

$$\underline{W} \hookrightarrow H_{0,0,D} \oplus \underline{W} \oplus \underline{\mathcal{H}}$$
$$e \mapsto (0, e, 0).$$

命题 2.10。 i 是全局 *Kuranishi* 图表的一个等价。

证明留待附录 A。一旦我们得到这个等价，就很容易观察到另一个等价：

$$\begin{array}{ccc} \underline{W} & \longrightarrow & \mathrm{coker}(K_1 \hookrightarrow W) \\ \downarrow\uparrow{\scriptstyle s_1} & & \downarrow\uparrow{\scriptstyle 0} \\ \mathrm{Tot}(K_1) & \longrightarrow & \mathrm{Fr}_U(E_k) \end{array}$$

在这个图表中，注意到 $\mathrm{coker}(K_1 \hookrightarrow W) \simeq H^1(\Sigma, f^*N) = \widetilde{\mathrm{Ob}}_{d\circ}$ 因此，我们得 t

定理 2.11。 $\mathcal{K} = (G, \mathcal{T}, \mathcal{E}, s)$ 等价于坐标图 $\left(U(r),\ \mathrm{Fr}_U(E_k)\ \widetilde{\mathrm{Ob}}_d, 0\right)$。

2.2 不动点集与欧拉类计算

记号 2.12。 设 $\mathcal{X}$ 是一个维数为 d 的闭的稳定几乎复轨形，并设 E 是 Morava K-理论或 HKR 理论。对于 $a \in H^*(\mathcal{X}, E)$，记作

$$\int_{\mathcal{X}} a := (\pi_{\mathcal{X}})_!(a) \in E^{*-d},$$

其中 $\pi_{\mathcal{X}}\colon\ \mathcal{X} \to$点 且推前在定义 5.33 中定义。

对于一个 $\mathbb{T}$-等变轨形，我们类似地记作

$$\int_{\mathcal{X}}^{\mathrm{eq}} a := \pi_{!,\mathrm{eq}}(a),$$

其中等变推前定义于定义5.56。

考虑以下映射

$$(t_0, t_1) \in T^2, (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (t_0 z_0, t_1 z_1) \in \mathbb{C}^2. \tag{7}$$

我们构造一些 T^2-作用：

[4]目前它只是集合之间的映射 .

定义 2.13. (1) $\mathbb{P}^1$ 上的 T^2-作用。对于 $(t_0,t_1)\in T^2$ $[z_0\colon z_1]\in\mathbb{P}^1$，它被映射为 $[t_0z_0\colon t_1z_1]\in\mathbb{P}^1$。

(2) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$上的标准 T^2作用。注意，$\mathrm{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))=\mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2$。然后对（7）中的 0 进行$\mathbb{C}^2$ 爆破，我们得到 $\mathrm{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ 上的一个 T^2 作用，该作用在纤维上线性。我们将 $\mathcal{O}(-1)$ 的这个等变提升记为 $\mathcal{O}(-H)$。

(3) 令 $\mathbb{C}_{\alpha_0},\mathbb{C}_{\alpha_1}$ 为由下式给出的一个一维 T^2 复表示

$$(t_0,t_1)\mapsto t_0^{-1},\quad (t_0,t_1)\mapsto t_1^{-1}.$$

对于 $k,l\in\mathbb{Z}$，记 $\mathbb{C}_{k\alpha_0+l\alpha_1}=(\mathbb{C}_{\alpha_0})^{\otimes k}\otimes(\mathbb{C}_{\alpha_1})^{\otimes l}$。这些都是一维 T^2表示。

(4) 对于 $k,l\in\mathbb{Z}$，我们有一个 T^2-等变向量丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-H+k\alpha_0+l\alpha_1)$，其定义为以下张量积

$$\mathcal{O}(-H)\otimes(\mathbb{C}_{\alpha_0})^{\otimes k}\otimes(\mathbb{C}_{\alpha_1})^{\otimes l}$$

由于 $\mathbb{C}_{\alpha_0},\mathbb{C}_{\alpha_1}$ 的底层向量丛是平凡线丛，因此 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-H+k\alpha_0+l\alpha_1)$ 也是 $\mathcal{O}(-1)$ 的一个等变提升。

定义 2.14. 记作 $p_0=[1:0]$, $p_1=[0:1]$, , 并在坐标图 $\{z_0\neq 0\}\subset\mathbb{P}^1$上使用仿射坐标 $z=\frac{z_1}{z_0}$。那么 p_0 对应于 $0/1=0$，而 p_1 对应于 $1/0=\infty$。

定义 2.15. 我们使用以下 T^2 等变提升$\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}$来定义 X_{loc}上的 T^2-作用

$$\mathcal{O}(-H+\alpha_0)\oplus\mathcal{O}(-H+\alpha_1).$$

注记 2.16. 该作用通过 $q\colon T^2\to S^1$分解，其中 $q(t_0,t_1)=t_1/t_0$。相应的 S^1在 $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1)$上的作用在 0 和 ∞处的权如下：

	0	∞
$\mathcal{O}(-1)_1$	1	χ^{-1}
$\mathcal{O}(-1)_2$	χ	1

这里 χ 表示诱导 $\mathcal{O}(1)\to BS^1=\mathbb{CP}^\infty$[5]的 S^1-表示。记 $u=e_E(\chi)$，并用 α_i 表示相应的欧拉类，则有 $q^*u=\alpha_1-_E\alpha_0$。由等变推前的自然性，T^2-等变不变量是沿 Bq 对 S^1-等变不变量的拉回。

根据第 6.3.2 节，T^2-作用为$\mathcal{M}_{0,\ 0}(X_{\mathrm{loc}},\ d)$定义了一个等变全局 Kuranishi 图表，从而可以利用等变局部化计算 Gromov–Witten 不变量（命题 6.28）。我们的方法遵循 [Kon95第 2 节以及3]或 [Hor+03第 27.3–27 节中相同的思路7]。

令 $e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)$ 为 T^2-等变欧拉类 Ob_d。根据命题 5.65

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^1,d)}e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)=\sum_F\int_F\frac{e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)}{e_{\mathrm{eq}}(\nu_F)}\tag{8}$$

[5]与符号所暗示的相反，这表示的是由 $t\mapsto t^{-1}$ 给出的表示 $S^1\to\mathbb{C}^*$。

其中 F 遍历 T^2-等变轨形的（定义见定义 5.23）不动点轨迹的分量，这些不动点轨迹是 T^2 在 $\mathcal{M}_{0,0}(\mathbb{P}^1, d)$上的作用所产生的。

根据 [Kon95，第 3 节。2],不动点轨迹的分量可以用图来描述 Γ。

定义 2.17。我们考虑具有以下数据的带标记树 Γ：

- 每个顶点 v 被赋予 p_0 或 p_1 于 $\mathbb{P}^1$中。令 $\deg(v) \in \mathbb{N}$ 表示其次数。
- 每条边 e 都被赋予一个次数 $d_e \in \mathbb{N}$。
- 如果两个顶点 v_1， v_2 相邻，那么它们被赋予的点彼此不同。

G给定这样一棵树 Γ，我们可以按以下方式构造不动点轨迹中的稳定映射 y:

- 对于满足 $\deg(v) \geq 3$ 的每个顶点 v，为其关联一个 $\Sigma_v \in \mathcal{M}_{0,\deg(v)}$。$\Sigma_v$ 的标记点对应于与 v 相邻的边。映射 $u_v\colon \Sigma_v \to \mathbb{P}^1$ 完全映到 p_0 或 p_1，具体取决于与 v 关联的是哪个点。

- 对于每条边 e，为其关联一个 $\mathbb{P}^1$ 的副本，记为 $\mathbb{P}^1_e$。$\mathbb{P}^1_e$ 上的映射由下式描述：

$$u_e\colon \mathbb{P}^1_e \to \mathbb{P}^1, \quad z \mapsto z^{d_e}.$$

  我们仍用 $p_0, p_1 \in \mathbb{P}^1_e$ 表示在 u_e 下映到 $p_0, p_1 \in \mathbb{P}^1$ 的点。

- 对于满足 $\deg(v) \geq 3$ 且是边 e 端点的顶点 v，假设 v 被赋值为 p_ϵ，且对应于 e 的标记点为 q。然后，我们将 $p_\epsilon \in \mathbb{P}^1_e$ 与 $q \in \Sigma_v$ 识别起来，从而把两条曲线粘合在一起。

  对于满足 $\deg(v) = 2$ 且有两条边 e_1, e_2 的顶点，我们在分配给 v 的对应p_ϵ 处将 $\mathbb{P}^1_{e_1}$ 与 $\mathbb{P}^1_{e_2}$ 粘合。

  对于满足 $\deg(v) = 1$ 的顶点，我们不进行粘合。

对于所有这样的关联对 (v, e)，我们通过识别点来粘合曲线，从而得到一条有理结曲线Σ。由于映射 u_v, u_e 在被识别的点上重合，因此存在一个全纯映射

$$u\colon \Sigma \to \mathbb{P}^1.$$

容易看出，这个 u 属于 T^2-不动点轨迹。事实上，逆命题也成立。注意，树 Γ实际上给出了一族稳定映射，因为选择 Σ_v 可以在 $\mathcal{M}_{0,\ \deg(v)}$中移动。

定义 2.18。(1) 写作

$$\overline{\mathcal{M}}_\Gamma = \prod_v \overline{\mathcal{M}}_{0,\deg(v)}.$$

(2) 令 $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ 为 Γ 的自同构群。我们定义一个映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\Gamma) &\to \mathrm{Aut}\left(\prod_e \mathbb{Z}/d_e\mathbb{Z}\right), \\ \gamma &\mapsto \left((i_e) \mapsto (i_{\gamma^{-1}(e)})\right). \end{aligned}$$

(3) 定义 $\mathbb{A}_\Gamma = \mathrm{Aut}(\Gamma) \ltimes \prod_e \mathbb{Z}/d_e\mathbb{Z}$，因此存在一个正合序列

$$0 \to \prod_e \mathbb{Z}/d_e\mathbb{Z} \to \mathbb{A}_\Gamma \to \mathrm{Aut}(\Gamma) \to 1. \tag{9}$$

(4) 利用自同构群Γ对 $\mathcal{M}_\Gamma$ 的作用（以及投影 $\mathbb{A}_\Gamma \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$），在 $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$ 上定义一个 $\mathbb{A}_\Gamma$作用。

引理 2.19 ([Kon95，第 3 节。2][Hor+03，第 27 节。3])。 T^2-不动点轨迹集中$\mathcal{M}_{0,\ 0}(\mathbb{P}^1, d)$ 的各个分量与满足 $\sum_{e\in\Gamma} d_e = d$的带标记树 Γ 一一对应。设 F_Γ 是与 Γ对应的分量，则存在一个轨形之间的同构

$$F_\Gamma \simeq [\overline{\mathcal{M}}_\Gamma/\mathbb{A}_\Gamma]$$

现在我们已经确定了不动点轨迹集的各个分量，接下来需要了解每个分量上的变形与障碍信息，也就是式 ($e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)$ 和 $e_{\mathrm{eq}}(\nu_F)$ 项。8)。

回顾 [Hor+03引理 27.5 的证明中的计算。3]。对于一个稳定映射 $u\colon\ \Sigma \to \mathbb{P}^1$~属于 F_Γ，设 $b_1, \ldots, b_m$ 为连接与 Γ相关的各部分的节点。设 $\pi\colon\ \Sigma \to \Sigma$ 为在这些节点处进行部分正规化所得的曲线，并保留收缩子曲线的内部节点不作处理，记 $\widetilde{u} = u \circ \pi$。存在一个层的正合序列

$$0 \to \mathcal{O}_\Sigma \to \pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}} \to \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}|_{b_i} \to 0$$

与 u^*N[6] 取张量积，然后取层上同调，我们得到：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\Sigma, u^*N) & \longrightarrow & H^0(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{u}^*N) & \xrightarrow{\phi} & \displaystyle\bigoplus_{i=1}^m N|_{u(b_i)} \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & H^1(\Sigma, u^*N) & \longrightarrow & H^1(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{u}^*N) \longrightarrow 0 \end{array} \tag{10}$$

我们将识别这个长正合列中的一些项：

- $H^0(\Sigma,\ u^*N)\ = 0$。

  回想一下 $N = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$。 $u^*(\mathcal{O}(-1))$ 在非收缩分支上次数为负，在压缩分量上是平凡线丛。因此，截面在非收缩分支上必须为零，在压缩分量上必须为常数。由于 Σ 是连通的，截面只能为零。

- 类似地， $H^0(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{u}^*N)$ 被识别为

$$\bigoplus_{\widetilde{\Sigma}_j} N|_{u(\widetilde{\Sigma}_j)}$$

[6]回想 N 具有 T^2作用，该作用由定义 2.15 给出

~其中求和遍历被收缩的连通分支 Σ_j，它们映射到 p_0 或 p_1。这些是零亏格结点曲线，因此

$$H^0(\widetilde{\Sigma}_j, \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_j}) = \mathbb{C}, \qquad H^1(\widetilde{\Sigma}_j, \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_j}) = 0.$$

在此识别下，映射

$$\phi\colon H^0\left(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{u}^*(N)\right) \to \bigoplus_{i=1}^{m} N|_{u(b_i)}$$

变为从每个压缩分量到其附着节点的截面限制。注意，$H^1(\Sigma,\ u^*(N))$ 是障碍丛 Ob_d。根据上述正合序列，它包含子丛 $\mathrm{coker}(\phi)$。

引理 2.20（参见 [Hor+03，引理 27.5 的证明。3]）。设 F 是不动点轨迹的一个分量。那么 e_{eq}（Ob_d）$|_F = 0$，除非域具有以下两种形式之一：

- $\Sigma \cong \mathbb{CP}^1$，且 $u\colon\ \Sigma \to \mathbb{CP}^1$ 是一个次数为 d 的覆盖，在 0 和 ∞ 上全支化。
- Σ 由一个被收缩的有理结点曲线 Σ_0 和 h 个标记点组成，其中 h 是 p 的幂，被映射到 0 或 ∞，并与附着在这些标记点上的 h 个非收缩分支 Σ_1、……、$\Sigma_h \cong \mathbb{CP}^1$ 一起构成。每个限制 $u|_{\Sigma_i}$ 都是一个次数为 l 的覆盖，在0 和 ∞ 上全支化。特别地，$d = h \cdot l$。

证明。我们细化 [Hor+03引理 27.5 中证明的消失论证3]，并追踪表示不动分量的有限群。

设 $N = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$，并且 $G = \mathbb{A}_\Gamma$。对于 $\epsilon \in \{0, \infty\}$，令 $L_\epsilon \subset N|_{p_\epsilon}$ 为由定义 $T^2$2.15 所确定的一维 [Hor+03引理 27.5 中所使用的3]-不动子空间。

~令 $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$，并令 C 遍历 Σ的连通分支。在本证明中，收缩分量是指与Γ的顶点相关联的极大连通收缩子曲线。（10）给出

$$\bigoplus_C H^0(C, u|_C^* N) \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{b\in B} N|_{u(b)} \longrightarrow \mathrm{Ob}_d|_u \to \bigoplus_C H^1(C, u|_C^* N) \to 0, \tag{11}$$

因此 $\mathrm{coker}(\phi) \hookrightarrow (\mathrm{Ob}_d)_u$。如果 C 不是收缩的，则 $H^0(C,\ u|_C^* N) = 0$。如果 C_v 收缩到 p_ϵ，且具有附着节点 $B_v \subset B$，那么在 T^2-不动线 L_ϵ 上，它对 ϕ 的贡献是对角映射

$$L_\epsilon \longrightarrow L_\epsilon^{B_v}, \qquad w \longmapsto (w)_{b\in B_v}.$$

因此，只需证明在上述两种情形之外，$\mathrm{coker}(\phi)$ 含有一个欧拉类为零的等变子丛。由乘法性可得 $e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob})|_F = 0$。在本证明的其余部分，步骤 1 和步骤 2 排除两种情形，而步骤 3 则表明，剩下的正是引理所指出的那些情形。

步骤 1：连接两个未收缩分支的节点。假设某个节点 b 连接两个未收缩分支。两个分支都不对 $H^0(C,\ u|_C^* N)$作出贡献。因此，记 $u(b) = p_\epsilon$，则 $G \cdot b$ 处节点的 L_ϵ-贡献构成 coker ϕ的一个直和项 V_b。

~ ~环面扩张 $\mathbb{A}_\Gamma$ 在 V_b 上的作用通过图作用 $\rho\colon \mathbb{A}_\Gamma \to H = \mathrm{Aut}(\Gamma)$因子化，因为 $\ker\rho$ 固定两个分支，并且在权零直线 L_ϵ上平凡作用。由于 ϕ 取两个分支取值之差，稳定子群 $H_b = \mathrm{Stab}_H(b)$通过分支置换特征 $\bar\sigma_b$作用于 b-项，而轨道上的传递性给出

$$V_b \cong \rho^* W_b, \qquad W_b = \mathrm{Ind}_{H_b}^{H} \mathbb{C}_{\bar\sigma_b}.$$

在 $\overline{\mathcal{M}_\Gamma}$上，这一直和项定义了 $\mathrm{Ob}_d|_{F_\Gamma}$ 的一个等变子丛，它是沿 W_b 经由$\overline{\wr[\mathcal{M}_\Gamma/\mathbb{A}_\Gamma] \to BH}$ 拉回的。由引理 2.21， $e_E(W_b) = 0$。因此，由乘法性可得

$$e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)|_{F_\Gamma} = 0.$$

因此，我们可以假设 B 中的每个节点都与一个压缩分量相邻。

步骤 2：存在多个压缩分量。假设至少有两个压缩分量。由于 Γ 是一棵树，选取一个压缩顶点 v ，使其成为包含所有压缩顶点的最小子树的叶节点。在 v处的各个分支中，恰有一个分支指向另一个压缩顶点；而根据稳定性，至少还有一个分支不指向其他压缩顶点。

因此，稳定子群 $G_v = \mathrm{Stab}_G(v)$在集合 B_v （与 v相邻的节点）上的作用不是传递的。在 B_v中的每个节点处，压缩分支与非压缩分支不能互换，因此对节点项的作用就是通常的置换作用。由此可知，约化置换表示 $\mathbb{C}[B_v]/\mathbb{C}\mathbf{1}$[7] 包含一个非零的 G_v-不变向量。注意，我们有如下直和项嵌入

$$\iota_v\colon \mathbb{C}[B_v] \otimes N|_{u(v)} \hookrightarrow \bigoplus_{b\in B} N|_{u(b)}$$

使得 $\mathbb{C}\mathbf{1} \otimes N_{u(v)} = \iota_v^{-1}(\mathrm{im}\,\phi)$。与 $L_{u(v)}$ 张量并对 G/G_v 求和，得到 $\mathrm{coker}\,\phi$ 中一个非零的 G-不变类：不同的平移支撑在互不相交的附着节点集合上，而 ϕ 贡献的关系在每个这样的集合内都是对角的。由于环面扩张在这些权零项上通过图作用发挥作用，该类定义了 F_Γ上的处处不消失的等变截面。因此

$$e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)|_{F_\Gamma} = 0.$$

因此，可能非空的不动点轨迹至多含有一个压缩分量。

步骤 3：剩余图的分类。若不存在压缩分量，则步骤 1 蕴含不存在节点。因此 $\Sigma \simeq \mathbb{P}^1$，且 u 是一个 T^2-不动的次数-d 覆盖，故在 0 和 ∞上全支化。这是第一个例外情形。

反之，假设恰有一个压缩分量 C_v，映射到 p_ϵ。根据步骤 1， B 中的每个节点都是与 C_v的附着。令 B_v 为这些附着节点；那么，如步骤 2 所示，$\mathrm{coker}\ \phi$ 存在一个 T^2-不动子空间

$$W_v = L_\epsilon \otimes \left(\mathbb{C}[B_v]/\mathbb{C}\mathbf{1}\right).$$

由于 G 是有限的，当且仅当 G 在 B_v上传递地作用时， $W_v^G = 0$ 成立。因此，除非该作用在各分支上传递，否则 W_v 包含一个平凡的 G-表示，欧拉类为零。

[7] B_v 是一个 G_v 集合， $\mathbb{C}[B_v]$ 表示由基 B_v 张成的 G_v-表示。 $\mathbb{C}\mathbf{1}$ 是向量 (1，1，...，1)，其坐标对于每个基向量都是 1。

在传递情形下，图自同构保持非收缩分支的度数标签。因此所有分支的次数都相同。

设定 $h = |B_v|$ 和

$$V_{\mathrm{std}} = \mathbb{C}[B_v]/\mathbb{C}\mathbf{1}.$$

由于 L_ϵ 的环面权重为零，且覆盖变换在其上作用平凡，由 W_v 定义的等变子丛沿着 V_{std} 拉回自

$$[\overline{\mathcal{M}}_\Gamma/\widetilde{\mathbb{A}}_\Gamma] \longrightarrow BS_h.$$

假设 h 不是 p的幂。那么 Sylow p-子群 $S \subset S_h$ 在B_v上至少有两个轨道，因此 $V_{\mathrm{std}}|_S$ 包含一个平凡复直线。于是

$$\mathrm{res}_S^{S_h}\, e_E(V_{\mathrm{std}}) = 0.$$

根据 p-局部稳定 Sylow 分裂，限制映射 $E^*(BS_h) \to E^*(BS)$ 是单射，因此$e_E(V_{\mathrm{std}}) = 0$；参见 [Rag08，第 6 节。2]。拉回与乘法性给出

$$e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)|_{F_\Gamma} = 0.$$

因此，可能非零的分量必须满足 h 是 p的幂，从而得到第二种例外情形。

□

引理 2.21 (诱导符号表示的欧拉类)。 设 E 是一个复定向的 p-局部上同调理论，其中 p 为奇数。设 H 为有限群， $K \subset H$ 为子群，且 $\sigma : K \to \{\pm 1\}$为一个特征。那么

$$e_E\Big(\mathrm{Ind}_K^H \mathbb{C}_\sigma\Big) = 0 \quad in\ E^*(BH).$$

证明。 取一个 Sylow p-子群 $S \subset H$。对于每个双陪集代表元 $g \in S\backslash H/K$，群 $S \cap gKg^{-1}$ 的阶为奇数，因此共轭特征 σ^g 在其上的限制是平凡的。由麦基分解公式可得

$$\mathrm{Res}_S^H \mathrm{Ind}_K^H \mathbb{C}_\sigma \cong \bigoplus_{[g]\in S\backslash H/K} \mathbb{C}\big[S/(S \cap gKg^{-1})\big]\,.$$

每个直和项都包含一条平凡复直线，因此该限制表示的欧拉类为零。但

$$E^*(BH) \longrightarrow E^*(BS)$$

是单射，因此原欧拉类为零；参见 [Rag08，第 6 节。2]。 □

由引理 2.20可知，接下来需要分析两种不动点轨迹。我们分别将这两种几何类型称为单边分量和梳状分支。

这两种情形的计算取自 [GP99] 和 [Hor+03，第 27]节。

2.2.1 情形 I：单边分量。

在此情形下，存在唯一的次数为 d 分支覆盖 $u\colon\ \Sigma \to \mathbb{P}^1$ 由 $z \mapsto z^d$（使用定义 2.14中的坐标）建模；在同构意义下，它满足 $\mathbb{A}_\Gamma = C_d$。不考虑T^2-作用时，此分量同构于 $[\text{点}/C_d]$。

然而，若将 T^2-作用考虑在内，则定义5.22 便适用。映射$u\colon\ \Sigma \to \mathbb{P}^1$ 由 $z \mapsto z^d$建模。对于$(t_0,\ t_1) \in T^2$，我们可以形式上将$(t_0,\ t_1)$ 在 $\mathbb{P}^1$上的作用提升至 Σ，方法是

$$z \mapsto \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{1/d} z$$

当 $d > 1$[8] 时，该映射是多值的。对于 $d > 1$，这意味着无法通过 pt 上的 $C_d \times T^2$-作用来定义 $[\text{pt}/C_d]$ 上的 T^2-作用。

当 $t = t_1/t_0 \in S^1$ 沿 S^1逆时针移动时，提升后的映射构成从恒等映射到 $e^{2\pi \mathrm{i}/d} \in C_d$的同伦。这促使我们定义以下群图，其中每一行都是正合的（参见定义34中的序列（5.22））

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & C_d & \longrightarrow & \widetilde{G} & \longrightarrow & T^2 & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle (t_0,t_1)\mapsto t_1/t_0} & & \\ 1 & \longrightarrow & C_d & \longrightarrow & S^1 & \xrightarrow[t\mapsto t^d]{} & S^1 & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{12}$$

右端的方形是一个拉回图。按照定义 5.22，这定义了一个 T^2 或 S^1-作用于 $[\text{点}/C_d]$。后者来自将 T^2-作用于 $\mathbb{P}^1$ 约化为乘法作用$S^1 \curvearrowright \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$，二者通过以下关系相联系

$$T^2 \to S^1, \quad (t_0, t_1) \mapsto t_1/t_0$$

这给出了单边分量 $[\text{点}/C_d]$ 上的 T^2 或 S^1-作用模型，具体取决于我们在 $\mathbb{P}^1$ 上选择哪种作用。商叠 $[\text{点}/C_d]/T^2$（分别为 $[\text{点}/C_d]/S^1$）实际上是 $[\text{点}/\widetilde{G}]$（分别为 $[\text{点}/S^1]$[9]）。因此，Ob_d 和 ν_F 在单边分量上的限制等价于$\widetilde{G}$（分别为 S^1）表示。

令 $\alpha_0, \alpha_1 \in H^2(BT^2, E)$ 和 $x \in H^2(BS^1, E)$（中间的 S^1）为超平面类。我们也将它们拉回到 $H^2(B\widetilde{G}, E)$ 后的拉回记为 α_0, α_1, x；对于 x 沿 $C_d \hookrightarrow S^1$ 限制到 $H^2(BC_d, E)$ 的情形，也采用相同的记号。回忆一下，对于 $n > 0$，有 $[n]_E x := x +_E x +_E \cdots +_E x$，而 $[-n]_E(x)$ 是它的逆映射n 倍

关于 $F_E(-,\ -)$。

引理 2.22 (本质上 [Hor+03，练习 27.2.6&27.4。1])。 欧拉类[10] 关于 Ob_d 和 ν_F是

$$e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d) = \prod_{i=1}^{d-1} [i]_E(x) \cdot [-i]_E(x)$$

[8]换句话说，这个提升取决于从单位元到 $(t_0,\ t_1)$ 在 T^2中的一条路径（模同伦）。 [9]这表示 (S^1 12) 第二行中间的。

[10]由于 T^2-商 $[\text{点}/C_d]$ 是 $[\text{点}/\widetilde{G}]$，T^2-等变欧拉类属于 $H^*(B\widetilde{G},\ E)$。

and

$$e_{\mathrm{eq}}(\nu_F) = \prod_{i=2}^{d} [i]_E(x) \cdot [-i]_E(x)$$

其中，我们将 x 视为 $H^2(B\widetilde{G}, E)$ 或 $H^2(BS^1, E)$ 中的一个类。因此，在相对于 T^2 （或目标空间 S^1）进行欧拉局部化后，我们有

$$\frac{e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)}{e_{\mathrm{eq}}(\nu_F)} = \frac{x \cdot [-1]x}{[d]x \cdot [-d]x}.$$

由于单边分量的（粗模空间）中只有一个点，因此只需确定Ob_d和 $\nu_F = T\mathcal{M}_{0,0}\left(\mathbb{P}^1, d\right)$ 作为 $\widetilde{G}$或 S^1- 表示。这些权计算（即引理 2.22 的证明）取自 [Hor+03，第 27.3–27.4] 节。为方便读者，我们在此仅列出这些计算。

证明。 不失一般性，我们考虑 S^1-等变版本，因为 $\widetilde{G}$-等变情形只是一个拉回。我们区分两个 S^1s，它们分别是 S^1_{source}，作用于 Σ （(S^1 12)中的中间）以及，作用于（(12)中的右侧）。

我们使用 [Hor+03，练习 27.2。3]（引理 2.23），它使我们能够根据等变线丛在 $0, \infty$ 处纤维的权，求出其上同调的权。注意， S^1_{target}-权$\mathcal{O}(-1)_1, \mathcal{O}(-1)_2$ 在$0, \infty$ 处的情况已在注记 2.16中讨论。

- 对于 $\mathrm{Ob}_d \simeq H^1(\Sigma, u^*N)$，由 Serre对偶，我们有

$$\mathrm{Ob}_d \simeq H^0\left(\Sigma, u^*(\mathcal{O}(-1)_1)^\vee \otimes \omega_\Sigma\right)^\vee \oplus H^0\left(\Sigma, u^*(\mathcal{O}(-1)_2)^\vee \otimes \omega_\Sigma\right)^\vee$$

  相关丛在 0处的 ∞ S^1_{source}-权如下：

	0	∞
$u^*\mathcal{O}(-1)_1^\vee$	1	$\chi^{\otimes d}$
$u^*\mathcal{O}(-1)_2^\vee$	$\chi^{\otimes(-d)}$	1
T_Σ	χ^{-1}	χ
ω_Σ	χ	χ^{-1}
$u^*\mathcal{O}(-1)_1^\vee \otimes \omega_\Sigma$	χ	$\chi^{\otimes(d-1)}$
$u^*\mathcal{O}(-1)_2^\vee \otimes \omega_\Sigma$	$\chi^{\otimes(1-d)}$	χ^{-1}

  注意，$\deg_\Sigma u^*(\mathcal{O}(-1)_1)^\vee \otimes \omega_\Sigma = \deg_\Sigma u^*(\mathcal{O}(-1)_2)^\vee \otimes \omega_\Sigma = d-2$。由引理 2.23，$H^0(\Sigma, u^*(\mathcal{O}(-1)_1)^\vee \otimes \omega_\Sigma)$ 是权 χ、$\chi^{\otimes 2}$、……、$\chi^{\otimes d-1}$ 的直和。
  空间 $H^0(\Sigma, u^*(\mathcal{O}(-1)_2)^\vee \otimes \omega_\Sigma)$ 是 χ^{-1}、$\chi^{\otimes(-2)}$、……、$\chi^{\otimes(1-d)}$ 的直和。由于 $x = e(\chi)$ 位于 $H^2(BS^1, E)$ 中，欧拉类 $e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)$ 为 $\prod_{i=1}^{d-1}[i]_E(x) \cdot [-i]_E(x)$。
- 对于 ν_F，存在一个正合序列

$$0 \to H^0(\Sigma, T_\Sigma) \to H^0\left(\Sigma, u^*T_{\mathbb{P}^1}\right) \to \nu_F \to \mathrm{Def}\,\Sigma = 0$$

  S^1_{source} 在 0处， ∞ 的权为

	0	∞
T_Σ	χ^{-1}	χ
$u^*T_{\mathbb{P}^1}$	$\chi^{\otimes(-d)}$	$\chi^{\otimes d}$

因此（根据引理 2.23），$H^0(\Sigma, T_\Sigma)$ 是 χ、1、χ^{-1} 的直和，而 $H^0(\Sigma, u^*T_{\mathbb{P}^1})$ 是 $\chi^{\otimes(-d)}$、$\chi^{\otimes(-d+1)}$、……、$\chi^{\otimes(d-1)}$、$\chi^{\otimes d}$ 的直和。因此，作为商的 ν_F 是 $\chi^{\otimes(-d)}$、$\chi^{\otimes(-d+1)}$、……、$\chi^{\otimes(-2)}$、$\chi^{\otimes 2}$、……、$\chi^{\otimes(d-1)}$、$\chi^{\otimes d}$ 的直和。$e_{\mathrm{eq}}(\nu_F)$ 的公式由此得出。

□

本证明中引用的引理如下。

引理 *2.23*（[*Hor*+03，习题 *27.2.3*]）。设 $\Sigma = \mathbb{P}^1$ 带有权为 *(1, 1)* 的 T^2-作用。若线丛$\mathcal{O}_\Sigma(l)$带有 T^2-作用，且在两个不动点 p_0、p_1处的权分别为 W_0、W_1，则对于 $l > 0$，T^2-作用在 $H^0(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma(l))$ 上的权为

$$\frac{iW_0 + (l-i)W_1}{l}$$

对于 $i = 0$、……、l。当 $l = 0$、$H^0(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma(l))$ 时，它是一维的，权为 $W_0 = W_1$；当 $l < 0$时，它为零。

注意，我们可以放心地将 T^2-作用替换为 S^1-作用，见定义 2.15。

2.2.2 情形 II：梳状分量。

对于梳状分量，回顾一下，h 是中心压缩子曲线的附着点数目，l 是每条边的次数。我们将带有标记点 b_1、b_2、……、b_h 的中心子曲线称为 Σ_0，并将与每条边对应的曲线称为 Σ_i、$i = 1$、2……、h。Σ_i 在 $b_i \in \Sigma_0$ 处附着于 Σ_0。我们用 S_h 表示 h 阶置换群。

梳状分支中稳定映射的定义域由中心曲线 $[\Sigma_0] \in \mathcal{M}_{0,h}$确定。序列 (9) 具有如下形式

$$1 \to (C_l)^h \to G \to S_h \to 1$$

其解释如下：

- $(C_l)^h$ 是定义域曲线的自同构群，它固定节点 b_i，对应于将 Σ_i 旋转 $2\pi/l$。
- 此外，S_h 在$\mathcal{M}_{0,h}$ 上还有整体作用，该作用通过置换标记点实现。

我们也记作 $G = (C_l)^h \rtimes S_h$。令 $M = \overline{\mathcal{M}_{0,h}}$，则梳状分支同构于

$$[M/G] = \left[\overline{\mathcal{M}}_{0,h} / \left((C_l)^h \rtimes S_h\right)\right]. \tag{13}$$

其中 G 作用于 $\overline{\mathcal{M}_{0,h}}$ 通过 $G \to S_h$。考虑到 $\mathbb{T} = T^2$ 或 $\mathbb{T} = S^1$-作用，我们有（定义 5.22）一个正合序列

$$1 \to G \to \widetilde{G} \to \mathbb{T} \to 1 \tag{14}$$

注记 2.24。对于 $\mathbb{T} = S^1$，令

$$A_l := \left\{(z_1, \ldots, z_h; t) \in (S^1)^h \times S^1 \mid z_1^l = \cdots = z_h^l = t\right\},$$

~，其乘法为逐坐标乘法。于是 $G = A_l \rtimes S_h$，其中 S_h 置换坐标 z_i，并且我们有一个分裂正合列

$$1 \to A_l \to \widetilde{G} \to S_h \to 1. \tag{15}$$

投影 $\widetilde{G} \to S^1$ 将 $(z_1, \dots, z_h; t; \sigma)$ 映射到 t；相应的 G 扩张~在 $l > 1$时不分裂。对 $\mathcal{M}_{0,h}$ 的作用可经由 $G \to S_h$分解。

类似地，对于 $\mathbb{T} = T^2$，令

$$A_l^{T^2} := \left\{(z_1, \dots, z_h; t_0, t_1) \in (S^1)^h \times T^2 \mid z_1^l = \cdots = z_h^l = t_1/t_0\right\}.$$

于是 $\widetilde{G} = A_l^{T^2} \rtimes S_h$，其到 T^2的投影由 (t_0, t_1) 给出。

引理 2.25. Ob_d 和 ν_F 的欧拉类如下

$$e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d) = e_{\mathrm{eq}}\left(N|_{p_\epsilon} \otimes V_{\mathrm{std}}\right) \cdot e_{\mathrm{eq}}\left(\bigoplus_{i=1}^{h} H^1\left(\Sigma_i, u|_{\Sigma_i}^* N\right)\right)$$

$$e_{\mathrm{eq}}(\nu_F) = e_{\mathrm{eq}}\left(\bigoplus_{j=1}^{h}(T_{b_j}\Sigma_j \otimes T_{b_j}\Sigma_0)\right) \cdot e_{\mathrm{eq}}\left(\bigoplus_{i=1}^{h} E_i\right) \cdot e_{\mathrm{eq}}(T_{p_\epsilon}\mathbb{P}^1).$$

这里，$V_{\mathrm{std}} = \left(\bigoplus_{i=1}^{h} \mathbb{C}b_i\right)/\mathbb{C}\mathbf{1}$ 是 S_h的标准表示，并且

$$E_i = \mathrm{coker}\left(H^0(\Sigma_i, T\Sigma_i(-b_i)) \to H^0\left(\Sigma_i, u_i^* T_{\mathbb{P}^1}(-b_i)\right)\right) \tag{16}$$

注记 2.26。这些类属于 $H^*\left((\mathcal{M}_{0,h})_{h\widetilde{G}}, \overline{E}\right)$。

证明。• 对于 Ob_d，由变形—阻碍正合列（11），我们有

$$H^0\left(\Sigma_0, u|_{\Sigma_0}^* N\right) \to \bigoplus_{i=1}^{h} N|_{u(b_i)} \to \mathrm{Ob}_d \to \bigoplus_{i=1}^{h} H^1\left(\Sigma_i, u|_{\Sigma_i}^* N\right) \to 0$$

第一项就是 $N|_{p_\epsilon}$，因为 Σ_0 被收缩了。第二项可以识别为 $N|_{p_\epsilon}$ 与 S_h 在 h 个附着点上的置换表示的张量积。因此，第二项对第一项之像取商为 $N|_{p_\epsilon} \otimes V_{\mathrm{std}}$。

• 对于 ν_F，使用变形正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\Sigma \longrightarrow H^0(\Sigma, u^* T_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow T_{[\Sigma]}\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^1, d) \longrightarrow \mathrm{Def}\,\Sigma \longrightarrow H^1(\Sigma, u^* T_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow 0.$$

法丛 ν_F 是 $T_{[\Sigma]}\mathcal{M}_0$ 的 T^2-移动部分，$_0(\mathbb{P}^1,\ d)$。

我们有以下计算：

（a）等变轨形 K-理论中的 coker（自同构群 $\Sigma \to H^0(\Sigma, u^*T_{\mathbb{P}^1})\big) = T_{p_\epsilon}\mathbb{P}^1 + \sum_{i=1}^h E_i$。事实上，考虑 $H^0(\Sigma, u^*T_{\mathbb{P}^1})$ 的正规化序列

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^h H^0(\Sigma_i, u_i T_{\mathbb{P}^1}(-b_i)) \to H^0(\Sigma, u^*T_{\mathbb{P}^1}) \to T_{p_\epsilon}\mathbb{P}^1 \to 0$$

以及

$$\mathrm{Aut}(\Sigma) = \bigoplus_{i=1}^h H^0(\Sigma_i, T_{\Sigma_i}(-b_i)).$$

我们得到正合序列：

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^h E_i \to \mathrm{coker}\left(\mathrm{Aut}\,\Sigma \to H^0(\Sigma, u^*T_{\mathbb{P}^1})\right) \to T_{p_\epsilon}\mathbb{P}^1.$$

(b) $H^1(\Sigma,\ u^*T_{\mathbb{P}^1}) = 0$。我们省略证明。

(c) Def(Σ) 的移动部分恰好是

$$\bigoplus_{j=1}^h \left(T^*_{b_j}\Sigma_j \otimes T^*_{b_j}\Sigma_0\right)^\vee$$

这里 b_j 是中心子曲线与 h 尾部之间的节点。它对应于节点的光滑化[11]。

因此，在 K-理论中，我们有

$$[\nu_F] = \left[\left(\oplus_{j=1}^h T_{b_j}\Sigma_j\right) \otimes T_{b_j}\Sigma_0\right] + [T_{p_\epsilon}\mathbb{P}^1] + \sum_{i=1}^h E_i.$$

而欧拉类是这些因子的乘积。 □

接下来我们研究非传递 HKR 扇区上的消失；其定义见注记 5.38(1)。

引理 2.27。 对于一个 *HKR* 扇区 $\alpha\colon\ \Lambda_r \to (C_l)^h \rtimes S_h$，类 $e^L_{\mathrm{HKR,eq}}(\mathrm{Ob}_d)$ 为零，除非 Λ_r通过 $\alpha\colon\ \Lambda_r \to (C_l)^h \rtimes S_h \twoheadrightarrow S_h$在标记点集合上传递作用。

证明。 利用正合序列（11），我们得到 Ob_d 的一个子丛

$$\mathrm{coker}\,\phi = \left(\left(\bigoplus_{i=1}^h \mathbb{C}b_i\right)/\mathbb{C}\mathbf{1}\right) \otimes N|_{p_\epsilon}$$

其中，$p_\epsilon \in \mathbb{P}^1$ 是中心子曲线所在的点。由于余核 ϕ 在 $\mathcal{M}_{0,h}$ 上是平凡的，我们可以将余核 ϕ 视为一个 G-表示，或者等价地视为 $[点/G]$上的丛，而余核 $\phi \to [M/G]$

[11]该 T^2- 不动部分是 Def(Σ) 的中心稳定 h 点曲线的变形空间。这与问题无关 to T^2作用 b 因为 T^2 仅作用于非收缩球面，即 h 尾部的分量。

~ ~由沿 $[M/G] \to [\text{点}/G]$的拉回给出。从现在起，我们将不再考虑 M，而只将余核 ϕ 视为一个表示。

回顾 e^L_{HKR} 的定义，eq。根据定义 5.59，我们首先将余核 ϕ 视为一个 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \times \Lambda_r$表示。我们得到它在 $H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha) \times B\Lambda_r \text{ 中的欧拉类，} E\right)$，然后将此类映射到 $H^*(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha)\ L(E))$，从而得到 $e^L_{\mathrm{HKR,\ eq}}$。

若 Λ_r 在标记点集合上的作用不是传递的，则定义 $W = \left(\bigoplus_{i=1}^h \mathbb{C}b_i/\mathbb{C}\mathbf{1}\right)^{\Lambda_r}$ 为被 Λ_r固定的向量。

由于 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 与 $\mathrm{im}\ \alpha$可交换，W是一个 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 表示。令 c为 Λ_r在 h 个标记点上的轨道数。$\bigoplus_{i=1}^h \mathbb{C}b_i$ 中的不变向量在每个轨道上均为常数。由于在 $\mathbb{C}$上取不变量是正合的，对 $\mathbb{C}\mathbf{1}$ 取商后得到 $\dim_{\mathbb{C}} W = c - 1$。非传递性意味着 $c \geq 2$，因此 W 非零。记 $\mathcal{O}(-1)_\epsilon$ 为 N中合适的 $\mathcal{O}(-1)$ 直和项，其 p_ϵ 纤维具有平凡的 $\mathbb{T}$ 权；由此得到一个 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \times \Lambda_r$ 子表示

$$W \otimes \mathcal{O}(-1)_\epsilon|_{p_\epsilon} \subset \mathrm{coker}\,\phi.$$

这个子表示也非零，因为与线丛作张量积会保留维数。我们考察 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)\Lambda_r$ 作用于它的情形：

根据定义，• Λ_r 在 $W \otimes \mathcal{O}(-1)_\epsilon|_{p_\epsilon}$ 上的作用是平凡的。

• $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 的单位连通分支 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)^\circ$ 的作用也是平凡的。这是因为映射 ~ $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \subset G \to \mathbb{T}$ 在李代数上是一个同构，并且我们选取了在 p_ϵ 处权为平凡的 $\mathcal{O}(-1)_\epsilon$ $\mathbb{T}$ 。

因此，设 $K = Z_{\widetilde{G}}(\alpha)/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)^\circ$ 是一个有限群，则 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \times \Lambda_r$-表示在 $W \otimes \mathcal{O}(-1)_\epsilon|_{p_\epsilon}$ 上是沿投影$Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \times \Lambda_r \to Z_{\widetilde{G}}(\Lambda_r) \to K$拉回的、定义在 $W \otimes \mathcal{O}(-1)_\epsilon|_{p_\epsilon}$ 上的 K-表示。考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccc} H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha) \times B\Lambda_r, E\right) & \longrightarrow & H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha), L(E)\right) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^*\left(BK \times B\Lambda_0, E\right) & \longrightarrow & H^*(BK, L(E)) \end{array}$$

Star在左下角为 $e(W \otimes \mathcal{O}(-1)_\epsilon|_{p_\epsilon}) \in H^*(BK, E)$ 时，有两个方向 :

- 向上再向右： $H^*(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha) \times B\Lambda_r, E)$ 中的像仍然是一个欧拉类， d
  由于 $W \otimes \mathcal{O}(-1)_\epsilon|_{p_\epsilon} \subset$余核 ϕ 是一个 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \times \Lambda_r$ 子表示， $e(W \otimes \mathcal{O}(-1)_\epsilon|_{p_\epsilon})$ 是 a
  $e(\mathrm{coker}\ \phi)$ 的因子，既出现在 $H^*(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha) \times B\Lambda_r,\ E)$ 中，也出现在 $H^*(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha)\ L(E))$ 中。
- 向右再向上：由引理 2.28 可知，在 $H^*(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha)\ L(E))$ 中为零。

结合这两点，可得 $e^L_{\mathrm{HKR,\ eq}}(\mathrm{coker}\ \phi)$ 为零。由于 $\mathrm{coker}\,\phi \subset \mathrm{Ob}_d$ 是一个 $\widetilde{G}$ 子表示，因此基于类似的理由，可得 $e^L_{\mathrm{HKR,\ eq}}(\mathrm{Ob}_d) = 0$ 。 □

证明过程中用到的引理之后还会派上用场。

引理 2.28. 设 $\phi\colon G \to K$ 是从紧李群 G 到有限群 K 的同态。设 V 是一个非零复 K-表示。那么欧拉类 $e(\phi^* V) \in H^*(BG, E)$ 在映射下变为 0，其值位于 $H^*(BG, L(E))$ 中。

证明。由于 K 是有限的，且 $L(E)$ 是有理的，对一点的限制诱导出一个同构 $H^*(BK,\ L(E)) \to L(E)^*$。$V$ 的限制是点上的一个非零平凡复向量丛，其欧拉类为零。因此，$e(V) = 0$ 属于 $H^*(BK,\ L(E))$。沿 $B\phi$ 拉回即可证明该断言。

□

~引理 2.25 右端的丛带有复杂的 $G = A_l \rtimes S_h$-作用：A_l 作用于各个尾部贡献，而 S_h 则对它们进行置换。然而，应用 HKR 特征标映射后，我们可以利用下文所述 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 的更简单结构来确定相关表示。

对于 $\alpha\colon \Lambda_r \to (C_l)^h \rtimes S_h$，令 $P \subset S_h$ 为其在 S_h 中的像。

引理 2.29。假设 α 在 h 个标记点上传递地作用。则：

(1) 我们有一个图表，其中每一行都是正合的

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & S^1 & \longrightarrow & Z_{\widetilde{G}}(\alpha) & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & A_l & \longrightarrow & \widetilde{G} & \longrightarrow & S_h & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

包含映射 $S^1 \hookrightarrow A_l$ 是 $z \mapsto (z, \ldots, z;\ z^l)$。

(2) 作用 $P \curvearrowright \{b_1, b_2, \ldots, b_h\}$ 是自由且传递的。特别地，$|P| = h$。

证明。(1) 由于 Λ_r 是交换的，P 包含于 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 的像中。由于 α 在 h 个点上传递地作用于，P 在 S_h 中的任何中心化子都必须包含于 P，这意味着 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 的像恰好是 P。

根据半直积的乘法法则 $A_l \rtimes S_h$，$Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \cap A_l$ 中的元素恰好是那些在置换作用下被 P 固定的元素（注记 2.24）。由于 P 传递地作用，我们有

$$Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \cap A_l = \{(z, \ldots, z; z^l) : z \in S^1\} \simeq S^1.$$

(2) P 的作用是传递的，这是我们的假设。令 $\sigma \in P$，并令 b_i 为一个标记点，假设 $\sigma(b_i) = b_i$。那么对于任意 $\tau \in P$，由于 P 是阿贝尔的，我们有 $\sigma(\tau(b_i)) = \tau(\sigma(b_i)) = \tau(b_i)$，即 $\tau(b_i)$ 是 σ 的一个不动点。由于 P 的作用是传递的，因此 $\sigma = \mathrm{id}$。这意味着 P 的作用是自由的。

□

在一个 HKR 扇区 α中，我们可以将引理2.25 中的类明确表示为表示的拉回。我们固定一些表示和向量丛的记号

记号 2.30。（1）如情形 I 中一样，我们将 S^1-表示 χ[12]视为一个 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$-表示，它是沿着 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \subset \widetilde{G} \to S^1$的拉回。

(2) 对于 $S^1 \subset Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$，我们用 V_i，$i \in \mathbb{Z}$ 表示权为 i 的 S^1-表示。

(3) 我们通过 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \to P \subset S_h$ 将 V_{std} 视为一个 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$-表示

注记 2.31。这里涉及两个 S^1：一个出现在 $\widetilde{G} \to S^1$ 中，作用于目标空间$\mathbb{P}^1$；另一个出现在 $S^1 \to Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 中，作用于尾球面 Σ_i，$1 \le i \le h$。我们用 χ^j 表示第一个 S^1 的表示，用 V_j 表示第二个 S^1 的表示。复合 $S^1 \to Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \subset \widetilde{G} \to S^1$ 的次数为 l，因为稳定映射在每个尾部 $\Sigma_i \to \mathbb{P}^1$ 上的次数均为 l（从而两个 S^1-作用相容）。

As i在情形 I 中，我们将 χ 视为一个 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$-表示，它是 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \subset \widetilde{G} \to S^1$ 的拉回，

引理 2.32. 限制到中心子曲线位于 p_ϵ 上的梳状分量的传递 *HKR* 扇区 $[\mathcal{M}_{0,h}^{\mathrm{im}\,\alpha}/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)]$，我们在 K-理论中有：

(1) $\mathrm{Ob}_d = V_{\mathrm{std}} \otimes (\chi^{-\epsilon} + \chi^{1-\epsilon}) + \mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)} \left(\bigoplus_{i=1}^{l-1} V_i \oplus V_{-i} \right)$.

(2) $\nu_F = \bigoplus_{j=1}^{h} \left(T_{b_j}\Sigma_j \otimes T_{b_j}\Sigma_0 \right) + \mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)} \left(\sum_{i=1}^{l-1} V_{\eta i} + \sum_{i=2}^{l} V_{-\eta i} \right) + \chi^{\eta}$, *where* $\eta = 2\epsilon - 1$.

(3) 该差满足

$$(\mathrm{Ob}_d - \nu_F)|_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,h}^{\mathrm{im}\,\alpha}/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)]} = V_{\mathrm{std}} + \mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)} (V_{-\eta}) - \bigoplus_{j=1}^{h} \left(T_{b_j}\Sigma_j \otimes T_{b_j}\Sigma_0 \right) - \chi - \chi^{-1}.$$

证明。只需确定引理 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 中每个丛上的表示 2.2 5.

(1) 第一项由 $N|_{p_\epsilon}$ 的权为 $\chi^{-\epsilon} \oplus \chi^{1-\epsilon}$这一事实推出。

对于第二项，根据引理 2.29 以及 $|P| = h$ 在 h 个标记点上正则作用，可写为

$$\bigoplus_{i=1}^{h} H^1(\Sigma_i, u_i^* N) \simeq \mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)} \left(H^1(\Sigma_1, u_1^* N) \right),$$

将 $H^1(\Sigma_1, u_1^* N)$ 视为一个 S^1-表示。其权计算与引理 2.22 证明中的障碍丛相同，即 $\sum_{i=1}^{l-1} (V_i + V_{-i})$。

(2) 第一项保持不变。

对于第二项，我们也有 $\bigoplus_{i=1}^{h} E_i = \mathrm{Ind}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)\, S^1}(E_1)$，其中 E_1 定义见（16）。利用 z 在 Σ_1 上的坐标，以及 w 在 $\mathbb{P}^1$ 上的坐标，其中 $w = z^l$，我们断言

- $H^0(\Sigma_1, T\Sigma_1(-b_1))$ 的秩为 2，生成元为 $z\partial_z$，$z^2\partial_z$。其 S^1-权分别为 V_0，$V_{-\eta}$。

[12]回想一下，χ 是乘以 t^{-1}；参见注记2.16。

- $H^0(\Sigma_1,\ u_1^*T_{\mathbb{P}^1}(-b_1))$ 的秩为 $2l$，生成元为 $z\partial_w,\ z^2\partial_w$、……、$z^{2l}\partial_w$。$z^k\partial_w$ 的 S^1-权为 $V_{\eta(l-k)}$。
- 映射 du_1 将……

$$z\partial_z \mapsto l\cdot z^l\partial_w$$
$$z^2\partial_z \mapsto l\cdot z^{l+1}\partial_w$$

因此，在 E_1 中只有满足 $j\in\{-l,-l+1\ldots,-2\}\cup\{1,2,\ldots,l-1\}$ 的权 $V_{\eta j}$。第二项随即得到。

最后一项 $T_{p_\epsilon}\mathbb{P}^1$ 的权为 χ^η。

(3) 用 (1) 减去 (2)，直接得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ob}_d-\nu_F)|_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,h}^{\mathrm{im}\,\alpha}/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)]} &= V_{\mathrm{std}}\otimes(\chi^{-\epsilon}+\chi^{1-\epsilon})-\bigoplus_{j=1}^{h}\left(T_{b_j}\Sigma_j\otimes T_{b_j}\Sigma_0\right)\\ &\quad+\mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)}\left(V_{-\eta}-V_{-l\cdot\eta}\right)-\chi^\eta.\end{aligned}$$

我们断言 $\mathrm{Ind}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)\,S^1}(V_{-l\cdot\eta})=\chi^{-\eta}(1+V_{\mathrm{std}})$。利用投影公式和 $\mathrm{Res}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)\,S^1}(\chi)=V_l$：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)}(V_{-l\cdot\eta})\otimes\chi^\eta &\simeq \mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)}\left(V_{-l\cdot\eta}\otimes\mathrm{Res}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)}(\chi^\eta)\right)\\ &\simeq \mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)}\left(V_{-l\cdot\eta}\otimes V_{l\cdot\eta}\right)\\ &\simeq \mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)}(1)\\ &\simeq 1+V_{\mathrm{std}}.\end{aligned}$$

将其代入原始差 ($\eta=2\epsilon-1$)：

$$V_{\mathrm{std}}(\chi^{-\epsilon}+\chi^{1-\epsilon}-\chi^{1-2\epsilon})-\bigoplus_{j=1}^{h}\left(T_{b_j}\Sigma_j\otimes T_{b_j}\Sigma_0\right)+\mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)}\left(V_{-\eta}\right)-\chi^\eta-\chi^{-\eta}$$

对于 $\epsilon=0$，1, $\chi^{-\epsilon}+\chi^{1-\epsilon}-\chi^{1-2\epsilon}=1$。

□

注记 2.33。考虑丛 $T_{b_1}\Sigma_1\otimes T_{b_1}\Sigma_0\in K([\mathcal{M}_{0,h}/S^1])$，则

$$\bigoplus_{j=1}^{h}\left(T_{b_j}\Sigma_j\otimes T_{b_j}\Sigma_0\right)\simeq\left([\overline{\mathcal{M}}_{0,h}^{\mathrm{im}\,\alpha}/S^1]\to[\overline{\mathcal{M}}_{0,h}^{\mathrm{im}\,\alpha}/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)]\right)_!\left(T_{b_1}\Sigma_1\otimes T_{b_1}\Sigma_0\right)$$

是一个 K 理论推前。这可以视为一种“扭曲 Ind”。

3 计算

在本节中，设 E 是一个 HKR 理论，其 p系数环 E^*无挠。我们将计算 X_{loc} 的 Gromov–Witten 不变量，系数取自 E。这涵盖了 Morava$K$理论的系数情形，因为可以选取适当的 E，使其存在一个来自 $E \to K(n)$ 的态射 $K(n)$，这样， E 中的结果就是 p模 $p \geq 3$ (注记5.12)。

我们将 S^1 的等变 Gromov–Witten 不变量记为 $X_{\mathrm{loc}}\, I_{d,\ \mathrm{eq}} \in E^*[\![u]\!]$，并将非等变的不变量记为 $I_d \in E^0$，它也是 $I_{d,\ \mathrm{eq}}$ 的常数项。诸如 $x +_E y$ 和 $[n]x$ 之类的概念，都是利用 E 的一个固定复定向的形式群律定义的。

3.1 将一般的 d 化为 p 次幂

取有理上同调系数时， X_{loc} 的 Gromov–Witten 不变量为 $1/d^3$。我们证明，取 E 中的系数时也会出现这样的因子，但仅出现在 p-互素部分中。确切地说，我们证明：

命题 3.1。 假设 E^* 没有 p-挠元。设 $d = p^a m$ 且 $p \nmid m$。则

$$I_{p^a m} = \frac{1}{m^3} I_{p^a}.$$

注意， m 在 E^0 中是可逆的，因此$\frac{1}{m^3}$ 有定义。

实际上，我们证明的是它的 S^1-等变版本。

命题 3.2。 假设 E^* 没有 p-挠。令 d、 m 为正整数，并假设$p \nmid m$。那么， X_{loc} 的次数为 d 和次数为 $m \cdot d$ S^1的等变 *Gromov–Witten* 不变量满足以下关系

$$Q(u) \cdot I_{md,\mathrm{eq}}(u) = \frac{1}{m} \cdot Q\left(\left[\frac{1}{m}\right] u\right) \cdot I_{d,\mathrm{eq}}\left(\left[\frac{1}{m}\right] u\right)$$

其中 $Q(u) := u \cdot [-1]u$。

取 u^2 两边的系数可得命题 3.1。

考虑目标空间 $\mathbb{P}^1$、 φ_m上的如下映射： $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$， $w \mapsto w^m$ 其诱导出一个态射

$$\varphi_m \colon \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^1, d) \to \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^1, md) \tag{17}$$

通过后复合得到。 φ_m 关于群同态 $S^1 \xrightarrow{t \mapsto t^m} S^1$是等变的。 φ_m将 S^1-不动分支中次数为 d 的点映射到次数为 md的不动分支中。事实上，

- 它将唯一的边分量映射到唯一的边分量。
- 对于标记点数量为某个幂的梳状分量 p （引理 2.20），由于d 和 md 能被 p的同一个幂整除，因此这类梳状分量的数量相同，比较它们时 φ_m。

我们考察梳状分量上的 φ_m。非等变地，这些分量为 $[M/G]$ 和 $[M'/G']$，如（13）所示，其中

$$M = M' = \overline{\mathcal{M}}_{0,h}, \qquad G = (C_l)^h \rtimes S_h, \qquad G' = (C_{lm})^h \rtimes S_h.$$

它们的 S^1商叠分别为 $[M/\widetilde{G}]$ 和 $[M'/\widetilde{G'}]$，其中

$$\widetilde{G} = A_l \rtimes S_h, \qquad \widetilde{G'} = A_{lm} \rtimes S_h,$$

如（15）中所示。这些梳状分量上的映射 φ_m 描述如下。

- 映射 $M \to M'$ 在 $\mathcal{M}_{0上为h}$恒等映射，因为后复合不会改变收缩的中心曲线。
- 同态 $G \to G'$ 由包含映射 $C_l \hookrightarrow C_{lm}$诱导。$\sim \quad \sim$
- 同态 $G \to G'$ 适合以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A_l & \longrightarrow & \widetilde{G} & \longrightarrow & S_h & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 1 & \longrightarrow & A_{lm} & \longrightarrow & \widetilde{G'} & \longrightarrow & S_h & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

  左侧的竖直箭头是

$$(z_1, \ldots, z_h; t) \longmapsto (z_1, \ldots, z_h; t^m).$$

  参见注记 2.24。

因此，φ_m 在这些梳状分量的粗模空间之间诱导出一个同胚。下面的引理给出了更强的比较。

引理 3.3. 假设 $p \nmid m$，则在 (17)

(1) φ_m 在 *HKR* 扇区的共轭类之间诱导出一个双射

$$\mathrm{Hom}(\Lambda_r, G)/G \to \mathrm{Hom}(\Lambda_r, G')/G'$$

(2) 对于 *HKR* 扇区 $\alpha\colon \Lambda_r \to G$，我们用 α 本身表示 *HKR* 扇区 $(G \to G') \circ \alpha$。若 α传递地作用于 h 标记点，则自然同态

$$Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \to Z_{\widetilde{G'}}(\alpha)$$

是一个同构。

证明。(1) 我们需要用到群论中的一个事实，即引理 3.4，稍后会引用。记 $l = p^b l_0$其中 $p \nmid l_0$，并定义 $H = (C_{p^b})^h \rtimes S_h$。存在两个正合序列

$$1 \to (C_{l_0})^h \to G \to H \to 1$$

$$1 \to (C_{l_0 m})^h \to G' \to H \to 1.$$

根据引理 3.4，投影 $G \to H$ 和 $G' \to H$ 在共轭意义下诱导出 HKR 扇区之间的双射。因此，$G \hookrightarrow G'$ 也在共轭意义下诱导出 HKR 扇区之间的双射。

(2) 根据引理 2.29，我们有

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & S^1 & \longrightarrow & Z_{\widetilde{G}}(\alpha) & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 1 & \longrightarrow & S^1 & \longrightarrow & Z_{\widetilde{G'}}(\alpha') & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

注意，左侧的竖直箭头是恒等映射，因为在引理 2.29 中，包含映射 $S^1 \to A_l$是

$$z \longmapsto (z, \dots, z; z^l),$$

且映射 $A_l \to A_{lm}$ 是

$$(z_1, \dots, z_h; t) \longmapsto (z_1, \dots, z_h; t^m).$$

因此，中间的映射也是同构。

□

引理 3.4. 设 $K \lhd G$ 是一个正规子群，且设 $H = G/K$。若 $p \nmid |K|$，则投影诱导出 *HKR* 扇区之间的一个双射：

$$\mathrm{Hom}(\Lambda_r, G)/G \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(\Lambda_r, H)/H.$$

这是 Schur–Zassenhaus 定理的推论（例如，参见 [Rot95，定理 7.41 和 7.42]）：

有限群 G的正规 Hall 子群 K（意为 $|K|$ 与 $|G/K|$ 互素）有一个补群；若 K 或 G/K 可解，则任意两个补群都共轭。

共轭意义下的补群与投影 $G \twoheadrightarrow G/K$ 的截面一一对应，因此该定理意味着共轭意义下存在唯一的截面。

证明　引理 *3.4*. 该引理可由以下方式根据 Schur–Zassenhaus 定理推出 ay.

- 满射性：给定一个同态 $\alpha\colon \Lambda_r \to H$，我们将正合序列 $1 \to K \to G \to H \to 1$ 拉回到

$$1 \to K \to \overline{G} \to \Lambda_r \to 1. \tag{18}$$

于是 $|K|$ 与 $|\Lambda_r|$ 互素，因为 $|\Lambda_r|$ 是 p的幂，而 Λ_r 是阿贝尔群，因此是可解群。将 Schur–Zassenhaus 定理应用于 (18)，得到一个截面 $\alpha\colon \Lambda_r \to G$。这证明了 HKR 扇区的满射性。

- 单射性：假设存在两个 HKR 扇区 α_1，$\alpha_2\colon \Lambda_r \to G$ 它们与投影 $G \to G/K$（记为 α_1，$\alpha_2\colon \Lambda_r \to H$）复合后彼此共轭。不失一般性，我们可以假设 $\alpha_1 = \alpha_2$。那么它们给出（18）中的两个截面，并且根据 Schur–Zassenhaus 定理的第二句话，它们彼此共轭。

□

命题 3.2 的证明。 经过等变局部化和 HKR 特征标，我们将 Gromov–Witten 不变量化归约为若干等变推前映射之和（命题5.60 和5.65）

$$I^{\mathrm{comb}}_{d,\mathrm{eq},\alpha} := \left(\left[(\overline{\mathcal{M}}_{0,h})^{\mathrm{im}\,\alpha} / Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \right] \to [\mathrm{pt}/S^1] \right)^{L(E)}_{!,\mathrm{eq}} \left(\chi_{n,p;\mathrm{eq}} \left(\frac{e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)}{e_{\mathrm{eq}}(\nu_F)} \right) \frac{1}{e^L_{\mathrm{HKR},\mathrm{eq}}(\nu_{\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/\overline{\mathcal{M}}_{0,h}})} \right)$$

这里先将特征值限制到 α-扇区，再应用推前。根据引理 3.3，φ_m 诱导出 $\left[(\mathcal{M}_{0,\ h})^{\mathrm{im}\,\alpha} / Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \right]$ 的同构，其中次数为 d 且 md。

我们比较以下两个虚向量丛 $\mathrm{Ob}^d - \nu_F - \nu_{\mathcal{M}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,\ h}/\mathcal{M}_{0,\ h}}$，其次数为 d 且 md 定义在同一个 $\left[\mathcal{M}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h} / Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \right]$ 上。最后几项 $\nu_{\mathcal{M}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,\ h}/\mathcal{M}_{0,\ h}}$ 是相同的。根据引理 2.32，我们有

$$(\mathrm{Ob}_d - \nu_F)|_{[\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)]} = V_{\mathrm{std}} + \mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)}(V_{-\eta}) - \bigoplus_{j=1}^{h} \left(T_{b_j}\Sigma_j \otimes T_{b_j}\Sigma_0 \right) - \chi - \chi^{-1}.$$

$$(\mathrm{Ob}_{md} - \nu_F)|_{[\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/Z_{\widetilde{G}'}(\alpha)]} = V_{\mathrm{std}} + \mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}'}(\alpha)}(V_{-\eta}) - \bigoplus_{j=1}^{h} \left(T_{b_j}\Sigma_j \otimes T_{b_j}\Sigma_0 \right) - \chi' - (\chi')^{-1}.$$

其中 χ，χ' 是满足 $\varphi_m^*(\chi') = \chi^{\otimes m}$ 的 S^1-特征。我们发现

$$\begin{aligned} &\chi + \chi^{-1} + (\mathrm{Ob}_d - \nu_F - \nu_{\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/\overline{\mathcal{M}}_{0,h}})|_{[\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)]} \\ &\quad = \chi' + (\chi')^{-1} + (\mathrm{Ob}_{md} - \nu_F - \nu_{\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/\overline{\mathcal{M}}_{0,h}})|_{[\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/Z_{\widetilde{G}'}(\alpha)]} \end{aligned}$$

等变推前的比较图表为

$$\begin{array}{ccc} [\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)] & \xrightarrow{\mathrm{id}} & [\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/Z_{\widetilde{G}'}(\alpha)] \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_d} & & {\scriptstyle \pi_{md}}\downarrow \\ [\mathrm{pt}/S^1] & \xrightarrow{\varphi_m :\, t \mapsto t^m} & [\mathrm{pt}/S^1] \end{array}$$

令 $u = e(\chi)$ $u' = e(\chi')$。则

$$\begin{aligned} Q(u') \cdot I^{\mathrm{comb}}_{md,\mathrm{eq},\alpha}(u') &= (\pi_{md})_{!,\mathrm{eq}} \left(e^L_{\mathrm{HKR},\mathrm{eq}} \left(\chi' + (\chi')^{-1} + (\mathrm{Ob}_{md} - \nu_F - \nu_{\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/\overline{\mathcal{M}}_{0,h}}) \right) \right) \\ &= (\varphi_m)_! \circ (\pi_d)_{!,\mathrm{eq}} \left(e^L_{\mathrm{HKR},\mathrm{eq}} \left(\chi + \chi^{-1} + (\mathrm{Ob}_d - \nu_F - \nu_{\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}/\overline{\mathcal{M}}_{0,h}}) \right) \right) \\ &= (\varphi_m)_! \left(Q(u) \cdot I^{\mathrm{comb}}_{d,\mathrm{eq},\alpha}(u) \right) \end{aligned}$$

对于 $\varphi_m\colon\ BS^1 \to BS^1$，由于 $L(E)$ 是有理的，我们有

$$(\varphi_m)_! \circ \varphi_m^*(f(u')) = \frac{1}{m} \cdot f(u')$$

But $\varphi_m^*(f(u')) = f([m]_E u)$，结合 $p \nmid m$（因此我们可以定义 $\left[\frac{1}{m}\right] u \in E^*[\![u]\!]$），可得公式

$$(\varphi_m)_! f(u) = \frac{1}{m} \cdot f\left(\left[\frac{1}{m} \right] u' \right)$$

因此

$$Q(u')\cdot I^{\mathrm{comb}}_{md,\mathrm{eq},\alpha}(u')=\frac{1}{m}\cdot Q\left(\left[\frac{1}{m}\right]u'\right)I^{\mathrm{comb}}_{d,\mathrm{eq},\alpha}\left(\left[\frac{1}{m}\right]u'\right)$$

对所有 α 以及所有分量求和，便得到 $L(E)^*((u))$中的所述恒等式。由于 E^* 是 p-无挠的，且 $L(E)^*$ 在 $E^*[1/p]$ [HKR00上忠实平坦，根据推论 6.8(ii)], 映射 $E^*[\![u]\!]\to L(E)^*((u))$是单射。因此，该恒等式在 $E^*[\![u]\!]$ 中成立。 □

3.2 p-主计算（假设 $[-1]x=-x$）

根据命题3.1，本小节中我们假设 $d=p^a$ 对 $a\in\mathbb{N}$成立。 E 是一个高度为 n的 HKR 理论。

定义 3.5。对于 $d=p^a$

(1) 定义

$$A_{d,u}:=E^*[\![x,u]\!]/([d]_E x-_E u)=E^*[\![x,u]\!]/([d]_E x-u)$$

$A_{d,\ u}$ 是一个 $E^*[\![u]\!]$-代数，并且作为 $E^*[\![u]\!]$-模是自由的，秩为 $d^n=p^{an}$ 。

(2) 对于表示元素 $[f]\in A_{d,u}$ 的幂级数 $f(x)\in E^*[\![x]\!]$，我们定义

$$\tau_{d,u}([f]):=\mathrm{Res}_x\left(\frac{f(x)\omega(x)}{[d]_E x-_E u}\right)\in E^*[\![u]\!].$$

这里 $\omega\in E^*[\![x]\!]$ 是由引理 5.8刻画的 1-形式。

于是我们的主要结果是

定理 3.6。 假设 E^* 没有 p-扭结，且 E 上的复定向满足$[-1]_E x=-x$。那么， X_{loc} 的次数为 p^a 的等变 *Gromov–Witten* 不变量为

$$I_{p^a,\mathrm{eq}}=\frac{\tau_{p^a,u}(x^2)-\tau_{p^a,0}(x^2)}{u^2}\tag{19}$$

特别地，

$$I_{p^a}=[u^2]\left(\tau_{p^a,u}(x^2)\right).\tag{20}$$

底层的 S^1-不动分支贡献如下。

命题 3.7。 在定理 *3.6*的假设下，以下公式成立。

(1) 单边分量的贡献为

$$I^{\mathrm{single}}_{p^a,\mathrm{eq}}=\frac{\tau_{p^a,u}(x^2)}{u^2}\in E^*((u)).$$

(2) 对于 $1\le b\le a$，令 $I^{\mathrm{comb}\ b}_{p^a\ ,,\mathrm{eq}}$ 表示来自两个梳状分量的相应贡献，其中它们的[13] 尾部次数为 $l=p^{a-b}$。设

$$\Theta_b=\tau_{p^b,0}(x^2),\quad \Theta_0=0.$$

[13]对于一个 梳状图，有两个这种形状的分量，一个的中心曲线位于 p_0 之上，另一个 er 其中心 代数曲线位于 p_1 上方。

Then

$$I^{\mathrm{comb},b}_{p^a,\mathrm{eq}} = \frac{p^{(n-1)(a-b)}}{u^2}\left(-\Theta_b + p^{n-1}\Theta_{b-1}\right).$$

*Prov*利用定理 *3.6* 命题 *3.7*。 梳状图贡献之和构成一个望远镜

$$\sum_{b=1}^{a} \frac{p^{(n-1)(a-b)}}{u^2}\left(-\Theta_b + p^{n-1}\Theta_{b-1}\right) = -\frac{\Theta_a}{u^2} + \frac{p^{a(n-1)}}{u^2}\Theta_0 = -\frac{\tau_{p^a,0}(x^2)}{u^2}.$$

将此结果与单边贡献结合，经过欧拉局部化即可得到所述公式。由于 $I_{p^a,\ \mathrm{eq}} \in E^*[\![u]\!]$，乘以 u^2 并利用欧拉局部化的单射性可得

$$u^2 I_{p^a,\mathrm{eq}} = \tau_{p^a,u}(x^2) - \tau_{p^a,0}(x^2) \quad \text{in } E^*[\![u]\!].$$

因此，分子可被 u^2 整除；比较 u^2 的系数可得 $I_{p^a} = [u^2]\tau_{p^a,\ u}(x^2)$。

□

本小节余下部分将用于证明命题 3.7。

3.2.1 单边分量计算

关于这个分量，我们有如下认识。

- 轨形结构为 [点/C_{p^a}]，其 S^1-作用由以下方式描述（按定义 5.22 的含义）

  $$1 \to C_{p^a} \to S^1 \xrightarrow[t\mapsto t^{p^a}]{\pi} S^1 \to 1.$$

  这是（12）的下一行。我们使用 S^1_{source} 和 S^1_{target} 分别表示中间和右侧的S^1。

- 等变推前$\pi_{!\ ,\ \mathrm{eq}}$： $H^*(BS^1_{\text{源}}E) \to H^*(BS^1_{\text{目标空间}}E)$ 在命题3.8中计算。证明留待后文。

- Ob 的等变欧拉类$_d - \nu_F$ 由引理2.22给出

  $$e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d - \nu_F) = \frac{x \cdot [-1]x}{[d]x \cdot [-d]x}$$

  根据假设 $[-1]x = -x$，这也等于 $\frac{x^2}{([d]x)^2}$。

命题 *3.7(1)* 的证明。 由于 $\pi^*(u) = [d]_E x$，投影公式给出

$$\begin{aligned} I^{\mathrm{single}}_{d,\mathrm{eq}} &= \pi_{!,\mathrm{eq}}\left(\frac{x^2}{(\pi^*u)^2}\right) \\ &= \frac{1}{u^2}\pi_{!,\mathrm{eq}}(x^2) \\ &= \frac{1}{u^2}\operatorname{Res}_x\left(\frac{x^2\omega(x)}{[d]_E x -_E u}\right) \\ &= \frac{\tau_{d,u}(x^2)}{u^2}, \end{aligned}$$

其中第三个等式将命题 3.8 应用于 x^2。 □

现在我们给出技术性计算。下述公式是 [Str00命题 9 的一个等变化推广。2]。

命题 3.8。 假设 E^* 没有 p-挠元。令 $f(x) \in E^*[\![x]\!]$ 表示$H^*\left(M_{h\widetilde{G}}, E\right)$中的一个元素。那么，等变推前映射可由下式计算：

$$\pi_{!,\mathrm{eq}}(f(x)) = \mathrm{Res}_x\left(\frac{f(x)\omega(x)}{[p^a]_E x -_E u}\right) \in E^*[\![u]\!] \simeq H^*(BS^1_{\mathrm{target}}, E).$$

（回顾Res 见定义 5.10。）

证明。 我们可以在应用等变 HKR 特征映射后验证该公式。取足够大的 r。HKR 理论中的类为 α: $\Lambda_r \to C_{p^a}$. 由于 C_{p^a} 是阿贝尔群，共轭作用固定每个 α，因此总共有 p^{an} 个类。

$$\mathrm{Fix}_{n,p} M = \bigsqcup_{\alpha \in \mathrm{Hom}(\Lambda_r, C_{p^a})} \mathrm{pt}$$

带有平凡的 $\widetilde{G} = S^1$-作用。等变 n-重 p-惯性栈为

$$\bigsqcup_{\alpha \in \mathrm{Hom}(\Lambda_r, C_{p^a})} [\mathrm{pt}/S^1].$$

每个分量 α 上的泛映射（定义 5.58）为 $BS^1 \times B\Lambda_r \to BS^1$，由群同态 $S^1 \times \Lambda_r \xrightarrow{\mathrm{id} \times \iota} S^1 \times S^1$ 乘法$\longrightarrow S^1$诱导。记 $H^*(BS^1, E) = E^*[\![x]\!]$，并令 $a_\alpha \in H^*(B\Lambda_r, E)$ 为 x 在 $B\Lambda_r \xrightarrow{\alpha} BC_{p^a} \to BS^1$下的拉回。我们也可以通过映射 $H^*(B\Lambda_r, E) \to L(E)^*$，将 a_α 视为 $L(E)^*$ 中的一个元素，并仍将这个像记为 a_α。根据引理 5.42，它们恰好是 $[p^a]x = 0$ 在 $L(E)^*$ 中的根。

我们沿着图表（43）进行追踪，以比较两侧的像：

（1）首先，我们沿着此方向进行追踪：

$$\begin{array}{ccc} H^*(M_{h\widetilde{G}}, E) & \xrightarrow{\chi_{n,p;\mathrm{eq}}} & H^*(\mathrm{Fix}_{n,p} M_{h\widetilde{G}}, L(E)) \\ & & \downarrow \pi_{!,\mathrm{eq}}^{L(E)} \\ & & H^*(B\mathbb{T}, L(E)) \end{array}$$

HKR 特征标为

$$f(x) \in E^*[\![x]\!] = H^*(M_{h\widetilde{G}}, E) \mapsto \oplus_{\alpha \in \mathrm{Hom}(\Lambda_r, C_{p^a})} f(x +_E a_\alpha) \in H^*(\mathrm{Fix}_{n,p} M_{h\widetilde{G}}, L(E)).$$

现在我们计算 $L(E)$-推前

$$H^*\left(\mathrm{Fix}_{n,p} M_{h\widetilde{G}}, L(E)\right) \to H^*(B\mathbb{T}, L(E))$$

在每个分量 α上，这是沿着 $\pi\colon\ B\widetilde{G}\to B\mathbb{T},\ z\mapsto z^{p^a}$进行的推前。由于 $L(E)$ 具有有理系数，因此存在一个 $y\in H^*(B\mathbb{T},\ L(E))$ 使得 $[p^a]y=u$。因此 $f(x+_E a_\alpha)=\pi^*f(y+_E a_\alpha)$。根据推论 5.36，我们有

$$\pi^{L(E)}_{!,\mathrm{eq}}(f(x+_E a_\alpha))=f(y+_E a_\alpha)\pi^{L(E)}_{!,\mathrm{eq}}(1)=\frac{1}{p^a}f(y+_E a_\alpha).$$

这里 $\pi^{L(E)}_!$，等式 (1)$=\frac{1}{p^a}$ 成立是因为 $L(E)$ 是有理的。综上，我们得到

$$\sum_{\alpha\in\mathrm{Hom}(\Lambda_r,C_{p^a})}\frac{1}{p^a}f(y+_E a_\alpha)\in H^*(B\mathbb{T},L(E)). \tag{21}$$

(2) 另一方面，我们考虑

$$\mathrm{Res}_x\left(\frac{f(x)\omega(x)}{[p^a]_E x-_E u}\right)\in E^*[\![u]\!]$$

在 $H^*(B\mathbb{T},\ L(E))=L(E)^*[\![u]\!]$中的像。根据 $u=[p^a]y$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_x\left(\frac{f(x)\omega(x)}{[p^a]x-_E u}\right)&=\mathrm{Res}_x\left(\frac{f(x)\omega(x)}{[p^a]x-_E[p^a]y}\right)\\&=_{z=x-_E y}\mathrm{Res}_z\left(\frac{f(z+_E y)\omega(z)}{[p^a]z}\right)\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为 ω 在变量替换 $z=x-_E y$下保持不变。根据 $L(E)$ 的构造，a_α 是 $L(E)$ 中 $[p^a]z=0$ 的根，并且它们都是根。此外，根据构造，$a_\alpha-a_\beta$是可逆的。我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_z\left(\frac{f(z+_E y)\omega(z)}{[p^a]z}\right)&=\mathrm{Tr}_{L(E)^*\otimes_{E^*}(E^*[\![y,z]\!]/([p^a]z))}\left(\frac{f(z+_E y)w(z)}{([p^a]z)'}\right)\\&=\sum_\alpha\frac{f(a_\alpha+_E y)w(a_\alpha)}{([p^a]z)'|_{z=a_\alpha}}.\end{aligned} \tag{22}$$

第一个等式由引理 5.11 得出，第二个等式成立是因为 $[p^a]z=0$ 有互异根。

比较 (21) 和 (22) 后，我们还需证明

$$\frac{w(a_\alpha)}{([p^a]x)'|_{x=a_\alpha}}=\frac{1}{p^a}$$

根据引理 5.8

$$w([p^a]x)([p^a]x)'dx=w([p^a]x)d([p^a]x)=p^a w(x)dx$$

令 $x=a_\alpha$，我们得到 $p^a w(a_\alpha)=([p^a]x)'|_{x=a_\alpha}$，因为 $[p^a]a_\alpha=0$ 和 $w(0)=1$。因此，两边在 $H^*(BS^1_{\mathrm{target}},L(E))$ 中具有相同的像。由于 E^* 没有 p-挠元，并且 $L(E)^*$ 在 $E^*[1/p]$ [HKR00 上是忠实平坦的，根据推论 6.8(ii)],该映射

$$E^*[\![u]\!]\longrightarrow L(E)^*[\![u]\!]$$

是单射。因此两边在 $E^*[\![u]\!]$ 中相等。 □

注记 3.9。令 $d=p^a$。[Str00，命题 9。2] 给出了 ϵ 的非等变推前 $[\text{点}/C_d]\to\text{点}$ 为

$$f(x)\mapsto \operatorname{Res}_x\left(\frac{f(x)\omega(x)}{[p^a]_E x}\right)\in E^*. \tag{23}$$

Let

$$\pi\colon [\mathrm{pt}/S^1_{\mathrm{source}}]\longrightarrow [\mathrm{pt}/S^1_{\mathrm{target}}]$$

由 $t\mapsto t^d$ 诱导。这是与 $[\mathrm{pt}/C_d]$ 上的 S^1_{target} 作用相关联的等变投影。沿 $S^1_{\mathrm{source}}\to S^1_{\mathrm{target}}$ 拉回此作用后，定义扩张便分裂，从而得到如下 2-笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc}
[\mathrm{pt}/(S^1_{\mathrm{source}}\times C_d)] & \xrightarrow{m} & [\mathrm{pt}/S^1_{\mathrm{source}}] \\
{\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\
[\mathrm{pt}/S^1_{\mathrm{source}}] & \xrightarrow[\pi]{} & [\mathrm{pt}/S^1_{\mathrm{target}}]
\end{array}$$

其中 m 由 $(t,\zeta)\mapsto t\zeta$ 诱导，因此 $m^*(x)=x+_E y$。

根据定义 5.56 中等变推前的换群自然性（该性质继承自横截基变换（命题 5.35(2)），可得

$$\pi^*\circ\pi_{!,\mathrm{eq}}=(\pi_1)_{!,\mathrm{eq}}\circ m^*.$$

左侧竖直映射对应于 $[\mathrm{pt}/C_d]$ 上的平凡 S^1_{source} 作用，因此其推前作用于 C_d 因子中的 ϵ。因此，

$$\begin{aligned}
\pi^*(\pi_{!,\mathrm{eq}}(f)) &= \operatorname{Res}_y \frac{f(x+_E y)\omega(y)}{[d]_E y} \\
&= \operatorname{Res}_z \frac{f(z)\omega(z)}{[d]_E z-_E[d]_E x},
\end{aligned}$$

利用 $z=x+_E y$ 和 ω 的平移不变性。

由于 $\pi^*(u)=[d]_E x$，这就是所述公式的拉回。此前已证明 $A_{d,u}\cong E^*[\![x]\!]$ 在 $E^*[\![u]\!]$ 上有限自由，因此 π^* 是单射，证明完毕。

3.2.2 梳状分支计算

回忆一下，$\Lambda_r=(\mathbb{Z}/p^r)^n$ 对于充分大的 r（它只依赖于 a）。记 $h=p^b$，$l=p^{a-b}$。$M=\mathcal{M}_{0,h}$，$G=(C_l)^h\rtimes S_h$ 以及 $\widetilde{G}=A_l\rtimes S_h$ 如（13）和（14）中所示。

由引理 2.27，只有传递 HKR 扇区 $\alpha\colon \Lambda_r\to G$ 才可能有非零贡献。这类扇区分类如下。

引理 3.10。 以下两者之间存在一一对应关系：

- 传递扇区 α 的共轭类：$\Lambda_r\to(C_l)^h\rtimes S_h$。
- 一个子群 $H\subset\Lambda_r$，满足 $[\Lambda_r:H]=h$，以及一个群同态 $\phi\colon H\to C_l$。

此外，对于充分大的 r （仅依赖于 h、l），任意一个这样的固定 H 恰好有 l^n 个同态 ϕ。

我们使用以下事实。设 E 是 h 个自由右 C_l-集合的并。则存在一个（非规范的）同构 $\mathrm{Aut}_{C_l}(E) \simeq (C_l)^h \rtimes S_h$。同态 $\alpha\colon \Lambda_r \to (C_l)^h \rtimes S_h$ 是 E 上与 C_l-作用相交换的左 Λ_r-作用。相应地，对于两个 α_1扇区 α_2，它们共轭当且仅当 E_1扇区 E_2 作为 $\Lambda_r \times C_l$-集合同构。因此，我们可以用 E 上的 Λ_r 作用（在同构意义下）来替代扇区的共轭类。

证明。选取 h 个轨道中的一个自由 C_l-轨道 O_1，并将 $H \subset \Lambda_r$ 定义为把 O_1 映到自身的子群；H 作用于 O_1，并与 O_1 上的 C_l-作用相交换。对于 $h_1 \in H$，其在 O_1 上的作用是乘以 $\phi(h_1) \in C_l$。这给出了同态 ϕ。通过与引理 2.29 类似的论证，H 实际上保持每个轨道不变，而 $\alpha|_H$ 通过 $(C_l)^h$ 分解；事实上，它通过对角 $C_l \to (C_l)^h$ 分解。这意味着，对于 $h_1 \in H$ 以及任意轨道 O_i，旋转 $\phi_i(h_1) \in C_l$ 相同。因此，(H, ϕ) 不依赖于 O_1 的选取。

反过来，对于任意满足条件的 H 和 ϕ，存在一个传递的 $\alpha\colon \Lambda_r \to (C_l)^h \rtimes S_h$。我们定义

$$E_{H,\phi} = (\Lambda_r \times C_l)/\sim .$$

其中

$$(\lambda + h_1, c) \sim (\lambda, \phi(h_1)c), \quad h_1 \in H.$$

$E_{H,\,\phi}$ 具有可交换的左 Λ_r-作用和右 C_l-作用，且 C_l-作用是自由的。$E_{H,\,\phi}$ 是不交并，由 h 个自由的 C_l-轨道组成，因为 $E_{H,\,\phi}/C_l \simeq \Lambda_r/H$。

现在我们证明上述构造互为逆映射

- $E \to (H,\ \phi) \to E_{H,\,\phi}$。在第一个构造中，我们有 $E \simeq \mathrm{Ind}_H^{\Lambda_r}(C_l)$[14] 作为 $\Lambda_r \times C_l$ 集合。而在第二个构造中，根据定义，我们有 $E_{H,\,\phi} = \mathrm{Ind}_H^{\Lambda_r}(C_l)$。因此 $E \simeq E_{H,\,\phi}$。
- $(H,\ \phi) \to E_{H,\,\phi} \to (H',\ \phi')$。在构造 $(H,\ \phi) \to E_{H,\,\phi}$ 中，由于 $E_{H,\,\phi}/C_l \simeq \Lambda_r/H$，我们有 Λ_r 在 C_l-轨道上的作用方式类似于左作用在 Λ_r/H 上的方式。若取 O_1 为对应于 $\mathrm{id}[H]$ 的轨道，即

$$\mathrm{id}[H] = \{(0, c) \mid c \in C_l\} \subset E_{H,\phi}.$$

  H' 所保持的 O_1 恰好是 H。H 在 $\mathrm{id}[H]$ 上的作用是

$$h_1 \cdot (0, c) = (h_1, c) \sim (0, \phi(h_1)c)$$

  这恰好是 ϕ。

最后，如果 r 足够大，则任意满足 $[\Lambda_r$ 的 $H\colon\ H] = h$ 都是若干个 l 阶可被 n 整除的循环 p-群的直和（因为 h，l 都是 p的幂）。因此存在 l^n 个同态 ϕ。 □

注意，H 是 $\Lambda_r \to S_h$的核。与之前一样，我们将 $\Lambda_r \to S_h$的像记为 P。

[14]该映射由伴随嵌入 $C_l = O_1 \hookrightarrow \mathrm{Res}_H^{\Lambda_r} E$ 作为 $H \times C_l$ 集合给出。

Notation 3.11. 我们称以下数据为带标记旗标：一列正规子群

$$1 = P_0 \lhd P_1 \lhd \cdots \lhd P_s = P.$$

使得 P_j/P_{j-1} 是循环 p-群，并带有忠实特征标：

$$\theta_j \colon P_j/P_{j-1} \to \mathbb{C}^\times.$$

对于 t ransitive α，我们可以将 $\mathcal{M}_{0\,p^b}^{\mathrm{im}\,\alpha}$，中的点与带标记旗标的等价类联系起来。

引理 3.12。 我们假设 p为奇数。

(1) $\mathcal{M}_{0\,h}^{\mathrm{im}\,\alpha}$，的连通分支与以下对象一一对应：

$$\{decorated\ flags\}/(\theta_s \sim \theta_s^{-1})$$

等价关系是将 θ_s： $P_s/P_{s-1} \to \mathbb{C}^\times$ 替换为其逆映射，而其他一切保持不变。

(2) 在每个对应于 $1 = P_0 \lhd \cdots \lhd P_s = P$且具有特征 θ_j 的点 $x \in \mathcal{M}_{0\,p^b}^{\mathrm{im}\,\alpha}$，，我们有

$$[T_x\overline{\mathcal{M}}_{0,p^b}] = [V_{\mathrm{std}}] - [\theta_s] - [\theta_s^{-1}] + \sum_{j=1}^{s-1} \left([\mathrm{Ind}_{P_j}^P \theta_j] - [\mathrm{Ind}_{P_j}^P \theta_j^{-1}] \right),$$

作为一个 P-表示；其 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$-表示结构[15] 来自拉回 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \to P$。

证明。 (1) 设 $[\Sigma_0] \in \mathcal{M}_{0\,p^b}^{\mathrm{im}\,\alpha}$，是一条具有 p^b 个标记点、位于 im α-不动点中的稳定有理结点曲线；对应稳定映射的域为 $\Sigma = \Sigma_0 \vee \Sigma_1 \vee \cdots \vee \Sigma_{p^b}$，即在每个标记点处附接一个球面 Σ_i。于是 P 作用于 Σ。我们构造 Σ 的"对偶树" T，其顶点对应球面，边对应节点。 T 的叶子对应于 Σ 的非收缩分支。因此 P 作用于 T，且该作用在叶子上是传递且自由的。

我们断言：

T 在 P-作用下存在唯一的不动顶点。

将 T视为一个 P-空间。由于它是可缩的，根据史密斯理论，不动点 T^P非空。取一点 $x \in T^P$，则 x要么是一个顶点，要么是某条边的中点。但当 p 为奇数时，后一种情况不可能发生：否则，这将定义一个同态 $P \to C_2$，对应于是否翻转该边。由于 $|P| = p^b$ 为奇数，该同态是平凡的，这意味着 P 从不交换由这条边分隔的两个部分，从而与 P 传递地作用于叶子的假设矛盾。因此， x 是一个顶点。若存在两个不同的顶点v_0， $v_1 \in T^P$，则连接 v_0，v_1的路径在 T^P作用下保持不变，这再次意味着某条边保持不变，因而产生矛盾。因此，存在唯一一个由 P固定的顶点，记为v_0。

[15] $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 平凡地作用于$\mathcal{M}_{0\,p^b}^{\mathrm{im}\,\alpha}$，：它通过 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \to P$作用（见引理2.29（1）中的图表），但 P正好是 α的像。

我们选择一条从 $v_0v_1\dots v_s$ 到叶节点 v_s的路径。根据 P在叶子上的传递性，对于任意顶点v，存在某些 $i\in\{1,2,\dots,s\}$和 $\sigma\in P$，使得 $\sigma(v_i)=v$； i等于从 v_0 到 v的距离。这意味着 P 传递地作用于 T中深度为 i 的点。

定义

$$P_{s-j}:=\{\sigma\in P\mid \sigma(v_j)=v_j\}.$$

随后， P_{s-j} 作用在与 v_j 对应的球面上；我们称之为“v_j-球面”。我们区分两种情况：

- 若 $0<j<s$。 P_{s-j} 固定与边 v_jv_{j-1}对应的节点，且 P_{s-j-1} 是固定与边 v_jv_{j-1}和 v_jv_{j+1}对应的两个节点的映射子群。由 P_{s-j}在深度为 $(j+1)$且邻接于 v_j的顶点上的传递性，以及 P的交换性可知， P_{s-j-1} 固定整个 v_j-球面[16]。因此 P_{s-j}/P_{s-j-1} 忠实地作用在固定两个点的 $\mathbb{P}^1$ 上，由此得到特征 θ_{s-j}。
- 若 $j=0$, v_0 已经是根，那么只有 $|P_s/P_{s-1}|$ 个节点连接到较低层的球面。 P_s/P_{s-1} 在 $\mathbb{P}^1$ 上的作用是旋转，节点以相同间距分布在赤道上。因此，该特征只确定到一个 $\theta_s\sim\theta_s^{-1}$歧义，因为我们可以在 v_0-球面上施加 $z\mapsto\frac{1}{z}$，使其固定所有节点。[17]

(2) 我们的约定是：在 v_j 球面上，选取 v_jv_{j-1} 节点附近的一个局部坐标，~于是 P_{s-j} 作用为按 θ_{s-j} 旋转： $P_{s-j}\to\mathbb{C}^\times$。记作 $C=\Sigma_0$，并令 C 为其归一化。 T 的每个非叶顶点 v 都对应于 C 的一个不可约分支 C_v；我们用 $S_v\subset C_v$ 表示标记点与节点的并集。对于每个节点 q，令 q_+， q_- 表示它在 C 中的原像。

根据代数几何，$T_x\mathcal{M}_{0,\ p^b}$ 属于一个正合序列

$$0\to\bigoplus_v H^1(C_v,T_{C_v}(-S_v))\to T_x\overline{\mathcal{M}}_{0,p^b}\to\bigoplus_{\text{Nodes}}T_{q_+}\widetilde{C}\otimes T_{q_-}\widetilde{C}\to 0$$

请注意，它们是 P-表示，且下面的计算是在 P 的表示环中进行的。

(a) $\bigoplus_{\text{Nodes}}T_{q_+}\widetilde{C}\otimes T_{q_-}\widetilde{C}=\sum_{j=1}^{s-1}\operatorname{Ind}_{P_j}^P\theta_j$..

我们按照节点的 P-轨道对求和进行分组，代表元集合由 $1\le j\le s-1$中对应于 v_{j-1}和 v_j的球面之间的节点 q_j组成。稳定子群为 $\mathsf{Stab}_P(q_j)=P_{s-j}\subset P$。按照约定， P_{s-j}通过 θ_{s-j}作用于 $T_{q_j}C_{v_j}$，并在 $T_{q_j}C_{v_{j-1}}$上平凡作用。由于 P/P_{s-j} 在 q_j-轨道上传递且自由地作用，我们有

$$\bigoplus_{q\in P\cdot q_j}T_{q_+}\widetilde{C}\otimes T_{q_-}\widetilde{C}\simeq\operatorname{Ind}_{P_{s-j}}^P\theta_{s-j}.$$

[16]由于至少有 3 个节点，只需证明 P_{s-j-1} 固定所有节点即可。它已经固定了连接到 v_{j-1} 的唯一节点；新意在于它还固定了连接到深度为 $j+1$ 的球面的节点。[17]对于 $0<j<s$，连接 v_j 球面与 v_{j-1} 球面的节点是特殊的。我们将 θ_{s-j} 定义为 P_{s-j}/P_{s-j-1} 在该节点处沿 v_j 球面切线的特征。由此可将 θ_{s-j} 与其逆映射区分开来。坐标不必唯一。

因此，对 $1 \le j \le s-1$ 求和为

$$\sum_{j=1}^{s-1} \mathrm{Ind}_{P_j}^{P}\, \theta_j.$$

(b) $\bigoplus_v H^1(C_v,\ T_{C_v}(-S_v)) = V_{\mathrm{std}} - \theta_s - \theta_s^{-1} - \sum_{j=1}^{s-1} \mathrm{Ind}_{P_j}^{P}\, \theta_j^{-1}$。

对于每个 C_v，我们有一个正合序列

$$0 \to H^0(C_v, T_{C_v}) \to \bigoplus_{q \in S_v} T_q C_v \to H^1\left(C_v, T_{C_v}(-S_v)\right) \to 0.$$

同样，我们按 P-轨道对它们分组，代表元集合为 $v_j, 0 \le j \le s-1$。

- 若 $j \neq 0$，则有 $1+|P_{s-j}/P_{s-j-1}|$ 个节点。我们在表示环中有如下等式

$$H^0(C_{v_j}, T_{C_{v_j}}) = 1 + \theta_{s-j} + \theta_{s-j}^{-1} \in R(P_{s-j}).$$

$$\bigoplus_{q \in S_{v_j}} T_q C_{v_j} = \theta_{s-j} + \mathbb{C} \cdot (P_{s-j}/P_{s-j-1}) = \theta_{s-j} + \mathrm{Ind}_{P_{s-j-1}}^{P_{s-j}} 1.$$

v_j-轨道上的所有项之和为

$$\mathrm{Ind}_{P_{s-j}}^{P}\left(\mathrm{Ind}_{P_{s-j-1}}^{P_{s-j}} 1 - 1 - \theta_{s-j}^{-1}\right) = \left(\mathrm{Ind}_{P_{s-j-1}}^{P} 1 - \mathrm{Ind}_{P_{s-j}}^{P} 1\right) - \mathrm{Ind}_{P_{s-j}}^{P}\, \theta_{s-j}^{-1}.$$

- 若 $j = 0$，则只有 $|P_{s-j}/P_{s-j-1}|$ 个节点。我们有

$$H^0(C_{v_j}, T_{C_{v_j}}) = 1 + \theta_{s-j} + \theta_{s-j}^{-1} \in R(P_{s-j}).$$

$$\bigoplus_{q \in S_{v_j}} T_q C_{v_j} = \mathrm{Ind}_{P_{s-j-1}}^{P_{s-j}} 1$$

差值为

$$\mathrm{Ind}_{P_{s-1}}^{P} 1 - 1 - \theta_s - \theta_s^{-1}.$$

总和为

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{s-1} \left(\left(\mathrm{Ind}_{P_{s-j-1}}^{P} 1 - \mathrm{Ind}_{P_{s-j}}^{P} 1\right) - \mathrm{Ind}_{P_{s-j}}^{P}\, \theta_{s-j}^{-1}\right) + \mathrm{Ind}_{P_{s-1}}^{P} 1 - 1 - \theta_s - \theta_s^{-1} \\
=&\, \mathrm{Ind}_1^P 1 - \mathrm{Ind}_{P_{s-1}}^{P} 1 - \sum_{j=1}^{s-1} \mathrm{Ind}_{P_j}^{P}\, \theta_j^{-1} + \mathrm{Ind}_{P_{s-1}}^{P} 1 - 1 - \theta_s - \theta_s^{-1} \\
=&\, V_{\mathrm{std}} - \theta_s - \theta_s^{-1} - \sum_{j=1}^{s-1} \mathrm{Ind}_{P_j}^{P}\, \theta_j^{-1}
\end{aligned}$$

在最后一步中，我们使用了 $\mathrm{Ind}_1^P 1 - 1 = V_{\mathrm{std}}$。

结合 (a) 和 (b) 即可证明所需公式。

□

Cor推论 3.13。 $\mathcal{M}_{0,h}^{\mathrm{im}\,\alpha}$ 是离散的，因此 $T_x\mathcal{M}_{0,h}$ 与 $\nu_{M^{\mathrm{im}\,\alpha}/M}$（定义 5.47）一致。

在假设 $[-1]_E x = -x$ 下，$\mathrm{Ob}^d - \nu_F - \nu_{\mathcal{M}_0^{\mathrm{im}\,\alpha}\text{的}h}/\mathcal{M}_{0,h}$ 在 $\mathcal{M}_{0,h}^{\mathrm{im}\,\alpha}$ 的每一点处的欧拉类是一个 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$-表示[18]，并且具有简洁的表达式。

在以下命题及其证明中，欧拉类均理解为沿由乘法同态诱导的分类空间映射拉回后的欧拉类

$$Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \times \Lambda_r \longrightarrow Z_{\widetilde{G}}(\alpha),$$

其中 Λ_r 通过 α映射到 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$，随后将 $B\Lambda_r$-系数扩张到 $L(E)^*$，如等变 HKR 特征标构造中所述。

命题 3.14。 假设 $[-1]x = -x$ 和 $d = p^a$。在 $x \in \mathcal{M}_{0,h}^{\mathrm{im}\,\alpha}$ 处，对应于 P_j、θ_j，有

$$\frac{e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)}{e_{\mathrm{eq}}(\nu_F)e(\nu_{\overline{\mathcal{M}}_{0,h}^{\mathrm{im}\,\alpha}/\overline{\mathcal{M}}_{0,h}})} = (-1)^s \frac{e(\theta_s)^2}{u^2} \in S_{S^1}^{-1} H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha), L(E)\right).$$

证明。我们在引理 2.32(3) 和引理 3.12(2) 中，将 $\mathrm{Ob}_d - \nu_F$ 和 $\nu_{\mathcal{M}_0^{\mathrm{im}\,\alpha}}$、$\nu_{\mathcal{M}_{0,p^b}/\mathcal{M}_0}$、$\nu_{p^b}$ 识别为 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$-表示。由于 $[-1]x = -x$，对于任意向量丛 V，均有 $e(V^\vee) = (-1)^{\mathrm{rk}\,V} e(V)$。在所显示的局部化环中，我们将 $e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d - \nu_F)$ 理解为 $e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d)/e_{\mathrm{eq}}(\nu_F)$。光滑化欧拉因子由环面局部化可逆。

- $\mathrm{Ob}_d - \nu_F$。在 $\mathcal{M}_{\mathrm{im}0\,p^b}^{\alpha}$ 中的每一点，我们都有

$$\bigoplus_{j=1}^{p^b} \left(T_{b_j}\Sigma_j \otimes T_{b_j}\Sigma_0\right) \simeq \mathrm{Ind}_{S^1}^{Z_{\widetilde{G}}(\alpha)} V_\eta$$

  因此（在每一点）

$$e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d - \nu_F) = e_{\mathrm{eq}}(V_{\mathrm{std}})(-1)^{p^a} e(\chi)^{-1} e(\chi^{-1})^{-1} = \frac{e(V_{\mathrm{std}})}{u^2} \in S_{S^1}^{-1} H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha), L(E)\right).$$

- $\nu_{\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}0}\ {}^{\alpha}_{\ p^b}/\mathcal{M}_{0,p^b}}$。消去显然成立

$$e_{\mathrm{eq}}(\nu_{\overline{\mathcal{M}}_{0,p^b}^{\mathrm{im}\,\alpha}/\overline{\mathcal{M}}_{0,p^b}}) = e(V_{\mathrm{std}})e(\theta_s)^{-1}e(\theta_s^{-1})^{-1}(-1)^{s-1}.$$

因此，

$$\frac{e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d - \nu_F)}{e_{\mathrm{eq}}(\nu_{\overline{\mathcal{M}}_{0,p^b}^{\mathrm{im}\,\alpha}/\overline{\mathcal{M}}_{0,p^b}})} = (-1)^s \frac{e_{\mathrm{eq}}(\theta_s)^2}{u^2}.$$

□

[18]显然，这只是一个 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$-表示，但我们可以沿着 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha) \times \Lambda_r \to Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 拉回。为定义这个˜映射，我们注意到 $\Lambda_r \to G \subset G$ 的像包含在 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 中，因为 Λ_r 是交换的，并且根据定义，Λ_r 的像与 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 交换。该映射由 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)$ 中的乘法定义。

在 S_{S^1} 处局部化后，等变 HKR 黎曼–罗赫公式（43）给出

$$\left(e^L_{\mathrm{HKR,eq}}\right)^{-1}\cdot\chi_{n,p;\mathrm{eq}}(-)\colon S^{-1}_{S^1}H^*\left((\overline{\mathcal{M}}_{0,h})_{h\widetilde{G}},E\right)\to\bigoplus_{[\alpha],x\in\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0,h}}S^{-1}_{S^1}H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha),L(E)\right).$$

推论 3.15. $\left(e^L_{\mathrm{HKR,eq}}\right)^{-1}\cdot\chi_{n,p;\mathrm{eq}}(-)$下， $e_{\mathrm{eq}}(\mathrm{Ob}_d-\nu_F)$ 的像的(α,x)-分量为

$$(-1)^s\frac{a^2_{\theta_s}}{u^2}$$

作为 $S^{-1}_{S^1}H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha)\ L(E)\right)$中的一个元素。因此，其 $L(E)$-等变推前为

$$\pi^{L(E)}_{!,\mathrm{eq}}\left((-1)^s\frac{a^2_{\theta_s}}{u^2}\right)=(-1)^s\frac{a^2_{\theta_s}}{p^a u^2}\in S^{-1}_{S^1}H^*(BS^1,L(E)).$$

这里， u 是 $H^*(BS^1,L(E))$的生成元。 a_{θ_s} 是 $e(\theta_s)$[19] 在 $H^*(BP,E)\to H^*(B\Lambda_r,E)\to L(E)$下的像，其中第一个映射是拉回，第二个映射来自$L(E)$的定义。

对于 $x\in\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{im}\,\alpha}_{0\ p^b}$，将 $\chi_{n,p;\mathrm{eq}}$限制到 x后，其 α-分量可通过先拉回到 $[\mathrm{pt}/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)]\times[\mathrm{pt}/\Lambda_r]$，再应用系数映射 $H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha)\times B\Lambda_r,E\right)\to H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha)\ L(E)\right)$来计算。

证明。 前述命题中的表达式是.....的像

$$(-1)^s\frac{\left(e_{\mathrm{eq}}(\theta_s)+_E e_{\mathrm{eq}}(\alpha^*\theta_s)\right)^2}{u^2}\tag{24}$$

在映射 $S^{-1}_{S^1}H^*\ BZ_{\widetilde{G}}\ \alpha\times B\Lambda_r\ E\longrightarrow S^{-1}_{S^1}H^*\ BZ_{\widetilde{G}}\ \alpha\ \ L\ E$ $H^*\ B\Lambda_r\ E\longrightarrow(\ (\ ),)((\ )$
$L\ E^*\quad e_{\mathrm{eq}}\ \theta_s\in H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}\ \alpha\ \ E\right)\quad e_{\mathrm{eq}}\ \alpha^*\theta_s\in H^*\ B\Lambda_r\ E\quad\theta_s$
(,)() 下，该映射由 (,)() 诱导。这里 ()() 是一个拉回，而 ()(,)。然而，这是从一个 P- 表示拉回的，且 P 有限，因此根据引理 2.28 $e(\theta_s)$，它在映射 $H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha)\ E\right)\to H^*\left(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha)\ L(E)\right)$下变为零。 $B\Lambda_r$-欧拉类 $e_{\mathrm{eq}}(\alpha^*\theta_s)$ 映射到 a_{θ_s}。因此，(24) 在 $S^{-1}_{S^1}H^*(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha)\times B\Lambda_r,E)\longrightarrow S^{-1}_{S^1}H^*(BZ_{\widetilde{G}}(\alpha)\ L(E))$ 下映射到 $(-1)^s\frac{a^2_{\theta_s}}{u^2}$。

$L(E)$ 等变推前所涉及的映射是 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)\to S^1$ [20]，其核的阶为 p^a。注意， e_{θ_s}属于 $L(E)^*$和 $u\in H^*(BS^1,\ L(E))$，因此

$$\pi_{!,\mathrm{eq}}\left((-1)^s\frac{a^2_{\theta_s}}{u^2}\right)=(-1)^s\frac{a^2_{\theta_s}}{u^2}\pi_{!,\mathrm{eq}}(1)=(-1)^s\frac{a^2_{\theta_s}}{p^a\cdot u^2}.$$

□

剩下的就是纯代数计算。令 $\Lambda=(\mathbb{Z}_p)^n$。求和指标取遍所有带标记旗标。

$$\begin{aligned}&H=H_0\lhd H_1\lhd\cdots\lhd H_s=\Lambda,\qquad|\Lambda/H|=h,\\&\phi\colon H\to C_l,\quad\theta_j\colon H_j/H_{j-1}\to\mathbb{C}^\times.\end{aligned}\tag{25}$$

[19] θ_s 是一个 P-表示。[20] 这是复合 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)\subset\widetilde{G}\to S^1$，其中右端映射来自 (14)。

注记 3.16。对于一个 b，有两个分量，因为中心球面可能位于 p_0 或p_1之上；从 p_0 变为 p_1 相当于在欧拉类中将 χ 替换为 χ^{-1}，并将 η 替换为 η^{-1}。在假设 $[-1]x=-x$下，$(-1)^s \frac{a_{\theta_s}^2}{p^a\cdot u^2}$ 保持不变。这与引理 3.12(1) 中的歧义 相抵消，因此求和以 (25) 为指标，不 $\theta_s \sim \theta_s^{-1}$作等同处理。

我们记 $\lambda=\theta_s$: $H_s/H_{s-1}\to\mathbb{C}^\times$。实际上，$\lambda$ 落在 $C_{p^b}\subset\mathbb{C}^\times$ 中。我们将所有满足 $\Lambda\to C_{p^b}\subset\mathbb{C}^\times$ 的特征 λ 记为 $\Lambda^\vee[p^b]$。在下面的定义和引理中，我们固定 l 为 p 的幂，但允许 h 变化。

定义 3.17。(1) 令 S_b 为 $(-1)^s a_{\theta_s}^2$ 在 (25) 上、满足 $h=p^b$的和。令 B_k 为 $(-1)^s$ 在相同索引数据 (25) 上、满足 $h=p^k$ 的和。

(2) 定义

$$M_b=\sum_{\lambda\in\Lambda^\vee[p^b]} a_\lambda^2.$$

这些项之间的关系如下。我们

引理 3.18。*(1)* 对于 $k\geq 1$, $B_k=-\sum_{j=1}^k (p^{nj}-p^{n(j-1)})B_{k-j}$。利用这个递推关系，我们得到 $B_0=l^n$, $B_k=l^n(1-p^n)$ $k\geq 1$。

(2) $S_b=l^n\left(-M_b+p^nM_{b-1}\right)$。

证明。(1) 对于 $k\geq 1$ 以及一个带标记旗标 $H=H_0\lhd H_1\lhd\cdots\lhd H_s=\Lambda$，我们令 $|H_s/H_{s-1}|=p^j$。忠实特征 $H_s/H_{s-1}\to\mathbb{C}^\times$ 恰好是满射特征 $\Lambda\to C_{p^j}$，其总数为 $p^{nj}-p^{n(j-1)}$。由于将 $H_{s-1}=\ker(\theta_s)$ 视为新的 Λ 后，其余数据恰好构成一个带标记旗标，我们得到

$$B_k=-\sum_{j=1}^k (p^{nj}-p^{n(j-1)})B_{k-j}.$$

-1 来自额外增加的一层，即将 $H_{s-1}\subset H_s$ 添加到 $H_0\lhd\cdots H_{s-1}$。

我们可以用归纳法证明 $B_0=l^n$、$B_k=l^n(1-p^n)$ $k\geq 1$ 满足这一递推关系。起始情形 $B_0=l^n$ 是因为 $H=H_0\simeq(\mathbb{Z}_p)^n$，而 B_0 是同态 $H\to C_l$ 的数量（不一定忠实）。

（2）如果在（25）中令 $|H_s/H_{s-1}|=p^j$，那么我们可以重新排列求和，先选取一个满射λ: $\Lambda\to C_{p^j}$，然后对 $(-1)^s$在 $H_0\lhd\cdots\lhd H_{s-1}=\ker(\lambda)$上求和。我们看到，$M_j-M_{j-1}$是对满射特征 a_λ^2求和所得 λ: $\Lambda\to C_{p^j}$，而后者的数量为 $-B_{b-j}$。因此（令 $M_0=0$）

$$S_b=-\sum_{j=1}^b B_{b-j}(M_j-M_{j-1})$$

将 $k\geq 1$替换为 $B_0=l^n$ 和 $B_k=l^n(1-p^n)$，我们得到 $S_b=l^n(-M_b+p^nM_{b-1})$。

□

对于和式 $M_b = \sum_{\lambda \in \Lambda^\vee[p^b]} a_\lambda^2$，我们注意到 $a_\lambda \in L(E)^*$ 恰好是 $L(E)^*$ 中 $[p^b]x = 0$ 的 p^{bn} 个互异根。令 $A = E^*$ 和 $B = E^*[\![x]\!]/([p^b]x)$。

引理 3.19。我们有

$$M_b = \mathrm{Tr}_{B/A}(x^2) = p^b \,\mathrm{Res}_x \left(\frac{x^2 \omega(x)}{[p^b]x} \right).$$

第一个等 式通过系数映射在 $L(E)^*$ 中理解，第二个等式则在 $A = E$ 中成立 *.

证明。 由于 $B \otimes_{E^*} L(E)^* \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda^\vee[p^b]} L(E)^*[x]/(x - a_\lambda)$（$a_\lambda - a_{\lambda'}$ 在 $L(E)^*$ 中对 $\lambda \neq \lambda'$ 可逆），我们有

$$M_b = \mathrm{Tr}_{B \otimes_{E^*} L(E)^*/L(E)^*}(x^2) = \mathrm{Tr}_{B/A}(x^2)$$

这里，迹与基变换可交换，因为 B 是 A 上的有限自由模。这就证明了前半部分。

对于后半部分，我们应用引理 5.11，其中 $f(x) = [p^b]x$。我们记 $\omega(x) = w(x)dx$。根据引理5.8 我们有

$$w([p^b]x)d\left([p^b]x\right) = p^b w(x)dx.$$

等价地 $\left([p^b]x\right)' = p^b \, {}_w{}^{w(x)}{}_{([p^b]x)}$。因此，根据引理 5.11

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{B/A}(x^2) &= \mathrm{Res}_x \left(\frac{x^2 \left([p^b]x\right)'}{[p^b]x} \right) \\ &= p^b \,\mathrm{Res}_x \left(\frac{x^2 w(x)}{[p^b]x} \frac{1}{w([p^b]x)} \right) \end{aligned}$$

由于 $w(x)$ 的首项为 1，我们可以将 $w^{\,1}_{([p^b]x)}$ 写成关于 $[p^b]x$ 的幂级数。由于 $x^2 w([p^b]x^{\,x} \cdot [p^b]x)$ 没有 x^{-1} 项，因此可以舍去正次数项。所以最终得到

$$\mathrm{Tr}_{B/A}(x^2) = p^b \,\mathrm{Res}_x \left(\frac{x^2 w(x)}{[p^b]x} \right). \qquad \square$$

回顾记号，$\Theta_b = \tau_{p^b,0}(x^2) = \mathrm{Res}_x \left(x^2 w\binom{x}{[p^b]x} \right)$。

命题的证明*3.7(2)*。我们希望计算 $(-1)^s \frac{a_\lambda^2}{p^a u^2}$ 在 (25) 上的和，即 $\frac{S_b}{p^a u^2}$在我们的记号下。以下恒等式理解为在 $L(E)^*$中成立，其中 Θ_b 和 Θ_{b-1} 表示它们在系数映射下的像。根据引理 3.18(2) 和引理 3.19 (我们令 $l = p^{a-b}$)

$$S_b = p^{(a-b)n}(-M_b + p^n M_{b-1}) = p^{(a-b)n}(-p^b \Theta_b + p^n p^{b-1} \Theta_{b-1})$$

So

$$\frac{S_b}{p^a u^2} = \frac{1}{u^2} p^{(a-b)n-a}(-p^b \Theta_b + p^n p^{b-1} \Theta_{b-1}) = \frac{1}{u^2} p^{(a-b)(n-1)} \left(-\Theta_b + p^{n-1} \Theta_{b-1} \right)$$

上述系数嵌入可扩展为

$$S_{S^1}^{-1} E^*[\![u]\!] \hookrightarrow L(E)^*((u)),$$

因为每个非平凡的 S^1-欧拉类在 $L(E)^*((u))$ 中都变为可逆。因此，所断言的贡献公式在 $S_{S^1}^{-1} E^*[\![u]\!]$ 中成立。 $\square$

3.3 Morava K-理论中的求值映射

In t本小节中，我们在 Morava K-理论中计算（20）。主要结果是定理1.1 .

我们选择 $E = \widetilde{K}(n)$ 为满足 $\pi_* E = \mathbb{Z}_p[v_n, v_n^{-1}]$ 的整数 Morava K-理论，从而得到 Gromov–Witten 不变量 $I^E_{p^a} \in \mathbb{Z}_p$。Morava K-理论中的同一不变量随后为模 p 的 $I^E_{p^a}$。

回想一下， p 是奇数，且 $E = \widetilde{K}(n)$ 的形式群律为 $[p]x = px +_E v_n x^{p^n}$。下面的引理讨论模 p Morava K-理论的不变形式。

~引理 3.20。*Morava* K-理论 $K(n)$ （而非 $K(n)$） $\omega(x) = g(x)\,dx$的不变微分为

$$g(x) = \begin{cases} 1, & n \geq 2, \\ \sum_{j\geq 0} v_1^{(p^j-1)/(p-1)} x^{p^j-1}, & n = 1. \end{cases} \tag{26}$$

此外，对于奇数 p，条件 $[-1]x = -x$ 成立。

~证明。为计算不变微分，先在 $K(n)$ 的有理化系数环上进行。我们用 F 表示 $\widetilde{K}(n)$ 的形式群律，并记作 $q = p^n$。记 $\log_F(x) = \sum_{j\geq 0} \ell_j x^{q^j}, \ell_0 = 1$ $[p]_F\ x = px +_F v_n x^q$ 。
对 ( ) 应用形式对数，得到

$$p \log_F(x) = \log_F(px) + \log_F(v_n x^q).$$

比较系数可得 $(p - p^{q^j})\ell_j = v_n^{q^{j-1}} \ell_{j-1}$, $j \geq 1$。因此，

$$\ell_j = \frac{v_n^{(q^j-1)/(q-1)}}{\prod_{i=1}^{j}(p - p^{q^i})}.$$

由于 $\omega(x) = \log'_F(x)\ dx$， x^{q^j-1} 在 $g(x)$ 中的系数为

$$q^j \ell_j = p^{(n-1)j} v_n^{(q^j-1)/(q-1)} \prod_{i=1}^{j} (1 - p^{q^i-1})^{-1}.$$

这些系数是 p-进整数。模 p 约化得 (26)。

最后，$\log_F(x)$ 中出现的所有幂都是奇数，因为 p 是奇数。因此，$\log_F(-x) = -\log_F(x)$，这意味着 $[-1]_F(x) = -x$ 在整系数环上成立，进而模 p 也成立。 □

引理 3.21。设 F 是环 R 上的形式群律，其中 2 可逆。假设$[-1]_F(x) = -x$，并将其不变微分写作 $\omega(x) = g(x)\,dx$。
那么，在 $R((x))[[u]]$,

$$[u^2] \frac{1}{x -_F u} = \frac{1}{x^3 g(x)^2} + \frac{g'(x)}{2x^2 g(x)^3}. \tag{27}$$

证明。 根据引理5.8，我们知道

$$g(F(x,y))\cdot\partial_y F(x,y)=g(y) \tag{28}$$

其特殊情形通过令 $y=0$ 得到 $g^{1}{}_{x()}=\partial_{2}F(x,\ 0)$。

由于 $[-1]_F(x)=-x$，不变微分是偶的，因此 $g'(0)=0$。再对（28）关于 y 再求一次微分，并令 $y=0$，得到

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,0)=-\frac{g'(x)}{g(x)^3}$$

因此，

$$x-_F u=F(x,-u)=x-\frac{u}{g(x)}-\frac{g'(x)}{2g(x)^3}u^2+O(u^3).$$

取乘法逆元，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-_F u}&=\frac{1}{x}+\frac{u}{x^2g(x)}\\&\quad+\left(\frac{1}{x^3g(x)^2}+\frac{g'(x)}{2x^2g(x)^3}\right)u^2+O(u^3).\end{aligned}$$

取 u^2 的系数即可证明该公式。 □

定理 1.1。 令 $p\geq 3$、 $n\geq 1$，并使用 p-典型的标准复定向于 $K(n)$。对于每个整数 $a\geq 1$，次数为 p^a 的局部不变量满足

$$I_{p^a}^{K(n)}=\begin{cases}-1\in\mathbb{F}_3, & (p,n,a)=(3,1,1),\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{1}$$

因此，对于任意 $d\geq 1$,

$$I_d^{K(n)}=\begin{cases}d^{-3}, & p\nmid d,\\ -m^{-3}, & p=3,\ n=1,\ d=3m,\ 3\nmid m,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{2}$$

证明。 由（20），

$$I_{p^a}^{K(n)}=[u^2]\tau_{p^a,u}(x^2).$$

将系数模 p约化后，我们计算留数。

Put

$$Q=p^{na},\qquad c=v_n^{(Q-1)/(p^n-1)}.$$

由引理 3.20， $[p^a]_F(x)=cx^Q$。

定义

$$R(x):=[u^2]\frac{1}{x-_F u}.$$

由引理3.21,

$$R(x) = \frac{1}{x^3 g(x)^2} + \frac{g'(x)}{2x^2 g(x)^3} \in x^{-3} K(n)^*[[x]].$$

因此

$$I_{p^a}^{K(n)} = \operatorname{Res}_x x^2 g(x) R(cx^Q)\, dx. \tag{29}$$

写作 $R(x^{}) = \sum_{j \geq -3} r_j x^j$。单项式 x^e 出现在 $g(x)$ 中，只有在 if

$$2 + e + Qj = -1$$

某个整数 $j \geq -3$ 时，才可能对留数有贡献。特别地，

$$Q \mid e + 3. \tag{30}$$

若 $n \geq 2$，则 $g(x) = 1$。因此 $e = 0$，而整除条件要求 $Q \mid 3$。这是不可能的，因为 $Q = p^{na} \geq 9$。

现在假设 $n = 1$。 $g(x)$ 中出现的指数为

$$e = 0, \qquad e = p^k - 1 \quad (k \geq 1).$$

对于 $e = p^k - 1$，条件变为 $p^a \mid p^k + 2$。这不可能，因为 p 是 od d.

对于 $e = 0$，条件是 $p^a \mid 3$，这迫使 $p = 3$ 和 $a = 1$。接下来只需计算这种情形。我们有

$$[3]_F(x) = v_1 x^3, \qquad g(x) = 1 + v_1 x^2 + v_1^4 x^8 + \cdots.$$

由（27），

$$R(x) = x^{-3} - v_1 x^{-1} + O(x).$$

因此，

$$\begin{aligned} I_3^{K(1)} &= \operatorname{Res}_x x^2 g(x) R(v_1 x^3)\, dx \\ &= v_1^{-3}[x^6] g(x) - [x^0] g(x) \\ &= -1. \end{aligned}$$

这就证明了（1）。

最后， $I_1^{K(n)} = 1$。将素数到p 次数约化公式命题 3.1 应用于 $\widetilde{K}$（n）并模 p 约化，得

$$I_{p^a m}^{K(n)} = m^{-3} I_{p^a}^{K(n)} \qquad (p \nmid m).$$

结合这些公式即可证明（2）。 □

4 卡拉比–丘三维簇的一个应用

我们使用 [IP18] 中的簇形式体系，将局部计算结果转移到系数取于 K（n）的卡拉比–丘三维簇的 Gromov–Witten 不变量。

从现在起，本节中的所有 Gromov–Witten 不变量均视为取值于 $K(n)$。对于闭辛 Calabi–Yau 三维流形 X 和一个非零类 A，我们记作

$$\mathrm{GW}_{0,0}^{K(n)}(X, A) = \langle 1, [\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(X, A)]_{\mathrm{vir}} \rangle \in K(n)^0(\mathrm{pt}) = \mathbb{F}_p.$$

其中 $[\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(X,\ A)]_{\mathrm{vir}}$ 表示虚拟基本类。

这里 $n_{\beta,0}$ 表示 X的零亏格 Gopakumar–Vafa 不变量，定义见引言。本节证明以下定理。

定理 1.2. 设 X 是一个闭辛 *CY* 三维流形，且 $A \in H_2(X)$ 非零。零亏格 *Gromov–Witten* 不变量 $\mathrm{GW}_{0\,0}^{K(n)}{}_{,}(X,A) \in \mathbb{F}_p$ 等于以下数值:

(1) 若 $n>1$ 或 $p>3$，则

$$\mathrm{GW}_{0,0}^{K(n)}(X,A)=\sum_{A=d\beta,\ p\nmid d} n_{\beta,0}\frac{1}{d^3}\in\mathbb{F}_p$$

特别地，若 A 不能被 p整除，则 $\mathrm{GW}_{0\,0}^{K(n)}{}_{,}(X,A)$ 等于相应普通 *Gromov–Witten* 不变量在 $\mathbb{F}_p$ 中的像。

(2) 若 $(n,p)=(1、3)$，则

$$\mathrm{GW}_{0,0}^{K(n)}(X,A)=\sum_{A=d\beta,\ p\nmid d} n_{\beta,0}\frac{1}{d^3}-\sum_{A=3m\beta,\ p\nmid m} n_{\beta,0}\frac{1}{m^3}\in\mathbb{F}_p.$$

证明依赖于命题 4.1。

定理的证明*1.2*。只需确定命题 4.1 中各项的值。系数 $e_{\beta,\ 0}(X)$ 将在下文确定为 $n_{\beta,\ 0}$，局部贡献 $I_d^{K(n)}$ 则在定理 1.1 中计算。

□

我们将亏格零 $K(n)$-Gromov–Witten 势定义为

$$\mathrm{GW}_0^{K(n)}(X,q)=\sum_{\omega(A)>0}\mathrm{GW}_{0,0}^{K(n)}(X,A)q^A\in\mathbb{F}_p[[q^A]]_{A\in H_2(X,\mathbb{Z})}.$$

注意，它是取值于 $K(n)$ 的不变量的生成函数。对于局部曲线

$$\mathrm{Tot}\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\big),$$

我们写作

$$\mathrm{GW}_0^{K(n),\mathrm{elem}}(q)=\sum_{d\geq 1}\mathrm{GW}_{0,0}^{K(n)}(X_{\mathrm{loc}},d[\mathbb{P}^1])q^d\in\mathbb{F}_p[[q]],$$

其中 $q=q^{[\mathbb{P}^1]}$。

我们认为 [IP18，定理 8。1]同样适用于全局 Kuranishi 图表且系数取值于 $K(n)$ 的情形。

命题 4.1. 存在整数 $e_{\beta,0}(X)$ 使得

$$\mathrm{GW}_0^{K(n)}(X,q)=\sum_{\omega(\beta)>0}e_{\beta,0}(X)\ \mathrm{GW}_0^{K(n),\mathrm{elem}}(q^\beta)$$

在 $\mathbb{F}_p[[q^A]]$ 中，其中整数$e_{\beta,\ 0}$（X）被视为 $\mathbb{F}_p$ 中的元素。

这些$e_{\beta,\,0}(X)$与 [IP18定理 8 中的那些相同。1]它们等于 Gopakumar-Vafa不变量$n_{\beta,\,0}$，这一点由 [IP18命题 3 得出。4]。

尽管 Ionel–Parker 证明了有理 Gromov–Witten 不变量的分解公式，但其构造本身给出了底层模空间的簇分解，等价地说，是全局 Kuranishi 图表的零点集 $s^{-1}(0)/G$ 。从这一分解过渡到$K(n)$值不变量时，要用到虚拟基本类的支撑性质： $K(n)$定向的虚拟基本类支撑在 $s^{-1}(0)$ 上，因此将图表限制到 G不变的任意开邻域 $s^{-1}(0)$后，它保持不变。因此，同样的簇区域也分解了 $K(n)$值虚推前。我们首先用全局 Kuranishi 图表的语言，表述固定 J 时的这一簇分解。随后，我们利用参数化构造，证明边界始终与模空间不相交的簇区域的虚贡献具有不变性。

4.1 簇形式主义与全局 Kuranishi 图表

令 $\mathcal{J}$ 为 X 上所有光滑的 ω-温和几乎复结构构成的空间，并赋予 C^∞拓扑。令 $\mathcal{M}(X) = \{(\Sigma, J)\}$ 表示所有 $J \in \mathcal{J}$对应的 J-全纯曲线构成的空间，其中 Σ 是有理曲线（零亏格节点曲线），且 $\Sigma \to X$ 是J-全纯的；令 $\mathcal{M}_{\mathrm{simple}}(X)$ 为简单映射构成的子空间。固定一个 $E \geq 0$，并令 $\mathcal{M}^E(X)$ 为满足 $\omega[\Sigma] \leq E$ 的 $\mathcal{M}(X)$ 子空间。令 $\pi\colon \mathcal{M}^E(X) \to \mathcal{J}$ 为投影 $(\Sigma, J) \mapsto J$。对于 $S \subset \mathcal{J}$，记 $\mathcal{M}^S{}_{,E}(X) = \pi^{-1}(S)$；对于 $S = \{J\}$，记 $\mathcal{M}^J{}_{,E}(X)$，并令 $\mathcal{M}^J{}_{,E}\,\mathrm{simple}(X)$ 为其简单映射子空间。根据 [IP18，引理 1.2 和推论 A.5],，存在一个 Baire子集 $\mathcal{J}_E^* \subset \mathcal{J}$，使得对 $J \in \mathcal{J}_E^*$，所有满足 $\omega[\Sigma] \leq E$ 的简单 J-全纯曲线都是光滑、嵌入且正则的，并且任意两条曲线都不相交。更一般地，我们可以将 $\mathcal{J}^E_{\mathrm{isol}}$ 定义为满足以下条件的 $J \in \mathcal{J}$ 的集合： $\mathcal{M}^J{}_{,E}$ simple(X) 在 Gromov 拓扑中是离散的，该纤维中的所有简单曲线都是光滑、嵌入的，且任意两条曲线互不相交；这里不要求正则性条件。几乎复结构的变形完全发生在 $\mathcal{J}^E_{\mathrm{isol}}$ 中。

令 Subsets(X) 表示 X 的非空闭子集构成的空间，并赋予 Hausdorff 拓扑。在 X 上固定一个黎曼度量，并将其诱导的 Hausdorff距离记为 d_H。我们记

$$B(C,\epsilon) := \{A \in \mathrm{Subsets}(X) : d_H(A,C) < \epsilon\}.$$

存在一个映射 $c\colon \overline{\mathcal{M}}(X) \to \mathrm{Subsets}(X)$，它将一条 J-全纯曲线 $\Sigma \to X$ 映射到其在X中的像集。

定义 4.2. 定义

$$\mathcal{C}(X) = c\left(\overline{\mathcal{M}}(X)\right)$$

$$\mathcal{C}^E(X) = c\left(\overline{\mathcal{M}}^E(X)\right)$$

对于每个 $J \in \mathcal{J}$，记 $\mathcal{C}^J{}_{,E}(X) = c\left(\underline{\mathcal{M}}^{J,E}(X)\right)$。

对于 $J \in \mathcal{J}^E_{\mathrm{isol}}$，任意 J-全纯曲线，其能量至多为 E，都可以通过一条嵌入的简单曲线进行因式分解，因此在 c 下与该简单曲线具有相同的像 [IP18，引理 1。5]。若一条曲线 $u\colon \Sigma \to X$ 表示同调类 $A \in H_2(X, \mathbb{Z})$，我们将该曲线的层级定义为

lcm$\{k \in \mathbb{Z}_{>0}:\ A \in kH_2(X,\ \mathbb{Z})\}$的素因子数量（按重数计）。令$\mathcal{C}^E(X)_i$表示层级至多为 i 的曲线的像。像 $\mathcal{C}^E(X)$ 按层级进行过滤

$$\mathcal{C}^E(X)_0 \subset \mathcal{C}^E(X)_1 \subset \cdots \subset \mathcal{C}^E(X)_m \subset \cdots$$

对于固定的 $J \in \mathcal{J}^E_{\text{isol}}$，令 $\mathcal{C}^{J,E}(X)_i$ 为 c 中映射在 $\mathcal{M}^{J,E}(X)$ 下的像，其层级至多为i。这个固定的J 滤过满足以下 [IP18，引理 1。6]

- 对于 $\mathcal{C}^J$的任意开邻域 U，$E(X)_{m-1}$、$\mathcal{C}^J$、$E(X)_m - U$ 构成一个有限集。
- $\mathcal{C}^{J,E}(X)_m = \mathcal{C}^{J,E}(X)$，其中某个有限的 m。换言之，经过有限步后，滤过便终止。

以下关于簇的定义引自 [IP18，定义 2。2]

定义 4.3 (E-簇)。对于 $E > 0$，一个 E-簇 $\mathcal{O} = (C, \epsilon, J)$ 由一个几乎复结构 J、一条嵌入的 J-全纯曲线以及一个半径 $\epsilon > 0$ 组成，并满足以下条件：

(1) 所有非常值的 J-全纯映射 $u\colon \Sigma \to X$，其能量为 $\leq E$ 且 $d_H(u(\Sigma)\ C) < \epsilon$，都在同调中表示类 $k[C](k \geq 1)$，并且亏格为 $g \geq g(C) = 0$。(2) $k = 1$ 唯一可能的取值为 $\Sigma = C$。(3) 不存在能量为 $\omega[\Sigma] \leq E$的 J-全纯曲线 $u\colon \Sigma \to X$，使得 $d_H(u(\Sigma)\ C) = \epsilon$。

簇 $\mathcal{O} = (C,\ \epsilon,\ J_0)$ 确定了万能模空间中的开子集

$$\overline{\mathcal{M}}^E_{\mathcal{O}}(X) = c^{-1}\big(B(C,\epsilon)\big) \cap \overline{\mathcal{M}}^E(X)$$

。对于满足以下条件的参数集 $S \subset \mathcal{J}$：每个 $J \in S$ 和 $A \in \mathcal{C}^J$ 均有 $d_H(A, C) \neq \epsilon$，$E(X)$ 的限制 $\mathcal{M}^{S,E}_{\mathcal{O}}(X) := \mathcal{M}^E_{\mathcal{O}}(X) \cap \pi^{-1}(S)$在 $\mathcal{M}^{S,E}(X)$中既开又闭。它在 J 上的纤维为 $\mathcal{M}^{J,E}_{\mathcal{O}}(X) := \mathcal{M}^E_{\mathcal{O}}(X) \cap \pi^{-1}(J)$。根据 [IP18，引理 2.1]，，不存在边界曲线是 J 上的一个开条件。

对于 $J \in \mathcal{J}^E$isol 和一条嵌入的 J-全纯曲线 C，存在 $\epsilon_C > 0$，使得除可数多个 $\epsilon \in (0, \epsilon_C)$ 外，(C, ϵ, J) 均为一个 E-簇，[IP18，引理 2.3]。此外，根据 [IP18，命题 2.4]，，存在有限多个簇 $\mathcal{O}_i = (C_i, \epsilon_i, J)$，使得

$$\overline{\mathcal{M}}^{J,E}(X) = \bigsqcup_i \overline{\mathcal{M}}^{J,E}_{\mathcal{O}_i}(X).$$

选择如下：首先选取 C_{i_0} 中的所有简单曲线 $\mathcal{C}^{J,E}(X)_0$，并选取合适的 ϵ_{i_0}。选取有限多个 $(C_{i_m}, \epsilon_{i_m}, J)$ 覆盖 $\mathcal{C}^{J,E}(X)_m$ 后，$\mathcal{C}^{J,E}(X)_{m+1} - \bigcup_{i_m} c\left(\mathcal{M}^{J,E}_{\mathcal{O}_{i_m}}(X)\right)$是有限的。然后我们可以从这个有限集中选取曲线，并选取合适的 ϵ。最后，我们得到有限多个彼此不相交的簇。

更一般地，假设在参数集 $S \subset \mathcal{J}$ 上，由有限个两两不相交的 Hausdorff 球定义的区域给出一个分解

$$\overline{\mathcal{M}}^{S,E}(X) = \bigsqcup_i \overline{\mathcal{M}}^{S,E}_{\mathcal{O}_i}(X)$$

为开区域和闭区域，参见 [IP18，第 2]节。

若像存在簇分解，则会诱导出全局 Kuranishi 图表的分解，从而得到虚拟基本类的分解。固定 $J \in S$，并设 $(G, \mathcal{T}, \mathcal{E}, s)$ 是 $\mathcal{M}^{J,\,E}(X)$ 的一个全局 Kuranishi 图表。取上述分解在 J 上的纤维，得到 $\mathcal{M}^{J,\,E}(X) = \bigsqcup_i \mathcal{M}^{J,\,E}_{\mathcal{O}_i}(X)$。注意，任意点 $(\phi, u, e, F) \in \mathcal{T}$ 都自带一个映射 $u\colon \Sigma_\phi \to X$。

命题 4.4. *(1)* 设 $\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}$ 是 $\mathcal{T}$ 的子集，满足 $d_H(u(\Sigma_\phi), C_i) < \epsilon_i$。那么 $\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}$ 是 G-等变开子集，且每个 $\big(G、\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}、\mathcal{E}|_{\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}}、s|_{\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}}\big)$ 都是闭开子集 $\mathcal{M}^{J,\,E}_{\mathcal{O}_i}(X) \subset \mathcal{M}^{J,\,E}(X)$ 的全局 *Kuranishi* 图表。

(2) 由这些全局 *Kuranishi* 图表定义的虚拟基本类满足

$$\Big[\overline{\mathcal{M}}^{J,E}(X)\Big]_{\mathrm{vir}} = \sum_i \Big[\overline{\mathcal{M}}^{J,E}_{\mathcal{O}_i}(X)\Big]_{\mathrm{vir}}$$

作为映射 $H^*_G(\mathcal{T}, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$。换言之，给定 $a \in H^*_G(\mathcal{T}, \mathbb{K})$，存在恒等式

$$\Big\langle a, \Big[\overline{\mathcal{M}}^{J,E}(X)\Big]_{\mathrm{vir}}\Big\rangle = \sum_i \Big\langle a|_{\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}}, \Big[\overline{\mathcal{M}}^{J,E}_{\mathcal{O}_i}(X)\Big]_{\mathrm{vir}}\Big\rangle \tag{31}$$

证明。 存在一个映射

$$\mathfrak{c}_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{Subsets}(X), \qquad (\phi, u, e, F) \longmapsto u(\Sigma_\phi).$$

我们断言 $\mathfrak{c}_{\mathcal{T}}$ 是连续的。Subsets(X) 赋予 Hausdorff 拓扑。按照 [AMS24 定义 4.19]， $\mathcal{T}$ 的 Topology 可定义如下：通过忘却定义 6.15 中的标架 F，定义预加厚模空间 $\mathcal{T}_{\mathrm{pre}} = \{(\phi, u, e)\}$。回忆 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{g,\,h,\,d}$ 是定义域的射影参数化中引入的万有曲线。对于 $(\phi, u, e) \in \mathcal{T}_{\mathrm{pre}}$，我们有一个纤维包含映射 $\Sigma_\phi \hookrightarrow \mathcal{C}$ 和 $u\colon \Sigma_\phi \to X$。取 $\Sigma_\phi \to \mathcal{C} \times X$ 和 $e \in V_\mu$ 的像，定义一个映射

$$\mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \to \mathrm{Subsets}(\mathcal{C} \times X) \times V_\mu$$

它是单射，因此我们可以利用 Subsets($\mathcal{C} \times X$) 上的 Hausdorff 拓扑和 V_μ 上的拓扑（它是一个向量空间）来定义 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$ 上的拓扑。我们赋予 $\mathcal{T}$ 从 $\mathcal{T}_{\mathrm{pre'reg}}$ 上的完整 GL($d-g+1$)-标架丛继承的子空间拓扑；它是其中的一个开子集。

利用 $\mathcal{T}$ 上的这个拓扑， $\mathfrak{c}_{\mathcal{T}}$ 是连续映射的复合

$$\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \to \mathrm{Subsets}(\mathcal{C} \times X) \times V_\mu \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{Subsets}(\mathcal{C} \times X) \xrightarrow{(\pi_X)_*} \mathrm{Subsets}(X)$$

(1) $\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}$ 的形式定义是

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i} &= \{(\phi, u, e, F) \in \mathcal{T} : d_H(u(\Sigma_\phi), C_i) < \epsilon_i\} \\ &= \mathfrak{c}_{\mathcal{T}}^{-1}\big(B(C_i, \epsilon_i)\big).\end{aligned}$$

$\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}$ 是开集，因为 $\mathfrak{c}_{\mathcal{T}}$ 是连续的； $\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}$ 两两不交，因为 $\mathcal{O}_i$ 两两不交。定义意味着 $\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i} \cap s^{-1}(0)$ 是 $\mathcal{M}^{J,\,E}_{,\mathcal{O}_i}(X)$ 的原像，因此

同胚 $s^{-1}(0)/G \cong \mathcal{M}^{J}{}_{,E}(X)$ 限制为同胚 $s^{-1}(0) \cap \mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}/G \cong \mathcal{M}^{J,E}_{\mathcal{O}_i}(X)$。因此，$\big(G, \mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}, \overline{\mathcal{E}|_{\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}}}, s|_{\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}}\big)$ 是闭开子集 $\overline{\mathcal{M}^{J,E}_{\mathcal{O}_i}(X)} \subset \mathcal{M}^{J}{}_{,E}(X)$的全局 Kuranishi 图表

（2）由

$$\overline{\mathcal{M}}^{J,E}(X) = \bigsqcup_i \overline{\mathcal{M}}^{J,E}_{\mathcal{O}_i}(X)$$

存在 $s^{-1}(0)$ 个 $\subset \bigsqcup_i \mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}$。因此，不交并 $\bigsqcup_i \big(G, \mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}, \mathcal{E}|_{\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}}, s|_{\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}}\big)$ 是 $(G, \mathcal{T}, \mathcal{E}, s)$ 的一个等价的全局 Kuranishi 图表，并带有显然的开嵌入

$$\bigsqcup_i \big(G, \mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}, \mathcal{E}|_{\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}}, s|_{\mathcal{T}_{\mathcal{O}_i}}\big) \subset (G, \mathcal{T}, \mathcal{E}, s).$$

虚拟基本类在等价下的不变性意味着（31）

□

4.2 簇同痕与全局 Kuranishi 坐标图

全局 Kuranishi 图表可以分解为若干簇 $\mathcal{O} = (C, \epsilon, J)$，其中 C 是一个嵌入的 $\mathbb{P}^1 \subset X$。法丛 $N_{C/X}$ 的次数为 -2。为了将该簇与 [IP18 第 3], 节中的基本模型进行比较，我们选取 J_1，使得 C 的一个邻域双全纯同构于标准局部 $\mathbb{P}^1$ 中零截面的一个邻域。通过这一识别传输 AMS 图表数据，即得到上文定义的局部级数。从 J_0 到 J_1、在 C 上固定且支撑于 C附近的一条一般路径 J_t，给出以下定理 [IP18，定理 7.1]。对于具有相同核心曲线的两个簇$\mathcal{O}_1$、$\mathcal{O}_2$，我们将 $\mathrm{GW}(\mathcal{O}_1) \approx \mathrm{GW}(\mathcal{O}_2)$ 记作

$$\mathrm{GW}(\mathcal{O}_1) - \mathrm{GW}(\mathcal{O}_2) = \sum_{\mathcal{O}_i} \pm \mathrm{GW}(\mathcal{O}_i)$$

其中 $\mathcal{O}_i$ 是有限多个层级严格高于 $\mathcal{O}_1$，$\mathcal{O}_2$（它们处于相同层级）的簇。

命题 4.5（簇同痕，[IP18，定理 7.1]）。对于簇 $\mathcal{O} = (C, \epsilon_0, J_0)$，其中 C 是嵌入的、光滑且正则的，我们有

$$\mathrm{GW}(\mathcal{O}) \approx \mathrm{sign}(C, J_0)\, \mathrm{GW}_0^{\mathrm{elem}}(q^{[C]}).$$

我们采用 [IP18第 6–7]节中的变形和局部模型。将参数化的全局坐标图限制到一个孤立的簇区域后，在每个同调类中都会得到一个连接端点坐标图的配边。由可加性和配边不变性，进而得到 [IP18引理 7.2–7.4]中的简单同痕和壁穿越关系。所得壁穿越符号的乘积为 $\mathrm{sign}(C, J_0)$。

以下命题 4.1 的证明与 [IP18引理 8.2、定理 8.3]中的证明相同

命题 *4.1* 的证明。选取 $J \in \mathcal{J}_E^*$ 作为初始簇分解后，命题 4.4将论断归结为证明

$$\mathrm{GW}_0(\mathcal{O}, q^{[C]}) = \sum_{d \geq 1} e_d\, \mathrm{GW}_0^{\mathrm{elem}}(q^{d[C]})$$

对于某个 $e_d \in \mathbb{Z}$。应用一次命题 4.5 ，我们得到

$$\mathrm{GW}_0(\mathcal{O}) = \mathrm{sign}(C, J_0)\,\mathrm{GW}_0^{\mathrm{elem}}(q^{[C]}) + \sum_{\mathcal{O}_i} \pm\,\mathrm{GW}_0(\mathcal{O}_i)$$

其中 $\mathcal{O}_i$ 是一些有限个高层簇，其核心类是 $[C]$的正整数倍，必然有 $k[C]$ ，且 $k \geq 2$ 具有零亏格。可以安排同痕构造，使得这些高层簇具有正则核心。因此，我们可以递归地将命题 4.5 应用于这些簇。每次迭代都会使核心面积至少翻倍，因此有限分支性和固定的能量界 E 迫使递归终止。于是， e_d 就是在这一递归中所有核心类为 $d[C]$ 的簇出现次数的带符号计数；每次出现均乘以从初始簇到该次出现的路径上所有误差项符号的乘积，以及该次出现处基本贡献的符号。由于该递归使用了与 [IP18引理 8 中相同的簇分解、同痕和符号，2], 将这些整数权重对初始簇求和，即得到 $e_{\beta,\ 0}(X)$ 的 [IP18定理 81]中的系数。

□

第二部分

一般基础

5 代数拓扑准备

5.1 稳定同伦理论基础

5.1.1 复定向环谱与 Thom 同构

我们回顾稳定同伦理论的一些基本知识。这些内容可见于 [Ada74，第三部分]或 [Rud98]。

令 **Sp** 为稳定同伦范畴，其对象为谱。在 **Sp** 上，有悬挂函子 Σ 和循环函子 Ω，它们互为逆映射。$\oplus$ 表示 **Sp** 中的直和，$\wedge$ 表示大括积。对于 $E,\ F \in \mathbf{Sp}$，我们可以定义内部 Hom 对象 $\mathrm{Hom}(E,\ F) \in \mathbf{Sp}$。

谱的例子包括带基点拓扑空间 X 的悬挂谱 $\Sigma^\infty X$，以及 $\Sigma^\infty_+ X$：$\Sigma^\infty\ X \sqcup$ $\mathbb{S} = \Sigma^\infty S^0$ $=$ (pt)；球面谱，以及它的悬挂谱和循环谱

$$\mathbb{S}^n = \begin{cases} \Sigma^n \mathbb{S} = \Sigma^\infty S^n & n \geq 0 \\ \Omega^{-n}\mathbb{S} & n < 0 \end{cases}$$

Sp 借助 $\wedge$ 和 Hom 成为一个闭对称幺半范畴，其中 $\mathbb{S}$ 是单位对象。它也是一个三角范畴。特别地，对于 $E, F \in \mathbf{Sp}$，它们的 Hom 集是一个阿贝尔群，记作 $[E, F]$。

对于 $E \in \mathbf{Sp}$，其同伦群由态射 $\mathbb{S}^n \to E$ 的同伦类构成：

$$\pi_n(E) = E_n = E^{-n} := [\mathbb{S}^n, E].$$

这些都是阿贝尔群。对于一个拓扑空间 X，定义其 E-同调和 E-上同调为

$$H_*(X, E) = \pi_*(\Sigma^\infty_+ X \wedge E)$$
$$H^*(X, E) = \pi_{-*}\,\underline{\mathrm{Hom}}(\Sigma^\infty_+ X, E)$$

~ ~并且，我们还可以通过将上述表达式中的 $\Sigma^\infty_+ X$ 替换为 $\Sigma^\infty X$，定义带基点空间 X 的约化同调 $H_*(X, E)$ 和上同调 $H^*(X, E)$。

定义 5.1 ([Ada74，第三部分章节 10])。一个 环谱 是 $E \in \mathbf{Sp}$ 配备了态射 $\mu\colon\ E \wedge E \to E$ 和 $\eta\colon\ \mathbb{S} \to E$ 使得在同伦意义下，E 成为一个环，其中 μ 是环乘法，而 $\eta\colon\ \mathbb{S} \to E$ 是单位映射。此外，如果 μ 在同伦意义下是交换的，那么我们称 E 为一个同伦交换环谱。

如果 E 是一个同伦交换环谱，那么 $\pi_* E$ 是一个分次交换环。单位元 $1 \in \pi_0 E$ 由映射 $\mathbb{S} \to E$表示。拓扑

空间 X带有一个分次交换乘积：给定 $a\colon\ \Sigma_+^\infty X \to \Sigma^k E$，$b\colon\ \Sigma_+^\infty X \to \Sigma^l E$，定义$a \cup b$为

$$\Sigma_+^\infty X \xrightarrow{\Delta_X} \Sigma_+^\infty X \wedge \Sigma_+^\infty X \xrightarrow{a\wedge b} \Sigma^k E \wedge \Sigma^l E \simeq \Sigma^{k+l} E \wedge E \xrightarrow{\mu} \Sigma^{k+l} E$$

T在本节中，我们始终假设 E 是一个同伦交换环谱 .

设 $\xi\colon\ V \to B$ 是拓扑空间 B上的一个实或复向量丛。其 Thom 空间
ξ is

$$\mathrm{Th}(\xi) = D(V)/S(V).$$

这里，一旦为 V赋予内积， $D(V)$ $S(V)$分别表示单位圆盘丛和单位球面丛。Thom 空间也记作 B^ξ 或 B^V。

定义5.2 （[Ada74，第三部分 10]）。 设 k 是 ξ的实秩。向量丛 $\xi\colon\ V \to B$ 的 -定向是一个 态射的同伦类

$$[\mathfrak{o}] \in [\mathrm{Th}(\xi), \Sigma^k E]$$

使得限制到每个纤维 $V|_b$上时，该态射

$$S^k \simeq S^{V|_b} \hookrightarrow \mathrm{Th}(V) \xrightarrow{\mathfrak{o}} \Sigma^k E$$

在 $\pi_k(\Sigma^k E) \simeq \pi_0(E)$ 中表示 1 或 -1 在 $\pi_* E$中的元素。类 $[\mathfrak{o}] \in \widetilde{H}^k(\mathrm{Th}(\xi)\ E)$称为托姆类。

令 $\gamma_1 \to \mathbb{CP}^\infty$ 为典范复直线丛，并将其托姆空间记作 MU(1)。注意 $\mathrm{MU}(1) \simeq \mathbb{CP}^\infty$。

定义 5.3 ([Ada74，第一部分 (2.1)])。 设 E 是一个环谱。的复定向是指一类态射的同伦类 E

$$\mathbb{CP}^\infty = \mathrm{MU}(1) \to \Sigma^2 E$$

使得其在 $S^2 = \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^\infty$ 上的限制表示 $1 \in \pi_0(E) = \pi_2(\Sigma^2 E)$。 E 连同这样一个态射称为复定向同伦交换环谱。

由于 $\mathbb{CP}^\infty$ 是复线丛的分类空间，定义 5.3 意味着每个复线丛都允许一个 E-定向。事实上，每个复向量丛都允许一个特定的E-定向：

引理 5.4 (由 [Ada74，第一部分 引理 4.6]得出)。 设 E 是一个复定向同伦交换环谱。那么对于任意复向量丛 $\xi\colon\ V \to B$ 我们可以赋予一个托姆类 $u_\xi \in \widetilde{H}^{2\,\mathrm{rk}_{\mathbb{C}}\,\xi}(\mathrm{Th}(\xi)\ E)$ 满足以下条件：

(1) 如果 $f\colon\ C \to B$ 是一个拉回，那么 $u_{f^*\xi} = f^* u_\xi$。

(2) 设 $\xi_i\colon\ V_i \to B_i$、$i = 1$ 是两个复向量丛，并设 $\xi_1 \boxplus \xi_2$ 为它们的外直和。那么 $u_{\xi_1 \boxplus \xi_2} = u_{\xi_1} \cup u_{\xi_2}$。这个表达式是有意义的，因为 $\mathrm{Th}(\xi_1 \boxplus \xi_2) = \mathrm{Th}(\xi_1) \wedge \mathrm{Th}(\xi_2)$。

(3) 在典范线丛上 $\gamma_1 \to \mathbb{CP}^\infty$，类 u_{γ_1} 与定义*5.3*中的复定向重合。

以下上同调群的计算可见于 [Ada74，第二部分引理 2.5，第 4 条。3]。

引理 5.5. *(1)* $H^*(\mathbb{CP}^n,\ E) = E^*[\![x]\!]/x^{n+1}$ 和 $H^*(\mathbb{CP}^\infty,\ E) = E^*[\![x]\!]$

(2) $H^*(BU(n)) = E^*[\![c_1^E, c_2^E, \ldots, c_n]\!]$ 以及 $H^*(BU, E) = E^*[\![c_1^E, c_2^E, \ldots]\!]$

类 $c_i^E \in H^*(BU(n)\ E)$ 是陈类的推广，我们仍称它们为陈类。Whitney 和公式同样成立：

引理 5.6 ([Ada74，第二部分 引理 4.3.(v)])。 设 $V \to B$，$W \to B$ 是秩为 n 和 m 的两个复向量丛，且 $V \oplus W \to B$ 是它们的直和。则

$$c_k^E(V \oplus W) = \sum_{i+j=k} c_i^E(V) \cdot c_j^E(W)$$

5.1.2 形式群律与留数

与普通陈类不同的是线丛的张量积。考虑分类两个线丛张量积的泛映射 $\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$，我们定义形式幂级数 $F_E(x,\ y) \in E^*[\![x,\ y]\!]$：

$$E^*[\![x]\!] = H^*(\mathbb{CP}^\infty) \to H^*(\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty, E) = E^*[\![x, y]\!]$$

$$x \mapsto F_E(x, y)$$

这个幂级数是一个形式群律 [Ada74，第二部分 引理 2。7]。

定义 5.7 ([Ada74，第二部分 第 1]章)。 设 R_* 是一个分次交换环。一个系数取自 R_* 的形式群律是 $F(x,\ y) = \sum_{i,\ j\geq 0} a_{ij}x^i y^j$，其中 $a_{ij} \in R_{2i+2j-2}$ 满足以下条件：

(1) $F(x,\ 0) = F(0,\ x) = x$;
(2) $F(x,\ y) = F(y,\ x)$; (3) F
$(x,\ F(y,\ z)) = F(F(x,\ y)\ z)$。

对于复定向的 E，F_E 称为与 E 相关联的形式群律。

本文中，我们只考虑与复定向且同伦交换的 E 相关联的形式群律 F_E。我们还将 $F_E(x,\ y)$ 记作 $x +_E y$，并将

$$x_1 +_E x_2 +_E \cdots +_E x_n := F_E(x_1, F_E(x_2, \cdots, F_E(x_{n-1}, x_n))).$$

特别地，如果 $x_i = x$，$\forall i$，我们记 $[n]_E x := \underbrace{x +_E x +_E \cdots +_E x}_{n\text{次}}$。如果 E^* 是特征为 p 的分次域，我们称 E 具有有限高度 $n \geq 1$，如果

$$[p]_E x = ax^{p^n} + \cdots$$

对某个非零的 a。对于剩余域的特征为p的完备局部诺特环 E^*，E 的高度是指 F_E 模极大理想约化后的高度。当 p 在系数环中可逆时，我们使用高度 0。

引理 5.8. 设 R 是一个交换环， $F \in R[\![x、\ y]\!]$ 是形式群律。存在唯一的 *1*-形式 $\omega \in R[\![x]\!]dx$，其首项为 $1 \cdot dx$，使得

$$g(F(x,y))d(F(x,y)) = g(x)dx + g(y)dy.$$

其中 $\omega = g（x）\ dx$。特别地，对于常数 a，有

$$g(F(x,a))dF(x,a) = g(x)dx$$

非正式地说， ω在平移下是不变的，其中“平移”理解为对于常数 a 的 $x \mapsto F(x,\ a)$。我们称其为形式群律 F 的不变形式 。

证明。 定义如下的 1-形式：

$$\omega(x) = g(x)dx = \frac{1}{\partial_2 F(x,0)}dx.$$

注意， $g(x)$ 的系数属于 R，因为 $\partial_2 F(x,\ 0)$ 的常数项为 1。

对于形式变量 $x,\ y,\ z$，有

$$F(x, F(y,z)) = F(F(x,y), z).$$

对 z 求导：

$$\partial_2 F(x, F(y,z)) \cdot \partial_2 F(y,z) = \partial_2 F(F(x,y), z).$$

在 $z = 0$ 处取值：

$$\partial_2 F(x,y) \cdot \partial_2 F(y,0) = \partial_2 F(F(x,y), 0),$$

i.e.

$$\partial_2 F(x,y) g(F(x,y)) = g(y).$$

对称地,

$$\partial_1 F(x,y) g(F(x,y)) = g(x).$$

因此,

$$\begin{aligned} g(F(x,y))dF(x,y) &= g(F(x,y))\left(\partial_1 F(x,y)dx + \partial_2 F(x,y)dy\right) \\ &= g(x)dx + g(y)dy. \end{aligned}$$

所以这个 $\omega = g(x)dx$ 满足要求。

另一方面，如果 $\omega = g(x)dx$ 在平移下保持不变，即

$$g(F(x,y))\partial_1 F(x,y) = g(x)$$

对于形式变量 x, y。令 $x = 0$，并回忆归一化 $g(0) = 1$,

$$g(y)\partial_1 F(0,y) = g(0) = 1.$$

因此， $g(x)$ 是唯一的，且形式为 $g(x) = \frac{1}{\partial_2 F(x,0)}$ □

接下来我们定义迹和留数。

定义 5.9. 设 $A \to B$ 是一个环扩张，并且 B 作为 A-模是有限自由的。那么我们可以定义迹

$$\mathrm{Tr}_{B/A} \colon B \to A$$

作为 b 乘以 M_b 的矩阵表示的迹。

定义 5.10. 对于满足以下条件的 $f(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i x^i$，当 $i \to -\infty$ 属于 $\mathfrak{m}$-进拓扑时，$f(x)dx$ 的留数定义为

$$\mathrm{Res}\,(f(x)dx) := a_{-1}$$

下一个引理给出了迹与留数之间的关系，其中 A 是极大理想为 $\mathfrak{m}$ 的诺特完备局部环，且 $B = A[\![x]\!]/f(x)$ 满足 $f(x)$ 是魏尔斯特拉斯级数。这样的 B 是 A 上的自由模。此外，$f(x)$ 在满足定义 5.10 中条件的“洛朗级数”构成的环中有逆映射：因为 $f(x)$ 是魏尔斯特拉斯级数，故存在因式分解

$$f(x) = (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \tag{32}$$

使得 $b_0 \in A^\times$ 和 a_0，a_1，……，$a_{n-1} \in \mathfrak{m}$（极大理想）。我们 定义

$$\frac{1}{f(x)} := \frac{1}{b_0 x^n}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(-a_{n-1}x^{-1} - \cdots - a_0 x^{-n}\right)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{b_1}{b_0}x - \frac{b_2}{b_0}x^2 - \cdots\right)^j\right)$$

这是良定义的，因为每个 x^i 的系数都在 $\mathfrak{m}$-进拓扑下收敛于 A。容易看出，此表达式满足定义 5.10 中的条件。

引理 5.11。 对于这样的 A 和 $B = A[\![x]\!]/(f(x))$，令 $g(x) \in A[\![x]\!]$，我们有

$$\mathrm{Tr}_{B/A}([g(x)]) = \mathrm{Res}\left(\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}dx\right)$$

证明。写成 $f(x) = p(x)u(x)$ 如（32）所示。则

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}dx\right) = \mathrm{Res}\left(g(x)\frac{p'(x)}{p(x)}\right) + \mathrm{Res}\left(g(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

由于 $\frac{1}{u(x)}$ 没有负次数项，$\mathrm{Res}\left(g(x)u'(x)\,u(x)\right) = 0$。因此，我们已经归结为 $f(x)$ 是首一多项式的情形。

写成 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0$。由于两边只取决于模 $f(x)$ 的 $g(x)$，我们可以假设 $g(x)$ 是一个多项式。对于固定的 $g(x)$，迹和留数都是 a_i 的多项式，因此我们可以假设 $f(x)$ 分解为一次函数的乘积，且

$$f(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$$

且 $\alpha_i - \alpha_j$，$i \neq j$ 是可逆的。因此，我们有一个同构

$$B \simeq A[x]/(x - \alpha_1) \oplus \cdots \oplus A[x]/(x - \alpha_n).$$

因此，多项式 $g(x)$ 作用于第 i 个 A 时，只需乘以 $g(\alpha_i)$。这意味着

$$\mathrm{Tr}(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i).$$

另一方面

$$\mathrm{Res}\left(g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\left(\frac{g(x)}{x-\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i)$$

因此两边相等。 □

5.1.3 Morava K 理论、 E 理论与 HKR 理论

我们引入 Morava K-理论 $K(n)$以及 Morava E-理论 E_n，或者更一般地说，在计算中所需的任意 HKR 理论。关于用于定义它们的工具，我们参考 [Lur，第22] 讲，或 [Würl91]。设 p 为一个素数，并且 $n \geq 1$。

注记 5.12。 在奇素数处，Morava K-理论具有 同伦 交换环谱结构。在 $p = 2$处， $K(n)$具有同伦结合乘法 [Würl91，定理 1。5]另见 定义 5之后第 22 讲中 [Lur]的相关讨论。 E_n 无论 p为何，总是同伦交换的。使用 Morava $p \geq 3$ 时，我们总是假设 K-理论。

我们在此总结 Morava K-理论的性质：

引理 5.13 ([AMS21，引理 5.13][Würl91，定理 1.3])。 令 $E = K(n)$ 表示一个 *Morava*K-理论。

(1) $\pi_* K(n) = \mathbb{F}_p[v_n, v_n^{-1}]$，其中 $|v_n| = 2(p^n - 1)$。

*(2) Künneth*公式：如果 X、 Y 是拓扑空间，则

$$H^*(X \times Y, E) \simeq H^*(X, E) \otimes_{E^*} H^*(Y, E)$$

(3) 其形式群律满足

$$[p]_{K(n)} = v_n x^{p^n}$$

特别地， $F_{K(n)}$ 的高度为 n。

除了 Morava K-理论外，我们还将使用“HKR 理论”。Morava E-理论就是一个例子。

定义 5.14 ([HKR00][Str00])**.** 复定向同伦交换环谱 E称为“HKR 理论”，如果它满足：

(1) E^* 是一个以 $\mathfrak{m}$为极大理想的完备局部诺特环。

(2) 域 $E^*/\mathfrak{m}$的特征为 p。

(3) $p^{-1}E^*$ 非零。

（4）由 E 的形式群律在 $E^*/\mathfrak{m}$ 上诱导的形式群律具有高度 n。等价地，在原环 E^* 中写作 $[p]x = px + \sum_{i\geq 2} a_i x^i$，则 $a_1(= p)$ a_2，……， $a_{p^n-1} \in \mathfrak{m}$而 a_{p^n} 是可逆的。

模 p Morava K理论 $K(n)$本身不是 HKR 理论。以下是 HKR 理论的一些例子（更多例子请参见 [HKR00]之后的讨论）

- Morava E理论 E_n 其中

$$\pi_* E_n = W(\mathbb{F}_{p^n})[\![u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]\!][u, u^{-1}]$$

with $|u_i| = 0$ 和 $|u| = 2$。在标准的 p-典型坐标下，形式群律满足

$$[p]_{E_n} = px +_{E_n} u_1 u^{p-1} x^p +_{E_n} u_2 u^{p^2-1} x^{p^2} +_{E_n} \cdots +_{E_n} u_{n-1} u^{p^{n-1}-1} x^{p^{n-1}} +_{E_n} u^{p^n-1} x^{p^n}.$$

- Morava K理论的整提升 $K(n)$，其中

$$\pi_* \widetilde{K}(n) = \mathbb{Z}_p[v_n^{\pm 1}]$$

其中 $|v_n| = 2(p^n - 1)$，且

$$[p]x = px +_{\widetilde{K}(n)} v_n x^{p^n}$$

注意，HKR 理论的 $[p]x$，更一般地说，$[p^m]x$满足魏尔斯特拉斯预备定理：x^{p^n} 的系数是一个单位，而较低次项的系数属于极大理想$\mathfrak{m}$ (并且由于 $\pi_* E$ 关于 $\mathfrak{m}$是完备的)。特别地（令 C_d 为阶数为 d的循环群），我们有 $H^*(BC_{p^m}, E) = E^*[\![x]\!]/[p^m]x$ 是一个自由模，其基底环为 E^*，秩为 p^{mn} [HKR00，推论 5。8]。

5.2 轨形与群作用

5.2.1 将轨形视为群胚

我们采用这样的观点：轨形由一种特殊的李群胚表示，参见 [MP97; Moe02; Ler10] 以了解这一思想的相关讨论。

定义 5.15。李群胚 $\mathcal{G}$ 由以下数据组成：

(1) $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$ 是两个光滑流形。(2) s, t: $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0$是两个光滑浸没映射。$e$: $\mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1$以及 rev: $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_1$是光滑映射。(3) 令 $\mathcal{G}_1 \times_{t,\, \mathcal{G}_0,\, s} \mathcal{G}_1$ 为其纤维积

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{G}_1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{s} & \mathcal{G}_0 \end{array}$$

存在一个光滑映射 comp: $\mathcal{G}_1 \times_{t,\, \mathcal{G}_0,\, s} \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_1$ 对于 a, $b \in \mathcal{G}_1$ 满足 $t(a) = s(b)$（我们称这样的 a, b 为可复合），即 $(a, b) \in \mathcal{G}_1 \times_{t,\, \mathcal{G}_0,\, s} \mathcal{G}_1$，我们也将 $a \circ b = \mathrm{comp}(a, b)$ 记作。

并且我们要求：

(a) $s \circ e = t \circ e =$ 恒等映射$_{\mathcal{G}_0}$，反向 $\circ e = e$。(b) 反向 $\circ$反向 $=$ 恒等映射$_{\mathcal{G}_1}$，$s \circ$ 反向 $= t$ 和 $t \circ$ 反向 $= s$。

(c) 对于 $a, b \in \mathcal{G}_1, t(a) = s(b)$、 $s(a \circ b) = s(a)$、 $t(a \circ b) = t(b)$。

(d) 对于 a， b， $c \in \mathcal{G}_1$ 满足 $t(a) = s(b)$ $t(b) = s(c)$，我们有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

(e) 对于 $a \in \mathcal{G}_1$， $s(a) = x$， $t(a) = y$，我们有

$$e(x) \circ a = a \circ e(y) = a$$

(f) 对于 $a \in \mathcal{G}_1$，我们有

$$a \circ \mathrm{rev}(a) = \mathrm{id}_{s(a)}.$$
$$\mathrm{rev}(a) \circ a = \mathrm{id}_{t(a)}.$$

这个定义表示（$\mathcal{G}_0$， $\mathcal{G}_1$）是一个内部于光滑流形的群胚。 $\mathcal{G}_0$ 和$\mathcal{G}_1$ 中的点分别是该范畴的对象和态射，而 s， t 分别是态射的源和终点。 e表示恒等态射，rev 表示逆态射，comp 表示态射复合。

给定两个李群胚 $\mathcal{G}$， $\mathcal{H}$，从 $\mathcal{G}$到 $\mathcal{H}$的函子 F由光滑映射 F_i: $\mathcal{G}_i \to \mathcal{H}_i$， $i = 0$，1 组成，使得所有结构映射（s， t， e，rev，comp）均与 F_0， F_1交换。

定义 5.16。 函子 F: $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ 是 Morita等价，当且仅当

(1) 本质满射：存在一个从 $\mathcal{G}_0 \times_{F_0, \mathcal{H}_0, s} \mathcal{H}_1$ 到 $\mathcal{H}_0$ 的映射，将 $x \in \mathcal{G}_0, a \in \mathcal{H}_1, F_0(x) = s(a)$映到 $t(a)$。于是

$$\mathcal{G}_0 \times_{F_0, \mathcal{H}_0, s} \mathcal{H}_1 \xrightarrow{t} \mathcal{H}_0$$

是满射且下沉的。

(2) 完全忠实：下图是笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{H}_1 \\ \downarrow{\scriptstyle s\times t} & & \downarrow{\scriptstyle s\times t} \\ \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{F_0 \times F_0} & \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 \end{array}$$

注记 5.17. 事实上，“李群胚”应被视为一个 2-范畴。根据 [Ler10，第 331–332], 页中的讨论，有三种方式来描述这个 2-范畴：

(1) 李群胚、函子以及函子间的自然变换（定义方式与范畴中的相同）构成一个 2-范畴，并令 W 为 Morita 等价；对李群胚 2-范畴在 W处进行局部化。这个局部化后的范畴记作 **Gpoid**。

(2) Lerman 在 [Ler10，定义 3.25、3.26] 中构造了一个 2-范畴 **Bib** ，其对象为李群胚，1-态射称为“双丛”，2-态射为双丛的微分同胚。

（3）流形上的几何栈。

这三种方式给出了等价的 2-范畴 [Pro96；Ler10]。

我们称李群胚 $\mathcal{G}$ 是 真 的 $s \times t$： $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0$ 是真映射；若 *étale*，则 s 和 t 都是局部微分同胚。 $\mathcal{G}$ 是叶状群胚，当且仅当对每个 $x \in \mathcal{G}_0$， $G_x := \{a \in \mathcal{G}_1 | s(a) = t(a) = x\}$是离散的。étale李群胚是叶状群胚，而每个叶状李群胚都与某个 étale 李群胚 Morita等价 [Moe02, 1.5(c)]。轨形是指在 Morita 等价意义下的真叶状/étale李群胚。更确切地说：

定义 5.18。 我们将轨形的 2-范畴定义为注记中 5.17 所述 2-范畴内真叶状/étale李群胚构成的满子范畴 5.17

设 $\mathcal{G}$ 是一个李群胚，我们可以为它关联一个单纯空间 $N_\bullet(\mathcal{G})$，其中 $N_0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$， $N_1(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1$，且 $N_n(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_1 \times_{t,\ G_0,\ s} \mathcal{G}_1 \times \cdots \times_{t,\ G_0,\ s} \mathcal{G}_1$ 含有 n 个 $\mathcal{G}_1$ 的副本。 $N_n(\mathcal{G})$ 由可复合的a_1， a_2，…， $a_n \in \mathcal{G}_1$ 组成。映射 d_i： $N_n(\mathcal{G}) \to N_{n-1}(\mathcal{G})$ 定义如下

$$d_0 = (a_2, a_3, \ldots, a_n), d_n = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$$

$$d_i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i \circ a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n), 1 \leq i \leq n-1$$

并且映射 s_i： $N_n(\mathcal{G}) \to N_{n+1}(\mathcal{G})$ 正在将 $e(s(a_i)) = e(t(a_{i-1}))$ 插入 a_{i-1} 与 a_i之间。

定义 5.19。 设 $\mathcal{X}$ 是由李群胚 $\mathcal{G}$表示的一个轨形。

(1) 我们定义 $B\mathcal{G} := |N_\bullet(\mathcal{G})|$，即 $N_\bullet(\mathcal{G})$ 的几何实现。 $B\mathcal{G}$的同伦型在 Morita 等价下不变。我们用 $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 表示该同伦型。

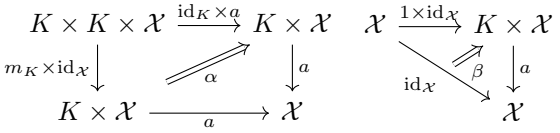
(2) 对于环谱 E， $\mathcal{X}$ 的 E-同调和 E-上同调定义为$B\mathcal{G}$的相应对象：

$$H_*(\mathcal{X}, E) := H_*(\mathrm{Ho}(\mathcal{X}), E).$$
$$H^*(\mathcal{X}, E) := H^*(\mathrm{Ho}(\mathcal{X}), E).$$

5.2.2 具有群作用的轨形与等变局部化

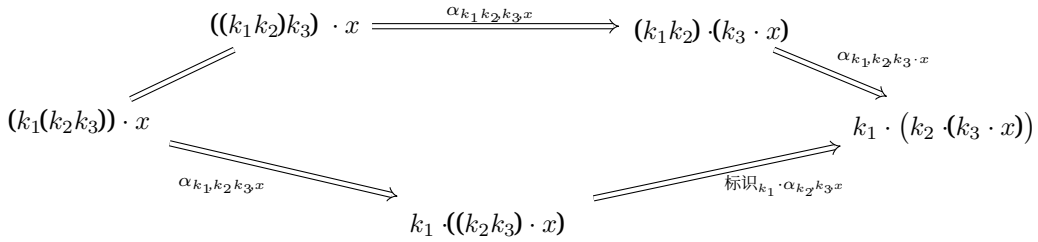
设 K 是一个紧李群，且 $\mathcal{X}$ 是一个轨形。

定义 5.20 （群作用的一般定义）。 $\mathcal{X}$ 上的 K-作用由一个 1-态射a: $K \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 以及可逆 2-态射组成

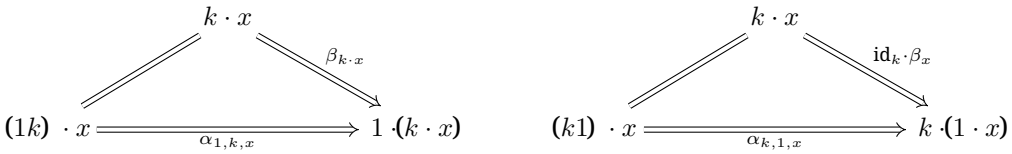


它们还满足相容条件。对于 k、 k_1、 $k_2 \in K$、 $x \in \mathcal{X}$（或更一般地，对于 x： $U \to \mathcal{X}$一个测试流形 U），记 $k \cdot x := a(k, x)$， $\alpha_{k_1, k_2, x}$： $(k_1 \cdot k_2) \cdot x \Rightarrow k_1 \cdot (k_2 \cdot x)$ 以及 β_x： $x \Rightarrow 1 \cdot x$。然后我们进一步要求

（1） α的五边形条件：以下图表交换



(2) 单位恒等式：



定义 5.21. 设 K 是一个作用于 $\mathcal{X}$ （定义5.20）。我们可以构造单纯对象[21]。

$$\cdots \;\substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow}\; K^3\times\mathcal{X} \;\substack{\rightarrow\\\rightarrow}\; K^2\times\mathcal{X} \;\substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow}\; K\times\mathcal{X} \;\rightrightarrows\; \mathcal{X}.$$

该图表的几何实现/同伦余极限称为 $K \curvearrowright X$ 的**商叠**，记作 $[\mathcal{X}/K]$。

存在一个叠的纤维序列

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{X} & \longrightarrow & [\mathcal{X}/K]\\ & & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\ & & [*/K]\end{array}$$

取这些层的同伦型可得到一个空间的纤维序列

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Ho}(\mathcal{X}) & \longrightarrow & \mathrm{Ho}(\mathcal{X}/K)\\ & & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\ & & BK\end{array}$$

虽然可以用叠语言定义轨形上的群作用，但使用“特定李群胚表示上的群作用”更为简便，尽管这一概念在 Morita 等价下并不保持不变。我们将讨论范围限制在全局商轨形 $[M/G]$[22]，其中 G是

[21]这个图 在二范畴意义下是交换的。相容二态射来自 α, β 定义 i-节 5.20

一个紧李群，且 M 允许一个几乎自由的 G作用，这意味着$p \in M$ 的稳定子群是离散的（因而是有限的）。

若 $[M/G]$ 是一个全局商轨形，且 $N \subset G$ 是正规子群，使得 N 在 M 上的作用是自由的。我们构造

$$(G, M) \rightsquigarrow (G/N, M/N) \tag{33}$$

容易看出，$[M/G]$和 $[(M/N)/(G/N)]$是同构的轨形。反过来，任意两个同构的全局商轨形 $[M/G]$ 和 $[N/H]$ 都可以通过一串形如 (33) 的关系相连。事实上，存在一个流形 P，其上有相互交换的 $G \times H$ 作用，使得 G和 H在 P上的作用都自由，并且 $M \simeq P/H$、$N \simeq P/G$ 分别是 G 或 H-流形；这是表示等价的双丛的特殊情形，参见 [Ler10，定义 3.40]或 [BX11，定理 2.26]。

在我们的应用中，群作用具有以下形式：

定义 5.22（群作用的工作定义）。设 K 是一个紧李群，$[M/G]$是一个全局商轨形。对呈示 (G, M)[23]的 K-作用由以下数据组成：

(1) 一个扩张序列

$$1 \to G \to \widetilde{G} \to K \to 1 \tag{34}$$

(2) 在 M 上的 G-作用，扩张了 G-作用。

如果该作用来自定义 5.22，则商叠为 $[M/G]$，即李群胚 $G \times M \to M \times M$。纤维序列为

$$\begin{array}{ccc} M_{hG} & \longrightarrow & M_{h\widetilde{G}} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & BK \end{array} \tag{35}$$

我们将定义一种与等变局部化相关的不动点概念。对于 $p \in M$，令 $G_p \subset G$为其稳定子群。以下定义出现在 [Hir25]的第 5.2 节中

定义 5.23。给定一个在 (G, M) 上的 K-作用，定义

$$M^{\mathrm{fix}} = \{p \in M \,|\, \mathrm{Stab}\, \widetilde{G}(p) \to K \text{ is surjective.}\}$$

G保持集合 M不动点。我们将不动点定义为 $[M/G]^K := [M^{\mathrm{fix}}/G]$。

注记 5.24。此定义正是 [Ara+25，定义 A9] 中的“不动点轨迹”。设 $a\colon\ K \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$为一个弱作用。定义 作用惯性叠 $I_K(\mathcal{X})$ 为一个纤维积

$$\begin{array}{ccc} I_K(\mathcal{X}) & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{\mathcal{X}}} \\ K \times \mathcal{X} & \xrightarrow{(a,\pi_2)} & \mathcal{X} \times \mathcal{X} \end{array}$$

[22]作用群胚为 $\mathcal{G}_0 = M, \mathcal{G}_1 = G \times M$, $s(g,x) = x, t(g,x) = gx, e(x) = (\mathrm{id}_G, x)$, $\mathrm{rev}(g,x) = (g^{-1}, gx)$ 和 $\mathrm{comp}((g,x),(h,gx)) = (hg,x)$。[23]警告：这一概念不一定能通过类似于 (33) 的等价进行传递。不过，如果 P具有一个交换的$G \times H$ 作用，且 G和 H各自的作用都是自由的，我们就可以将这样的定义从 $M = P/H$传递到 P。或许可以将两个全局商表示上的两个群作用提升到 P，并据此进行比较。

于是 $\mathcal{X}^K$ 定义为满足以下条件的 $x \in X$ 的轨迹集： $I_K(\mathcal{X}) \times_{\mathcal{X}} x \xrightarrow{p\times_{\mathcal{X}} x} K$ 是层的满射[24]。因此，定义 5.23 与表示无关。

注记 5.25。对于连通的 K， M^{fix} 是 M 的子流形，因此我们可以讨论法向量丛 $\nu_{M^{\mathrm{fix}}/M}$。例如，在我们的主要应用中， $K = \mathbb{T}$ 是一个环面，情况便是如此。

我们给出 M^{fix} 的另一种描述。令 M/G 为粗商空间，则 $\widetilde{G}$ 在 M 上的作用下降为 M/G 上的一个 K-作用。令 $(M/G)^K$ 表示通常意义下被 K 固定的点，则 M^{fix} 是商映射 $M \to M/G$ 下 $(M/G)^K$ 的原像。

~现在专门考虑以下情形： $K = \mathbb{T} = \mathbb{T}^m$ 是秩为 m 的环面，并且有一个扩张 $1 \to G \to G \to \mathbb{T} \to 1$。 $H^*(B\mathbb{T}, E) = E^*[\![\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_m]\!]$ 根据引理5.5。对于 E-上同调，我们有如下 Atiyah-Bott 局部化版本，其中 E 或者是 Morava K-理论，或者是 E-理论。对于环面作用在紧流形上的情形，参见 [BP24，引理 3。6] 。

引理 5.26。 假设 $[M/G]$ 是紧致的。限制映射 $H^*_{\widetilde{G}}(M, E) \to H^*_{\widetilde{G}}(M^{\mathrm{fix}}, E)$ 与 $E^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$（ $H^*(B\mathbb{T}, E)$ 的分式域）张量后成为同构。

我们将在第 5.5 节中对等变局部化作简明阐述时，再给出此引理的证明5.63，其中包含了该证明。当辛流形具有 Hamilton 环面作用时，我们将把这一局部化引理应用于源自 Gromov–Witten 模空间问题的全局 Kuranishi 图表。

5.2.3 向量轨形丛与稳定几乎复结构

设 $\mathcal{X}$ 是一个轨形，其李群胚表示为 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$。实或复向量轨形丛 $\mathcal{V}$ 是一个向量丛 $V_0 \to \mathcal{G}_0$，连同一个向量丛同构 φ: $s^*V_0 \to t^*V_0$ 在 $\mathcal{G}_1$ 上，使得

(1) 在 $e(x)$ 处， φ: $V_0|_x \to V_0|_x$ 是恒等映射。(2) 对于 $a \in \mathcal{G}_1$， $\varphi(\mathrm{rev}(a)) = \varphi(a)^{-1}$(3) 如果 a， $b \in \mathcal{G}_1$ 是可复合的，那么复合 $\varphi(b) \circ \varphi(a) = \varphi(\mathrm{comp}(a, b))$。

一个例子是 $\mathcal{X}$ 的切丛轨形丛，记作 $T\mathcal{X}$。设 $\mathcal{G}$ 是一个真 étale 李群胚，则定义 $V_0 = T\mathcal{G}_0$，且同构为 $t_* \circ (s_*)^{-1}$，因为 s， t 是局部微分同胚。

如果 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{X}$ 上的向量轨形丛，那么在分类空间 $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 上，我们可以构造一个与 $\mathcal{V}$ 具有相同纤维的向量丛，记作 $\mathrm{Ho}\,\mathcal{V}$。局部模型是：设 $V \to M$ 是一个 G-等变向量丛，则我们可以构造向量丛 $EG \times_G V \to EG \times_G M = M_{hG}$。

定义 5.27. (1) 设 $\mathcal{V} \to \mathcal{X}$ 为实向量轨形丛。 $\mathcal{V}$ 上的稳定几乎复结构是三元组的一个等价类

$$(\mathcal{W}_{\mathbb{C}}, k, J),$$

[24]更准确地说，我们定义函子 $\mathcal{X}^K$ 如下：对于任意测试流形 U， $\mathcal{X}^K(U)$ 是 $\mathcal{X}(U)$ 的满子范畴，其对象为 $x \in \mathcal{X}(U)$，即满足以下条件的 x: $U \to \mathcal{X}$：沿着 x: $U \to \mathcal{X}$， $I_K\ \mathcal{X}\ \times_{\mathcal{X}} U \to K \times U$ ( ) 拉回 π： $I_K(\mathcal{X})$ 后所得的是叠的满射。

w这里 $\mathcal{W}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{X}$ 是复向量轨形丛， $k \geq 0$，而 J 是.....上的复结构

$$\mathcal{V} \oplus (\mathcal{W}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \oplus \underline{\mathbb{R}}^k.$$

(2) 设 $\xi = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ 是一个虚实向量轨道丛（带有固定的表示）。ξ 上的 稳定几乎复结构 是四元组的一个等价类

$$(k, \mathcal{W}_{1,\mathbb{C}}, \mathcal{W}_{2,\mathbb{C}}, \psi),$$

其中 $\mathcal{W}_{1,\mathbb{C}}$,$\mathcal{W}_{2,\mathbb{C}} \to \mathcal{X}$ 是复向量轨形丛， $k \geq 0$，且

$$\psi \colon \mathcal{V}_1 \oplus (\mathcal{W}_{1,\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \oplus \underline{\mathbb{R}}^k \xrightarrow{\simeq} \mathcal{V}_2 \oplus (\mathcal{W}_{2,\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$$

是实向量轨形丛的一个同构。

在这两种情况下，等价关系由以下操作生成：

(i) 通过 $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ 进行稳定化:

$$k \mapsto k+2, \qquad J \mapsto J \oplus J_{\mathbb{C}}, \qquad \psi \mapsto \psi \oplus \psi_0,$$

其中 $J_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的标准复结构，且 $\psi_0(x,y) = x + iy$;

(ii) 通过复丛进行稳定化：对于任意复向量轨形丛 $\mathbb{F}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{X}$,

$$\mathcal{W}_{\mathbb{C}} \mapsto \mathcal{W}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{F}_{\mathbb{C}}, \qquad J \mapsto J \oplus J_{\mathbb{F}}, \qquad \psi \mapsto \psi \oplus \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{\mathbb{C}}}.$$

直和项的典范置换同构均视为已给定。

类似地， $\mathcal{V}$ 上的稳定几乎复结构会在通常的向量丛 Ho $\mathcal{V} \to$ Ho($\mathcal{X}$) 上诱导出稳定几乎复结构。

5.3 对偶性与真推前映射

5.3.1 Thom 同构

对于实秩为 k 的向量丛 ξ: $V \to B$，考虑态射 Th(V) $\to$ Th(V) $\wedge \Sigma^\infty_+ B$，该态射在 Th(V) 上为恒等映射，并投影到 $\Sigma^\infty_+ B$。若 V 具有 E-定向，则我们可以构造

$$\mathrm{Th}(V) \wedge E \to \mathrm{Th}(V) \wedge \Sigma^\infty_+ B \wedge E \xrightarrow{u_\xi \wedge \mathrm{id}_{\Sigma^\infty_+ B}} \Sigma^k E \wedge \Sigma^\infty_+ B \wedge E \simeq \Sigma^k \Sigma^\infty_+ B \wedge (E \wedge E) \xrightarrow{\mathrm{id} \wedge \mu} \Sigma^k_+ B \wedge E.$$

特别地，如果 ξ 是一个复向量丛，且 E 是复定向的，那么我们就有前述映射。这可以推广到具有稳定复结构的虚向量丛的情形。设 B 是一个空间， V， $W \to B$ 是两个实向量丛。该虚向量丛为$\xi = V - W$。 ξ 上的稳定复结构由一个复向量丛 $U \to B$ 以及常值丛 $\mathbb{R}^k$、 $\mathbb{C}^l$连同一个同构组成

$$V \oplus \underline{\mathbb{C}}^l \oplus \underline{\mathbb{R}}^k \simeq W \oplus U$$

这满足一个等价关系。我们将 $\xi = V - W$ 的 Thom 谱定义为

$$\mathrm{Th}(\xi) = B^\xi := \Sigma^{-2l-k} \Sigma^\infty \mathrm{Th}(U)$$

通过降悬，我们可以得到 Th(ξ) $\wedge E \to \Sigma^{\mathrm{rk}\, V - \mathrm{rk}_+} \qquad {}^W B \wedge E$。

定理 5.28 (Thom 同构，[Rud98，定理-定义 V.1。3])。假设 $\xi = V - W$是一个稳定复虚拟丛，E 是复定向的且同伦交换的，并且 $k = \mathrm{rk}\, V - \mathrm{rk}\, W$。映射$\mathrm{Th}(\xi) \wedge E \to \Sigma^k_+ B \wedge E$是一个等价。特别地，我们有同调与上同调之间的等价

$$\widetilde{H}_{*+k}(\mathrm{Th}(\xi), E) \simeq H_*(B, E).$$
$$\widetilde{H}^{*+k}(\mathrm{Th}(\xi), E) \simeq H^*(B, E).$$

请注意，该定理针对的是拓扑空间。如果它是轨形 $\mathcal{X}$ 上的虚拟向量丛，那么我们对 $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})$ 上相应的虚拟向量丛应用 Thom 构造和 Thom 同构。

5.3.2 轨形的 Pontryagin–Thom 塌缩

让我们回顾一下流形上的 Pontryagin–Thom 塌缩，它也称为 Gysin 映射、反向映射或传递映射。设 $f\colon X \to Y$ 是闭流形之间的光滑映射，则存在一个向量丛 $\pi\colon E \to Y$ 和一个嵌入 $i\colon X \to E$，使得 $f = \pi \circ i$。设 $\nu = N_{X/E}$ 是 X 在 E 中的法丛。那么我们有

$$Y^E = Th(E) \to \mathrm{Th}(\nu)$$

如果 E 是平凡向量丛（若添加适当的向量丛 $F \to Y$，则有可能实现），我们可以去悬挂，并在 **Sp** 中得到一个态射，

$$\mathrm{PT}_f\colon \Sigma^\infty_+ Y \to X^{f^*TY - TX}$$

因为虚向量丛 $\nu - f^*E = f^*TY - TX$ 之间存在等价。该态射的同伦类与 E 的选取及嵌入 i 无关。

这一构造可以推广到闭轨形之间的可表态射 [EG11，定理 3.3(1)]。态射 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$称为可表示的，如果对于每个 $x \in \mathcal{X}$，$y = f(x) \in \mathcal{Y}$，所诱导的稳定子群同态都是单射的。证明同样是通过构造一个向量轨形丛 $\mathcal{E} \to \mathcal{Y}$，使得 $\mathcal{X}$ 嵌入[25] 到 $\mathcal{E}$中；参见 [Par23，推论 3。24]。

引理 5.29. 设 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是闭轨形之间的可表态射[26] 。则存在一个态射 s 是一个态射

$$\mathrm{PT}_f\colon \Sigma^\infty_+ \mathrm{Ho}(\mathcal{Y}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{X})^{\mathrm{Ho}(f^*T\mathcal{Y} - T\mathcal{X})}$$

当 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为流形时，这恢复了经典的 *Pontryagin–Thom* 塌缩。

[25]轨形的态射是嵌入，当且仅当它是可表示的、在切空间上是单射的，并且在底层空间上是单射的。[26]为说明可表示性为何在此引理中至关重要，我们考虑有限群的同态 $u\colon G \to H$，其诱导出 $f\colon [点/G] \to [点/H]$。f 是可表示的，等价于 u 是单射的。在此情况下，$BG \to BH$ 的同伦纤维是 H/G，这是一个有限集。我们可以找到一个有限维向量丛 $E \to BH$，并带有一个嵌入 $BG \to E$。Pontryagin–Thom 塌缩在这里适用，因为欧几里得空间中的有限点集具有法丛。如果 $G \to H$ 是满射的且具有非平凡的核 K，则 $BG \to BH$ 的同伦纤维是 BK。在单射的情况下，我们可以将有限集 H/G 嵌入欧几里得空间中。而在这里，我们无法以同样的方式看出如何将 BK 嵌入其中。

定义 5.30。设 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是闭的稳定几乎复轨形之间的可表态射，且设 E 为任意复定向理论，则存在一个映射

$$f_!^{\mathrm{PT}}\colon H^*(\mathrm{Ho}(\mathcal{X}), E) \to H^{*+\dim \mathcal{Y}-\dim \mathcal{X}}(\mathrm{Ho}(\mathcal{Y}), E)\,.$$

由 PTf和 Thom 同构 $\widetilde{H}^*\left(\mathrm{Ho}(\mathcal{X})^{\mathrm{Ho}(f^*T\mathcal{Y}-T\mathcal{X})}\ E\right) \simeq H^{*+\dim \mathcal{X}-\text{维数}\,\mathcal{Y}}(\mathrm{Ho}(\mathcal{X})\ E)$ 定义。

我们称此映射为“庞特里亚金–托姆推进”。目前它仅对可表示的 f有定义，但稍后我们将看到，对于 E 为 Morava K-理论或 HKR 理论的情形，可以去掉这一条件。我们使用记号 $f_!^{\mathrm{PT}}$来区分此推前与定义 5.33中的 $f_!$。

5.3.3 双向性与 Cheng 定理

对于闭轨形 $\mathcal{X}$，Cheng 构造了一个谱的态射 [Che11]。

$$\lambda_{\mathcal{X}}\colon \Sigma^\infty \mathrm{Ho}(\mathcal{X})_+ \to \underline{\mathrm{Hom}}\left(\mathrm{Ho}(\mathcal{X})^{-\mathrm{Ho}\,T\mathcal{X}}, \mathbb{S}\right). \tag{36}$$

在闭情形下，构造如下：考虑对角态射 $\Delta_{\mathcal{X}}\colon\ \mathcal{X} \to \mathcal{X}\times\mathcal{X}$。$\Delta_{\mathcal{X}}$ 是可表示的，因为在 $x \in \mathcal{X}$处，稳定子群的同态也是对角的稳定子群$_x \to$稳定子群$_x \times$稳定子群$_x$，且这是单射。的法丛为 $\mathcal{X} \to \mathcal{X}\times\mathcal{X}$。通过对引理 5.29稍作变式，我们得到

$$\Sigma^\infty \mathrm{Ho}(\mathcal{X})_+ \wedge \mathrm{Ho}(\mathcal{X})^{-\mathrm{Ho}\,T\mathcal{X}} \to \Sigma^\infty \mathrm{Ho}(X)_+$$

$\lambda_{\mathcal{X}}$ 是该映射与 $\mathrm{Ho}(\mathcal{X})_+ \to S^0$的复合。

Cheng 证明了以下对偶性结果，它推广了 BG 对有限群的双向性（[GS96]）。对于可能非紧致的轨形，记 $H_*^{\mathrm{lf}}(\mathcal{X};\ E)$ 为局部有限轨形 E-同调。[27]

定理 5.31 ([Che11，定理 1.0。1][Che13，推论 1。4][AMS21，定理 5。16])。设 E 是$K(n)$ 或 *HKR* 理论，并设 $\mathcal{X} = [M/G]$ 是一个光滑全局商轨道簇，其中 M 为闭、开或带边界紧空间。

(1) 映射 $\lambda_{\mathcal{X}}$ 诱导一个同构

$$H_*^{\mathrm{lf}}(\mathcal{X}; E) \simeq H^{-*}\left(\mathrm{Ho}(\mathcal{X})^{-\mathrm{Ho}\,T\mathcal{X}}, E\right).$$

(2) 若 $\mathcal{X}$ 配备了稳定几乎复结构，则 *Thom* 同构给出

$$\lambda_{\mathcal{X}}\colon H_*^{\mathrm{lf}}(\mathcal{X}; E) \xrightarrow{\simeq} H^{\dim \mathcal{X}-*}(\mathrm{Ho}(\mathcal{X}), E)\,.$$

注记 5.32。对于闭的稳定几乎复 $\mathcal{X}$，还有一种等价的方式来定义 $\lambda_{\mathcal{X}}$。由于$\Delta\colon\ \mathcal{X} \to \mathcal{X}\times\mathcal{X}$是可表示的，$\Delta_!^{\mathrm{PT}}$有定义。记作

$$\delta_{\mathcal{X}} := \Delta_!^{\mathrm{PT}}(1) \in H^{\dim \mathcal{X}}(\mathrm{Ho}(\mathcal{X}\times\mathcal{X}), E).$$

然后，我们可以通过与 $\delta_{\mathcal{X}}$ 取斜积来定义 $\lambda_{\mathcal{X}}\colon\ H_*^{\mathrm{lf}}(\mathrm{Ho}(\mathcal{X})\ E) \to H^{\dim \mathcal{X}-*}(\mathrm{Ho}(\mathcal{X})\ E)$。

[27]此后，对于 $E = K(n)$ 或 HKR 理论，我们使用 $H_*(\mathcal{X};\ E) := \pi_* L_{K(n)}\left(E \wedge \Sigma^\infty_+ \mathrm{Ho}(\mathcal{X})\right)$。

$\lambda_{\mathcal{X}}$ 推广了以下特殊情形：

(1) 如果 $G=1$ 和 $\mathcal{X}=M$ 是闭流形，则映射 $\lambda_M\colon\ \Sigma^\infty M_+ \to \mathrm{Hom}\left(M^{-TM},\ \mathbb{S}\right)$ 与阿蒂亚对偶一致。

(2) 如果 $M=$ 点 和 G 是有限群，此时 维数 $\mathcal{X}=0$。我们有一个同构 $H^*(BG,\ E)\simeq H^{-*}(BG,\ E)$。这与 [GS96，推论 1 中的同构相同。2]。

令 E 为 $K(n)$ 或一种 HKR 理论，并令 $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ 为全局商稳定几乎复拟流形。令 $f\colon\ \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 为一个光滑态射，不必是可表示的。假设 $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ 没有边界且 f 为真，或者它们是带边界紧空间，且 $f(\partial\mathcal{X})\subseteq\partial\mathcal{Y}$。

前述对偶性给出

$$H^*(\mathrm{Ho}(\ \mathcal{X}),E)\xrightarrow{\lambda_{\mathcal{X}}^{-1}}H^{\mathrm{lf}}_{\dim\mathcal{X}-*}(\mathcal{X};E)\xrightarrow{f_*}H^{\mathrm{lf}}_{\dim\mathcal{X}-*}(\mathcal{Y};E)\xrightarrow{\lambda_{\mathcal{Y}}}H^{*-\dim\mathcal{X}+\dim\mathcal{Y}}(\mathrm{Ho}(\mathcal{Y}),E)$$

这里的 f_* 在无边界情形下由真性诱导，在带边界的紧致情形下则由偶映射诱导。

定义 5.33。 在这些假设下，定义 $f_!:=\lambda_{\mathcal{Y}}\circ f_*\circ(\lambda_{\mathcal{X}})^{-1}$，并将其称为 E-上同调中的推前映射。

在可表示情形下，该定义与庞特里亚金–托姆推进映射一致。一个相关命题是 [AMS21，引理 5。22]。

引理 5.34。 若 $f\colon\ \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是闭的稳定几乎复轨形之间的可表态射，则两个推前 $f_!^{\mathrm{PT}}$（定义 *5.30*）和 $f_!$（定义 *5.33*）一致。

*Pr*证明。 令 $\delta_{\mathcal{X}}$ 和 $\delta_{\mathcal{Y}}$ 如注记 5.32中所定义。考虑交换图 m

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{X} & \xrightarrow{\Gamma_f} & \mathcal{X}\times\mathcal{Y}\\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\times\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}}\\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y}\times\mathcal{Y}\end{array}$$

我们用 $a\backslash\delta_{\mathcal{X}}$ 表示 $a\in H_*(\mathrm{Ho}(\mathcal{X})\ E)$ 的斜积。可表 PT 推前映射的横截基变换给出

$$(f\times\mathrm{id}_{\mathcal{Y}})^*\delta_{\mathcal{Y}}=(\Gamma_f)_!^{\mathrm{PT}}(1)=(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\times f)_!^{\mathrm{PT}}\delta_{\mathcal{X}}.$$

对于 $\alpha\in H_*(\mathrm{Ho}(\mathcal{X})\ E)$，我们有

$$\alpha\backslash(f\times\mathrm{id}_{\mathcal{Y}})^*\delta_{\mathcal{Y}}=f_*\alpha\backslash\delta_{\mathcal{Y}}=\lambda_{\mathcal{Y}}(f_*\alpha)$$

并且，由于斜积与第二个因子上的 PT 推前相容 ，

$$\alpha\backslash(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\times f)_!^{\mathrm{PT}}\delta_{\mathcal{X}}=f_!^{\mathrm{PT}}(\alpha\backslash\delta_{\mathcal{X}})=f_!^{\mathrm{PT}}(\lambda_{\mathcal{X}}(\alpha))$$

因此我们有 $\lambda_{\mathcal{Y}}(f_*\alpha)=f_!^{\mathrm{PT}}(\lambda_{\mathcal{X}}(\alpha))$。由于 $\lambda_{\mathcal{X}}$ 是一个同构，这就得到

$$f_!^{\mathrm{PT}}=\lambda_{\mathcal{Y}}\circ f_*\circ\lambda_{\mathcal{X}}^{-1}=f_!$$

根据定义 5.33，对于可表示的 f。 □

命题 5.35。 设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$、$\mathcal{Z}$ 为闭稳定几乎复轨形。

(1) 如果 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$和 $g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$是真映射，那么 $(g \circ f)_! = g_! \circ f_!$

(2) ([Str00, 命题 *8。6]* （群胚版本）设 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$和 $u\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$是横截的轨形态射[28]。那么 $\mathcal{W} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$也是一个轨形。设 $g\colon \mathcal{W} \to \mathcal{Y}$和$v\colon \mathcal{W} \to \mathcal{X}$是投影映射。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{g} & \mathcal{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Z} \end{array}$$

我们有

$$g_! \circ v^* = u^* \circ f_!$$

证明。 (1) 这可直接由定义得出。

(2) 设 $\Gamma_f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$是 f的图，则 Γ_f是可表示的，而 f是复合$\mathcal{X} \xrightarrow{\Gamma_f} \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Z}}} \mathcal{Z}$。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{j=(v,g)} & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathcal{X}} \times u} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\Gamma_f} & \mathcal{X} \times \mathcal{Z} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Z}}} & \mathcal{Z} \end{array}$$

因此，只需证明每个交换方形的 (2) 即可。我们仅给出证明的概要。

(a) $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \times u)^* \circ (\Gamma_f)_! = j_! \circ v^*$。

由于 Γ_f是可表示的，根据 [Par23，推论 3。24] 存在一个复向量轨形丛$\pi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$以及一个嵌入 $i\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}$使得 $\Gamma_f = \pi \circ i$。根据引理 5.34，$\pi_!$，$i_!$ 两者都与经典PT映射一致。由于这是一个已经可表示的横截基变换，我们得到 $(\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \times u)^* \circ (\Gamma_f)_! = j_! \circ v^*$。

(b) $u^* \circ (\pi_Z)_! = (\pi_Y)_! \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \times u)^*$.

令 $[\mathcal{X}]_E = \lambda_X^{-1}$ (1) 为 1 的对偶，则在 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 上或在 $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ 上，$\pi_!$ ($\pi = \pi_{\mathcal{Y}}$ 或$\pi_{\mathcal{Z}}$) 就是与 $[\mathcal{X}]$ 的斜积。由于斜积在拉回上同调类时具有函子性，我们得到 $u^* \circ (\pi_Z)_! = (\pi_Y)_! \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{X}} \times u)^*$。

□

推论 5.36 （投影公式）。 设 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$是真，$a \in H^*(\mathcal{X}, E)$ $b \in H^*(\mathcal{Y}, E)$。则 $f_!(a \cup f^* b) = f_!(a) \cup b$

[28]如果 $x \in \mathcal{X}$，$y \in \mathcal{Y}$，$z \in \mathcal{Z}$使得 $f(x) = u(y) = z$，那么 df 的像： $T_x\mathcal{X} \to T_z\mathcal{Z}$和 $dg\colon : T_y\mathcal{Y} \to T_z\mathcal{Z}$张成 $T_z\mathcal{Z}$。

证明。 考虑以下横截拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\mathcal{X}},f)} & \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\times\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow[\Delta_{\mathcal{Y}}]{} & \mathcal{Y}\times\mathcal{Y} \end{array}$$

我们选取类 $a\times b\in H^*(\mathcal{X}\times\mathcal{Y},E)$，那么由命题 5.35 (2) 可得

$$f_!\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{X}},f)^*(a\times b)=\Delta^*\circ(f\times\mathrm{id}_{\mathcal{Y}})_!(a\times b).$$

左端为 $f_!(a\cup f^*(b))$，右端为 $f_!(a)\cup b$。 □

5.4 HKR 理论与推前公式

在第 5.3.3 节中，我们为 HKR 理论 E 引入了轨形之间真态射的推前映射。为了实际计算推前映射，我们使用 [HKR00] 中的特征映射，它将轨形（的同伦型）的 E-上同调的有理化与其 $L(E)$-上同调相识别；后者取自其 n-重 p-惯性栈，其中 $L(E)$ 是由 E 构造的环谱，使得 $L(E)^*$ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。

随后，我们将建立一个适用于轨形的黎曼–罗赫型公式，将 E-推前与 $L(E)$-推前联系起来；后者本质上就是[29] 普通上同调中的通常推前映射。我们将把该公式与 Kawasaki 的 Riemann–Roch 公式进行比较；后者用于计算等变向量丛的全纯欧拉示性数 [Kaw79]。关于 HKR 特征和跨色特征的转移公式[30]，，请参见 [HKR00，定理 D] 和 [Ben25，定理 3.7–3.8]„ 分别。这些公式为我们关于轨形的黎曼–罗赫公式提供了依据。

最后，我们定义一个特设的等变推前映射，并发展相应的等变 HKR 理论。

5.4.1 HKR 特征：定义

定义 5.37 ([HKR00]). **(1)** 设 $\mathcal{X}$ 为一个紧致轨形（可能带边界），我们定义 p-惯性叠为

$$\mathcal{I}_p\mathcal{X}=\mathrm{colim}_{m\to\infty}\underline{\mathrm{Hom}}([\mathrm{pt}/C_{p^m}],\mathcal{X})$$

这里，$[*/C_{p^m}]$ 表示 $C_{p^m}\curvearrowright$点的商轨形，而 Hom 是内 Hom 叠。余极限沿着图表 $\cdots\to C_{p^3}\to C_{p^2}\to C_p$ 进行，其中映射 $1\in C_{p^m}$ 到 $1\in C_{p^{m-1}}$。等价地，$\mathcal{I}_p\mathcal{X}=\{x\in\mathcal{X},g\in$稳定子群$_x$ |的阶是 g 的幂。

(2) n重 p惯性栈 由 $\mathcal{X}$定义为 $(\mathcal{I}_p)^n\mathcal{X}$，即对 $\mathcal{X}$执行 $\mathcal{I}_p$ n次。等价地，

$$(\mathcal{I}_p)^n\mathcal{X}=\mathrm{colim}_{m\to\infty}\underline{\mathrm{Hom}}\left([\mathrm{pt}/(C_{p^m})^n],\mathcal{X}\right)$$

[29]这并非严格意义上的相等。参见注记 541 30.它关联了高度为 n 和 t 的理论。原始的 HKR 理论是 $t=0$ 情形。

注记 5.38。 (1) [HKR00]中的原始定义适用于有限群 G和有限 G-CW 复形 X。定义一个 G-等变空间

$$\mathrm{Fix}_{n,p} X = \coprod_{\alpha\colon \mathbb{Z}_p^n \to G} X^{\mathrm{im}\,\alpha}$$

这里 α 是一个连续同态，这意味着 α 经过某个 $(\mathbb{Z}/p^m)^n$分解，因为 G是有限的；特别地，只有有限多个 α。这样的 α 称为*HKR* 扇区。 $X^{\mathrm{im}\,\alpha}$是由 im $\alpha \subset G$固定的 X 的子空间。固定$_{n,\ p} X$配备了一个 G-作用，将 $x \in X^{\mathrm{im}\,\alpha}$ 发送到 $gx \in X^{\mathrm{im}(g\cdot\alpha\cdot g^{-1})}$。如果 $\mathcal{X}$ 是 $[M/G]$，其中 G 是有限的且 M 是一个紧流形，那么存在一个轨形同构

$$\mathcal{I}_p^n[M/G] \simeq [\mathrm{Fix}_{n,p} M/G].$$

(2) 由于 $\mathcal{X}$ 是紧致的，只有有限多个同痕类型，因此其中的元素具有有界的阶。所以，定义中的 Hom ($[点/(C_{p^m})^n]$, $\mathcal{X}$) 在有限的~~m~~之后变为常数。下文中，我们将默认取这样的 m，假设 m 足够大，从而可以正确地将 $\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}$定义为 Hom ($[点/C_{p^m}]^n$, $\mathcal{X}$)。

现在定义 $L(E)$。固定一个高度为 n 的 HKR 理论 E，并记 $\Lambda_r = (C_{p^r})^n$。存在一个由满同态组成的逆图表，这些同态将 1 映到 1

$$\cdots \to \Lambda_r \to \Lambda_{r-1} \to \cdots \to \Lambda_1$$

因此， $B\Lambda_r$ 的 E-上同调构成一个有向图表，并定义

$$L' = \mathrm{colim}_{r\to\infty} H^*(B\Lambda_r, E)$$

回顾一下， $H^*(BS^1, E) \simeq E^*[\![x]\!]$ (引理 5.5)。对于每个非平凡群同态 $f\colon \Lambda_r \to S^1$，我们得到 $f^*x \in H^2(B\Lambda_r, E)$，并且 f^*x可通过自然嵌入视为 L'中的一个元素。

定义 5.39 ([HKR00])。 令 S 为由以下元素生成的乘法集： f^*x 对所有 r 以及非平凡同态 $f\colon \Lambda_r \to S^1$。定义分次环 $L(E)^*$ 为

$$L(E)^* = S^{-1}L'$$

我们将 $L(E)$ 记为分次环 $L(E)^*$ 的 Eilenberg-MacLane 谱，而 $L(E)^*$ 上的乘法使 $L(E)$ 成为一个交换同伦环谱。

事实证明， $L(E)^*$ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数，因此其高度为 0。

注记 5.40。 对于每个 r，考虑非平凡特征 $\chi\colon \Lambda_r \to S^1$，每个特征都会在 $B\Lambda_r$ 上诱导一个复直线丛。令 $S_r \subset H^*(B\Lambda_r, E)$ 表示由非平凡 χ 的欧拉特征标 $e_E(\chi)$ 生成的乘法集。于是，我们得到 $L(E)$ 的一个等价定义

$$L(E)^* = \mathrm{colim}_{r\to\infty} S_r^{-1} H^*(B\Lambda_r, E).$$

局部化上同调 $S_r^{-1}H^*(B\Lambda_r, E)$ 将在第 5.5 节再次出现。

注意，存在一个自然的环谱态射 $E \to L(E)$，其在上同调上的作用为$H^*(X, E) \xrightarrow{a\mapsto a\otimes 1} H^*(X, E) \otimes_{E^*} L(E)^* \to H^*(X, L(E))$。 $L(E)$ 带有从 E继承而来的自然复定向。

注记 5.41。 尽管 $L(E)$ 是一种有理理论，但其形式群律并非简单地由 $x+y$ 给出。因此， $L(E)$-上同调的推前并非 $\mathbb{Q}$-上同调的推前。它们之间通过一个积分公式相关联；这一公式的思路与利用Grothendieck–Riemann–Roch公式计算 K-理论推前相同。

我们记录 $L(E)$ 的以下性质。假设 r 足够大。注意，恰好有 p^{na} 个同态 $\chi\colon \Lambda_r \to C_{p^a}$。

引理 5.42. 元素 $e(\chi) \in H^*(B\Lambda_r, E) \to L(E)^*$ 的像两两不同，且恰好是方程[31] $[p^a]x = 0$的根。

HKR 特征标映射的构造如下。选取足够大的 m ，使得 $\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}$ =Hom $([\text{点}/\Lambda_m], \mathcal{X})$。泛映射为 $\mathcal{I}_p^n\mathcal{X} \times [\text{点}/\Lambda_m] \to \mathcal{X}$。取（Borel） E-上同调，得到

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{X}, E) &\to H^*\left(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X} \times [\mathrm{pt}/\Lambda_m], E\right) \\ &\simeq H^*(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}, E) \otimes_{E^*} H^*(B\Lambda_m, E) \\ &\to H^*(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}, E) \otimes_{E^*} L(E)^* \to H^*(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}, L(E)). \end{aligned}$$

Künneth公式成立，因为 $H^*(B\Lambda_m, E)$ 是一个自由 E^* 模。

定义5.43 ([HKR00])。 设 $\mathcal{X}$ 是一个紧致轨形。 E 的 ***HKR*** 特征标定义为上述复合：$\chi_{n,p}(\mathcal{X})\colon H^*(\mathcal{X}, E) \to H^*(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}, L(E))$

定理5.44 ([HKR00，定理 C])。 特征 $\chi_{n,\ p}(\mathcal{X})$ 诱导出一个同构

$$\chi_{n,p}(\mathcal{X})\colon L(E)^* \otimes_{E^*} H^*(\mathcal{X}, E) \to H^*\left(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}, L(E)\right).$$

事实上，这是一个分次环的同构。

注记 5.45。 这里的表述与 [HKR00，定理 C],略有不同，因为那里仅适用于 $[X/G]$ ，其中 X 是有限的 G-CW复形。然而，我们可以找到一个轨形-CW滤过[32] 的 $\mathcal{X}$ ，并通过归纳法（利用Mayer–Vietoris序列）证明。

尽管 E 的Künneth同构通常并不成立，但我们在与 $L(E)^*$进行张量积后，证明了一个Künneth型引理，利用定理5.44中的识别。

引理5.46。 设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$为紧致轨形。则存在一个环同构

$$L(E)^* \otimes_{E^*} H^*(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, E) \simeq (L(E)^* \otimes_{E^*} H^*(\mathcal{X}, E)) \otimes_{L(E)^*} (L(E)^* \otimes_{E^*} H^*(\mathcal{Y}, E))$$

证明。 根据定理 5.44，这等价于证明

$$H^*\left(\mathcal{I}_p^n(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), L(E)\right) \simeq H^*\left(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}, L(E)\right) \otimes_{L(E)^*} H^*\left(\mathcal{I}_p^n\mathcal{Y}, L(E)\right).$$

[31]在 E^*上取Weierstrass分解， $[p^a]_E x = U_a(x)W_a(x)$，其中 $U_a(x) \in E^*[\![x]\!]^\times$ 和 $W_a(x) \in E^*[x]$ 是首一Weierstrass多项式。这里的根指 $W_a(x)$的根。系数扩张后的 $[p^a]_E x$ 的商被理解为有限自由代数 $E^*[\![x]\!]/([p^a]_E x) \cong E^*[x]/(W_a(x))$的基变换。[32]这由 [Par23，命题3.5]保证。

由于对充分大的 r， $\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}=\mathrm{Hom}([\text{点}/\Lambda_r],\mathcal{X})$，并且

$$\mathrm{Hom}\left([\mathrm{pt}/\Lambda_r],\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\right)\simeq\mathrm{Hom}\left([\mathrm{pt}/\Lambda_r],\mathcal{X}\right)\times\mathrm{Hom}\left([\mathrm{pt}/\Lambda_r],\mathcal{Y}\right),$$

我们有 $\mathcal{I}_p^n(X\times\mathcal{Y})\simeq\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}\times\mathcal{I}_p^n\mathcal{Y}$。因此，Künneth同构成立，因为 $L(E)$ 是有理的。

□

5.4.2 黎曼–罗赫型公式

设 $\mathcal{X}$ 是一个带有稳定几乎复结构的闭轨形。取充分大的 m，使得 $\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}=\mathrm{Hom}\left([\text{点}/\Lambda_m],\ \mathcal{X}\right)$，并将泛映射记为

$$q=q_{\mathcal{X}}\colon[\mathrm{pt}/\Lambda_m]\times\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}\to\mathcal{X}.$$

$q^*T\mathcal{X}$是 $\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}\times[\text{点}/\Lambda_m]$上的向量轨形丛，等价地，它是 $\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}$上的 Λ_m-等变向量轨形丛，其中 $\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}$带有平凡的 Λ_m 作用。

定义 5.47。定义 $\nu_{\mathcal{X}}=(q^*T\mathcal{X})^{\mathrm{mov}}$，即 $q^*T\mathcal{X}$中非平凡不可约 Λ_m表示所成的向量轨形丛，也称为“移动部分”。

平凡表示部分／不动部分实际上是 $T\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}$。 $T\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}$和 $\nu_{\mathcal{X}}$带有自然的稳定复结构，使得 $q^*T\mathcal{X}=T\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}\oplus\nu_{\mathcal{X}}$保持稳定复结构[33]。 E上关于上同调的等变欧拉类属于 $T\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}$中的 $H^*(I_p^n\mathcal{X},E)$，而 $\nu_{\mathcal{X}}$的等变欧拉类属于 $H^*(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}\times[\text{点}/\Lambda_m],\ E)$。

定义 5.48。定义 $e_{\mathrm{HKR}}^L(\nu_{\mathcal{X}})$[34] 为 $\nu_{\mathcal{X}}$ 的等变欧拉类在映射 $H^*(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}\times[\text{点}/\Lambda_m],\ E)\to H^*(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X},L(E))$ 下的像。

引理 5.49。 $e_{\mathrm{HKR}}^L(\nu_{\mathcal{X}})$ 在 $H^*(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X},L(E)$ 中是可逆的。

证明。我们应用命题 5.64，其中取 $A=\Lambda_m$。 □

设 $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$都是带有稳定几乎复结构的闭轨形，且 $f\colon\ \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$是一个光滑映射。 $\mathcal{I}_p^n$的自然性诱导出一个映射 $\mathcal{I}_p^nf\colon\ \mathcal{I}_p^n\mathcal{X}\to\mathcal{I}_p^n\mathcal{Y}$。我们有两个推前映射，一个用于 E-上同调（高度 n），另一个用于 $L(E)$-上同调（高度 0）。本节的目标是给出以下相容性图表，该图表联系了 E 和 $L(E)$推前映射。

---

[33] $T\mathcal{X}$上的稳定复结构需要两个复向量轨形丛 $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$， $\mathcal{W}_{\mathbb{C}}$ 以及一个常值实向量丛 $\mathbb{R}^k$，并带有一个同构 $T\mathcal{X}\oplus\mathcal{V}_{\mathbb{C}}\oplus\mathbb{R}^k\simeq\mathcal{W}_{\mathbb{C}}$。通过 q^*拉回这些丛后，这些丛（的拉回丛）也是$\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}$上的 Λ_m-等变向量轨丛。由于复向量轨形丛的不动部分和移动部分仍然是复的，我们得到

$$T\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}\oplus(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})^{\mathrm{fix}}\oplus\underline{\mathbb{R}}^k\simeq(\mathcal{W}_{\mathbb{C}})^{\mathrm{fix}}$$
$$\nu_{\mathcal{X}}\oplus(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})^{\mathrm{mov}}\simeq(\mathcal{W}_{\mathbb{C}})^{\mathrm{mov}}.$$

[34] $\nu_{\mathcal{X}}$在 $\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}$的不同连通分支上可能具有不同的秩，因此严格来说，我们应当为每个连通分支 C定义$e_{\mathrm{HKR}}^L(\nu_{\mathcal{X}}|_C)$。

定理 5.50。 存在一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{X},E) & \xrightarrow{e^L_{\mathrm{HKR}}(\nu_{\mathcal{X}})^{-1}\cdot\chi_{n,p}(\mathcal{X})} & H^*(\mathcal{I}^n_p\mathcal{X},L(E)) \\ \downarrow{\scriptstyle f_!} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathcal{I}^n_p f)_!} \\ H^*(\mathcal{Y},E) & \xrightarrow[e^L_{\mathrm{HKR}}(\nu_{\mathcal{Y}})^{-1}\cdot\chi_{n,p}(\mathcal{Y})]{} & H^*(\mathcal{I}^n_p\mathcal{Y},L(E)) \end{array}$$

水平映射为 $a\in H^*(\mathcal{X},E)\mapsto e^L_{\mathrm{HKR}}(\nu_{\mathcal{X}})^{-1}\cdot\chi_{n,\ p}(\mathcal{X})(a)$。

我们采用以下策略证明定理 5.50。我们在引理 5.52中证明可表情形，并在引理 $\mathcal{Y}=$点 情形 5.53中证明，然后将二者结合起来证明定理 5.50。

下面的辅助引理比较向量轨形丛 π的 W和 $\mathcal{Z}$的 $\mathcal{I}^n_p$与 χ： $W\to\mathcal{Z}$。与定义 5.47类似，在拉回 $q_{\mathcal{Z}}$: $\mathcal{I}^n_p\mathcal{Z}\times[\mathrm{pt}/\Lambda_r]\to\mathcal{Z}$下，存在一个分裂$q_{\mathcal{Z}}W=W_{\text{定}}\oplus W_{\text{移}}$[35]。容易看出， $\mathcal{I}^n_pW$是 $\mathcal{I}^n_p\mathcal{Z}$上的向量轨形丛，其纤维为$W_{\text{定}}$。

引理 5.51。我们有

$$\chi_W(u_E(W))=u_L(W^{\mathrm{fix}})\cdot e^L_{\mathrm{HKR}}(W^{\mathrm{mov}}).$$

and

$$\chi_W\left(\mathrm{Th}_W(a)\right)=\mathrm{Th}_{W^{\mathrm{fix}}}\left(\chi_{\mathcal{Z}}(a)\cdot e^L_{\mathrm{HKR}}(W^{\mathrm{mov}})\right). \tag{37}$$

这里， $u_E(W)\in\widetilde{H}^*(\mathrm{Th}(W)\ E)$和 $u_L(W_{\text{定}})\in\widetilde{H}^*(\mathrm{Th}(W^{\mathrm{fix}})\ L(E))$[36]分别是 E和 $L(E)$ 上同调中的托姆类。

证明。 为计算 χ_W，我们考虑

$$q_W:\mathcal{I}^n_pW\times[\mathrm{pt}/\Lambda_r]\to W$$

其中 $\mathcal{I}^n_pW=W_{\text{固定}}$。由 W分裂为 W^{fix},W，拉回后移动，我们有

$$q_W^*(u_E(W))=u_E(W^{\mathrm{fix}})e_E(W^{\mathrm{mov}})\in\widetilde{H}^*\left(\mathrm{Th}(W^{\mathrm{fix}})\times[\mathrm{pt}/\Lambda_r],E\right).$$

那么，在 $\widetilde{H}^*\left(\mathrm{Th}(W_{\text{固定}})\times[\text{点}/\Lambda_r],\ E\right)\to\widetilde{H}^*\left(\mathrm{Th}(W^{\mathrm{fix}})\ L(E)\right)$之后，它变为 $u_L(W_{\text{固定}})e^L_{\mathrm{HKR}}(W_{\text{移动}})$。这是第一个公式

为证明（37），令 π: $W\to\mathcal{Z}$且 π^{fix}: $W^{\mathrm{fix}}\to\mathcal{I}^n_p\mathcal{Z}$。然后，

$$\begin{aligned}\chi_W(\mathrm{Th}_W(a))&=\chi_W(u_E(W)\pi^*a)\\&=u_L(W^{\mathrm{fix}})\cdot e^L_{\mathrm{HKR}}(W^{\mathrm{mov}})\cdot(\pi^{\mathrm{fix}})^*\chi_{\mathcal{Z}}(a)\\&=\mathrm{Th}_{W^{\mathrm{fix}}}\left(\chi_{\mathcal{Z}}(a)\cdot e^L_{\mathrm{HKR}}(W^{\mathrm{mov}})\right).\end{aligned}$$

□

为简便起见，我们用 $\chi_{\mathcal{X}}$， $\chi_{\mathcal{Y}}$表示$\chi_{n,\ p}$的 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$，并用 $e_{\mathcal{X}}\in H^*\left(\mathcal{I}^n_p\mathcal{X},\ L(E)\right)$表示$e^L_{\mathrm{HKR}}(\nu_{\mathcal{X}})$。

[35]它们都是定义在 $\mathcal{I}^n_p\mathcal{Z}\times[\text{点}/\Lambda_r]$上的丛，或者等价地说，是定义在 $\mathcal{I}^n_p\mathcal{Z}$上的 Λ_r-等变丛。[36]相关的向量丛是 $W^{\mathrm{fix}}\to\mathcal{I}^n_p\mathcal{Z}\times[\text{点}/\Lambda_r]$。

引理 5.52。 定理 *5.50* 在 f 可表示时成立。也就是说，对于可表示的 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，我们有

$$\frac{\chi_{\mathcal{Y}}\left(f_!(a)\right)}{e_{\mathcal{Y}}} = (\mathcal{I}_p^n f)_! \left(\frac{\chi_{\mathcal{X}}(a)}{e_{\mathcal{X}}}\right).$$

证明。 根据 [Par23，推论 3.24]，，我们可以找到一个向量轨形丛 $V \to \mathcal{Y}$ 和一个嵌入$\mathcal{X} \to V$，使得 f 是复合 $\mathcal{X} \to V \to \mathcal{Y}$。令 N 为 $\mathcal{X} \subset V$的法丛。为简便起见，我们记 $e_N = e^L_{\mathrm{HKR}}(N^{\mathrm{mov}})$ 和 $e_V = e^L_{\mathrm{HKR}}(V_{\mathrm{mov}})$。

将（37）应用于向量轨形丛 $N \to \mathcal{X}$和 $V \to \mathcal{Y}$，得到

$$\chi_N\left(\mathrm{Th}_N(a)\right) = \mathrm{Th}_{N^{\mathrm{fix}}}\left(\chi_{\mathcal{X}}(a) e_N\right) \tag{38}$$

and

$$\chi_V\left(\mathrm{Th}_V(b)\right) = \mathrm{Th}_{V^{\mathrm{fix}}}\left(\chi_{\mathcal{Y}}(b) e_V\right).$$

在第二种情形下，由于 Th_V是一个同构，令 $z = \mathrm{Th}_V(b)$，则

$$\chi_{\mathcal{Y}} \circ (\mathrm{Th}_V)^{-1}(z) = e_V^{-1} \cdot (\mathrm{Th}_{V^{\mathrm{fix}}})^{-1} \circ \chi_V(z) \tag{39}$$

~ ~令 $j_*\colon H^*(\mathrm{Th}(N)\ E) \to H^*(\mathrm{Th}(V)\ E)$ 为由包含映射诱导的典范映射。我们有

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{Y}}(f_!(a)) &= \chi_{\mathcal{Y}}\left((\mathrm{Th}_V)^{-1} \circ j_* \circ \mathrm{Th}_N(a)\right) \\
&\overset{(39)}{=} e_V^{-1} \cdot (\mathrm{Th}_{V^{\mathrm{fix}}})^{-1} \circ \chi_V \circ j_* \circ \mathrm{Th}_N(a) \\
&= e_V^{-1} \cdot (\mathrm{Th}_{V^{\mathrm{fix}}})^{-1} \circ (\mathcal{I}_p^n j)_* \circ \chi_N \circ \mathrm{Th}_N(a) \\
&\overset{(38)}{=} e_V^{-1} \cdot (\mathrm{Th}_{V^{\mathrm{fix}}})^{-1} \circ (\mathcal{I}_p^n j)_* \circ \mathrm{Th}_{N^{\mathrm{fix}}}\left(\chi_{\mathcal{X}}(a) e_N\right)
\end{aligned}$$

注意到，$(\mathrm{Th}_{V^{\mathrm{fix}}})^{-1} \circ (\mathcal{I}_p^n j)_* \circ \mathrm{Th}_{N^{\mathrm{fix}}}$ 恰好是与之相关的推前 $(\mathcal{I}_p^n f)_!$

$$\mathcal{I}_p^n f\colon \mathcal{I}_p^n \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{I}_p^n \mathcal{Y}.$$

因此，我们得到

$$\chi_{\mathcal{Y}}(f_!(a)) = e_V^{-1} (\mathcal{I}_p^n f)_! \left(\chi_X(a) e_N\right)$$

由投影公式（推论 5.36）以及 $N_{\mathrm{mov}} - f^* V_{\mathrm{mov}} = f^* T\mathcal{Y}^{\mathrm{mov}} - T\mathcal{X}_{\mathrm{mov}}$,

$$\frac{\chi_{\mathcal{Y}}\left(f_!(a)\right)}{e_{\mathcal{Y}}} = (\mathcal{I}_p^n f)_! \left(\frac{\chi_{\mathcal{X}}(a)}{e_{\mathcal{X}}}\right).$$

注意，由于 $e_{\mathcal{X}}, e_{\mathcal{Y}}, e_N, e_V$ 都是可逆的，我们可以除以它们。 □

在下一个情形中，我们处理映射 $\mathcal{X} \to \mathrm{pt}$ 和 $\mathcal{I}_p^n \mathcal{X} \to \mathrm{pt}$。我们用 $t^E_{\mathcal{X}}$ 和 $t^L_{\mathcal{I}_p^n \mathcal{X}}$ 表示相应的推前映射。

引理 5.53. 定理 *5.50* 在 $\mathcal{Y}$ =点的情况下成立。等价地，

$$(E \to L(E))\left(t^E_{\mathcal{X}}(a)\right) = t^L_{\mathcal{I}_p^n \mathcal{X}}\left(\frac{\chi_{\mathcal{X}}(a)}{e_{\mathcal{X}}}\right)$$

这里$(E \to L(E))$ 表示环同态 $E^* \to L(E)^*$。

证明。 $H^*(\mathcal{X},\ E)\otimes_{E^*}L(E)^*\simeq H^*\left(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X},\ L(E)\right)$上有两个迹。

- $\tau(c)=(E\to L(E))t_{\mathcal{X}}^E\left(\chi_{\mathcal{X}}^{-1}(c)\right)$。它是通过将迹 $t_{\mathcal{X}}^E$ 沿 $H^*(\mathcal{X},E)$ 基变换至$H^*(\mathcal{X},E)\otimes_{E^*}L(E)^*$来定义的。
- $\sigma(c)=t_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}}^L\left(\underline{\frac{c}{e_{\mathcal{X}}}}\right)$。

引理等价于证明 $\tau=\sigma$。

我们需要以下输入。回忆 $\delta_{\mathcal{X}}=(\Delta_{\mathcal{X}})_!^E(1)$。

(a) $K:=\chi_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}(\delta_{\mathcal{X}})=(\Delta_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}})_!(e_{\mathcal{X}})$.

考虑可表示映射 $\Delta_{\mathcal{X}}\colon\mathcal{X}\to\mathcal{X}\times\mathcal{X}$。我们有

$$\mathcal{I}_p^n(\mathcal{X}\times\mathcal{X})=\mathcal{I}_p^nX\times\mathcal{I}_p^nX$$

$$e_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}=e_{\mathcal{X}}\boxtimes e_{\mathcal{X}}.$$

应用引理 5.52:

$$\chi_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}((\Delta_{\mathcal{X}})_!(1))=e_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}\cdot(\Delta_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}})_!\left(\frac{\chi_{\mathcal{X}}(1)}{e_{\mathcal{X}}}\right)=(\Delta_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}})_!(e_{\mathcal{X}})$$

The 最后一个等式由投影公式得出，因为 $(\Delta_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}})^*e_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}=(\Delta_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}})^*(e_{\mathcal{X}}\boxtimes e_{\mathcal{X}})=e_{\mathcal{X}}^2$.

(b) 对所有 $c\in H^*\left(\mathcal{I}_p^n\mathcal{X},\ L(E)\right)$, $(c\boxtimes 1)K=(1\boxtimes c)K$。

由投影公式可立即得到:

$$(c\boxtimes 1)(\Delta_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}})_!(e_{\mathcal{X}})=(\Delta_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}})_!\left((\Delta_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}})^*(c\boxtimes 1)\cdot e_{\mathcal{X}}\right)=(\Delta_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}})_!(c\cdot e_{\mathcal{X}}).$$

$(1\boxtimes c)K$ 也同样成立。因此它们相等。

(c) $(\tau\otimes 1)\left((c\boxtimes 1)K\right)=c$.

这在 $H^*(\mathcal{X},\ E)$ 中就可以理解：令 $p_1,\ p_2$ 分别为到第一项和第二项的投影，那么只需证明对于 $a\in H^*(\mathcal{X},\ E)$

$$(p_2)_!\left(p_1^*a\cup\delta_{\mathcal{X}}\right)=a. \tag{40}$$

再次根据投影公式

$$(p_2)_!\left(p_1^*a\cup(\Delta_{\mathcal{X}})_!(1)\right)=(p_2)_!\left((\Delta_{\mathcal{X}})_!(\Delta_{\mathcal{X}})^*\circ p_1^*(a)\right)=(p_2\circ\Delta_{\mathcal{X}})_!\circ(p_1\circ\Delta_{\mathcal{X}})^*(a)=a,$$

因为 $p_1\circ\Delta_{\mathcal{X}}=p_2\circ\Delta_{\mathcal{X}}=\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$。

(d) $(1\otimes\sigma)((1\boxtimes c)K)=c$。

令 $q_1\colon\ \mathcal{I}_p^n\mathcal{X}\times\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}\to\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}$为到第一项的投影。根据 σ 的定义，

$$\begin{aligned}(1\otimes\sigma)\left((1\boxtimes c)K\right) &= (q_1)_!\left(\frac{(1\boxtimes c)K}{1\boxtimes e_{\mathcal{X}}}\right)\\ &= (q_1)_!\left(\frac{(\Delta_{\mathcal{I}_p^n})_!(ce_{\mathcal{X}})}{1\boxtimes e_{\mathcal{X}}}\right)\\ &= (q_1)_!\left(\frac{(1\boxtimes e_{\mathcal{X}})\cdot(\Delta_{\mathcal{I}_p^n})_!(c)}{1\boxtimes e_{\mathcal{X}}}\right)\\ &= (q_1)_!\circ(\Delta_{\mathcal{I}_p^n})_!(c)\\ &= c\end{aligned}$$

最后，我们利用四个事实来证明引理。

$$\begin{aligned}\tau(c) &\overset{(d)}{=} \tau\left((1\otimes\sigma)\left((1\boxtimes c)K\right)\right)\\ &= (\tau\otimes\sigma)\left(((1\boxtimes c)K)\right)\\ &= \sigma\left((\tau\otimes 1)\left((c\boxtimes 1)K\right)\right)\\ &\overset{(c)}{=} \sigma(c)\end{aligned}$$

□

定理的证明 *5.50*。 设 $f\colon\ X\to\mathcal{Y}$ 是任意态射。根据投影公式，对于$a\in H^*(\mathcal{X},\ E)$ $b\in H^*(\mathcal{Y},\ E)$

$$t_{\mathcal{X}}^E(af^*b) = t_{\mathcal{Y}}^E\circ f_!(af^*b) = t_{\mathcal{Y}}^E\left((f_!a)\cdot b\right) \tag{41}$$

因此，固定 $a\in H^*(\mathcal{X},\ E)$，对于任意 $b\in H^*(\mathcal{Y},\ E)$，我们计算

$$\begin{aligned}&t^L_{\mathcal{I}_p^n(\mathcal{Y})}\left(\frac{\chi_{\mathcal{Y}}(f_!^Ea)}{e_{\mathcal{Y}}}\chi_{\mathcal{Y}}(b)\right)\\ &= \mathrm{ch}\left(t_{\mathcal{Y}}^E((f_!^Ea)b)\right) && \text{根据引理5.53}\\ &= \mathrm{ch}\left(t_{\mathcal{X}}^E(af^*b)\right) && \text{根据等式（41）}\\ &= t^L_{\mathcal{I}_p^n(\mathcal{X})}\left(\frac{\chi_{\mathcal{X}}(a)}{e_{\mathcal{X}}}\chi_{\mathcal{X}}(f^*b)\right) && \text{根据引理 5.53}\\ &= t^L_{\mathcal{I}_p^n(\mathcal{X})}\left(\frac{\chi_{\mathcal{X}}(a)}{e_{\mathcal{X}}}(\mathcal{I}_p^nf)^*\chi_{\mathcal{Y}}(b)\right) && \text{根据特征自然性}\\ &= t^L_{\mathcal{I}_p^n(\mathcal{Y})}\left((\mathcal{I}_p^nf)_!^L\left(\frac{\chi_{\mathcal{X}}(a)}{e_{\mathcal{X}}}\right)\chi_{\mathcal{Y}}(b)\right) && \text{根据投影公式}\end{aligned}$$

在 e nd，配对 $t^{L}_{\mathcal{I}^n_p\mathcal{X}}(a\cup b)$ 是完美的[37] 并且 $\chi_{\mathcal{Y}}(b)$ 张成 $H^*\left((\mathcal{I}^n_p\mathcal{X},\ L(E)\right)$。因此我们重新 h

$$\frac{\chi_{\mathcal{Y}}(f^E_! a)}{e_{\mathcal{Y}}} = (\mathcal{I}^n_p f)^L_! \left(\frac{\chi_{\mathcal{X}}(a)}{e_{\mathcal{X}}}\right)$$

□

5.4.3 环面等变推前

令 $\mathbb{T}$ 为一个实环面，并令 E 为 $K(n)$ 或一个 HKR 理论。假设 $[M/G]$ 和 $[M'/G]$ 是带有 $\mathbb{T}$作用的稳定几乎复全局商轨形，其含义见定义 5.22，并使用 ~ ~ ~
相同的扩张 G。假设 M 和 M' 具有有限 G-CW 复形的 G-等变同伦型。

~令 $f\colon M\to M'$为一个光滑的 G-等变映射。假设或者 M、M'没有边界且 f是真映射，或者它们是带边界紧空间且 $f(\partial M)\subseteq \partial M'$。我们构造一个等变推前

$$f_{!,\mathrm{eq}}\colon H^*\left(M_{h\widetilde{G}},E\right)\to H^{*+\dim M'-\dim M}(M'_{h\widetilde{G}},E).$$

定义5.54。令 $k=\dim\mathbb{T}$。

（1）对于 $N\in\mathbb{N}$，我们定义

$$P_N=\underbrace{S^{2N+1}\times S^{2N+1}\times\cdots\times S^{2N+1}}_{k\text{ times}}=(S^{2N+1})^k.$$

$$B_N=(\mathbb{CP}^N)^k.$$

我们赋予 P_N 显然的 $\mathbb{T}$作用，使得 $P_N\to B_N$ 成为一个 $\mathbb{T}$ 主丛。存在自然嵌入 $P_N\hookrightarrow P_{N+1}$, $B_N\hookrightarrow B_{N+1}$。由于 $N\to\infty$, B_N 收敛到 $B\mathbb{T}$，且P_N 收敛到一个可缩空间。

~(2) 定义一个 G-等变映射

$$f_N=f\times\mathrm{id}_{P_N}\colon M\times P_N\to M'\times P_N.$$

~ ~ ~ $M(M')$ 上的 G作用由定义给出，而 P_N 上的 G作用是通过 $G\to\mathbb{T}$ 实现的，且 $\mathbb{T}$作用于 P_N。

存在一个笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc}[M/G] & \longrightarrow & [M\times P_N/\widetilde{G}]\\ & & \downarrow\\ & & B_N=(\mathbb{CP}^N)^k\end{array}$$

[37]由于 w ~~对 $L(E)$作基变换后，我们有 Künneth公式（引理 5.46）。记 $\delta_{\mathcal{X}}=\sum_i x_i\boxtimes y_i$。由 (4~~ 0)

$$\sum_i t^E_{\mathcal{X}}(a\cdot x_i)y_i=a$$

因此，如果 $a\neq 0$ （基变换后），存在某个 x_i 使得 $t^E_{\mathcal{X}}(ax_i)\neq 0$。这意味着配对是完美的，后 er 基变换 .

$[M/G]$ 和 $[M'/G]$ 上的稳定几乎复结构在 B_N上的有限阶段轨形的垂直切丛上诱导出稳定几乎复结构。再结合 B_N上的复结构，便得到 $[M\times P_N/G]$和 $[M'\times P_N/G]$上的稳定几乎复结构。

非等变推前 $(f_N)_!$ 在上述假设下定义，并且根据横截基变换与限制相容：

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & H^*\left((M\times P_N)_{h\widetilde{G}},E\right) & \xleftarrow[i_N^*]{} & H^*\left((M\times P_{N+1})_{h\widetilde{G}},E\right) & \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle (f_N)_!} & & \downarrow{\scriptstyle (f_{N+1})_!} & \\ \cdots & H^{*+\delta}\left((M'\times P_N)_{h\widetilde{G}},E\right) & \xleftarrow{(i'_N)^*} & H^{*+\delta}\left((M'\times P_{N+1})_{h\widetilde{G}},E\right) & \cdots \end{array} \tag{42}$$

Here $\delta=$维$_{\mathbb{R}}M'-$维$_{\mathbb{R}}M$。因此，映射 $(f_N)_!$在逆极限上诱导一个映射 s:

$$f_{!,\mathrm{eq}}\colon \varprojlim_N H^*\left((M\times P_N)_{h\widetilde{G}},E\right)\longrightarrow \varprojlim_N H^{*+\delta}\left((M'\times P_N)_{h\widetilde{G}},E\right).$$

E^0是一个完备诺特局部环，并且根据有限型假设， $H^i((M\times P_N)_{h\widetilde{G}},E)$是有限生成的 E^0-模，对每个 N以及 i均如此，对 M'也类似。下面的引理是 [BR05定理 1 的特殊情形。1], 它将这些逆极限与 $H^*(M_{h\widetilde{G}},E)$相识别

引理 5.55 ([BR05，定理 1。1])。设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个完备诺特局部环，并设 M_i是由有限生成 R-模构成的逆序列。那么

$$\varprojlim_i{}^1 M_i=0$$

定义 5.56。在上述假设下，我们定义

$$f_{!,\mathrm{eq}}\colon H^*\left(M_{h\widetilde{G}},E\right)\to H^{*+\dim M'-\dim M}\left(M'_{h\widetilde{G}},E\right)$$

通过这些识别

$$\varprojlim_N H^*\left((M\times P_N)_{h\widetilde{G}},E\right)\simeq H^*\left(M_{h\widetilde{G}},E\right),$$

对 M' 也有类似结论。

接下来我们考虑 $\mathbb{T}$-等变 HKR 理论。定义 5.37 也可以推广。设 $[M/G]$是 $\mathbb{T}$-等变的，其含义如定义 5.22所述。定义（比较注记 5.38 (1)）

$$\mathrm{Fix}^G_{n,p}M=\{(\alpha,x)\in\mathrm{Hom}(\Lambda_m,G)\times M|\,\mathrm{im}(\alpha)\subset\mathrm{Stab}(x)\}$$

固定$^G_{n,\ p}M$具有一个由 $\widetilde{g}\cdot(\alpha,\ x)=(\widetilde{g}\alpha\widetilde{g}^{-1},\ \widetilde{g}x)$ 给出的 $\widetilde{G}$-作用。这在 $[\mathrm{Fix}^G_{n,\ p}M/G]$ 上定义了一个符合定义 5.22 含义的 $\mathbb{T}$-作用。

定义 5.57。 我们称 $[\mathrm{Fix}^G_{n,\ p}M/G]$ 带有 $\mathbb{T}$-作用的 等变 n 重 p-惯性栈。

存在一个分解

$$[\mathrm{Fix}^G_{n,p}M/\widetilde{G}]=\bigsqcup_{[\alpha]}[M^{\mathrm{im}\,\alpha}/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)]$$

~ ~关于 G的 α共轭类： $\Lambda_m\to G$， 其中 $Z_{\widetilde{G}}(\alpha)=\{\widetilde{g}\in G|\widetilde{g}\cdot\alpha(-)$ $=\alpha(-)\cdot\widetilde{g}\}$.

定义 5.58。 (1) 等变泛映射 $q\colon\ [\text{点}/\Lambda_m]\times[\text{不动点}^G_{n,\ p}M/\widetilde{G}]\to[M/\widetilde{G}]$ 在分量 $[\text{点}/\Lambda_m]\times[M^{\mathrm{im}\,\alpha}/Z_{\widetilde{G}}(\alpha)]$ 上定义为

$$M^{\mathrm{im}\,\alpha}\hookrightarrow M$$

$$\Lambda_m\times Z_{\widetilde{G}}(\alpha)\to\widetilde{G},(u,\widetilde{g})\mapsto\alpha(u)\cdot\widetilde{g}$$

(2) 我们可以将 $\mathbb{T}$-等变向量轨丛 ν on $[\mathrm{Fix}^G_{n,\ p}M/G]$ 定义为 $\mathrm{Fix}^G_{n,\ p}M\to M$ 的法丛。事实上，在每个 M_{im^α} 上，$\nu|_{M^{\mathrm{im}\,\alpha}}=N_{M^{\mathrm{im}\,\alpha}/M}$都是 $M_{\mathrm{im}^\alpha}\subset M$ 的法丛。其在 $L(E)$ 上同调中的欧拉类记为 $e^L_{\mathrm{HKR},\ \mathrm{eq}}(\nu)\in H^*\left((\mathrm{Fix}^G_{n,\ p}M)_{h\widetilde{G}},\ L(E)\right)$

定义 5.59。 我们将等变 *HKR* 特征定义为以下复合

$$\chi_{n,p;\mathrm{eq}}\colon H^*(M_{h\widetilde{G}},E)\xrightarrow{q^*}H^*\left(B\Lambda_m\times(\mathrm{Fix}^G_{n,p}M)_{h\widetilde{G}},E\right)\to H^*\left((\mathrm{Fix}^G_{n,p}M)_{h\widetilde{G}},L(E)\right).$$

以下命题是定理 5.50 的环面等变形式。

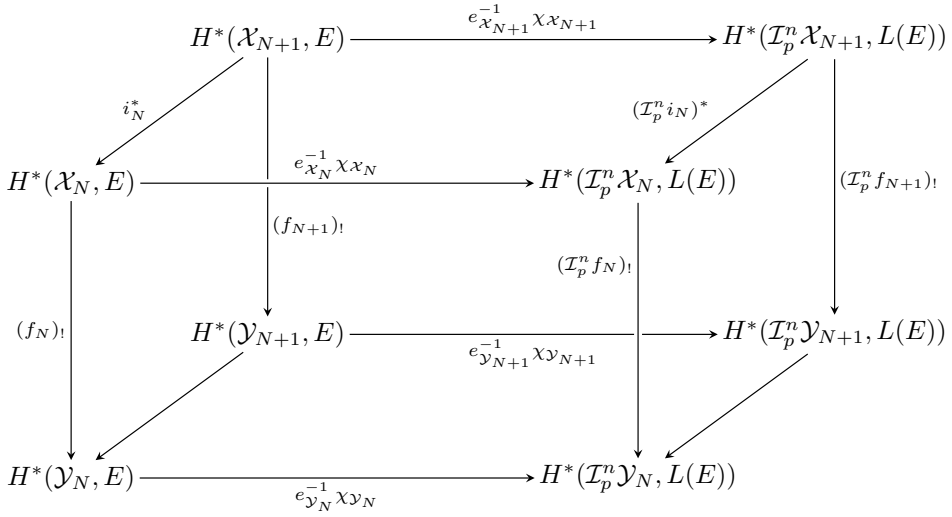
命题 5.60。 假设 $[M/G]$ 和 $[M'/G]$ 在定义 *5.22* 的意义下具有 $\mathbb{T}$-作用，$\widetilde{\ }$且 $f\colon\ M\to M'$ 是 G-等变的。存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccc}
H^*\left(M_{h\widetilde{G}},E\right) & \xrightarrow{e^L_{\mathrm{HKR,eq}}(\nu_M)^{-1}\cdot\chi_{n,p;\mathrm{eq}}} & H^*\left((\mathrm{Fix}^G_{n,p}M)_{h\widetilde{G}},L(E)\right)\\
\downarrow{\scriptstyle f_{!,\mathrm{eq}}} & & \downarrow{\scriptstyle (f^{\mathrm{Fix}})_{!,\mathrm{eq}}}\\
H^*\left(M'_{h\widetilde{G}},E\right) & \xrightarrow{e^L_{\mathrm{HKR,eq}}(\nu_{M'})^{-1}\cdot\chi_{n,p;\mathrm{eq}}} & H^*\left((\mathrm{Fix}^G_{n,p}M')_{h\widetilde{G}},L(E)\right)
\end{array}\tag{43}$$

证明。令

$$\mathcal{X}_N=[(M\times P_N)/\widetilde{G}],\quad \mathcal{Y}_N=[(M'\times P_N)/\widetilde{G}]$$

并写出 $f_N\colon\ \mathcal{X}_N\to\mathcal{Y}_N$。这个等变版本的 Riemann–Roch 公式可以在我们得到以下交换立方体图表后，由定理 5.50 推导出来。



(44)

（a）左侧面和右侧面的交换性来自命题 5.35（2）。

(b) 前侧面和后侧面的交换性来自定理 5.50。

(c) 为了证明顶面和底面的交换性，我们断言

$$\nu_{\mathcal{X}_{N+1}}|_{\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}_N} \simeq \nu_{\mathcal{X}_N}. \tag{45}$$

这里 $\nu_{\mathcal{X}_N}$，$\nu_{\mathcal{X}_{N+1}}$ 在定义 5.58(2) 中定义。一旦等式 (45) 成立，对于 $a \in H^*(\mathcal{X}_{N+1},\ E)$，我们有

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_p^n i_N)^* \left(e_{\mathcal{X}_{N+1}}^{-1} \cdot \chi_{\mathcal{X}_{N+1}}\right)(a) &= (\mathcal{I}_p^n i_N)^*(e_{\mathcal{X}_{N+1}})^{-1} \cdot (\mathcal{I}_p^n i_N)^* \circ \chi_{\mathcal{X}_{N+1}}(a) \\ &= e_{\mathcal{X}_N}^{-1} \cdot (\mathcal{I}_p^n i_N)^* \circ \chi_{\mathcal{X}_{N+1}}(a)\end{aligned}$$

剩下的是 $(\mathcal{I}_p^n i_N)^* \circ \chi_{\mathcal{X}_{N+1}} = \chi_{\mathcal{X}_N} \circ i_N^*$，但这源自 HKR 特征的自然性。

为说明 (45)，令 $\alpha\colon \Lambda_r \to H$ 为一个 HKR 扇区，并令 $x \in (M \times P_N)^{\mathrm{im}\,\alpha}$ 表示 $\mathcal{I}_p^n\mathcal{X}_N$ 中的一个点。我们有

$$\begin{array}{ccc}(M \times P_N)^{\mathrm{im}\,\alpha} & \hookrightarrow & M \times P_N \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M \times P_{N+1})^{\mathrm{im}\,\alpha} & \hookrightarrow & M \times P_{N+1}\end{array}$$

于是 $\nu_{\mathcal{X}_N} = \nu_{(M\times P_N)^{\mathrm{im}\,\alpha}/M\times P_N}$ 和 $\nu_{\mathcal{X}_{N+1}} = \nu_{(M\times P_{N+1})^{\mathrm{im}\,\alpha}/M\times P_{N+1}}$。它们的同构等价于另一个同构

$$\nu_{(M\times P_N)^{\mathrm{im}\,\alpha}/(M\times P_{N+1})^{\mathrm{im}\,\alpha}} \simeq \nu_{M\times P_N/M\times P_{N+1}}.$$

这是成立的，因为 $\nu_{M\times P_N/M\times P_{N+1}} \simeq \nu_{B_N/B_{N+1}}$ 经由 $M \times P_N \to B_N$，且 $\alpha\colon\ \Lambda_r \to G$ 在 B_N 上平凡作用（因为该作用经由 $G \to \mathbb{T}$）。这意味着 α 固定了 $\nu_{M\times P_N/M\times P_{N+1}}$，因此 $\nu_{M\times P_N/M\times P_{N+1}}$ 必须完全位于 $\nu_{(M\times P_N)^{\mathrm{im}\,\alpha}/(M\times P_{N+1})^{\mathrm{im}\,\alpha}}$ 中。

对 $N \to \infty$ 取逆极限，由于 $f_{!,\,\mathrm{eq}}$、$(\mathcal{I}_p^n f)_{!,\,\mathrm{eq}}$ 都由逆极限定义，且 $\widetilde{\nu_{\mathcal{X}_N}}$ 对所有 N 都相同，并且是整体 $[M/G]$ 上 ν_M 的限制，因此我们得到式（43）的交换性。

□

5.5 等变局部化与法丛欧拉类的可逆性

设 A 是一个形如 $A = \mathbb{T} \times \Lambda_r$ 的紧致阿贝尔李群，其中 $\mathbb{T}$ 是一个实环面，且 $\Lambda_r = (C_{p^r})^n$。E 是高度为 n、素数为 p 处的 HKR 理论。当 $A = \mathbb{T}$ 时，我们也允许 $E = K(n)$。对于非零特征 $\chi\colon A \to S^1$，相应复直线丛在 BA 上的欧拉类记为 $e_E(\chi)$。

定义 5.61. 我们将由所有非零特征 χ 对应的 $e_E(\chi)$ 生成的乘法集记为 $S_A \subset H^*(BA, E)$。

当有限因子 Λ_r 非平凡时，需要 HKR 假设。

引理 5.62。 在上述假设下， $0 \notin S_A$ 和 $S_A^{-1}H^*(BA, E) \neq 0$。

证明。 假设 $E = K(n)$ 且 $A = \mathbb{T}$。经过环面坐标变换后，某个非平凡特征的欧拉类为 $[g]_E t_1$，其中 g 是某个正整数。由 p 级数的公式可知，该欧拉类非零。由于 $K(n)^*[\![t_1, \ldots, t_d]\!]$ 是一个整环，这些欧拉类都是非零因子。这就证明了此情形下的断言。

现在假设 E 是一种 HKR 理论。

当 $A = \Lambda_r$ 时，情形与 [HKR00] 中相同。记 $S_r := S_{\Lambda_r} \subset H^*(B\Lambda_r, E)$。根据 [HKR00，命题 6.5]，$S_r^{-1}H^*(B\Lambda_r, E)$ 在 $p^{-1}E^*$ 上忠实平坦。根据 HKR 理论的定义，$p^{-1}E^* \neq 0$。因此，在这种情况下，$S_r^{-1}H^*(B\Lambda_r, E) \neq 0$ 且 $0 \notin S_r$。

现在考虑一般的 $A = \mathbb{T}^d \times \Lambda_r$。存在一个同构 $H^*(B\mathbb{T}^d, E) \simeq E^*[\![t_1, t_2, \ldots, t_d]\!]$。令 $R = S_{\Lambda_r}^{-1}H^*(B\Lambda_r, E)$。存在一个环同态

$$q\colon H^*(B\mathbb{T}^d \times B\Lambda_r, E) \to R[\![t_1, t_2, \ldots, t_d]\!]$$

并且目标空间非零，因为 $R \neq 0$ ($A = \Lambda_r$ 情形)。

令 $\chi\colon A \to S^1$ 为 A的一个特征，我们考虑 $q(e_E(\chi)) \in R[\![t_1, t_2, \ldots, t_d]\!]$。我们可以区分受限特征 $\chi'\colon \Lambda_r \to \mathbb{T}^d \times \Lambda_r \xrightarrow{\chi} S^1$ 是否平凡。

- 若 χ' 非平凡，则我们断言 $q(e_E(\chi))$ 是一个单位。事实上，$q(e_E(\chi)) \in R[\![t_1, t_2, \ldots, t_d]\!]$ 的常数项是 $e_E(\chi')$的像。由于 $e_E(\chi')$在 R中可逆，并且在 $R[\![t_1, t_2, \ldots, t_d]\!]$中，一个元素可逆当且仅当其常数项可逆，因此我们得到 $q(e_E(\chi))$ 是一个单位。
- 若 χ' 是平凡的，那么我们断言 $q(e_E(\chi))$ 不是零因子。该特征是投影 $\mathbb{T}^d \times \Lambda_r \to \mathbb{T}^d$ 与同态 $a\colon \mathbb{T}^d \to S^1$ 的复合。显然，存在一个自同构 ϕ of $\mathbb{T}^d$，使得 $a \circ \phi = (g, 0, 0, \ldots\ldots, 0)\colon \mathbb{T}^d \to S^1$，其中某个正整数为 g。因此，

$$(\phi \times \mathrm{id}_{\Lambda_r})^*(e_E(\chi)) = [g]_E t_1.$$

由于 $g \neq 0$，幂级数 $[g]t_1$ 在 $R[\![t_1, t_2, \ldots\ldots, t_d]\!]$中不是零因子。

对于非零特征 $\chi_1, \chi_2, \ldots\ldots, \chi_k$，$q(e_E(\chi_i))$ 要么是单位，要么是非零因子，因此 $\prod_i q(e_E(\chi_i))$ 是 $R[\![t_1, t_2, \ldots\ldots, t_d]\!]$中的非零因子。这意味着 $\prod_i e_E(\chi_i) \neq 0$。 □

考虑一个带有 $[M/G]$ 作用的全局商紧致奥尔比流形 A，此处的作用按定义 5.22的含义理解。回顾一下，存在一个正合序列

$$1 \to G \to \widetilde{G} \to A \to 1$$

$\widetilde{}$，并且 G 延拓了 G 在 M上的几乎自由作用。在定义 5.23中，我们定义了

$$M^{\mathrm{fix}} = \{p \in M \mid \mathrm{Stab}_{\widetilde{G}}(p) \to A \text{ is surjective.}\}$$

下述引理是阿蒂亚–博特环面作用局部化定理的直接类比[AB84，定理 3。5]。关于 [BP24，引理 3，6] 可参见其关于 $A = \mathbb{T}$ 且 $[M/G]$ 为流形时的情形。

引理 5.63。令 $i^*\colon H^*_{\widetilde{G}}(M,E) \to H^*_{\widetilde{G}}(M^{\mathrm{fix}},E)$ 为 E-上同调上的限制映射。将 S_A 取逆后，我们得到一个同构

$$S_A^{-1}H^*_{\widetilde{G}}(M,E) \xrightarrow{i^*} S_A^{-1}H^*_{\widetilde{G}}(M^{\mathrm{fix}},E)$$

特别地，如果 $M^{\mathrm{fix}}=\varnothing$，那么 $S_A^{-1}H^*_{\widetilde{G}}(M、E)=0$。

~我们仅给出证明概要。假设 G-CW 结构作用在 M 上，并对胞腔进行归纳。只需证明

$$S_A^{-1}H^*(BH,E)=0$$

对于每个稳定子群 $H=\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}}(x)$，满足 $x\in M\setminus M^{\text{不动}}$。根据 M^{fix}的定义，映射 $H\subset\widetilde{G}\to A$不是满射的，因此存在一个非平凡特征 $\chi\colon A\to S^1$，使得 $H\to A\xrightarrow{\chi}S^1$ 是平凡的。这意味着元素 $e_E(\chi)=0$ 属于 $H^*(BH,E)$。但是 $e_E(\chi)\in S_A$，所以 $S_A^{-1}H^*(BH,E)=0$。

对于下一个命题，我们记 $\mathcal{X}=[M/G]$ 并记 $\mathcal{F}=[M^{\mathrm{fix}}/G]$，并称 $\mathcal{F}$为 $\mathcal{X}$的不动点轨迹集。对于 $M^{\text{不动}}\subset M$，令 $\nu_{\mathcal{F}}=\nu_{M^{\mathrm{fix}}/M}$为法丛。注意到 ν是 $\widetilde{G}$-等变的，因此 ν也可以被视为 A上的 $\mathcal{F}=[M^{\mathrm{fix}}/G]$ -等变向量轨丛（至少在定义 5.22的工作意义下）。

令 $i\colon\mathcal{F}\to\mathcal{X}$ 为由 M 固定$\hookrightarrow M$ 所诱导的自然嵌入。存在拉回 $i^*\colon H^*_{\widetilde{G}}(M,E)\to H^*_{\widetilde{G}}(M\text{ 固定 }E)$ 以及等变推前 $i_{!,\mathrm{eq}}\colon H^*_{\widetilde{G}}(M^{\mathrm{fix}},E)\to H^*_{\widetilde{G}}(M,E)$[38]。经典结论是，对于每个 $a\in H^*_{\widetilde{G}}(M\text{ 固定 }E)$，$i^*\circ i_{!,\mathrm{eq}}(a)=a\cdot e_{E,\mathrm{eq}}(\nu)\in H^*_{\widetilde{G}}(M^{\mathrm{fix}},E)$，其中 $e_{E,\mathrm{eq}}(\nu)\in H^*_{\widetilde{G}}(M\text{ 固定 }E)$ 是 A-等变欧拉类 ν。

命题 5.64。在对 S_A, i^* 和 $i_{!\text{进行局部化后，eq}}$ 成为同构。换言之，存在仍记作 i^*,$i_{!,\text{ eq}}$ 的同构：

$$i^*\colon S_A^{-1}H^*_{\widetilde{G}}(M,E)\to S_A^{-1}H^*_{\widetilde{G}}(M^{\mathrm{fix}},E)$$

$$i_{!,\mathrm{eq}}\colon S_A^{-1}H^*_{\widetilde{G}}(M^{\mathrm{fix}},E)\to S_A^{-1}H^*_{\widetilde{G}}(M,E)$$

特别地，等变欧拉类 $e_{E,\mathrm{eq}}(\nu)\in H^*_{\widetilde{G}}(M^{\mathrm{fix}},E)$ 变得可逆于

$$S_A^{-1}H^*_{\widetilde{G}}(M^{\mathrm{fix}},E).$$

证明。我们可以找到一个 $\widetilde{G}$-等变开邻域 U，它包含 M_{fix}且位于 M 中，使得 $M^{\mathrm{fix}}\to U$ 是同伦等变的。由 Mayer–Vietoris，我们有一个长正合列

$$\cdots\longrightarrow H^*_{\widetilde{G}}(M,E)\xrightarrow{i^*_{M-M^{\mathrm{fix}}}\oplus i^*_U}H^*_{\widetilde{G}}(M-M^{\mathrm{fix}},E)\oplus H^*_{\widetilde{G}}(U;E)\longrightarrow H^*_{\widetilde{G}}(U-M^{\mathrm{fix}},E)\longrightarrow\cdots$$

由引理 5.63，由于对于 $M-M_{\mathrm{fix}}$和 $U-M^{\mathrm{fix}}$，它们的“固定”部分为空，因此我们有

$$S_A^{-1}H^*_{\widetilde{G}}\left(M-M^{\mathrm{fix}},E\right)=0$$
$$\text{and}\quad S_A^{-1}H^*_{\widetilde{G}}\left(U-M^{\mathrm{fix}},E\right)=0.$$

[38]我们不 t 定义 $i_{!,\mathrm{eq}}$ 不需要双向性，因为 $\mathcal{F}\to\mathcal{X}$ 是可表示的，因此该构造仅依赖于 on 引理 5.29 .

等价地，在 S_A-局部化之后，长正合列给出同构

$$S_A^{-1}H_{\widetilde{G}}^*(M,E)\to S_A^{-1}H_{\widetilde{G}}^*(U,E)\simeq S_A^{-1}H_{\widetilde{G}}^*\left(M^{\mathrm{fix}},E\right),$$

这正是 i^*。

另一方面，考虑空间对 $(M,\ M-M^{\mathrm{fix}})$ 的上同调长正合列：

$$\cdots\longrightarrow H_{\widetilde{G}}^*\left(M,M-M^{\mathrm{fix}},E\right)\longrightarrow H_{\widetilde{G}}^*(M;E)\longrightarrow H_{\widetilde{G}}^*\left(M-M^{\mathrm{fix}};E\right)\longrightarrow\cdots$$

出于同样的原因，$S_A^{-1}H_{\widetilde{G}}^*\left(M-M^{\mathrm{fix}};\ E\right)=0$，因此我们得到一个同构

$$S_A^{-1}H_{\widetilde{G}}^*\left(M,M-M^{\mathrm{fix}},E\right)\to S_A^{-1}H_{\widetilde{G}}^*(M;E).$$

根据 Thom 同构，我们有 $H_{\widetilde{G}}^*\left(M,\ M-M^{\mathrm{fix}},\ E\right)\simeq H_{\widetilde{G}}^*\left(M^{\mathrm{fix}}E\right)$。结合前两个同构可得，$i_{!,\ \mathrm{eq}}$ 在经过 S_A-局部化后同构。

$e_{E,\ \mathrm{eq}}(\nu)$ 在经过 S_A-局部化后可逆，因为 $e_{E,\ \mathrm{eq}}(\nu)\cdot(-)=i^*\circ i_{!,\ \mathrm{eq}}(-)$。 □

命题 5.65。设 $\pi_{\mathcal{X}}\colon M_{h\widetilde{G}}\to BA$ 和 $\pi_{\mathcal{F}}\colon(M^{\mathrm{fix}})_{h\widetilde{G}}\to BA$ 为（(35)）中所示的自然投影，且 $\pi_{\mathcal{X}})_{!,\ \mathrm{eq}}$ 和 $(\pi_{\mathcal{F}})_{!,\ \mathrm{eq}}$ 为 E-上同调中的等变推前。那么，对于$a\in H_{\widetilde{G}}^*(M,E)$，我们有

$$(\pi_{\mathcal{X}})_{!,\mathrm{eq}}(a)=(\pi_{\mathcal{F}})_{!,\mathrm{eq}}\left(\frac{i^*a}{e_{E,\mathrm{eq}}(\nu)}\right)\in S_A^{-1}H^*(BA,E)\tag{46}$$

注意，左端可以定义在 $H^*(BA,E)$ 中，而右端只能定义在 $S_A^{-1}H^*(BA,E)$ 中，因为 $e_{E,\ \mathrm{eq}}(\nu)$ 只有在 S_A-局部化后才可逆。

证明。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H_{\widetilde{G}}^*\left(M^{\mathrm{fix}},E\right) & \xrightarrow{i_{!,\mathrm{eq}}} & H_{\widetilde{G}}^*(M,E) \\ {\scriptstyle(\pi_{\mathcal{F}})_{!,\mathrm{eq}}}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle(\pi_{\mathcal{X}})_{!,\mathrm{eq}}} & \\ H^*(BA,E) & & \end{array}$$

在本证明的其余部分，所有上同调都经过 S_A-局部化。该交换图意味着，对于 $a\in H_{\widetilde{G}}^*(M,\ E)$，我们有

$$(\pi_{\mathcal{X}})_{!,\mathrm{eq}}(a)=(\pi_{\mathcal{F}})_{!,\mathrm{eq}}\left((i_{!,\mathrm{eq}})^{-1}(a)\right).$$

因此，只需证明

$$(i_{!,\mathrm{eq}})^{-1}(a)=\frac{i^*(a)}{e_{E,\mathrm{eq}}(\nu)}.$$

令 $b=(i_{!,\ \mathrm{eq}})^{-1}(a)$，并利用 $e_{E,\ \mathrm{eq}}(\nu)$ 的可逆性，这等价于证明

$$b\cdot e_{E,\mathrm{eq}}(\nu)=i^*i_{!,\mathrm{eq}}(b).$$

这是经典结果。 □

注记 5.66。若 $A = \mathbb{T}$，则每个非平凡特征的欧拉类都是$H^*(B\mathbb{T},\ E)$中的非零因子。事实上，经过环面坐标变换后，它具有如下形式 $[g]_E t_1$ 其中 g是某个正整数。对于 HKR 理论，有限高度条件使其成为魏尔斯特拉斯级数，而魏尔斯特拉斯除法的唯一性蕴含乘以它是单射 [HKR00，引理 5。1]。因此，我们可以从落在 E^* 中的计算恢复不变量 $L(E)^*$。

6 全局 Kuranishi 图表与等变局部化

Gromov–Witten 模空间的全局 Kuranishi 图表由 [AMS21] 针对 $g = 0$构造，而 [HS24] 和 [AMS24] 则针对任意亏格进行了构造。本节将介绍全局 Kuranishi 图表，讨论其构造、辛流形上存在哈密顿作用时的等变全局 Kuranishi 图表，以及等变全局 Kuranishi 图表上的等变局部化。大部分内容取自 [AMS21；AMS24] 和 [Hir25]。

6.1 全局 Kuranishi 图表的一般方面

定义 6.1 ([AMS21，定义 4.1])。全局 Kuranishi 图表由以下数据组成： $\mathcal{K} =(G,\ \mathcal{T},\ \mathcal{E},\ s)$，其中

(1) G是一个紧李群。(2) $\mathcal{T}$ 是一个 G等变拓扑流形，并且要求 G在 $\mathcal{T}$ 上的作用几乎自由，即稳定子群均为有限群。(3) $\mathcal{E} \to \mathcal{T}$是一个 G等变（拓扑）向量丛。(4) s: $\mathcal{T} \to \mathcal{E}$ 是 $\mathcal{E}$的一个 G 等变连续截面。

全局 Kuranishi 图表 $\mathcal{K} = (G,\ \mathcal{T},\ \mathcal{E},\ s)$ 的虚维数为 $\operatorname{vdim}\ \mathcal{K} = \dim \mathcal{T} - \dim G - \operatorname{rk}\ \mathcal{E}$。

在应用中，仅仅是拓扑流形 $\mathcal{T}$ 还不够，因此我们引入更多概念。

定义 6.2 （[AMS21，定义 4。3]）。 设 $\mathcal{K} =$（$G,\ \mathcal{T},\ \mathcal{E},\ s$） 是一个全局 Kuranishi 图表。

- $\mathcal{K}$ 称为光滑的，当且仅当 $\mathcal{T}$ 是带有光滑 G-作用的光滑流形，且 $\mathcal{E}$ 是一个光滑向量丛。但不要求 s 光滑。
- $\mathcal{K}$ 称为自由的，当且仅当对于每个 $x \in s^{-1}(0)$，稳定子群 $\operatorname{Stab}_G(x)$ 都是平凡的。
- $\mathcal{K}$ 称为正则的，当且仅当 s 在 $s^{-1}(0)$ 的某个邻域内光滑，并且在每个 $x \in s^{-1}(0)$ 处横截。

例 6.3。 • 设 M为一个光滑流形，并设 $\mathcal{K} = (e,\ M,\ 0,\ 0)$ 为一个全局 Kuranishi 图表，其中 $G = e$ 是平凡李群， $\mathcal{T} = M$, $\mathcal{E}$ 是底空间为 $s = 0$ 的零向量丛。这个全局 Kuranishi 图表是光滑、自由且正则的。

- 设 $\mathcal{X} = [M/G]$ 是一个全局商轨形，则类似地， $\mathcal{K} = (G,\ M,\ 0,\ 0)$ 是一个全局 Kuranishi 图表。该全局 Kuranishi 图表是光滑且正则的，但除非 G-作用在 M 上是自由的，否则它不是自由的。

注意，当 $\mathcal{K}$ 光滑时，$[\mathcal{E}/G] \to [\mathcal{T}/G]$ 是轨形 $[\mathcal{T}/G]$ 上的一个向量轨形丛，而s 是一个连续截面。我们将称 $[T(\mathcal{T}/G)]$ 为变形丛，并将 $[\mathcal{E}/G]$ 称为障碍丛。

定义 6.4 ([AMS24，注记 3.6])。 设 $\mathcal{K} = (G,\ \mathcal{T},\ \mathcal{E},\ s)$ 是一个光滑的全局 Kuranishi 图表。在 $\mathcal{K}$ 上的稳定几乎复结构，是虚拟向量轨形丛 $[T(U/G)] - [\mathcal{E}|_U/G]$（定义 5.27）在 G-等变开邻域 $U \supset s^{-1}(0)$上的稳定几乎复结构。

约定 6.5。 除非另有说明，所有全局 Kuranishi 图表均假定为光滑的，并配备稳定几乎复结构。此外，它们的零点集 $s^{-1}(0)$ 均假定为紧致。

对于给定的模空间 $\mathcal{M}$，其全局 Kuranishi 图表远非唯一。我们应允许全局 Kuranishi 图表之间存在如下等价关系。

定义 6.6 ([AMS24，定义 3.4])。 设 $\mathcal{K}' = (G',\ \mathcal{T}',\ \mathcal{E}',\ s')$ $\mathcal{K} = (G,\ \mathcal{T},\ \mathcal{E},\ s)$ 是两个全局 Kuranishi 图表，且 $\mathfrak{g}'$，$\mathfrak{g}$ 是 G'，G的李代数。

(1) 全局 Kuranishi 图表的一个态射 $f\colon\ \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ 是一个群同态 $\rho\colon\ G' \to G$，以及一个 ρ-等变光滑映射 $f\colon\ \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$，$f\colon\ \mathcal{E}' \to f^*\mathcal{E}$，使得 $f \circ s' = f^*s$ 作为 $f^*\mathcal{E} \to \mathcal{T}'$ 的截面成立。

(2) 一个态射 $f\colon\ \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ 是等价，当且仅当

- f 诱导底层空间和稳定子的同构，即存在商空间 $s'^{-1}(0)/G' \xrightarrow{\simeq} s^{-1}(0)/G$ 之间的同胚，以及对于任意 $x' \in s'^{-1}(0)$ $x = f(x')$，有 $\mathrm{Stab}_{G'}(x') \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Stab}_G(x)$。

- 以下向量丛链复形在 $s'^{-1}(0)$ 的一个邻域内正合：

$$\mathfrak{g}' \to \mathfrak{g} \oplus T\mathcal{T}' \to T\mathcal{T} \oplus \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$$

这些项之间的映射如下：$\mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ 由 ρ诱导，$\mathfrak{g}' \to T\mathcal{T}'$和 $\mathfrak{g} \to T\mathcal{T}$分别由 $\mathcal{T}'$ 上的 G'作用和 $\mathcal{T}$上的 G作用诱导，$T\mathcal{T}' \to T\mathcal{T}$由 f诱导，$T\mathcal{T}' \to \mathcal{E}'$和 $T\mathcal{T} \to \mathcal{E}$由 Ds'，Ds诱导。注意，映射 $\mathfrak{g} \to \mathcal{E}'$ 为 0。稳定识别

$$T\mathcal{T}' - \mathfrak{g}' - \mathcal{E}' \simeq f^*(T\mathcal{T} - \mathfrak{g} - \mathcal{E})$$

由此正合序列诱导，必须识别 $s'^{-1}(0)$附近指定的稳定几乎复结构。

事实上，任何等价都可以表示为全局 Kuranishi 图表上的一系列简单操作构成的之字形链。

引理 6.7 ([AMS24，引理 3。5])。 每个等价都可分解为以下映射或其逆映射的复合：

(1) 自由商：$\mathcal{K} \to \mathcal{K}/H$ 对于正规子群 $H \subset G$，满足 H 在 $\mathcal{T}$上自由作用。这会将 $\mathcal{K}$ 替换为 $\mathcal{K}/H = (G/H, \mathcal{T}/H, \mathcal{E}/H, s)$。

(2) 群扩张：$\mathcal{K} \to G' \times_G \mathcal{K}$ 对于嵌入 $G \hookrightarrow G'$。这会将 $\mathcal{K}$ 替换为 $G' \times_G \mathcal{K} = (G', G' \times_G \mathcal{T}, G' \times_G \mathcal{E}, s')$。*(3)* 稳定化：$\mathcal{F} \to \mathcal{T}$，它与一个 G-等变向量丛 p相关联：$\mathcal{F} \to \mathcal{T}$。这会将$\mathcal{K}$ 替换为 $\mathcal{N} = (G, Tot(\mathcal{F}) \ \mathcal{E} \oplus p^*\mathcal{F}, p^*s \oplus id_{\mathcal{F}})$，其中 p：$\mathcal{F} \to \mathcal{T}$是从 $\mathcal{F}$到$\mathcal{T}$的投影映射。*(4)* 芽等价：$\mathcal{K}' \hookrightarrow \mathcal{K}$，对于 $\mathcal{T}$内一个 G-等变开邻域 $U \supset s^{-1}(0)$。这会将 $\mathcal{K}$ 替换为 $\mathcal{K}' = (G, U, \mathcal{E}|_U, s|_U)$。

注记 6.8。设 $\mathcal{K}$ 是一个光滑稳定几乎复 Kuranishi 图表。经过稳定化和芽等价后，我们可以假设 $T[\mathcal{T}/G]$ 和 $[\mathcal{E}/G]$ 都具有稳定几乎复结构。下文将使用这些代表元。

除了等价之外，诱导相同虚拟基本类的全局 Kuranishi 图表之间还有一种关系（见引理 6.13），称为“协边”。

定义 6.9（[AMS24，定义 3.8]）。两个全局 Kuranishi 图表 $\mathcal{K}_i = (G, \mathcal{T}_i, \mathcal{E}_i, s_i)$ $i = 1$，2 协边，当且仅当存在一个 G-等变配边 $\mathcal{W}$，从 $\mathcal{T}_1$ 到 $\mathcal{T}_2$，其上带有一个 G-等变向量丛 $\mathcal{E} \to \mathcal{W}$ 及其截面 s，且该截面在 $\mathcal{T}_i$ 上的限制与 $(\mathcal{E}_i, s_i)$ 同构。我们要求此配边为真，即总零点集 $s^{-1}(0) \subset \mathcal{W}$ 是紧致的。

注记 6.10。辛流形 (X, ω) 的 Gromov–Witten 理论全局 Kuranishi 图表的唯一性，是指任何两个（通过某些构造得到的）图表都是协边的。

最后，令 E 为 Morava K-理论或 HKR 理论。我们回顾全局 Kuranishi 图表的虚拟基本类在 E-同调中的定义。令 $\mathcal{K} = (G, \mathcal{T}, \mathcal{E}, s)$ 为一个光滑的全局 Kuranishi 图表，满足 $s^{-1}(0)$ 是紧致的，且 $T[\mathcal{T}/G]$ 和 $[\mathcal{E}/G]$ 均为稳定几乎复的（注记 6.8）。令 X 为一个闭的复流形（或稳定几乎复流形），并赋予平凡的 G-作用。假设存在一个连续的 G-等变映射 f：$\mathcal{T} \to X$。我们考虑以下映射

- 庞加莱对偶给出
$$H^*_G(\mathcal{T}, E) \xrightarrow{\lambda^{-1}_{G,\mathcal{T}}} H^{G,\mathrm{lf}}_{\dim \mathcal{T} - \dim G - *}(\mathcal{T}; E).$$
- 令 $Z = s^{-1}(0)$。由于 Z 是紧致的，先取限制，再应用由 s诱导的偶映射，便得到
$$\begin{aligned} H^{G,\mathrm{lf}}_{\dim \mathcal{T} - \dim G - *}(\mathcal{T}; E) &\xrightarrow{\mathrm{res}} H^G_{\dim \mathcal{T} - \dim G - *}(\mathcal{T}, \mathcal{T} \setminus Z; E) \\ &\xrightarrow{s_*} H^G_{\dim \mathcal{T} - \dim G - *}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \setminus \mathcal{T}; E). \end{aligned}$$
  如果 $\mathcal{T}$有边界，我们要求 $Z \subset \mathrm{int}\,\mathcal{T}$。
- Thom 同构 $H^{G\text{维数 }\mathcal{T}\text{−维数 }G-*}(\mathcal{E},\ \mathcal{E} - \mathcal{T},\ E) \simeq H^{G\text{维数}\mathcal{T}\text{−维数 }G\text{−秩 }\mathcal{E}-*}(\mathcal{T},\ E)$。
- f_*：$H^{G\text{维数 }\mathcal{T}\text{−维数 }G\text{−秩 }\mathcal{E}-*}(\mathcal{T}, E) \to H^{\text{维数}\mathcal{T}\text{−维数 }G\text{−秩 }\mathcal{E}-*}(X, E)$。它是由 $EG \times_G \mathcal{T} \to \mathcal{T}/G \xrightarrow{f} X$ 诱导的映射。

- 另一个庞加莱对偶

$$\lambda_X : H_{\dim \mathcal{T}-\dim G-\mathrm{rk}\,\mathcal{E}-*}(X,E) \to H^{\dim X+*-(\dim \mathcal{T}-\dim G-\mathrm{rk}\,\mathcal{E})}(X,E).$$

注意到 $\dim\ \mathcal{T}-\dim\ G-\mathrm{rk}\,\mathcal{E}=\mathrm{vdim}\ \mathcal{K}$。

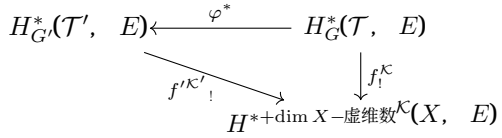
定义 6.11 ([AMS21，定义 5。23])。 定义

$$f_!^{\mathcal{K}} : H_G^*(\mathcal{T},E) \to H^{\dim X-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}+*}(X,E)$$

定义为前述映射的复合。特别地，取 $X=\mathrm{pt}$，并令 a: $\mathcal{T}\to\mathrm{pt}$ 为唯一映射。我们称映射 $a_!^{\mathcal{K}}$: H_G^* ($\mathcal{T}$， E) $\to H^{*-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}}(\mathrm{pt}\ E)\ =\ E^{*-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}}$ 为全局 Kuranishi 图表的虚拟基本类 $\mathcal{K}$。

我们讨论 $f_!^{\mathcal{K}}$以及虚拟基本类在引理 6.7中所述变换和定义6.9中的配边下的不变性。

引理 6.12。 设 $\mathcal{K}=(G,\ \mathcal{T},\ \mathcal{E},\ s)$ $\mathcal{K}'=(G',\ \mathcal{T}',\ \mathcal{E}',\ s')$ 光滑并满足注记 *6.8*， X 稳定几乎复，且 f: $\mathcal{T}\to X$ 是 G-等变的。若 φ: $\mathcal{K}'\to\mathcal{K}$ 是 *Kuranishi* 图表之间的等价，则有如下交换图表



证明概要。 由引理 6.7，只需考虑其中的四种简单操作。自由商和群扩张的情形由 [AMS21，附录 5 中的换群相容性得出。19]稳定化和开嵌入的情形则分别见 [AMS21，引理 5.27 和 5.25], 。另见 [AMS24，引理 3.18] 关于 Morava 局部计数理论函子性的陈述。

□

引理 *6.13*。设 $\mathcal{K}_i=(G,\mathcal{T}_i,\mathcal{E}_i,s_i)$、 $i=1$、*2* 为光滑稳定几乎复 *Kuranishi* 图表，并设 f_i: $\mathcal{T}_i\to X$ 是到闭稳定几乎复流形 X 的 G-等变光滑映射。假设 $\mathcal{K}_1$ 与 $\mathcal{K}_2$ 由定义 *6.9* 意义下的适当稳定几乎复配边 $(\mathcal{W},\mathcal{E})$ 相连，且 f_i 可延拓为一个 G-等变光滑映射 f: $\mathcal{W}\to X$。那么，对于每个 $a\in H_G^*(\mathcal{W};E)$,

$$(f_1)_!^{\mathcal{K}_1}(a|_{\mathcal{T}_1}) = (f_2)_!^{\mathcal{K}_2}(a|_{\mathcal{T}_2}).$$

证明。 利用两个边界分支的领圈，我们可以修改扩张 f，同时不改变 f_1 或 f_2，使其在 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$附近沿领圈方向保持常值。

令 $\mathcal{W}=\mathcal{W}\cup_{\partial\mathcal{W}}\mathcal{W}$ 为 $\mathcal{W}$的双重。由边界附近的乘积结构，Kuranishi 数据和稳定几乎复结构加倍后，在 $\mathcal{W}$上得到一个无边界的稳定几乎复 Kuranishi 坐标图 $\mathcal{K}$ 。其零点集是紧致的，因为它是紧致的总零点集 $s^{-1}(0)$ 的双重。令 r: $\mathcal{W}\to\mathcal{W}$ 为折叠映射。因此，映射 f 加倍为 $f=f\circ r$: $\mathcal{W}\to X$，而类 a 有一个规范延拓 $\tilde{a}:=r^*a\in H_G^*(\mathcal{W};E)$。由于$r|_{\mathcal{T}_i}=\mathrm{id}_{\mathcal{T}_i}$，我们有 $\tilde{a}|_{\mathcal{T}_i}=a|_{\mathcal{T}_i}$。

选取一个光滑配边函数 $\pi\colon \mathcal{W} \to [0,1]$，使其在边界$\widetilde{\ }$附近等于领圈坐标，并满足 $\pi^{-1}(0) = \mathcal{T}_1$ 和 $\pi^{-1}(1) = \mathcal{T}_2$。将 π 加倍，得到一个光滑映射 $\widetilde{\pi}\colon \mathcal{W} \to S^1$ 以及点$\sim_{q_1},\ q_2 \in S^1$，使得 $\widetilde{\pi}^{-1}(q_i) = \mathcal{T}_i$。设 $F = (f, \widetilde{\pi})\colon \mathcal{W} \to X \times S^1$。赋予 S^1 其标准稳定复结构，因此 $X \times S^1$ 是一个闭稳定几乎复流形。

$\widetilde{\ }$根据 [AMS21，引理 4。5]，进行稳定化后，$\mathcal{K}$ 我们可以假设 F 延拓为一个光滑的 G- 等变浸没。根据 [AMS21，引理 5，27]稳定化不改变推前。将 [AMS21，引理 5，34] 应用于子流形 $X \times \{q_i\} \subset X \times S^1$ 即可得到

$$j_i^* F_!^{\widetilde{\mathcal{K}}}(\widetilde{a}) = (f_i)_!^{\mathcal{K}_i}(a|_{\mathcal{T}_i}), \quad i = 1, 2,$$

其中 $j_i\colon X \cong X \times \{q_i\} \hookrightarrow X \times S^1$。这里，将稳定化后的二重对象限制到 $X \times \{q_i\}$ 所得到的 Kuranishi 图表，是 $\mathcal{K}_i$ 在其零点集附近的稳定化，而 [AMS21，引理 5，27] 将其推前与 $\mathcal{K}_i$的推前对应起来。

最后，j_1 和 j_2 是同伦的，因此 $j_1^* = j_2^*\colon H^*(X \times S^1;\ E) \to H^*(X;\ E)$。由此可得

$$(f_1)_!^{\mathcal{K}_1}(a|_{\mathcal{T}_1}) = j_1^* F_!^{\widetilde{\mathcal{K}}}(\widetilde{a}) = j_2^* F_!^{\widetilde{\mathcal{K}}}(\widetilde{a}) = (f_2)_!^{\mathcal{K}_2}(a|_{\mathcal{T}_2}),$$

如所要求。 □

由于针对 Gromov–Witten 模空间的全局 Kuranishi 图表的 AMS 构造会产生一个带有稳定几乎复结构的“在等价和配边意义下唯一”的 Kuranishi 图表，引理6.12和 6.13 共同证明了 E-上同调虚基本类对于 Gromov–Witten 模空间而言是良定义的，不受构造中所涉选择的影响。

6.2 全局 Kuranishi 图表的 AMS 构造

设 (M, ω) 为闭辛流形[39]。设 $g, h \geq 0$，且 $\beta \in H_2(M, \mathbb{Z})$ 为一个同调类。选取 (M, ω) 上相容的几乎复结构 J 后，存在一个拓扑空间，其中包含“从亏格为 g 的节点（复）曲线出发、带有 h 个标记点（映至 M）且像属于同调类 β 的 J-全纯稳定映射”，记作 $\mathcal{M}_{g,h}(M, J, \beta)$。它具有以下结构。

- 作为拓扑空间，$\mathcal{M}_{g,\ h}(\overline{M,\ J,\ \beta})$ 配备了 Gromov 拓扑。$\mathcal{M}_{g,\ h}(\underline{M,\ J,\ \beta})$ 根据 Gromov 紧致性是紧致的。然而，$\mathcal{M}_{g,\ h}(M,\ J,\ \beta)$ 面临的问题是，它通常不是流形，因为柯西–黎曼方程不是横截的，而且定义域会变化并且可能具有自同构。

- 除拓扑空间结构外，$\mathcal{M}_{g,\ h}(M,\ J,\ \beta)$ 还具有这样一种结构（可与轨形作比较）：对于点 $(\Sigma,\ u) \in \mathcal{M}_{g,\ h}(M,\ J,\ \beta)$，存在一个群

$$\mathrm{Aut}(\Sigma, u) = \{\phi \in \mathrm{Aut}(\Sigma)\colon u \circ \phi = u\}$$

  根据稳定性条件，该群是有限的，称为稳定映射 $(\Sigma,\ u)$ 的自同构群。它也称为 $\mathcal{M}_{g,\ h}(M,\ J,\ \beta)$ 中该点的稳定子群。

[39]在全局 Kuranishi 图表的原始构造中，M 被假设为闭的，但实际上我们只要求 Gromov 紧致性成立

AMS 构造用一个同时保持这两种结构的全局 Kuranishi 图表替代该奇异模空间。参见 [AMS21; AMS24]。我们将 $\mathfrak{a}$ 记作 AMS 构造中的一组容许的辅助选择，并满足其中所要求的正性条件和充分大条件。下面将在构造过程中逐一引入 $\mathfrak{a}$的各个分量。请注意，在下述定理中， J 仍作为输入的一部分存在。

定理 6.14。 设$(M, \omega, J, g, h, \beta)$ 为几何输入，并设 $\mathfrak{a}$ 为一个容许的辅助选择。可以构造一个光滑稳定几乎复全局 *Kuranishi* 图表 $\mathcal{K}_{\mathfrak{a}} = (G_{\mathfrak{a}}, \mathcal{T}_{\mathfrak{a}}, \mathcal{E}_{\mathfrak{a}}, s_{\mathfrak{a}})$，并配有一个识别 $s_{\mathfrak{a}}^{-1}(0)/G_{\mathfrak{a}} \simeq \mathcal{M}_{g,\ h}(M, J, \beta)$，该识别保持稳定子群不变。

对于两个容许的选择 $\mathfrak{a}_0$ 和 $\mathfrak{a}_1$，在 J 固定的情况下，所得的全局 *Kuranishi* 图表彼此等价。此外，若 J_0 和 J_1 可由一条 ω- 相容的几乎复结构路径连接，则相应的全局 *Kuranishi* 图表可由稳定几乎复配边连接。

因此，仅给定一个辛流形（M， ω）（而不指定几乎复结构 J），便存在唯一的全局 Kuranishi 图表等价/配边类，据此可以定义 Gromov–Witten 不变量。

6.2.1 AMS 构造

现在，我们将充分详细地描述 [AMS24]对 $\mathcal{K}_{\mathfrak{a}}$ 的构造，以说明加厚空间 $\mathcal{T}_{\mathfrak{a}}$的几何、其光滑的稳定几乎复结构，以及由不同辅助选择得到的坐标图之间的比较。

该构造包含三个主要组成部分：通过射影嵌入刚化定义域、对柯西–黎曼方程进行有限维加厚，以及对射影标架进行归一化。我们先从第一部分开始。

定义域的射影参数化。 第一步是将稳定映射的可变定义域置于一个固定的有限维族中。为此，AMS 使用到射影空间的稳定映射，为域曲线提供射影表示。

暂且固定一个整数 d，其值稍后将由辅助线丛数据确定。令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{g,\ h,\ d} \subset \mathcal{M}_{g,\ h}\left(\mathbb{P}^{d-g},\ d\right)$ 为满足以下条件的稳定映射 $\phi\colon\ \Sigma \to \mathbb{P}^{d-g}$

- $H^1(\Sigma,\ \phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{d-g}}(1)) = 0$ 和
- $(\Sigma,\ \phi)$ 的自同构群是平凡的。

令 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{g,\ h,\ d} \to \mathcal{F}$ 为万有曲线。

这些条件意味着 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{C}$ 是光滑拟射影簇 [40]。点 $\phi \in \mathcal{F}$确定一个射影表示的标记曲线 $\Sigma_\phi := \mathcal{C}|\phi$，而进入加厚的格罗莫夫–威滕问题的映射将是映射 $u\colon\ \Sigma_\phi \to M$。这样，抽象的变化域就由固定有限维族 $\mathcal{C} \to \mathcal{F}$的纤维取代。

改变 $\mathbb{P}^{d-g}$ 上的齐次坐标会产生 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{C}$ 上的 $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}(d-g+1,\ \mathbb{C})$ 作用。其极大紧子群 $G = U(d-g+1)$ 将成为全局 Kuranishi 图表的结构群。

[40]术语警告：曲线族 $\mathcal{C} \to \mathcal{F}$ 并非光滑，因为其中存在节点

类似地，我们定义 $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^{(2)}_{g\,h}$，$,_d$，由满足以下条件的 u, v 组成： $\Sigma \to \mathbb{P}^{d-g}$，使得 (Σ, u) 和 (Σ, v) 都属于 $\mathcal{F}_{g,h,d}$。令 $\Delta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{(2)}$ 为对角嵌入。 $\mathcal{F}^{(2)}$ 也具有自然的 $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ 作用。定义一个向量丛 $H_{g,h,d} \to \mathcal{F}_{g,h,d}$，其纤维为 $(H_{g,h,d})_\phi = H^0\left(\Sigma_\phi, \phi^* T\mathbb{P}^{d-g}\right)$，它可与法丛 $N_{\mathcal{F}_{g,h,d}/\mathcal{F}^{(2)}_{g\,h}}$, $,_d$ 等同。选取一个 G-等变管状邻域 $U_{g,h,d} \supset \Delta(\mathcal{F}_{g,h,d})$，并将其与 $H_{g,h,d}$ 中零截面的一个邻域等同。

稍后，映射 $u\colon \Sigma_\phi \to M$ 连同一个标架的选取，将确定第二个射影映射 $\iota_F\colon \Sigma_\phi \to \mathbb{P}^{d-g}$。每当 (ϕ, ι_F) 属于 $U_{g,\ h,\ d}$ 时，管状邻域识别将确定 $H_{g,\ h,\ d}$ 中的一个元素；当且仅当两个射影表示一致时，该元素为零。这将给出阻碍截面的 $H_{g,\ h,\ d}$-分量。

柯西–黎曼方程的有限维加厚。下一步是在变化的定义域上同时用扰动方程替代柯西–黎曼方程。令 $\mathfrak{F}_{\mathcal{F}}$ 表示由以下成对对象构成的空间：$(\phi,\ u)$，其中 $\phi \in \mathcal{F}_{g,\ h,\ d}$ 且 $u\colon \Sigma_\phi \to M$ 是一个光滑映射，表示 $\beta \in H_2(M,\ \mathbb{Z})$，并满足 [AMS24定义 46]中的条件。特别地，u 必须在节点邻域内为 J-全纯；其余条件则要求相关不可约分支满足正性条件，并且其能量具有一致的下界，而我们不会显式用到这些条件。

为了在该族上对柯西–黎曼方程进行一致扰动，考虑 G-等变向量丛

$$Y = \Omega^{0,1}_{\mathcal{C}^\circ_{g,h,d}/\mathcal{F}_{g,h,d}} \otimes_{\mathbb{C}} TM \to \mathcal{C}^\circ_{g,h,d} \times M.$$

对于 $(\phi,\ u) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{F}}$，令

$$\Gamma_u\colon \Sigma^\circ_\phi \to \mathcal{C}^\circ_{g,h,d} \times M, \qquad z \longmapsto (z, u(z)),$$

表示 u 的图。沿 Γ_u 拉回 Y 的一个截面，可得到一个在 Σ°_ϕ 上取值于 u^*TM 的 $(0,\ 1)$-形式，因而给出对 $\partial_J u$ 的扰动。

按照 [AMS24，定义 4。1], 选取一个 G-等变有限维近似方案 $\lambda_\mu\colon\ V_\mu \to C^\infty_c(Y)\ \mu \in \mathbb{N}$. 这里，$V_\mu$ 构成有限维 G-表示的递增序列，映射 λ_μ 与包含映射相容，并且 $\bigcup_\mu \lambda_\mu(V_\mu)$ 在 $C^\infty(Y)$中关于 C^∞_{loc}- 拓扑稠密。对固定且充分大的 μ，相应的预加厚模空间为

$$\mathcal{T}^{\mathrm{pre}} = \left\{(\phi, u, e), (\phi, u) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{F}},\ e \in V_\mu,\ \overline{\partial}_J u\big|_{\Sigma^\circ_\phi} + \lambda_\mu(e) \circ \Gamma_u = 0\right\}.$$

因此，辅助变量 e 表示对柯西–黎曼方程的有限维扰动。尽管原始映射空间是无限维的，横截性的失效由 ∂_J 的有限维余核来度量。若点 (ϕ, u, e) 处的扰动方向能够满射到相应线性化柯西–黎曼算子的余核上，则称该点为正则点。对每个紧致 $K \subset \mathcal{F}_{g,h,d}$，充分大的 μ 会使轨迹集 $\{(\phi, u, 0) \in \mathcal{T}^{\text{预}} \mid \phi \in K\}$ 中的每个点都正则； μ 的一致选取可由 Gromov 紧致性 [AMS24，引理 4.38] 得出。

此外，在正则轨迹上，遗忘映射

$$\mathcal{T}^{\mathrm{pre,reg}} \to \mathcal{F}_{g,h,d}, \qquad (\phi, u, e) \longmapsto \phi,$$

具有纤维方向上的光滑 C^1_{loc}结构，其含义见 [AMS21，定义 4。27]；另见 [AMS24，引理 4.39 和附录 A] 以及 [Par16，附录 B]。讨论全局图表上的光滑结构时，我们将再谈及这种相对正则性的作用。

最后，轨迹集 $e=0$ 恰好是未扰动的柯西–黎曼方程的解集。因此，在最终构造的全局 Kuranishi 图表中，投影到 $e\in V_\mu$ 将成为阻碍截面的一项：令其消失即可去除辅助扰动，并恢复原始的模空间问题。

框架与归一化。 接下来还需添加一个标架，以产生定义域的第二种射影表示，并在归一化后将框架变换群从 $G_{\mathbb{C}}$缩减为其极大紧子群 G。

回顾， $\mathfrak{F}_{\mathcal{F}}$参数化容许映射 $(\phi,\ u)$，其万有曲线为 $\mathfrak{C}_{\mathcal{F}}\to\mathfrak{F}_{\mathcal{F}}$。选取一个$G_{\mathbb{C}}$-不变的一致定义域度量 $\mathfrak{D}$ ，其含义见 [AMS24，定义 4。9]；其存在性证明见 [AMS24，引理 4。17]。

令 Ω 为 M 上的一个整辛形式，且其驯服 J；令 $L\to M$ 为一个曲率为 $-2\pi\mathrm{i}\Omega$ 的厄米线丛。如 [AMS24定义 4.23 和注记 4.24], 所述，我们假设 L 存在至少三阶根，并固定 $k\geq 3$。这些选择与 $\mathfrak{D}$一起构成线丛数据$\mathbb{L}=(L,\ k,\ \mathfrak{D})$。 对于 $(\phi,\ u,\ e)\in\mathcal{T}_{\mathrm{pre}}$，定义 Σ_ϕ上的线丛

$$L_{u,\mathbb{L}}=\left(\omega_{\Sigma_\phi}(p_1+\cdots+p_h)\otimes_{\mathbb{C}}u^*L\right)^{\otimes k}. \tag{47}$$

L 上的联络在$L_{u,\mathbb{L}}$上诱导出一个全纯结构。“定义域的射影参数化”中未指定的整数 d，现在由以下条件确定：

$$d=d_{\mathbb{L}}:=k\big(\langle[\Omega],\beta\rangle+2g-2+h\big)=\deg L_{u,\mathbb{L}}.$$

上述正性假设确保$L_{u,\mathbb{L}}$ 在每个不可约分支上都充分正；特别是，

- $H^1(\Sigma_\phi,L_{u,\mathbb{L}})=0$;
- $\dim_{\mathbb{C}}H^0(\Sigma_\phi,L_{u,\mathbb{L}})=d-g+1$.

且相应的完备线性系给出该域的射影表示 [AMS24，注记 4。24]。

相容的定义域度量 $\mathfrak{D}$，连同 L上的厄米度量，在$L_{u,\mathbb{L}}$ 上诱导出厄米度量 $h_{L_{u,\mathbb{L}}}$ ，并在 Σ_ϕ上诱导出体积形式 $\Omega_{\mathfrak{D},\phi}$ 。因此存在一个 L^2-配对

$$\langle f_1,f_2\rangle_{L^2}=\int_{\Sigma_\phi}h_{L_{u,\mathbb{L}}}(f_1,f_2),\Omega_{\mathfrak{D},\phi} \tag{48}$$

$H^0(\Sigma_\phi,L_{u,\mathbb{L}})$上。

(ϕ,u,e) 的全纯 $\mathbb{L}$-标架是 $H^0(\Sigma_\phi,L_{u,\mathbb{L}})$ 的一个复基 $F=(F_0,\dots,F_{d-g})$，定义见[AMS24, Definition 4.25]。与 F关联的是厄米矩阵 $H_F=\left(\langle F_i,F_j\rangle_{L^2}\right)_{0\leq i,j\leq d-g}$。当 $H_F=I$ 时，称该标架为酉标架。相容的定义域度量具有 $G_{\mathbb{C}}$-不变性，因此该归一化与标架变换相容 [AMS24, Lemma 4.26]。因此，任意

标架之间相差 $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}(d-g+1,\mathbb{C})$ 的作用，而酉标架之间相差 $G = U(d-g+1)$。这样一来，条件 $H_F = I$ 将标架变换歧义从非紧情形约化为全局 Kuranishi 图表中所用的紧群。

全局 Kuranishi 坐标图。 在前面三个步骤中作出以下选择 s:

- 线丛和标架数据：Ω L，k，$\mathfrak{D}$ (d 由 L，k) 确定。
- 一个有限维近似方案（V_μ，λ_μ），以及 μ 较大。

如定理 6.14中一样，我们用 $\mathfrak{a}$ 表示一个选择。若选择 $\mathfrak{a}$ 满足以下条件，则称其为容许的：

- L 有一个阶数为≥ 3 的根，且 $k \geq 3$。
- μ 足够大，使得 $\mathcal{T}_{\text{预正}}$ 包含所有未扰动方程的解。

下面介绍 AMS 构造：

定义 6.15。 给定容许的辅助数据 $\mathfrak{a}$，全局 Kuranishi 图表 $\mathcal{K} = (G, \mathcal{T}, \mathcal{E}, s)$ 定义如下：

(1) $G_{\mathfrak{a}} = U(d-g+1)$

(2) $\mathcal{T}_{\mathfrak{a}}$ 由 (ϕ, u, e, F) 组成，其中 $(\phi, u, e) \in \mathcal{T}_{\text{预正}}$，且 F是一个标架，使得 t

- H_F 具有正特征值，且位于单位矩阵的一个邻域内，因此 $\exp^{-1}(H_F)$ 有定义。
- $(\phi, \iota_F) \in \mathcal{F}_{(2)\,g,\,h,\,d}$属于 $U_{g,\,h,\,d}$，其中 ϕ是域的原始射影参数化，而 ι_F 是由 F诱导的参数化。

$\mathcal{T}_{\mathfrak{a}}$ 称为加厚模空间。

(3) $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}|_{(\phi,u,e,F)} = H_{g,\,h,\,d} \oplus V_\mu \oplus \mathcal{H}$，其中 $H_{g,\,h,\,d}$ 是 $\mathcal{F}_{g,\,h,\,d}$ 在 $\mathcal{F}^{(2)}_{g\,h\,,\,,d}$中的法丛，$V_\mu$ 是有限维近似方案的一部分，而 $\mathcal{H}$ 是厄米矩阵的向量空间

(4) 截面 $s_{\mathfrak{a}}$ 定义如下

- $H_{g,\,h,\,d}$项：由于 $(\phi, \iota_F) \in U_{g,\,h,\,d}$，我们取其在管状邻域识别 $U_{g,\,h,\,d} \simeq H_{g,\,h,\,d}$下的像作为该截面。
- V_μ 项：将 (ϕ, u, e, F) 发送到 e。
- $\mathcal{H}$ 条目：将 (ϕ, u, e, F) 映射到 $\exp^{-1}(H_F)$

由于 $\mathcal{T}_{\mathrm{pre,reg}} \to \mathcal{F}$ 具有纤维上的光滑 C^1_{loc} 结构，而 $\mathcal{T}_{\mathfrak{a}}$ 是 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre,reg}}$ 上的标架主丛的开子集，我们知道 $\mathcal{T}_{\mathfrak{a}} \to \mathcal{F}$ 也具有纤维上的光滑 C^1_{loc} 结构。

6.2.2 $\mathcal{T}$ 的光滑结构

回顾约定6.5：我们希望全局 Kuranishi 图表是光滑且稳定几乎复的。相比之下，$\mathcal{T}$仅是 C^1_{loc} 上的纤维方向光滑丛 $\mathcal{F}$。为了得到光滑的加厚模空间，需要光滑化理论。

设 G 为一个紧李群。我们使用微丛的语言；参见 [AMS21，第 4 节。2]对于一个 G-等变拓扑流形 M，记 $T_\mu M$ 为其切 G-微丛。如果 M 是光滑的，那么 $T_\mu M$具有一个（G-等变）向量提升 $TM \to T_\mu M$。Lashof 证明了如下等变光滑化结果：

命题 6.16 ([Las79])。设 M 是一个 G-等变拓扑流形。假设 M 只有有限种 G-轨道类型。假设存在一个 G-等变向量丛约化 $\varphi\colon E \to T_\mu M$，其中 G是某个 $E \to M$-等变向量丛 G，则存在一个 V - 表示 G 和一个 α 上的 $M \times V$ - 等变光滑结构，满足以下条件：

- 存在一个 G-等变向量丛同构 $p_M^* E \oplus V \simeq T(M \times V)\alpha$，其中$p_M\colon \underline{M} \times V \to M$ 是投影。

- 自然提升 $T(M \times V)_\alpha \to T_\mu(M \times V)$限制在 $M \times 0$ 上时，可通过 G-等变提升的同伦与诱导提升 $\varphi \oplus \mathrm{id}_V\colon p_M^* E \oplus V \to T_\mu(M) \oplus V$ 同伦。

此外，$\varphi \mapsto \alpha$ 在 G-光滑化的稳定等位类[41] 与 G-向量丛提升 $T_\mu M$的同伦类之间给出一个双射。

设 $\mathcal{K} = (G, \mathcal{T}, \mathcal{E}, s)$ 是由 AMS 构造得到的全局 Kuranishi 图表，此处在记号中省略辅助数据 $\mathfrak{a}$。$\mathcal{T}$ 满足命题 6.16 的前提：

- $\mathcal{T}$在芽等价之后（如果需要）只有有限多个 G-轨道类型。由稳定条件和 Gromov 紧致性可知，我们可以缩小 $\mathcal{T}$，使得 $\mathcal{T}$只有有限多个 G 轨道类型。

- $T_\mu \mathcal{T}$存在一个 G-等变向量丛约化。由于 $\pi\colon \mathcal{T} \to \mathcal{F}$ 是一个 C^1局部纤维方向光滑丛，垂直切丛 $T^{vt}\mathcal{T}$可定义为一个 G-等变拓扑向量丛。该向量丛约化是 $\pi^* T\mathcal{F} \oplus T^{vt}\mathcal{T} \to T_\mu \mathcal{T}$。详情见 [AMS21、推论 4.26 和引理 4。29]。

注记 6.17。在 [AMS21；AMS24]中隐含地指出，C^1_{loc}-结构来自 Pardon 的粘合构造，并与 G-作用相容。[HS24]在其第 5.4 节证明了这一点 G-等变性（精确表述见命题 5.1(c)）。

因此，可以得出：

命题 *6.18*（[*AMS21*，命题 *4*.30]）。设 $\mathcal{K} := (G, \mathcal{T}, \mathcal{E}, s)$ 是一个全局 *Kuranishi* 图表，其中 $\mathcal{T}$ 是一个纤维方向光滑的 C^1_{loc} G丛，其底空间 B 是一个光滑的 G 流形。此外，假设 G 在 $\mathcal{T}$ 上的作用只有有限种轨道类型。那么，$\mathcal{K}$ 存在一个具有光滑结构的稳定化 $\mathcal{K}'$。$\mathcal{K}'$ 的加厚是 $\mathcal{T} \times V$，其中 V 是某个G表示；并且，自然提升 $T(\mathcal{T} \times V) \to T_\mu(\mathcal{T} \times V)$ 对 $\mathcal{T} \times 0$ 的限制，经过 G-等变提升的同伦，与诱导提升 $l \oplus id_V\colon \mathcal{E} \oplus V \to T_\mu \mathcal{T} \oplus V$ 同伦。

对于命题 6.18 中的两个稳定化光滑结构 $\mathcal{K}_i = (G, \mathcal{T}_i, \mathcal{E}_i, s_i)$ $i = 1, 2$（其中 $\mathcal{T}_i = \mathcal{T} \times V_i$ 在拓扑意义下），命题 6.16 论证了 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 是 G-等变稳定同伦的。这意味着，分别经过进一步稳定化后，我们可以假设存在 G-等变拓扑流形 $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ 的一个同胚，并且 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 上的 G-光滑结构是同伦的。因此，$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$（经过进一步稳定化后）由一个全局 Kuranishi 的配边联系起来

[41]参见 [L 即79] 或 [BX22，定义 6.8] 术语详见 相关内容。

图表，其中 $\mathcal{W}$ 在拓扑意义下是 $\mathcal{T}_1 \times [0,1]$，其光滑结构由从 $\mathcal{T}_1$ 到 $\mathcal{T}_2$ 的光滑结构同伦给出。

6.2.3 AMS 构造上的稳定几乎复结构

接下来，我们论证 AMS 构造给出的全局 Kuranishi 图表上存在一个典范的稳定几乎复结构。回忆一下，光滑全局 Kuranishi 图表 $\mathcal{K} = (G, \mathcal{T}, \mathcal{E}, s)$ 上的稳定几乎复结构，是G-等变虚向量丛 $T\mathcal{T} - \mathfrak{g} - \mathcal{E}$ 上的稳定复结构的一个等价类。对于 AMS 构造，我们可以在稳定化光滑化之前定义这一结构：我们改为考虑 $T^{vt}\mathcal{T} + \pi^* T\mathcal{F} - \mathfrak{g} - \mathcal{E}$，其中 $\pi\colon \mathcal{T} \to \mathcal{F}$ 是自然投影，而 $T^{vt}\mathcal{T}$ 是垂直切空间。

写出 $N = d - g + 1, G = U(N)$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(N)$，并将 $\mathcal{H} =$厄米$_N$ 中的 $N \times N$厄米矩阵记为定义 6.15 中的记号。令 $q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathrm{pre}}$ 为遗忘标架的映射。于是我们在 G-等变实 KO-理论 $\mathrm{KO}_G(\mathcal{T})$ 中有以下恒等式:

$$T\mathcal{T} = q^* T(\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}) + \underline{\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})} = q^* T^{vt}(\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}) + \pi^* T\mathcal{F} + \underline{\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})} \tag{49}$$

此外，根据定义6.15

$$\mathcal{E} = \pi^* H_{g,h,d} + \underline{V_\mu} + \underline{\mathcal{H}} \tag{50}$$

结合式（49）、（50）和 $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C}) = \mathfrak{g} \oplus \mathcal{H}$，得到

引理 6.19。在 $\mathrm{KO}_G(\mathcal{T})$ 中存在一个特定的同构

$$T\mathcal{T} - \mathfrak{g} - \mathcal{E} = q^*(T^{vt}\mathcal{T}^{\mathrm{pre}} - \underline{V_\mu}) + \pi^*(T\mathcal{F} - H_{g,h,d}).$$

虚向量丛 $T\mathcal{F} - H_{g,\ h,\ d}$ 已经是复的。因此，接下来只需在 $T^{vt}\mathcal{T}_{\mathrm{pre}} - V_\mu$ 上构造一个典范的G-等变稳定复结构。

—

~取一点 $x = (\phi,\ u,\ e) \in \mathcal{T}_{\mathrm{pre}}$，其域为 $\Sigma = \mathcal{C}|_\phi$，并令 Σ 为它的归一化。由于投影 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \to \mathcal{F}$ 在每个纤维中都固定域，其垂直变形理论由扰动的柯西–黎曼方程的线性化所控制

$$\overline{\partial}_J u + \lambda_\mu(e) \circ \Gamma_u = 0.$$

该算子的线性化记为

$$\widehat{D}_x\colon \Omega^0(\Sigma, u^*TM) \oplus V_\mu \to \Omega^{0,1}(\widetilde{\Sigma}, u^*TM).$$

我们将其在 $\Omega^0(\Sigma,\ u^*TM)$ 上的限制记为

$$D_x\colon \Omega^0(\Sigma, u^*TM) \to \Omega^{0,1}(\widetilde{\Sigma}, u^*TM).$$

^根据 V_μ 定义 6.15中的假设，我们可以（通过缩小 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$）假设 D_x 是满射的$\forall x \in \mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$。

若固定域的类型 $\Sigma = \Sigma_\phi$，也就是考虑 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \to \mathcal{F}$ 在 ϕ 上方的纤维，那么根据标准弗雷德霍姆理论，对于固定的 Σ，扰动的柯西–黎曼方程的解构成一个光滑的 ^流形，其切丛可识别为 $\ker D_x$。这就是每个纤维的

$\mathcal{T}_{\text{预}} \to \mathcal{F}$是光滑流形，且在单个纤维上 $T^{vt}\mathcal{T}_{\text{预}} \simeq \ker(\widehat{D}_x)$ 的原因。因此， $T^{vt}\mathcal{T}_{\text{预}} - V_\mu = \operatorname{ind}_{\mathbb{R}}(D_x)$，其中 $\operatorname{ind}_{\mathbb{R}}$ 表示 G-等变族弗雷德霍姆指标；但对于 $\phi \in \mathcal{F}$，$\operatorname{ind}_{\mathbb{R}}(D_x)$ 只有在 $\mathrm{KO}_G(\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}|_{G\cdot\phi})$ 中才有意义。

前述描述本身并未给出跨越节点分层的全局族指标，因为当域的拓扑类型发生变化时，Sobolev 空间也会随之变化。所需的相容性由粘合结果提供，例如 [Par16，附录 B]。

对于一点 $x_0 = (\phi_0,\ u_0,\ e_0)$，并令 $K_0 = \ker(D_{x_0})$，Pardon 在$\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$ 附近构造了一个局部参数化 x_0 ([Par16，定义 B.10。1])：

$$U \times K_0 \to \mathcal{T}^{\mathrm{pre}}|_U$$

其中 $U \subset \mathcal{F}$ 是 ϕ_0 的某个开邻域。沿着 [AMS21 推论 6.29], 的思路，可以证明，对于另一个平凡化 $U' \times K_0' \to \mathcal{T}_{\mathrm{pre}}|_V$，它们在重叠部分上给出一个映射 $U \cap U' \to C^\infty(V \subset K_0,\ K_1)$，若在右端使用 C^1_{loc}-拓扑，该映射便是连续的。这就是为什么 $\mathcal{T}_{\mathrm{pre}} \to \mathcal{F}$ 具有逐纤维光滑丛结构，并且 $\ker(\widehat{D}_x)$ 可以粘合为 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$ 上的一个 G-等变拓扑向量丛。

以下方法与 [HS24，第 5 节5], 一脉相承，其根源可追溯至 [Par16]。对于 D_x 单个 x，我们将其复化定义为

$$D^{\mathbb{C}} = \frac{D - J \circ D \circ J}{2} : \Omega^0(\Sigma, u^*TM) \to \Omega^{0,1}(\widetilde{\Sigma}, u^*TM)$$

并定义一个同伦

$$L_x(t) = tD_x + (1-t)D_x^{\mathbb{C}} = D_x^{\mathbb{C}} + tA_x,$$

其中 $A_x = D_x - D_x^{\mathbb{C}}$ 是一个零阶复反线性微分算子。由逼近方案的稠密性、 $q(s^{-1}(0)) \times [0,1]$的紧致性，以及满射性在经线性粘合后仍保持这一开性，我们可以选取 $\nu \geq \mu$ ，使得加入 V_ν 后， $L_x(t)$ 在此紧集附近满射。这里线性粘合至关重要；参见 [HS24，第 5.5 节，脚注 14]和附录B。为确保增广算子在 $t = 0$处为复线性，令

$$E = V_\nu \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \qquad \lambda(v + iw) = \lambda_\nu(v) + J\lambda_\nu(w) \quad (v, w \in V_\nu).$$

因此， E是一个复 G-表示，且 λ: $E \to C_c^\infty(Y)$是复线性且 G-等变的。实包含映射 $V_\mu \subset V_\nu \subset E$ 满足$\lambda|_{V_\mu} = \lambda_\mu$。将 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$ 在 $q(s^{-1}(0))$附近缩小后，算子

$$\widehat{L}_x(t) \colon \Omega^0(\Sigma, u^*TM) \oplus E \to \Omega^{0,1}(\widetilde{\Sigma}, u^*TM)$$
$$\widehat{L}_x(t)(\xi, \dot{e}) = L_x(t)\xi + \lambda(\dot{e}) \circ \Gamma_u$$

对每个 $(x,\ t) \in \mathcal{T}_{\text{前}} \times [0,1]$ 都是满射的。事实上，复化保持了满射实增广。在 $t = 1$处，此算子限制为 $\Omega^0(\Sigma,\ u^*TM) \oplus V_\mu$上的 $\widehat{D}_x$。

命题 6.20 （[HS24，第 5 节。5]）。 如有必要，在缩小 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$ 后，不交并

$$\mathcal{K} := \bigsqcup_{(x,t) \in \mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \times [0,1]} K_{x,t}, \quad K_{x,t} := \ker \widehat{L}_x(t)$$

具有自然的有限秩 G-等变拓扑实向量丛结构，其基底为 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \times [0,1]$。

此外，由复线性增广算子 $L_x(0)$ 在 $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}|_{\mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \times \{0\}}$ 上诱导的纤维复结构是连续的。因此，$\mathcal{K}_0 - E$ 是一个复虚 G-丛。 —

命题 6.20的证明策略已在 [HS24第 5 节中作了大量讨论。5]讨论见附录B 。

对于复结构的断言，在域的有限多个光滑点处取求值映射，并结合 E-坐标，选取复线性商，使其在参考点处在核上给出同构。通过 J-线性平行移动，这些商在该点附近仍给出连续的复线性局部平凡化，如 [HS24引理 511]所述。

记为 $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}|_{\mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \times \{1\}}$。相容性 $\lambda|_{V_\mu} = \lambda_\mu$ 给出实 G-向量丛的一个正合序列

$$0 \longrightarrow T^{vt}\mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \longrightarrow \mathcal{K}_1 \xrightarrow{(\xi,a)\mapsto[a]} \underline{E/V_\mu} \longrightarrow 0.$$

核为 $\ker \widehat{D} = T^{vt}\mathcal{T}_{\mathrm{pre}}$。对于任意 $a \in E$，$\widehat{D}_x$ 的满射性给出 (ξ, b)，使得 $b \in \widehat{V_\mu}$ 且 $D_x(\xi, b) = -\lambda(a) \circ \Gamma_u$；于是 $(\xi, a+b) \in K_{x,1}$ 映到 $[a]$。包含映射和投影在粘合求值坐标下是连续的，并且是 G-等变的。因此，

$$[\mathcal{K}_1] - [\underline{E}] = [T^{vt}\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}] - [\underline{V_\mu}] \quad \text{in } \mathrm{KO}_G(\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}).$$

正合序列的一个 G-等变分裂以及沿丛 $\mathcal{K}$ 在 $[0,1]$ 上的传输，将这个实虚丛稳定地识别为 $\mathcal{K}_0 - E$ 的底层实丛。这就提供了所需的稳定复结构；所依据的是复端点及其连续传输，而不仅仅是实 KO 理论类的相等。

6.2.4 选择的独立性

我们简要回顾前述构造为何独立于辅助数据。详细的比较论证见[AMS24，第 4.7–4.9]节。

设 $\mathfrak{a}_0$ 和 $\mathfrak{a}_1$ 是两个容许的选择，并固定几乎复结构 J。基本的比较方法是构造一个共同的“双重标架”加厚，使其同时承载与 $\mathfrak{a}_0$ 和 $\mathfrak{a}_1$相关的射影标架及有限维近似数据。经过群扩张、稳定化和芽等价后，$\mathcal{K}_{\mathfrak{a}_0}$ 和$\mathcal{K}_{\mathfrak{a}_1}$ 都等价于这个共同坐标图。因此

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{a}_0} \simeq \mathcal{K}_{\mathfrak{a}_1}.$$

这正是 [AMS24第 4.9 节的内容，尤其是命题 4.66 和推论 4.70]。另见 [HS24第 6.1] 节，其中通过双重加厚坐标图进行了类似的比较。

如果 J_t，$t \in [0,1]$ 是一条相容的几乎复结构路径，则可以参数化地进行同样的构造。在紧致参数化模空间上统一作出辅助选择后，可得到一个稳定几乎复整体 Kuranishi 配边，其在 $t = 0$，1 处的限制分别是 J_0 和 J_1的整体图表；参见 [AMS24，第 4.7 节及推论 4.70]以及 [HS24，第 6 节。2]。

因此，根据引理 6.12和 6.13，所得的虚拟推前和虚拟基本类与所有辅助选择以及 J均无关。

6.3 等变化推广

当辛流形 M 具有 Hamiltonian K-作用时，我们期望 K-作用提升到模空间 $\mathcal{M}_{g\perp h}(M,\ \beta)$。本节的组织方式与前几节类似。首先，我们将介绍等变全局 Kuranishi 图表的一般理论，特别是在这种情况下定义虚拟基本类。随后讨论如何将从轨形到等变全局 Kuranishi 图表的等变局部化推广。然后，我们描述 K-作用在定义6.15 (参见 [Hir25，引理 5。14])。

6.3.1 等变全局 Kuranishi 图表与等变局部化的一般理论

设 K 为一个紧李群。类似于定义 5.22，我们可以给出 K-等变全局 Kuranishi 图表的工作定义。

定义 6.21 ([Hir25，定义 5。1])。一个 K-等变全局 Kuranishi 图表由以下数据组成：

(1) 一个紧李群的扩张 $1 \to G \to \widetilde{G} \to K \to 1$。

(2) $\mathcal{T}$是一个 G-等变光滑流形，而 $\mathcal{E} \to \mathcal{T}$是一个 G-等变向量丛。(3) 一个 G-等变截面 $s\colon\ \mathcal{T} \to \mathcal{E}$。

我们要求，忘掉 K-作用后，$(G,\ \mathcal{T},\ \mathcal{E},\ s)$ 是定义 6.1 中的普通光滑全局 Kuranishi 图表。特别地，这意味着 G 在 $\mathcal{T}$上的作用只有有限稳定子群。

注记 6.22。回顾约定 6.5，我们希望为全局 Kuranishi 图表赋予光滑结构和稳定几乎复结构，并要求 $s^{-1}(0)$是紧致的。在等变情形下，紧致性和光滑性更容易表述。对于稳定几乎复结构，我们在 $\mathcal{T}$ 上看到 3 个向量丛：切丛 $T\mathcal{T}$、 G-轨道 $\mathfrak{g}$的切丛，以及障碍丛 $\mathcal{E}$。它们都是 $\widetilde{G}$-等变的[42]。因此，我们在 $\mathcal{T}$上构造一个 $\widetilde{G}$-等变虚向量丛$T\mathcal{T} - \mathfrak{g} - \mathcal{E}$。于是，“ K-等变全局 Kuranishi 图表上的稳定几乎复结构”实际上指的是 G-等变虚向量丛 $(T\mathcal{T} - \mathfrak{g}) - \mathcal{E}$[43]上的稳定几乎复结构。更进一步，我们希望 $T\mathcal{T} - \mathfrak{g}$和 $\mathcal{E}$都能赋有稳定复结构（例如，经过稳定化后）。

设 $\mathcal{K} = (G, \mathcal{T}, \mathcal{E}, s)$ 为一个 K-等变全局 Kuranishi 图表，且 X为一个带有（全纯） K作用的闭复流形 $\widetilde{X}$。 G 通过 $G \to K$作用于 X。设 $f\colon\ \mathcal{T} \to X$ 为一个 G-等变光滑映射。对于环面 $K = \mathbb{T}$，我们定义等变虚拟推前如下。

[42]在 $\widetilde{G}$上的作用 $\mathfrak{g}$ 是共轭作用在恒等映射处的微分。[43]在定义 5.27 中，我们为轨形上的虚丛定义了稳定几乎复结构。该定义同样适用于可微栈上的虚丛。在我们的情形中，这个可微栈是 $[\mathcal{T}/\widetilde{G}]$

命题 6.23。固定 $K=\mathbb{T}$。设 $\mathcal{K}=(G,\mathcal{T},\mathcal{E},s)$ 及 X 如前所述，且 $f\colon \mathcal{T}\to X$ 为一个$\sim G$-等变光滑映射。设 E 为 *Morava* K-理论或 *HKR* 理论。则我们可以将等变虚基本类构造为一个映射

$$f_{!,eq}^{\mathcal{K}}\colon H_{\widetilde{G}}^{*}(\mathcal{T},E)\to H_{\mathbb{T}}^{*-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}+\dim X}(X,E)$$

证明。与定义中的构造类似 5.56，选取一列有限维逼近 $B\mathbb{T}$。事实上，若 $\mathbb{T}=T^m$，则可取 $B_N=(\mathbb{CP}^N)^m$，$P_N=(S^{2N+1})^m$。$P_N\to B_N$ 是一个 $\mathbb{T}$ 主丛，并且存在包含映射 $\iota_N\colon B_N\to B_{N+1}$。

我们定义全局 Kuranishi 图表

$$\mathcal{K}_N=\left(\widetilde{G},P_N\times\mathcal{T},\pi_{\mathcal{T}}^{*}\mathcal{E}=P_N\times\mathcal{E},s_N=\pi_{\mathcal{T}}^{*}s\right)$$

以及稳定几乎复流形

$$X_N=P_N\times_{\mathbb{T}}X$$

~ ~ $P_N\times\mathcal{T}$上的 G-作用是对角的，并且我们假设 X_N 具有平凡的 G-作用。存在光滑的映射 $f_N\colon P_N\times\mathcal{T}\to P_N\times_{\mathbb{T}}X$，它们是 G-等变的。

将定义 6.11 应用于 $\mathcal{K}_N$，X_N和 $f_N\colon P_N\times\mathcal{T}\to X_N$，我们得到

$$(f_N)_{!}^{\mathcal{K}_N}\colon H_{\widetilde{G}}^{*}(P_N\times\mathcal{T},E)\to H^{*-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}_N+\dim X_N}(X_N,E).$$

对于 N 和 $N+1$，存在交换图表

$$\begin{array}{ccc} H_{\widetilde{G}}^{*}(P_N\times\mathcal{T},E) & \xleftarrow{\iota_N^{*}} & H_{\widetilde{G}}^{*}(P_{N+1}\times\mathcal{T},E) \\ \downarrow{\scriptstyle (f_N)_{!}^{\mathcal{K}_N}} & & \downarrow{\scriptstyle (f_{N+1})_{!}^{\mathcal{K}_{N+1}}} \\ H^{*-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}+\dim X}(X_N) & \xleftarrow{\iota_N^{*}} & H^{*-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}+\dim X}(X_{N+1}) \end{array}$$

这一相容性来自 [AMS21，引理 534]。

最后，我们如下定义 $f_{!,eq}^{\mathcal{K}}$：对于 $a\in H_{\widetilde{G}}^{*}(\mathcal{T},E)$，记 $a_N=\pi_{\mathcal{T}}^{*}(a)\in H_{\widetilde{G}}^{*}(P_N\times\mathcal{T},E)$。然后，定义

$$f_{!,eq}^{\mathcal{K}}(a):=\left((f_N)_{!}^{\mathcal{K}_N}(a_N)\right)\in\varprojlim_{N}H^{*-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}+\dim X}(P_N\times_{\mathbb{T}}X)$$

每个 X_N都是闭流形，因此 $H^{i}(X_N,E)$ 对完备诺特局部环 E^0 而言是有限生成的，对每个 N 和 i均如此。与定义 5.56的构造一样，Milnor 的 $\lim^1$ 项因此消失，从而将逆极限同 $H_{\mathbb{T}}^{*-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}+\dim X}(X,E)$等同。□

类似地，我们可以定义等变全局 Kuranishi 图表的“不动点轨迹”。设 $\mathcal{K}=(G,\mathcal{T},\mathcal{E},s)$ 是一个光滑的 K-等变全局 Kuranishi 图表。我们将 $\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}$ 记为定义 5.23中定义的不动部分。在 $\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}$ 上有两个向量丛：

- 法丛 $\nu=\nu_{\mathcal{T}^{\text{固定}}/\mathcal{T}}$。注意，我们有

  $$T\mathcal{T}|_{\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}}=T\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}\oplus\nu_{\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}/\mathcal{T}}$$

  并且 ν是 $T\mathcal{T}$在稳定子群 $\tilde{G}(p)$作用下的移动部分。
- $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{T}^{\text{不动点}}$的限制。

定义 6.24. 对于 $p \in \mathcal{T}^{\text{不动点}}$，记 Stab$_{\tilde{G}}(p)$ 为其稳定子群。考虑单位连通分支 Stab $_{\tilde{G}}(p)^0$,的作用，我们可以将其分解为固定部分和非平凡部分

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p^{\text{fix}} \oplus \mathcal{E}_p^{\text{mov}}$$

$\mathcal{E}^{\text{fix}}$ 和 $\mathcal{E}^{\text{mov}}$ 都是 $\mathcal{T}^{\text{fix}}$上的向量丛。

~注记 6.25。注意，它们都是 G-等变的。例如，对于 $g \in$Stab $_{\tilde{G}}(p)$和 $h \in$Stab$_{\tilde{G}}(p)^0$， $g^{-1}hg$仍然位于单位连通分支中。因此，对于 $v \in \mathcal{E}_p^{\text{fix}}$，我们有 $g^{-1}hgv = v$，或者等价地， $h \cdot gv = gv$。这意味着 $gv \in \mathcal{E}_p^{\text{fix}}$，所以 gv 仍然位于 $\mathcal{E}_p^{\text{mov}}$中。然而，我们的定义并不能确保 $\mathcal{E}^{\text{fix}}$ 也被Stab$_{\tilde{G}}(p)$中非单位连通分支的元素固定。

容易看出，在 $p \in \mathcal{T}^{\text{fix}}$处，截面 $s(p)$完全位于 $\mathcal{E}^{\text{fix}}$中。因此，我们定义一个新的全局 Kuranishi 图表。

定义 6.26。假设 K 是连通的。对于一个 K-等变全局 Kuranishi 图表 $\mathcal{K}$ =$(G,\ \mathcal{T},\ \mathcal{E},\ s)$，将 $\mathcal{K}^{\text{fix}}$ 定义为

$$\mathcal{K}^{\text{fix}} = (G, \mathcal{T}^{\text{fix}}, \mathcal{E}^{\text{fix}}, s|_{\mathcal{T}^{\text{fix}}}).$$

存在一个典范映射 i: $\mathcal{K}^{\text{fix}} \to \mathcal{K}$。

与轨形不同， $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}^{\text{fix}}$ 之间的切向差异不仅包括法丛$\nu_{\mathcal{T}^{\text{fix}}/\mathcal{T}}$，还包括障碍 $\mathcal{E}^{\text{mov}}$的移动部分。回顾第 5.5 节（并取 $A = \mathbb{T}$），我们有 $S_{\mathbb{T}} \subset H^*(B\mathbb{T},\ E)$。我们需要以下关于 ν 和 $\mathcal{E}^{\text{mov}}$的欧拉类可逆性。

引理6.27。 等变欧拉类 $e_{E,\ eq}(\nu)$和 $e_{E,\ eq}(\mathcal{E}^{\text{mov}})$ 在其中均可逆

$$S_{\mathbb{T}}^{-1} H_{\widetilde{G}}\left(\mathcal{T}^{\text{fix}}, E\right).$$

证明。 关于$e_{E,\ eq}(\nu)$的可逆性已在命题5.64中证明。[44]

~对于 $\mathcal{E}^{\text{mov}}$，考虑 $\mathcal{E}^{\text{mov}}$的圆盘丛，记为 $D(\mathcal{E}^{\text{mov}})$，它也带有一个 G-作用。关键观察是 $D(\mathcal{E}^{\text{mov}})^{\text{fix}} = \mathcal{T}$固定。令 $p \in \mathcal{T}$固定且 $v \in \mathcal{E}_p^{\text{mov}}$。记 $H =$ 稳定子群$_{\tilde{G}}(p)$，并令H^0 为其单位连通分支。根据 $\mathcal{T}^{\text{fix}}$ 的定义， $H \to \mathbb{T}$ 是满射的。事实上，由于$G \curvearrowright \mathcal{T}$几乎自由， $H \to \mathbb{T}$ 是覆盖映射。若(p, v)属于 $D(\mathcal{E}^{\text{mov}})^{\text{fix}}$，则映射稳定子群$_{\tilde{G}}(p, v) \to \mathbb{T}$也是满射的。由维数计算可得，dim 稳定子群$_{\tilde{G}}(p, v)$ =dim H =dim $\mathbb{T}$。但稳定子群$_{\tilde{G}}(p, v) \subset H$，因此我们有 $H^0 \subset$稳定子群$_{\tilde{G}}(p, v)$，所以 $v(p) \in \mathcal{E}_p^{\text{mov}}$由 H^0固定。这与我们的定义 $\mathcal{E}^{\text{mov}}$矛盾。

$\mathcal{T}^{\text{fix}} \subset D(\mathcal{E}^{\text{mov}})$ 的法丛恰好是 $\mathcal{E}^{\text{mov}}$，因此再次由命题 5.64 可得 $e_{E,eq}(\mathcal{E}^{\text{mov}})$ 在 $S_{\mathbb{T}}^{-1} H_{\widetilde{G}}^*\left(\mathcal{T}^{\text{fix}} E\right)$ 中的可逆性。 □

我们陈述命题 5.65 的相应版本如下：

[44]那里是一个闭流形，因此我们可以对 $\widetilde{G}$-胞腔进行归纳。这里需要假设 $s^{-1}(0)$ 是紧致的，因此我们可以缩小 $\mathcal{T}$，使 $\mathcal{T}$ 也成为紧致的（带边界，但 $s^{-1}(0) \cap \partial\mathcal{T} = \varnothing$）。

命题 6.28。 设 $\mathcal{K}$ 是一个 $\mathbb{T}$-等变全局 *Kuranishi* 图表，设 $\mathcal{K}^{\mathrm{fix}}$ 是其不动点图表，如定义 6.26所述。设 X 是一个 $\mathbb{T}$-等变稳定几乎复流形，且 $f\colon\ \mathcal{T}\to X$ 是 $\sim G$-等变的。那么对于 $a\in H^*_{\widetilde{G}}(\mathcal{T},\ E)$

$$f^{\mathcal{K}}_{!,eq}(a)=(f^{\mathrm{fix}})^{\mathcal{K}^{\mathrm{fix}}}_{!,eq}\left(\frac{i^*(a)e_{E,eq}(\mathcal{E}^{\mathrm{mov}})}{e_{E,eq}(\nu)}\right)\in S_{\mathbb{T}}^{-1}H^*_{\mathbb{T}}(X,E) \tag{51}$$

这里 $f^{\mathrm{fix}}\colon\ \mathcal{T}_{\text{固定}}\to X$ 是 f 到 $\mathcal{T}_{\text{固定}}$ 的限制。

与命题 5.65类似，式（51）的右端只有在将 $S_{\mathbb{T}}$[45]求逆后才有意义。选取一个中间的 $\mathbb{T}$-等变全局 Kuranishi 图表 $\mathcal{K}'=(G,\ \mathcal{T}_{\text{固定}},\ \mathcal{E},\ s)$，并令 $f'\colon\ \mathcal{T}_{\text{固定}}\to X$ 为 f 到 $\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}$ 的限制。我们的证明分为引理 6.29中的两个目标。

引理 6.29。 *(1)* 对于 $a\in H^*_{\widetilde{G}}(\mathcal{T},E)$，有

$$f^{\mathcal{K}}_{!,eq}(a)=(f')^{\mathcal{K}'}_{!,eq}\left(\frac{i^*(a)}{e_{E,eq}(\nu)}\right)$$

(2) 对于 $a\in H^*_{\widetilde{G}}(\mathcal{T}_{\text{固定}}E)$，有

$$(f')^{\mathcal{K}'}_{!,eq}(a)=(f^{\mathrm{fix}})^{\mathcal{K}^{\mathrm{fix}}}_{!,eq}\left(a\cup e_{E,eq}(\mathcal{E}^{\mathrm{mov}})\right)$$

证明。 (1) 回顾一下，等变推前是利用逼近命题 6.23定义的。我们有如下交换图表，其中垂直序列来自定义 6.11

$$\begin{array}{ccc}
H^{*+\dim\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}-\dim\mathcal{T}}_{\widetilde{G}}(P_N\times\mathcal{T}^{\mathrm{fix}},E) & \xrightarrow{i_!} & H^*_{\widetilde{G}}(P_N\times\mathcal{T},E)\\
\downarrow{\scriptstyle\lambda^{-1}_{\widetilde{G},P_N\times\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}}} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda^{-1}_{\widetilde{G},P_N\times\mathcal{T}}}\\
H^{\widetilde{G}}_{\dim(P_N\times\mathcal{T})-\dim\widetilde{G}-*}((P_N\times\mathcal{T}^{\mathrm{fix}})^c,E) & \xrightarrow{i_*} & H^{\widetilde{G}}_{\dim(P_N\times\mathcal{T})-\dim\widetilde{G}-*}((P_N\times\mathcal{T}^{\mathrm{fix}})^c,E)\\
\downarrow{\scriptstyle(s|_{\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}})_*} & & \downarrow{\scriptstyle s_*}\\
H^{\widetilde{G}}_{\dim(P_N\times\mathcal{T})-\dim\widetilde{G}-*}(P_N\times\mathcal{E}|_{\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}},P_N\times(\mathcal{E}|_{\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}}-\mathcal{T}^{\mathrm{fix}}),E) & \xrightarrow{i_*} & H^{\widetilde{G}}_{\dim(P_N\times\mathcal{T})-\dim\widetilde{G}-*}(P_N\times\mathcal{E},P_N\times(\mathcal{E}-\mathcal{T}),E)\\
\downarrow{\scriptstyle\mathrm{Thom}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Thom}}\\
H^{\widetilde{G}}_{\dim(P_N\times\mathcal{T})-\dim\widetilde{G}-\mathrm{rk}\,\mathcal{E}-*}(P_N\times\mathcal{T}^{\mathrm{fix}},E) & \xrightarrow{i_*} & H^{\widetilde{G}}_{\dim(P_N\times\mathcal{T})-\dim\widetilde{G}-\mathrm{rk}\,\mathcal{E}-*}(P_N\times\mathcal{T},E)\\
\downarrow{\scriptstyle(f')_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*}\\
H_{\dim(P_N\times\mathcal{T})-\dim\widetilde{G}-\mathrm{rk}\,\mathcal{E}-*}(X_N,E) & \xrightarrow{=} & H_{\dim(P_N\times\mathcal{T})-\dim\widetilde{G}-\mathrm{rk}\,\mathcal{E}-*}(X_N,E)\\
\downarrow{\scriptstyle\lambda_{X_N}} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_{X_N}}\\
H^{*-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}+\dim X}(X_N,E) & \xrightarrow{=} & H^{*-\mathrm{vdim}\,\mathcal{K}+\dim X}(X_N,E)
\end{array}$$

[45]如果 $e\in S_{\mathbb{T}}$，则 $f^{\mathcal{K}}_{!,eq}(a\cup p^*_{\mathcal{K}}e)=f^{\mathcal{K}}_{!,eq}(a)\cup(p_X)^*e$ 其中 $p_{\mathcal{K}}\colon\ \mathcal{T}\to$ 点 和 $p_X\colon\ X\to$ 点 是到一点的 $\mathbb{T}$-等变投影映射。这使我们能够以相容的方式将 $f^{\mathcal{K}}_{!,eq}$ 从 E-上同调扩展到 $S_{\mathbb{T}}$-局部化的 E-上同调。特别地，(51) 的右端以这种方式定义。

上方方块的交换性根据 $i_!$ 定义 5.33。由此交换图表，对于 $b \in H^*_{\widetilde{G}}(P_N \times \mathcal{T}^{\mathrm{fix}} E)$

$$(f'_N)_!^{\mathcal{K}'_N}(b) = (f_N)_!^{\mathcal{K}_N}(i_!(b))$$

在 $S_{\mathbb{T}}$处进行局部化后，根据命题 5.64 和 $i^* \circ i_! = e_E(\nu)$，我们可以通过取

$$b = \frac{i^*(a)}{e_E\left(\nu_{(P_N \times \mathcal{T}^{\mathrm{fix}})/(P_N \times \mathcal{T})}\right)}$$

因为 $i_!(b) = a$。

(2) $\mathcal{K}'$ 与 $\mathcal{K}^{\mathrm{fix}}$ 之间唯一的区别在于障碍丛： $\mathcal{K}'$中存在过剩[46] $\mathcal{E}^{\mathrm{mov}}$。我们需要两个组成部分

- $\lambda^{-1}_{\widetilde{G},\, P_N \times \mathcal{T}^{\text{固定}}}(a \cup e_E(\mathcal{E}^{\text{移动}})) = e_E(\mathcal{E}^{\text{移动}}) \cap \lambda^{-1}_{\widetilde{G},\, P_N \times \mathcal{T}^{\text{固定}}}(a)$，对于任意 $a \in H^*_{\widetilde{G}}(P_N \times \mathcal{T}^{\text{固定}} E)$.
- $\mathrm{Thom}_{\mathcal{E}^{\text{固定}}}(s_*(e_E(\mathcal{E}^{\text{移动}}) \cap b)) = \mathrm{Thom}_{\mathcal{E}^{\text{固定}} \oplus \mathcal{E}^{\text{移动}}}((s,\ 0)_*(b))$ 对于 $b \in H^G_*\left((P_N \times \mathcal{T}^{\text{固定}})^c\right)$

其证明如下，令 $Y = P_N \times \mathcal{T}^{\text{固定}}$， $F = \mathcal{E}^{\mathrm{fix}}$ 和 $M = \mathcal{E}^{\mathrm{mov}}$ 是 $\widetilde{G}$ 上的 Y-等变向量丛。

- 令 $[Y^c]_E = \lambda^{-1}_{\widetilde{G},\, Y}(1)$ 为 Y 的等变 E-基本类，则 $\lambda^{-1}_{\widetilde{G},\, Y}$ 也可定义为 $\lambda^{-1}_{\widetilde{G},\, Y}(a) = a \cap [Y^c]_E$。因此，

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1}_{\widetilde{G},Y}(a \cup e_E(M)) &= (a \cup e_E(M)) \cap [Y^c]_E \\
&= e_E(M) \cap (a \cap [Y^c]_E) \\
&= e_E(M) \cap \lambda^{-1}_{\widetilde{G},Y}(a).
\end{aligned}$$

- 令 $q\colon\ F \to Y$ $p\colon\ F \oplus M \to Y$为丛投影，并令 $z\colon\ F \to F \oplus M$为嵌入。令 u_F， u_M为托姆类。由引理 5.4 可得

$$u_{F \oplus M} = u_F \cup u_M$$

沿着 z拉回，得到

$$z^* u_{F \oplus M} = u_F \cup q^* e_E(M)$$

因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Thom}_{F \oplus M}((s,0)_* b) &= \mathrm{Thom}_{F \oplus M}(z_* s_* b) \\
&= p_*\left(u_{F \oplus M} \cap z_* s_* b\right) \\
&= p_* z_*(z^* u_{F \oplus M} \cap s_* b) \\
&= q_*((u_F \cup q^* e_E(M)) \cap s_* b) \\
&= q_*(u_F \cap (q^* e_E(M) \cap s_* b))
\end{aligned}$$

[46]含义：截面 s 在 $\mathcal{E}^{\mathrm{mov}}$ 分量上为零

现在对 s 使用投影公式： $Y \to F$,

$$q^* e_E(M) \cap s_* b = s_*(s^* q^* e_E(M) \cap b)$$

最后一项是 $s_*(e_E(M) \cap b)$，因为 $q \circ s = \mathrm{id}_Y$。因此最终得到

$$\mathrm{Thom}_{F \oplus M}((s,0)_* b) = q_*(u_F \cap s_*(e_E(M) \cap b)) = \mathrm{Thom}_F(e_E(M) \cap b).$$

利用这两个组成部分，我们可以通过比较两个定义序列，类似地证明所需公式；可以注意到，其中只有两个不相同的映射，分别由每个组成部分涵盖。

□

6.3.2 AMS 构造的等变提升

设 (M, ω) 是一个辛流形，并假设它允许某个连通紧李群 K的哈密顿 K-作用。选择一个在K-作用下不变的相容的几乎复结构 J。

因此， K 通过后复合作用于模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{g,h}(M, \beta)$。为了将此作用提升到 AMS 图表，我们如下选择辅助数据。

- 我们选择 TM 上的辅助 J-线性联络 ∇，使其具有 K-不变性；这可以通过对任意 J-线性联络在 K 上进行平均化得到。
- $\mathcal{C} \to \mathcal{F}$和 $\mathfrak{C}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{F}_{\mathcal{F}}$：注意， K作用于 $\mathfrak{C}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{F}_{\mathcal{F}}$，而非 $\mathcal{C} \to \mathcal{F}$。一个 $k \in K$将 $(\phi, u) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{F}}$映到 $(\phi, k \cdot u)$，其中 $k \cdot u$是利用 M上的 K-作用定义的。
- Ω L：根据 [Hir25，引理 5。14], 利用 [Mun01，推论 1。4], 我们可以选取厄米线丛 $L \to M$，使得 K对 M 的作用可提升为对 L的线性酉作用。选取一个 K-不变的厄米联络 L，通过平均化得到，并将其曲率记为 $-2\pi \mathrm{i}\Omega$。
- k：没有区别。
- $\mathfrak{D}$：我们要求 $\mathfrak{C}_{\mathcal{F}} \to \mathfrak{F}_{\mathcal{F}}$ 上的一致定义域度量为 $\mathcal{G}_{\mathbb{C}} \times K$-不变，并要求 $\mathfrak{F}_{\mathcal{F}}$上具有典范的 $\mathcal{G}_C \times K$-作用。
- (V_μ, λ_μ)：注意到

$$\begin{array}{c} \Omega^{0,1}_{\mathcal{C}^\circ/\mathcal{F}} \otimes_{\mathbb{C}} TM \\ \downarrow \\ \mathcal{C}^\circ \times M \end{array}$$

具有典范的 $G \times K$-作用。我们要求 V_μ 不仅是 G-表示，而且还是$G \times K$-表示。这可以通过应用 [AMS24，引理 4。2] 来实现，其中群取为 $G \times K$。仍然需要稠密性。

如果我们以如下方式选择辅助数据 $\mathfrak{a}$，那么定义6.15 就具有一个 K-等变提升。~我们选择 $G = G \times K$，因为 G 与 K对数据的作用（ϕ、_u、 e、 F）彼此可交换。对于 $k \in K$，我们可以将 k 移过 ∂_J 和 λ_μ，因此带框架曲线的加厚模空间 $\mathcal{T}^{\mathfrak{a}}$ 保持不变

˜在 G-作用下。在障碍丛$\mathcal{E} = H_{g上,\ h、\ d} \oplus V_\mu \oplus \mathcal{H}$、 K 在$H_{g、\ h、\ d}$和 $\mathcal{H}$上作用平凡，而 G 通过其射影作用的微分作用于$H_{g、\ h、\ d}$，并通过共轭作用于 $\mathcal{H}$ 。因此

$$(g,k)\cdot(\eta,v,H) = \big(g_*\eta,(g,k)\cdot v, gHg^{-1}\big),$$

其中对 V_μ 的作用是 $\mathfrak{a}$的一部分。通过 G-等变的管状邻域识别，这些作用变为 $s_{\mathfrak{a}}$ $G\times K$-等变。

对于光滑结构和稳定几乎复结构，我们保留定义域变形和核参数上的自然 $G\times K$ 作用。定义域粘合数据在局部截面上等变地选取，并沿群轨道传递。度量、截断函数和右逆均通过紧群平均相容地选取。于是，预粘合与群作用可交换，而牛顿–皮卡修正的唯一性保证了粘合映射的等变性。相应的线性粘合构造尊重核上的诱导作用。因此，粘合论证中涉及的所有构造和选择都可以选为 $G\times K$-不变。

命题2.10 的证明

在证明命题 2.10之前，我们先引入一些记号。

定义 A.1. (1) 定义酉标架丛 $B_1 = \mathrm{Fr}_U(E_k)$，使得 $\mathrm{Tot}(K_1) \to B_1$ 是一个$U(r)$-等变向量丛。我们还定义标架丛 $B_{\mathbb{C}} = \mathrm{Fr}(E_k)$。

(2) 定义 义 $B_2 = B_{\mathbb{C}} \times_{\mathcal{F}_{0,\,0,\,D}} U_{0,\,0,\,D}$。换言之， B_2 中的一个点由 $(\phi,\ f,\ F)$ 组成，满足 t

- $\phi \in \mathcal{F}_{0,0,D}$.
- $f\colon\ \Sigma = \Sigma|_\phi \to \mathbb{P}^1$ 满足 $\bar{\partial} f = 0$。
- F是 $H^0\left(\Sigma, (\omega_\Sigma \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))^{\otimes k}\right)$的一个标架（不一定是酉的），使得

$(\phi,\ \phi_F) \in U_{0,\,0,\,D}$。

(3) 定义一个映射 $j\colon\ B_1 \to B_2$

$$B_1 \hookrightarrow B_{\mathbb{C}} = B_{\mathbb{C}} \times_{\mathcal{F}_{0,0,D}} \mathcal{F}_{0,0,D} \xrightarrow{\mathrm{id}_{B_{\mathbb{C}}} \times \Delta} B_{\mathbb{C}} \times_{\mathcal{F}_{0,0,D}} U_{0,0,D} = B_2$$

第一个映射是到复化的包含映射，而 $\Delta\colon \mathcal{F}_{0,\,0,\,D} \to U_{0,\,0,\,D}$ 是对角映射。j将 $(f,\ F) \in B_1$映射到 $(\phi_F,\ f,\ F) \in B_2$。

引理 A.2. *(1)* $B_{\mathbb{C}} \to \mathcal{F}_{0,\,0,\,D}$ 和 $U_{0,\,0,\,D} \to \mathcal{F}_{0,\,0,\,D}$ 都是下沉的。因此，$B_2 \to \mathcal{F}_{0,\,0,\,D}$ 也是下沉的。

(2) 映射 $j\colon\ B_1 \to B_2$ 是一个嵌入，其法丛为

$$N_{B_1/B_2} = \mathcal{H} \oplus H_{0,0,D}$$

事实上， $\mathcal{H}$ 是 $B_1 \hookrightarrow B_{\mathbb{C}}$的法丛，而 $H_{0,\,0,\,D}$ 是 $B_{\mathbb{C}} \hookrightarrow B_2$的法丛。

我们省略证明，因为只需考察每个光滑映射的微分即可。

记 $q\colon\ B_2 \to \mathcal{F}_{0,\,0,\,D}$。注意，对于点 $(\phi,\ u,\ e,\ F) \in \mathcal{T}$，我们可以将扰动的柯西–黎曼方程分解为 $T\mathbb{P}^1$方向和 N方向，以及 $u = (f,\ \xi)$，其中 $f\colon\ \Sigma \to \mathbb{P}^1$和 $\xi \in \Omega^0(\Sigma, \_\, f^*N)$。由于 $\lambda(e)$ 仅沿 N方向，在 $T\mathbb{P}^1$方向上我们实际上有 $\partial f = 0$，即 $f\colon\ \Sigma \to \mathbb{P}^1$ 是全纯的。所选的拉回陈联络将 $u^*L = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$ 上诱导的 $\bar{\partial}$-算子与通常的多尔博算子等同起来，因为 f 是全纯的。因此，同一个 F是定义 B_2时所使用的线丛的全纯标架，并确定相同的射影映射 ϕ_F。

定义 A.3. 将映射 $\rho\colon\ \mathcal{T} \to B_2$ 定义为

$$(\phi, u = (f, \xi), e, F) \mapsto (\phi, f, F)$$

我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & B_2 \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow{\scriptstyle q} \\ & & \mathcal{F}_{0,0,D} \end{array}$$

注意，$\mathcal{T} \to \mathcal{F}_{0,\,0,\,D}$ 具有一个 C^1_{loc} 结构，并且$B_2 \to \mathcal{F}_{0,\,0,\,D}$ 是一个浸没。

引理 **A.4.** 映射 ρ 与 C^1_{loc} 结构相容，并且按照 *th* 所述的意义是下沉的 *at*

$$D^{\mathrm{vert}}\rho\colon T^{\mathrm{vert}}(\mathcal{T}) \to T^{\mathrm{vert}}(B_2)$$

是满射的。

注记 A.5。 ρ与 C^1_{loc} 结构相容，意味着以下内容。给定任意一个 C^1_{loc} 平凡化 $U\times V_1 \to \mathcal{T}$，它定义在$U \subset \mathcal{F}_{0,0,D}$以及一个光滑平凡化 $U\times V_2 \to B_2$之上。那么在重叠区域上，坐标变换

$$U \times V_1 \to U \times V_2$$
$$(b, v) \mapsto (b, f_b(v))$$

- 给出一个光滑映射 $v \mapsto f_b(v)$，其中 b固定。
- $f_b\colon\ V_1 \to V_2$ 随 b连续变化，按照从 V_1 到 V_2的函数的 C^1loc 拓扑。

注记 A.6。 我们回顾一下 [Par16，附录 B]中的粘合论证如何给出 C^1_{loc} 预加厚模空间正则轨迹上的结构。

设 X 为辛流形，在此处考虑的情形下，它是 X_{loc} 。对于点 $x_0 = (\Sigma_0,\ u_0,\ e_0) \in \mathcal{T}_{\text{预}}$，取 U 为 $x_0 \in \mathcal{F}$ 的一个小邻域，并令 b 为U 在 x_0附近的局部坐标。我们有 $\kappa \in \mathbb{K}$，其中 K 是扰动的柯西–黎曼方程的线性化的核。 K 将成为 $T^{\mathrm{vert}}(\mathcal{T}_{\text{预}}/\mathcal{F})$。

对于较小的 b，构造预粘合映射 $u_b^{\mathrm{pre}} : \Sigma_b \to X$，并使用牛顿–皮卡迭代来定义一个映射

$$\kappa \in K \mapsto \kappa_b \in \Gamma(\Sigma_b, u_b^{\mathrm{pre}} TX) \tag{52}$$

使 $u_{b,\ \kappa} :=$ 指数$_{u_b}(\kappa_b)$ 真正 J-全纯。这类映射将成为结构性 C^1_{loc} 的平凡化预候选。粘合的详细内容见 [Par16，B.6–B.11]。

尽管定义 $\kappa \mapsto u_{b,\ \kappa}$ 的过程很复杂，但有一个技巧可以使逆映射显而易见。通过适当地选择（[Par16，公式 (B.7.3)]）

- 远离节点和标记点的点。
- 子空间 $V_i \subset T_{u_0(q_i)}X$和 $W'' \subset W$。

使得求值映射

$$L_0\colon K \subset \Omega^0\left(\Sigma_0, u_0^* TX\right) \oplus W \to \bigoplus_i (T_{u_0(q_i)}X/V_i) \oplus W/W''.$$

is 一个等价，那么可以进行粘合构造，使得复合 n

$$\kappa \mapsto (u_{b,\kappa}\colon \Sigma_b \to X) \xmapsto{\mathrm{ev}}{}^{48} \left(u_{b,\kappa}(q_i), \mathrm{proj}_{W\to W/W''}(e)\right).$$

与 L_0相同。换言之，求值映射再接上 L_0^{-1}恰好是（52）的逆映射。

[48]为了理解这个求值映射，我们在 $u_0(q_i) \subset X$ 附近找到坐标图，使得子空间 V_i 相对于 ∇是全测地的。由于所有定义域 Σ_b 在远离节点的区域上都可以识别，我们可以将点 $q_i \in \Sigma_0$ 延拓为 $\mathcal{C} \to \mathcal{F}$的一个截面，也记作 q_i。于是，求值映射由我们所选坐标中的 $u_{b,\ \kappa} \mapsto u_{b,\ \kappa}(q_i)$ 以及到商空间 $T_{u_0(q_i)}X/V_i$的映射给出。

引理 A.4 的证明。为简便起见，我们将 $\mathcal{F}_{0,0,D}$ 记作 $\mathcal{F}$。由于 $\mathcal{T}$是完整 GL$(r,\mathbb{C})$-标架丛 over $\mathcal{T}_{\text{预正则}}$的一个开子集，并且其在 $\mathcal{F}$上的 C^1_{loc} 结构继承自 $\mathcal{T}_{\text{预}}/\mathcal{F}$，因此在右端定义相应的预加厚对象较为方便。更确切地说，定义[49]

$$B_2^{\text{pre}} = \{(\phi, f) \mid \phi \in \mathcal{F}, f\colon \Sigma|_\phi \to \mathbb{P}^1 \text{ holomorphic}\}$$

它是一个代数几何对象，没有障碍，并且没有非平凡的稳定子群，因为ϕ 已经固定了域。事实上，投影 $B_2^{\text{pre}} \to \mathcal{F}$ 是光滑的（在代数几何意义下），因为 $H^1\left(\Sigma,\ f^*T\mathbb{P}^1\right) = 0$对于任意亏格 $0\ \Sigma$ 和全纯映射 f均成立。最后， B_2局部是 B_2^{pre} 上完整 GL$(r,\ \mathbb{C})$-标架丛的一个开子集。由于 ρ 保持标架坐标，将局部平凡化限制到这些开子集后，只需证明映射

$$\rho^{\text{pre}}\colon \mathcal{T}^{\text{pre}} \to B_2^{\text{pre}}$$

$$(\phi, u, e) \mapsto (\phi, f)$$

与 C^1_{loc} 结构相容且为下沉映射。

C^1_{loc} **相容性**。我们选择以下 C^1_{loc} 或光滑平凡化。具体内容回顾于注记A.6。

- 对于 $\mathcal{T}_{\text{pre}}/\mathcal{F}$：我们选择 $\mathcal{T}$ 的 $C^1{}_{\text{loc}}$ 平凡化

$$U \times K \hookrightarrow \mathcal{T}$$

$$(b, \kappa) \mapsto (u_{b,\kappa}\colon \Sigma_b \to X_{\text{loc}}).$$

- 对于 $B_{\text{pre}\ 2}\ /\mathcal{F}$，尽管其光滑结构直接来自代数几何，求值仍给出纤维的光滑平凡化。我们可以找到远离节点的 $q_{i,\ 2} \in \Sigma_b$ 和$V_i \subset T_{f_0(q_{i,\ 2})}\mathbb{P}^1$ ，使得

$$B_2^{\text{pre}} \xrightarrow{\text{ev}} \bigoplus_i T_{f_0(q_{i,2})}\mathbb{P}^1/V_i$$

  变成一个光滑的垂直坐标。

对于所有 Σ_b，远离节点的区域都可以识别；我们将其记为 Σ'。因此，可以通过以下方式检验 C^1_{loc} 兼容性

$$(b, \kappa) \in U \times K \mapsto u_{b,\kappa} \in W^{k,2}(\Sigma', X) \xmapsto{\text{ev}} (u_{b,\kappa}(q_{i,2})) \in \bigoplus_i T_{f_0(q_{i,2})}\mathbb{P}^1/V_i.$$

由于当 k充分大时，求值映射是光滑的，因此只需证明以下两个 [50]

[49]定义 B_2^{pre} 的另一种方式是：若不选择扰动（即 $V_\mu = 0$），它就是 AMS 构造中的预加厚模空间；由于 $\mathbb{P}^1$ 是凸的，这是可行的。也可以采用不同于当前方法的另一种途径，通过比较 AMS 构造与 X_{loc} 和 $\mathbb{P}^1$的粘合论证来实现。选择数据，使协变导数、指数映射和平行移动都与投影 p: $X_{\text{loc}} \to \mathbb{P}^1$相容：即 $T\mathbb{P}^1$和 TX_{loc}上的 ∇（带有 $\nabla J = 0$）。柯西–黎曼方程自动相容。唯一非平凡的部分是选择求值映射 L_0（[Par16，公式 (B.7.3)]），使其也与 p相容。这样便可断言，通过粘合得到的平凡化（使用这些粘合数据），映射 $\mathcal{T}^{\text{pre}} \to B_2^{\text{pre}}$ 变为线性的，甚至成为一个向量丛直和项上的投影。[50]检查由粘合得到的 $\mathcal{T}^{\text{pre}}$ 的不同坐标图是否C^1_{loc} 相容时，实际证明的也正是这一点

- $\kappa \mapsto u_{b,\kappa} \in W^{k,2}(\Sigma', X)$ 对固定的 b 是光滑的。
- 当 $b_j \to b_\infty$ 时，映射 $\kappa \mapsto u_{b,\kappa}$ 和 $\kappa \mapsto D_\kappa u_{b,\kappa}$ 在任意紧致集上关于 C^0 一致收敛。

这两个事实源于（并且正是 C^1_{loc} 结构所依据的事实） C^1_{loc}粘合过程中 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$ 两个不同坐标图的相容性，该结果证明于 [AMS21，定理6.1，推论629]。

S满射性。 典范映射 ρ^{pre} 是 C^1_{loc} 相容的。在 $e=0$ 处，我们可以识别 fy

$$T^{\mathrm{vert}}(\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}/\mathcal{F})|_{(\phi,u=(f,\xi),e=0)} = \{\zeta \in \Gamma(\Sigma, u^*TX_{\mathrm{loc}}), e' \in W \mid D_u\zeta + \lambda(e')\circ du = 0\} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{vert}}(\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}/\mathcal{F})|_{(\phi,u=(f,\xi),e=0)} = \Big\{ & \zeta_{\mathbb{P}^1} \in \Gamma(u^*T\mathbb{P}^1),\ \zeta_N \in \Gamma(u^*N),\ e' \in W \ \Big| \\ & \overline{\partial}_{f^*T\mathbb{P}^1}\zeta_{\mathbb{P}^1} = 0,\quad \overline{\partial}_{f^*N}(\zeta_N) + \lambda(e')\circ du = 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{54}$$

由于几乎复结构就是复结构（即它是可积的），线性化 D_u 与 $\partial_{u^*TX_{\mathrm{loc}}}$ 重合。因此，我们可以将方程拆分为 $T\mathbb{P}^1$ 方向和 N 方向。另一方面，我们可以写成

$$T^{\mathrm{vert}}(B_2^{\mathrm{pre}}/\mathcal{F})|_{(\phi,f)} = \left\{\zeta_{\mathbb{P}^1} \in \Gamma\left(\Sigma, f^*T\mathbb{P}^1\right) \mid \overline{\partial}_{f^*T\mathbb{P}^1}\zeta_{\mathbb{P}^1} = 0.\right\}$$

显然，自然投影映射

$$D^{\mathrm{vert}}\rho^{\mathrm{pre}} : T^{\mathrm{vert}}(\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}/\mathcal{F}) \to T^{\mathrm{vert}}(B_2^{\mathrm{pre}}/\mathcal{F})$$

$$(\zeta_{\mathbb{P}^1}, \zeta_N, e') \mapsto \zeta_{\mathbb{P}^1}$$

是满射的，因为我们已经将 $\zeta_{\mathbb{P}^1}$ 和 (ζ_N, e') 拆分开了。事实上，其核为 $\ker(W \to H^1(\Sigma, f^*N))$。证明完毕。 □

我们注意到， $D^{\mathrm{vert}}\rho^{\mathrm{pre}}$ 的核已在 B_2^{pre} 上定义。它提升为一个向量丛 $K_2 \to B_2$，其定义如下：

$$K_2|_{(\phi,f,F)} = \ker\left(W \to H^1(\Sigma, f^*N).\right)$$

注意，我们有一个向量丛的拉回图

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{\widetilde{j}} & K_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{j} & B_2 \end{array} \tag{55}$$

定义 **n A.7.** 定义 $t:\ \mathcal{T} \to \mathrm{Tot}(K_2)$，将 (ϕ, u, F, e) 映射为 $(\phi, f, F) \in B_2, e \in K_2|_{(\phi,f,F)}$ [5] [1].

[5] 1这是 b ecause $u = (f, \xi)\ e \in W$满足扰动的柯西–黎曼方程：$\partial_{f^*N}\xi + \lambda(e)|_{(\phi,f)} = 0$，这意味着 $\xi \in K_2$。

命题 A.8. *(1)* t 与 $\mathcal{T}/\mathcal{F}$ 及 $\mathrm{Tot}(K_2)/\mathcal{F}$的 C^1_{loc} 结构相容。后者上的 C^1_{loc}结构源自向量丛结构 $K_2 \to B_2$ 和浸没$B_2 \to \mathcal{F}$。

(2) t 诱导出一个拓扑空间之间的同胚（在零截面附近），并在垂直切丛上诱导出一个同构。因此， t 将 $\mathcal{T}/\mathcal{F}$ 上的 C^1_{loc} 结构提升为光滑浸没。

(3) 通过识别 $t\colon \mathcal{T} \to \mathrm{Tot}(K_2)$，包含映射 $i\colon \mathrm{Tot}(K_1) \to \mathcal{T}$可视为由向量丛映射 $j\colon K_1 \to K_2$诱导的$\widetilde{}$映射。

证明。 (1) 存在一个光滑嵌入 $\mathrm{Tot}(K_2) \hookrightarrow B_2 \times W$。 C^1_{loc}对 $\rho\colon \mathcal{T} \to B_2$ 的相容性已在引理 A.4中证明。 C^1_{loc} 对 $\mathcal{T} \to W$ 的相容性是因为它只需遗忘其他坐标。因此，映射 $t\colon \mathcal{T} \to \mathrm{Tot}(K_2)$ 也保持 C^1_{loc}结构。

(2) 在识别 (54) 中， $T^{\mathrm{vert}}(\mathcal{T}/B_2) \simeq T^{\mathrm{vert}}(\mathcal{T}_{\mathrm{pre}}/B_2^{\mathrm{pre}})$ 可识别为

$$\left\{\zeta_N, e' \mid \overline{\partial}_{f^*N}(\zeta_N) + \lambda(e') \circ du = 0\right\}.$$

相对于 B_2, $T^{\mathrm{vert}}(\mathcal{T}/B_2) \xrightarrow{dt} T^{\mathrm{vert}}(\mathrm{Tot}(K_2)/B_2) = K_2$的切映射可识别为

$$(\zeta_N, e') \mapsto e' \in K_2$$

这是一个复线性同构，这意味着 t 诱导出一个同构 $T^{\mathrm{vert}}(\mathcal{T}/B_2) \to T^{\mathrm{vert}}(\mathrm{Tot}(K_2)/B_2)$，以及一个同构 $T^{\mathrm{vert}}(\mathcal{T}/\mathcal{F}) \to T^{\mathrm{vert}}(\mathrm{Tot}(K_2)/\mathcal{F})$。缩小之后， $t\colon \mathcal{T}/\mathcal{F} \to \mathrm{Tot}(K_2 \to B_2)/\mathcal{F}$ 是纤维丛的同构。

(3) 我们复合 $\mathrm{Tot}(K_1) \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{t} \mathrm{Tot}(K_2)$。它在 (f, F, e) 上的作用为

$$(f, F) \in \mathrm{Fr}_U(E_k), e \in K_1 \mapsto (\phi_F, u = (f, \xi), F, e \in W) \mapsto (\phi_F, f, F, e \in K_2)$$

这里 ξ 是$\partial_{f^*N}\xi + \lambda(e) \circ du = 0$的唯一解。省略 e后，这恰好给出了定义A.1中定义的底空间基映射 $j\colon B_1 \to B_2$。总映射保持纤维；事实上，它是恒等映射 $e \mapsto e$。因此，包含映射 $i\colon \mathrm{Tot}(K_1) \to \mathcal{T}$可识别为$\mathrm{Tot}(K_1) \to \mathrm{Tot}(K_2)$ 由（55）诱导。

□

总之，我们得到 $\mathcal{T}$ 的一个平滑化，其为 $\mathrm{Tot}(K_2)$。

命题的证明 *2.10*。 回忆一下，态射 $\mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}^{\mathrm{AMS}}$ 是 $i\colon \mathrm{Tot}(K_1) \to \mathcal{T} \simeq \mathrm{Tot}(K_2)$ 在底空间上的映射，而 $W \hookrightarrow H_{0,0,D} \oplus W \oplus \mathcal{H}$ 则作用于障碍丛上。由于定义稳定复结构的同伦沿零截面为常值，引理 6.19 以及上述复线性识别表明， i 在其附近保持指定的稳定复结构。因此，剩下要证明的是以下复形正合

$$0 \to T(\mathrm{Tot}(K_1)) \xrightarrow{\mathrm{d}\, i} T\mathcal{T} \to H_{0,0,D} \oplus \mathcal{H} \to 0.$$

由于 (55) 是一个拉回图，我们有 $\mathrm{coker}(\mathrm{d}\, i) \simeq N_{B_1/B_2}$，其同构于 $H_{0,\ 0,\ D} \oplus \mathcal{H}$由引理 A.2(2) 可知。事实上，可以验证复合 $T\mathcal{T} \to TB_2 \to N_{B_1/B_2} \simeq H_{0,\ 0,\ D} \oplus \mathcal{H}$ 与由 s（ $\mathcal{K}^{\mathrm{AMS}}$ 的截面）给出的映射一致

□

B 命题的证明6.20

我们回顾一下 [Par16，附录 B]中的一些背景。使用其中的记号[52]，，我们将 $(\alpha,\ y)$ 记作定义域曲线（ Σ_0附近）的参数，其中 α 控制节点的平滑化，而 y控制复结构的变形。令 C_α 为对应于α 的光滑节点曲面，Pardon 构造了一个预粘合映射 $u_\alpha\colon\ C_\alpha \to M$ [Par16，定义 B.3.2]。于是，当 $\kappa \in K_0$充分小时且 $(\alpha,\ y)$ 充分接近原点时，通过牛顿-皮卡迭代，可以得到一个 $\kappa_{\alpha,\ y} \in W^{k,\ 2,\ \delta}(C_\alpha,\ u_\alpha^* TM) \oplus E$使得

$$u_{\alpha,y,\kappa} := \exp_{u_\alpha}(\kappa_{\alpha,y})$$

$$e_{\alpha,y,\kappa} := e_0 + \mathrm{proj}_E \kappa_{\alpha,y}$$

构成扰动的柯西–黎曼方程的一个解 [Par16，命题 B.9。2], 这给出了 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$ [Par16，命题 B.11。5]。我们取 ∇ 在 M 上的 J-线性[53]，并据此定义平行移动映射:

$$\mathsf{PT}_{u_\alpha \to u_x}\colon W^{k,2,\delta}(C_\alpha, u_\alpha^* TM) \oplus E \to W^{k,2,\delta}(C_\alpha, u_x^* TM) \oplus E$$

$$\mathsf{PT}_{u_x \to u_\alpha}\colon W^{k-1,2,\delta}\left(\widetilde{C}_\alpha, \Omega^{0,1}_{\widetilde{C}_\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} u_x^* TM\right) \to W^{k-1,2,\delta}\left(\widetilde{C}_\alpha, \Omega^{0,1}_{\widetilde{C}_\alpha} \otimes_{\mathbb{C}} u_\alpha^* TM\right)$$

固定 $(x_0,\ t_0) \in \mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \times [0,1]$，并令 $K_0 = K_{x_0,\ t_0}$。与 [Par16、公式 (B.7.3)], 中一样，我们可以在 Σ_0 的光滑部分上选取有限多个点 q_i，并取子空间 $V_i \subset T_{u_0(q_i)} M$ 和一个子空间 $E'' \subset E$，使得投影映射

$$l_0\colon W^{k,2,\delta}(\Sigma_0, u_0^* TM) \oplus E \to W := \left(\bigoplus_i T_{u_0(q_i)} M / V_i\right) \oplus E/E''$$

在 K_0 上的限制是一个同构 $l_0|_{K_0}\colon K_0 \xrightarrow{\simeq} W$。等价地，限制

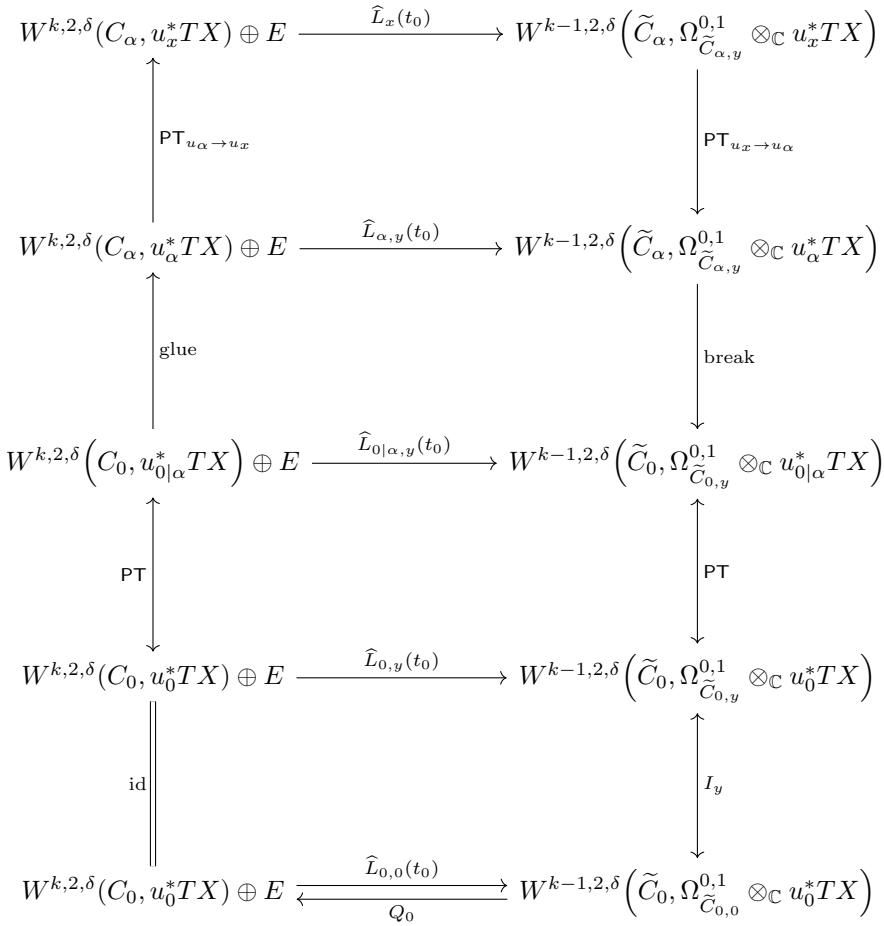
$$\widehat{L}_{x_0}(t_0)|_{\ker l_0}\colon\ \ker l_0 \to \Omega^{0,1}(\widetilde{\Sigma_0}, u_0^* TM)$$

是一个同构。令 Q_0 为其逆映射。对于 $\mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$ 中充分接近 x_0 的 x，我们可以定义[54]$q_i(x) = \exp_{u_\alpha(q_i)}(\kappa_{\alpha,y})$，并通过平行移动定义 $V_i(x) \subset T_{u_x(q_i)} M$。定义

$$l_x\colon W^{k,2,\delta}(\Sigma_x, u_x^* TM) \oplus E \to W_x := \left(\bigoplus_i T_{u_x(q_i(x))} M / V_i(x)\right) \oplus E/E''.$$

[52]在我们的记号中，我们用 $x \in \mathcal{T}^{\mathrm{pre}}$ 表示对应于坐标 $(\alpha,\ y,\ \kappa)$ 的一般点，并记 $\Sigma_x = C_\alpha,\ u_x = u_{\alpha,\ y,\ \kappa}$。[53]这一要求在 [Par16，附录 B3] 中假定。[54]注意，u_α 通过 u_0 与 C_α 的识别，在远离节点处与 C_0 重合。

我们将 Pardon 的论文中的图（B.7.7）扩展为



(56)

对于 (56) 中出现的每个算子，写作

$$\widehat{L}_\bullet(t) = \widehat{D}_\bullet + (1-t)\widehat{A}_\bullet, \qquad \widehat{A}_\bullet := \widehat{D}^{\mathbb{C}}_\bullet - \widehat{D}_\bullet,$$

其中 $A_\bullet$ 是零阶的，并且在有限维稳定化因子 E上消失。那么，缩小粘合邻域后，[Par16、引理 B.7.2–B.7.4 以及方程 (B.8.10)] 的估计仍然成立，其中每个 $D_\bullet$ 都替换为 $L_\bullet(t)$，且常数与$t \in [0,1]$无关。更确切地说：

引理 B.1. *(1)* 对于底部方块，

$$\left|\widehat{L}_{0,y}(t) - I_y \circ \widehat{L}_{0,0}(t)\right| \le C|y|.$$

(2) 对于中间方块，

$$\left|\mathsf{PT} \circ \widehat{L}_{0,y}(t) - \widehat{L}_{0|\alpha,y}(t) \circ \mathsf{PT}\right| \le C \sum_{i=1}^{d} e^{-S_i}.$$

(3) 对于粘合–断裂方块，若 $L_{0|\alpha,\ y}(t)\xi =$断裂(η)，则

$$\left\|\widehat{L}_{\alpha,y}(t)\,\mathrm{glue}(\xi)-\eta\right\|_{k-1,2,\delta}\leq C\left\|\xi\right\|_{k,2,\delta}\sum_{i=1}^{d}e^{-2\delta S_i}.$$

(4) 假设 $u_x=\exp_{u_\alpha}\zeta$。利用 u_α^*TM与 u_x^*TM之间的 J-线性平行移动，可得

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{L}_{\alpha,y}(t)-\mathsf{PT}u_x\to u_\alpha\circ\widehat{L}_x(t)\circ\mathsf{PT}_{u_\alpha\to u_x}\right\|_{W^{k,2,\delta}\to W^{k-1,2,\delta}}\\ \leq C\left\|\zeta\right\|_{k,2,\delta}.\end{aligned}$$

这四个估计对 $t\in[0,1]$ 都一致成立。

证明。 (1) 记

$$\widehat{L}_{0,y}(t)-I_y\widehat{L}_{0,0}(t)=(\widehat{D}_{0,y}-I_y\widehat{D}_{0,0})+(1-t)(\widehat{A}_{0,y}-I_y\widehat{A}_{0,0}).$$

Pardon 证明

$$\left\|\widehat{D}_{0,y}-I_y\widehat{D}_{0,0}\right\|\leq C|y|.$$

对于第二项，$A_{0,\ y}$ 是一个零阶算子，其系数光滑依赖于j_y，u_0，e_0，并且 I_y 是关于 y 光滑的复线性算子，于是

$$\left\|\widehat{A}_{0,y}-I_y\widehat{A}_{0,0}\right\|\leq C|y|.$$

(2) 展开

$$\mathsf{PT}\circ\widehat{L}_{0,y}(t)-\widehat{L}_{0|\alpha,y}(t)\circ\mathsf{PT}=\mathsf{PT}\circ\widehat{D}_{0,y}(t)-\widehat{D}_{0|\alpha,y}(t)\circ\mathsf{PT}+(1-t)(\mathsf{PT}\circ\widehat{A}_{0,y}(t)-\widehat{A}_{0|\alpha,y}(t)\circ\mathsf{PT}).$$

Pardon 证明

$$\mathsf{PT}\circ\widehat{D}_{0,y}(t)-\widehat{D}_{0|\alpha,y}(t)\circ\mathsf{PT}\leq C\sum_i e^{-S_i}.$$

对于 A 部分，我们写作

$$\begin{aligned}\widehat{A}_{0,y}&=-\frac{1}{2}\left(\widehat{D}_{0,y}+J_Y\circ\widehat{D}_{0,y}\circ J_X\right)\\ \text{and}\quad\widehat{A}_{0|\alpha,y}&=-\frac{1}{2}\left(\widehat{D}_{0|\alpha,y}+J_{Y,\alpha}\circ\widehat{D}_{0|\alpha,y}\circ J_{X,\alpha}\right).\end{aligned}$$

由于 $\nabla J=0$，平行移动与这些 J_X，J_Y，$J_{X,\ \alpha}$，$J_{Y,\ \alpha}$对易。于是

$$\begin{aligned}\mathsf{PT}\circ\widehat{A}_{0,y}-\widehat{A}_{0|\alpha,y}\circ\mathsf{PT}&=-\frac{1}{2}\Big(\mathsf{PT}\circ\widehat{D}_{0,y}+\mathsf{PT}\circ J_Y\circ\widehat{D}_{0,y}J_X\\ &\qquad-\widehat{D}_{0|\alpha,y}\circ\mathsf{PT}-J_{Y,\alpha}\circ\widehat{D}_{0|\alpha,y}\circ J_{X,\alpha}\circ\mathsf{PT}\Big)\\ &=-\frac{1}{2}\left(\Delta_D+J_{Y,\alpha}\Delta_D J_{X,0}\right),\end{aligned}$$

其中 $\Delta_D = \mathsf{PT} D_{0,\,y} - D_{0|\alpha,\,y}\mathsf{PT}$。假设我们使用的索博列夫范数是由 J- 厄米度量诱导的，那么 $\|J_{Y,\,\alpha}\| = 1$，$\|J_X\| = 1$。因此，

$$\left\| \mathsf{PT} \circ \widehat{A}_{0,y} - \widehat{A}_{0|\alpha,y} \circ \mathsf{PT} \right\| \le \|\Delta_D\|$$

且右端由 Pardon 的原始估计控制。

(3) 对于粘合–断裂方块，无需新的估计。事实上，Pardon 的证明中引理 B.7.4 的缺陷在每个颈部上都支撑于 $[2S_i, 2S_i+1] \cup [4S_i - 1, 4S_i]$。在较大的区域内，预粘合映射是常值，且扰动项消失。因此，相应的线性化算子就是复线性柯西–黎曼算子 $\nabla^{0,\,1}$。特别是，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其复反线性零阶部分 $A_\bullet$ 在该处消失。因此，$L_\bullet(t) = D_\bullet$ 在粘合–断裂缺陷的支撑上成立，Pardon 的证明中引理 B.7.4 的论证可原样适用，并得到相同的估计

$$\left\| \widehat{L}_{\alpha,y}(t)\,\mathrm{glue}(\xi) - \eta \right\|_{k-1,2,\delta} \le C\,\|\xi\| \sum_i e^{-2\delta S_i}.$$

(4) 证明与 (2) 类似。

□

定义$T_{x,\,t_0}$ 为

$$T_{x,t_0} = \mathsf{PT}_{u_\alpha \to u_x} \circ \mathrm{glue} \circ \mathsf{PT} \circ \mathrm{id} \circ Q_0 \circ I_y \circ \mathsf{PT} \circ \mathrm{break} \circ \mathsf{PT}_{u_x \to u_\alpha}.$$

引理 B.1 表明，对于 $t = t_0$ 和 $x \to x_0$，我们有

$$\|T_{x,t_0}\| \le C, \quad \left\| \widehat{L}_x(t_0) \circ T_{x,t_0} - \mathrm{Id} \right\| \to 0 \tag{57}$$

对于 $t \ne t_0$，我们有

$$\left\| \widehat{L}_x(t) T_{x,t_0} - \mathrm{Id} \right\| \le \left\| \widehat{L}_x(t_0) \circ T_{x,t_0} - \mathrm{Id} \right\| + |t - t_0| \cdot \left\| \widehat{A}_x T_{x,t_0} \right\|.$$

取（x，t）位于（x_0，t_0）的某个开邻域中，则有

$$\left\| \widehat{L}_x(t) T_{x,t_0} - \mathrm{Id} \right\| \le \frac{1}{2} \tag{58}$$

定义

$$Q_{x,t} = T_{x,t_0} \sum_{n \ge 0} \left(\mathrm{Id} - \widehat{L}_x(t) T_{x,t_0} \right)^n$$

使得

$$\widehat{L}_x(t) Q_{x,t} = \mathrm{Id}, \quad \|Q_{x,t}\| \le C$$

根据粘合映射的构造以及通过平行移动对 $V_i(x) \subset T_{u_x(q_i(x))}M$ 的定义，我们$\widehat{\ }$有 $\mathrm{im}(Q_{x,\,t}) \subset$ 核 l_x。此外，由于 $L_x(t)$ 的满射性，我们有

$$\mathrm{codim\,im}\, Q_{x,t} = \dim \ker \widehat{L}_x(t) = {}^{55} \dim \ker \widehat{L}_{x_0}(t_0) = \dim W = \dim W_x = \mathrm{codim} \ker l_x,$$

so

$$\mathrm{im}(Q_{x,t}) = \ker l_x. \tag{59}$$

[55]此处 我们利用柯西–黎曼算子指标的计算，得到 $\dim \ker \widehat{L}_x(t) = \dim \ker \widehat{L}_{x_0}(t_0)$。

命题证明 *6.20*。 固定一个 $(x_0,t_0)\ \in\ \mathcal{T}_{\text{预}}$，以及开邻域中某个 (x,t) 点，该开邻域属于 (x_0,t_0)，考虑

$$l_x|K_{x,t}\colon K_{x,t}\to W_x.$$

由（59），这是一个向量空间同构。 W_x 可通过反向平行移动典范地识别为 W，因此 l_x 在（x_0, t_0）的一个开邻域内给出$K_{x,t}$ 的局部平凡化。

我们证明这为 $\mathcal{K}$定义了一个拓扑向量丛结构。等价地，对于两点$a,b\in\mathcal{T}$ pre$\times[0,1]$ 以及前述平凡化有定义的开邻域 U_a,U_b，若 $U_a\cap U_b\neq\varnothing$，则传输 $\tau_x\colon W_x^a(\xrightarrow{l_x^a\ ^{-1}})_t(l_x^b)\longrightarrow W_x^b$关于（$x,t$）是连续的（使用 $W_x\simeq W$的典范平凡化）。为简化记号，我们用 p 表示点（x,t）。记 $X_p=W^{k,2,\delta}(C_\alpha,u_x^*TM)\oplus E$和 $Y_p=W^{k-1,2,\delta}\left(\widetilde{C}_\alpha,\Omega^{0,1}\widetilde{C}_\alpha\otimes_{\mathbb{C}}u_x^*TM\right)$。记$K_p=\ker D_p$（之前记作$K_{x,t}$）。我们记 $D_p:=\widehat{L}_x(t)$和 Q_p^a,Q_p^b为$Q_{x,t}$，其中 a 或 b 指构造的底点（之前为（x_0,t_0））。

我们可以显式地选取 l_p^a 的逆映射： $K_p\to W_p^a$，如下所示。

- 首先选取一个截面 s_p^a： $W_p^a\to X_p$，使其关于 p 连续。这是可行的，因为 q_i 都远离颈部区域。y 远离颈部区域，因此我们可以选择 s_p^a 在每个 q_i 附近为隆起函数。
- 定义 $R_p^a:=\mathrm{Id}-Q_pD_p$。这是关于 $X_p=K_p\oplus\mathrm{im}\ Q_p^a$ 的投影 $X_p\to K_p$。
- 逆映射定义为 $w\in W_p^a\mapsto R_p^a\circ s_p^a(w)\ \in K_p$。

因此， τ_p 可以表示为

$$\tau_p=l_p^b(\mathrm{Id}-Q_p^aD_p)s_p^aw=l_p^bs_p^aw-l_p^bQ_p^aD_ps_p^aw$$

只需证明：对于固定的 $w\in W^a$（使用平行移动 $W_p^a\simeq W^a$）， $l_p^bs_p^aw$ 和 $l_p^bQ_p^aD_ps_p^aw$ 都关于 p 连续。

对于 $l_p^bs_p^aw$，注意到作为函数的 s_p^aw 的支集避开了颈部区域/薄部，并且可以识别不同 p 对应的域的厚部，因此 s_p^aw 可以被视为定义在同一个域上的连续函数族（关于 p）。所以，将其限制到另一组点上—— l_p^b 所做的正是这一点——关于 p 是连续的。

对于 $l_p^bQ_p^aD_ps_p^aw$，我们写成

$$l_p^bQ_p^aD_ps_p^aw=\sum_{n\geq0}l_p^bT_p^a(\mathrm{Id}-D_pT_p^a)^nD_ps_p^nw$$

只需证明每一项关于 p 连续，并且该求和在 C^0-范数下是一致收敛的。下面考察此表达式中的每一项：

- s_p^aw 在厚部上连续变化。
- D_p：其系数连续变化。
- 断开/粘合/PT/I_y：关于粘合参数连续。
- Q_0^a固定

- l_p^b：有限维求值映射。因此 $p \mapsto l_p^b T_p^a (\mathrm{Id} - D_p T_p^a)^n D_p s_p^n w$ 是连续的。由（58）和（57）可得一致收敛。最后，我们引用 [HS24，引理 5.11]，将 $K|_{\mathcal{T}^{\mathrm{pre}} \times 0}$ 提升为拓扑复向量丛。

□

参考文献

[AB21] Mohammed Abouzaid 和 Andrew J. Blumberg。Arnold 猜想与 Morava K-理论。2021年。arXiv：2103.01507 [math.SG]。网址：https://arxiv.org/abs/2103. 01507（引于第 3 页）。[AB25] Mohammed Abouzaid 和 Shaoyun Bai。配边与奇点消解。2025年。arXiv：2412.04451 [math.AT]。网址：https://arxiv.org/abs/2412.04451（引于第 3 页）。[AB84] M. F. Atiyah 和 R. Bott。“矩映射与等变上同调”。载于：《Topology》23.1（1984），第 1–28 页。ISSN：0040-9383。DOI：10.1016/0040- 9383(84)90021- 1。网址：https://doi.org/10.1016/0040-9383(84)90021-1（引于第 82 页）。[Ada74] J. F. Adams。稳定同伦与广义同调。芝加哥数学讲义。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州–伦敦，1974年，第 x+373 页（引于第 53–55 页）。[AMS21] Mohammed Abouzaid、Mark McLean 和 Ivan Smith。复配边、哈密顿环与全局 Kuranishi 图表。2021年。arXiv：2110.14320 [math.SG]。网址：https: //arxiv.org/abs/2110.14320（引于第 3、58、67、68、85、88–90、92、94、96、99、108 页）。[AMS24] Mohammed Abouzaid、Mark McLean 和 Ivan Smith。“复理论与 Morava 局部化理论中的 Gromov-Witten 不变量”。载于：《几何与泛函分析》34.6（2024年），第 1647–1733 页。ISSN：1016-443X,1420-8970。DOI：10.1007/s00039- 024- 00697-4。网址：https: //doi.org/10.1007/s00039-024-00697-4（引于第 3、9、50、85–88、90–92、94、97、103 页）。 KAra[Dhyan Aranha 等。“重新考察虚拟局部化”。载于：《数学进展》479（2025年），论文编号 110434，共 53 页。ISSN：0001-8708,1090-2082。DOI：10.1016/j.aim.2025.110434。网址：https://doi.org/10.1016/j.aim.2025.110434（引于第 63 页）。+25] Ben[Shay Ben-Moshe。跨色同伦理论中的高阶半加性。2024年。arXiv：2411.24] math.AT00968 [。网址：https://arxiv.org/abs/2411.00968（引于第 5 页）。]Ben[Shay Ben-Moshe。跨色同伦理论中的转移。多伦多大学代数几何研讨会讲义。报告于 2025年10月22日。访问日期：2026年7月15日。2025年10月。网址：https://shaybm.com/pdfs/notes/2025-10- 22-Toronto-AG.pdf（引于第 70 页）。25] BF[K. Behrend 和 B. Fantechi。“内禀正规锥”。载于：《数学发明》128.1（1997年），第 45–88 页。ISSN：0020-9910,1432-1297。DOI：10 . 1007 / s002220050136。网址：https : // doi.org/10.1007/s002220050136（引于第 2 页）。

[BMO11] Alexander Braverman、Davesh Maulik 和 Andrei Okounkov。“Springer 解消的量子上同调”。载于：《数学进展》227.1（2011年），第 421–458 页。DOI：10.1016/j.aim.2011.01.021。arXiv：1001.0056 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/1001.0056（引于第 6 页）。[BP24] Shaoyun Bai 和 Daniel Pomerleano。复定向理论中的等变形式性。2024年。arXiv：2405.05821 [math.SG]。网址：https://arxiv.org/abs/2405.05821（引于第 64、82 页）。[BR05] Andrew Baker 和 Birgit Richter。“数值多项式环的 Γ-上同调与 E_∞ 理论上的结构”。载于：Comment. Math. Helv. 80.4（2005年），第 691–723 页。ISSN：0010-2571,1420-8946。DOI：10.4171/CMH/31。网址：https://doi.org/10. 4171/CMH/31（引于第 79 页）。[BX11] Kai Behrend 和 Ping Xu。“可微栈与带”。载于：J. Symplectic Geom. 9.3（2011年），第 285–341 页。ISSN：1527-5256,1540-2347。DOI：10.4310/jsg.2011.v9.n3.a2。网址：https://doi.org/10.4310/jsg.2011.v9.n3.a2（引于第 63 页）。[BX22] Shaoyun Bai 和 Guangbo Xu。整数上的 Arnold 猜想。2022。arXiv：2209.08599[math.SG]。网址：https://arxiv.org/abs/2209.08599（引于第 94 页）。[BX25] Shaoyun Bai 和 Guangbo Xu。轨形上的一个新横截条件与整数值 Gromov-Witten 型不变量。2025年。arXiv：2201.02688 [math.SG]。网址：https: //arxiv.org/abs/2201.02688（引于第 3 页）。[Che11] Man Chuen Cheng。关于 Deligne-Mumford 栈的 Morava K-理论对偶定理。博士学位论文，斯坦福大学。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2011年，第 79 页。ISBN：979-8672-19498-1。网址：http://gateway.proquest.com/openurl? url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqm&rft_dat=xri:pqdiss:28168008（引于第 67 页）。[Che13] Man Chuen Cheng。分类空间中轨形的 Morava K-理论庞加莱对偶。2013年。arXiv：1305.2731 [math.AT]。网址：https://arxiv.org/abs/1305.2731（引于第 67 页）。[CL25] You-Cheng Chou 和 Y.-P. Lee。“量子 K-不变量与 Gopakumar–Vafa 不变量 II：零亏格的卡拉比–丘三维簇”。载于：《几何与拓扑》29（2025年），第 4665–4693 页。DOI：10.2140/gt.2025.29.4665。arXiv：2305.08480 [math.AG]。网址：https: //arxiv.org/abs/2305.08480（引于第 4 页）。[EG11] Johannes Ebert 和 Jeffrey Giansiracusa。“Pontrjagin-Thom 映射与稳定曲线模栈的同调”。载于：Math. Ann. 349.3（2011年），第 543–575 页。ISSN：0025-5831,1432-1807。DOI：10.1007/s00208-010-0518-2。网址：https://doi.org/10. 1007/s00208-010-0518-2（引于第 66 页）。[FO99] Kenji Fukaya 和 Kaoru Ono。“一般辛流形的 Arnold 猜想与 Gromov-Witten 不变量”。载于：《Arnoldfest》（多伦多，1997年）。第 24 卷。Fields 研究所通讯。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年，第 173–190 页。ISBN：0-8218-0945- 8。DOI：10.1090/fic/024/12。网址：https://doi.org/10.1090/fic/024/12（引于第 3 页）。

[Giv00] Alexander Givental。《量子 K理论中的 WDVV 方程》。载于：第 48 卷。献给 William Fulton，以庆祝其 60 岁生日。2000 年，第 295–304 页。doi: 10.1307/mmj/1030132720。网址：https://doi.org/10.1307/mmj/1030132720（引于第 3 页）。[GP99] T. Graber 和 R. Pandharipande。《虚类的局部化》。载于：《数学发明》135.2（1999 年），第 487–518 页。issn：0020-9910,1432-1297。doi: 10.1007/s002220050293。网址：https://doi-org.libproxy.mit.edu/10.1007/s002220050293（引于第 5、17 页）。[GS96] J. P. C. Greenlees 和 Hal Sadofsky。《 v_n周期复定向理论的 Tate 谱》。载于：《数学杂志》222.3（1996 年），第 391–405 页。issn：0025-5874,1432-1823。doi：10.1007/PL00004264。网址：https://doi.org/10.1007/PL00004264（引于第 67、68 页）。[GV98a] Rajesh Gopakumar 和 Cumrun Vafa。M 理论与拓扑弦–I。1998 年。arXiv：hep-th/9809187 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/hep-th/9809187（引于第 4 页）。[GV98b] Rajesh Gopakumar 和 Cumrun Vafa。M 理论与拓扑弦–II。1998 年。arXiv：hep-th/9812127 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/hep-th/9812127（引于第 4 页）。[Hir25] Amanda Hirschi。《通过全局 Kuranishi 图表定义的 Gromov-Witten 不变量的性质》。载于：Ann. H. Lebesgue 8（2025 年），第 811–871 页。issn：2644-9463。doi：10.5802/ahl.249。网址：https://doi.org/10.5802/ahl.249（引于第 5、63、85、98、103 页）。[HKR00] Michael J. Hopkins、Nicholas J. Kuhn 和 Douglas C. Ravenel。《广义群特征与复定向上同调理论》。载于：《美国数学会杂志》13.3（2000 年），第 553–594 页。issn：0894-0347,1088-6834。doi：10.1090/S0894-0347-00-00332-5。网址：https://doi.org/10.1090/S0894-0347-00-00332-5（引于第 5、31、34、58、59、70–72、82、85 页）。[Hor+03] Kentaro Hori 等。《镜像对称》。第 1 卷。Clay 数学专著。附 Vafa 所作序言。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛；Clay 数学研究所，剑桥，马萨诸塞州，2003 年，第 xx+929 页。isbn：0-8218-2955-6（引于第 3、8、12、14、15、17–20 页）。[HS24] Amanda Hirschi 和 Mohan Swaminathan。《辛 Gromov-Witten 理论中的全局 Kuranishi 图表与乘积公式》。载于：Selecta Math.（新系列）30.5（2024 年），论文编号 87，74 页。issn：1022-1824,1420-9020。doi：10 . 1007 / s00029 - 024 - 00982 - y。网址：https://doi.org/10.1007/s00029-024-00982-y（引于第 3、85、94、96、97、115 页）。[IP18] Eleny-Nicoleta Ionel 和 Thomas Parker。《辛流形的 Gopakumar-Vafa 公式》。载于：《数学年刊》187.1（2018 年），第 1–64 页。doi：10.4007/annals.2018.187.1.1。网址：https://doi.org/10.4007/annals.2018.187.1.1（引于第 4、46–52 页）。[Kaw79] Tetsuro Kawasaki。《复 V流形的 Riemann-Roch 定理》。载于：Osaka Math. J. 16.1（1979 年），第 151–159 页。issn：0388-0699。网址：http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1200771835（引于第 5、70 页）。

[KM94] M. Kontsevich 和 Yu. Manin。《Gromov-Witten 类、量子上同调与计数几何》。载于：《数学物理通讯》164.3（1994 年 8 月 1 日），第 525–562 页。issn：1432-0916。doi：10.1007/BF02101490。网址：https://doi.org/10.1007/BF02101490（引于第 2 页）。[Kon95] Maxim Kontsevich。《通过环面作用枚举有理曲线》。载于：《曲线模空间》（特克塞尔岛，1994 年）。第 129 卷。数学进展。Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1995 年，第 335–368 页。isbn：0-8176-3784-2。doi：10.1007/978-1-4612-4264-2_12。网址：https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4264-2_12（引于第 3、12–14 页）。[Lar22] Timothy Large。局部化与 Morava K-理论 Gromov–Witten 不变量。录制讲座，MSRI/SLMath讲座档案。视频录制。2022。网址：https://vimeo.com/770979516（引于第 3 页）。[Las79] Richard Lashof。《稳定 G光滑化》。载于：《代数拓扑，滑铁卢，1978》（会议论文集，滑铁卢大学，加拿大安大略省滑铁卢，1978 年）。第 741 卷。数学讲义。Springer，柏林，1979 年，第 283–306 页。isbn：3-540-09545-4（引于第 94 页）。[Lee04] Y.-P. Lee。《量子 K理论。一、基础》。载于：《杜克数学杂志》121.3（2004 年），第 389–424 页。issn：0012-7094,1547-7398。doi：10.1215/S0012-7094-04-12131-1。网址：https://doi.org/10.1215/S0012-7094-04-12131-1（引于第 3 页）。[Ler10] Eugene Lerman。《作为层的轨形？》。载于：《数学教学》（第 2 辑）56.3-4（2010 年），第 315–363 页。issn：0013-8584。doi：10.4171/LEM/56-3-4。网址：https://doi.org/10.4171/LEM/56-3-4（引于第 59–61、63 页）。[LT98a] Jun Li 和 Gang Tian。《代数簇的虚拟模空间循环与 Gromov-Witten 不变量》。载于：《美国数学会杂志》11.1（1998 年），第 119–174 页。issn：0894-0347,1088-6834。doi：10.1090/S0894-0347-98-00250-1。网址：https://doi.org/10.1090/S0894-0347-98-00250-1（引于第 2 页）。[LT98b] Jun Li 和 Gang Tian。《一般辛流形的虚拟模空间循环与 Gromov-Witten 不变量》。载于：《辛四维流形专题》（加利福尼亚州尔湾，1996 年）。第 I 卷。第一届国际出版社讲座系列。国际出版社，剑桥，马萨诸塞州，1998 年，第 47–83 页。isbn：1-57146-019-5（引于第 3 页）。[Lur] Jacob Lurie。《色同伦论》。哈佛大学数学252x课程讲义。网址：https://people.math.harvard.edu/~lurie/252x.html；访问日期：2026年7月5日（引于第 58 页）。[Moe02] Ieke Moerdijk。《作为群胚的轨形：导论》。载于：《数学与物理中的轨形》（威斯康星州麦迪逊，2001 年）。第 310 卷。当代数学。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2002 年，第 205–222 页。isbn：0-8218-2990-4。doi：10.1090/conm/310/05405。网址：https://doi.org/10.1090/conm/310/05405（引于第 59、61 页）。[MP97] I. Moerdijk 和 D. A. Pronk。《轨形、层与群胚》。载于：K理论 12.1（1997 年），第 3–21 页。issn：0920-3036,1573-0514。doi：10 . 1023/A:1007767628271。网址：https://doi.org/10.1023/A:1007767628271（引于第 59 页）。[MS12] Dusa McDuff 和 Dietmar Salamon。J全纯曲线与辛拓扑。第二版。第 52 卷。美国数学会讨论会出版物。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2012 年，第 xiv+726 页。isbn：978-0-8218-8746-2（引于第 3 页）。

[Mun01] Ignasi Mundet i Riera。“将光滑群作用提升到线丛”。载于：《伦敦数学学会通报》33.3（2001），第351–361页。issn：0024-6093,1469-2120。doi：10 . 1017/ S0024609301007937。网址：https://doi.org/10.1017/S0024609301007937（引文见第103页）。[Par16] John Pardon。“关于模空间上伪全纯曲线的虚基本循环的代数方法”。载于：几何与拓扑20.2（2016），第779–1034页。issn：1465-3060,1364-0380。doi：10.2140/gt.2016.20.779。网址：https://doi.org/10.2140/gt. 2016.20.779（引文见第3、92、96、106、107、110、111页）。[Par23] John Pardon。“有限轨谱的轨形配边与对偶性”。载于：几何与拓扑27.5（2023），第1747–1844页。issn：1465-3060,1364-0380。doi：10.2140/gt.2023.27.1747。网址：https://doi.org/10.2140/gt.2023.27.1747（引文见第66、69、72、75页）。[Pro96] Dorette A. Pronk。“作为分式双范畴的Etendues与层”。载于：数学汇编102.3（1996），第243–303页。issn：0010-437X,1570-5846。网址：http://www.numdam. org/item?id=CM_1996__102_3_243_0（引文见第61页）。[Rag08] Kari Ragnarsson。“回缩转移与 p-局部有限群”。载于：爱丁堡数学学会论文集51（2008），第465–487页。doi：10.1017/S0013091505001719

网址：https://doi.org/10.1017/S0013091505001719（引于第 17 页）。[Rot95] Joseph J. Rotman。《群论导论》。第四版。第 148 卷。数学研究生教材。施普林格出版社，纽约，1995 年，页 xvi+513。ISBN：0-387-94285- 8。doi：10.1007/978-1-4612-4176-8。网址：https://doi.org/10.1007/978-1-4612- 4176-8（引于第 29 页）。[RT95] Yongbin Ruan 和 Gang Tian。“量子上同调的数学理论”。载于：微分几何杂志 42.2（1995），页 259–367。ISSN：0022-040X,1945-743X。网址：http: //projecteuclid.org/euclid.jdg/1214457234（引于第 2 页）。[Rud98] Yuli B. Rudyak。《Thom 谱、可定向性与配边》。施普林格数学专著。Haynes Miller 作序。施普林格出版社，柏林，1998 年，页 xii+587。ISBN：3-540-62043-5（引于第 53、66 页）。[Sta15] Nathaniel Stapleton。“ p-可除群的子群与对称群中的中心化子”。载于：美国数学会汇刊 367.5（2015），页 3733–3757。ISSN：0002-9947,1088- 6850。doi：10.1090/S0002-9947-2014-06344-7。网址：https://doi.org/10.1090/ S0002-9947-2014-06344-7（引于第 5 页）。[Str00] N. P. Strickland。“有限群与群胚的 $K(N)$-局部对偶性”。载于：Topology 39.4（2000），页 733–772。ISSN：0040-9383。doi：10.1016/S0040-9383(99)00031-2。网址：https://doi.org/10.1016/S0040-9383(99)00031-2（引于第 33、35、58、69 页）。[Wür91] Urs Würgler。“Morava K-理论：综述”。载于：代数拓扑，波兹南 1989。第 1474 卷。数学讲义。施普林格出版社，柏林，1991 年，页 111–138。ISBN：3-540-54098-9。doi：10.1007/BFb0084741。网址：https://doi.org/10.1007/BFb0084741（引于第 58 页）。