arXiv:2611.30979v1 [physics.flu-dyn] 23 Nov 2026

# 自推进三维扑翼最佳被动俯仰的密度比不变性

Maximilian Schenk、Manuel Garc´ía-Villalba 和 Manuel Moriche

流体力学与传热研究所，维也纳工业大学，维也纳，奥地利

**摘要**

我们对一种有限展长的三维扑翼进行了数值研究，该扑翼通过对其质心施加预设的正弦升沉运动实现自推进。刚性扑翼的俯仰运动源于扭转弹簧、扑翼惯性与流体力之间的平衡。我们针对三种固液密度比 $\tilde{\rho} = 1$、10 和 100 改变弹簧刚度。对于这三种密度比，推进速度均达到近似相同的最大值，而最大值对应的刚度随密度比增加而增大。当将刚度按各自的最佳值进行平移后，三种密度比下的推进速度均重合为同一条曲线。在最佳状态下，三个扑翼以相同的振幅进行俯仰，并领先升沉运动 113°，因此它们经历相同的有效攻角和相同的垂向水动力。被动俯仰充当一种羽化运动，使扑翼转向来流。较硬的弹簧羽化不足，因此有效攻角仍然较大，流场在前缘和后缘处分离，水动力主要沿升沉方向作用。较软的弹簧则导致扑翼俯仰过度且存在延迟，羽化的益处被较弱的水动力所抵消。最佳状态平衡了这两个极限。由于扑翼惯性的影响，输入功率随密度比显著增加，因此单位输入功所行进的距离减小；而推进效率考虑了扑翼的动能，呈现相反的趋势。将扑翼考虑静止流体附加惯性时的共振刚度进行比较可以发现，对于所有密度比，最佳弹簧刚度都高于共振刚度，且高出的幅度近似恒定。因此，最佳弹簧并非由共振决定，而是由其产生的羽化运动决定；密度比较高的扑翼只需采用更硬的弹簧即可达到这一状态。

## 1 引言

扑翼推进是许多水生和空中生物运动的核心机制，也推动了为水下与空中飞行器制造推进器的持续工程研究（

Triantafyllou 等，2000年；Shyy 等，2010年；Wang 等，2016年；Smits，2019年）。早期研究表明，沿弦向分布的柔性可以提高推进效率（Katz 和 Weihs，1978年），随后线性二维理论表明，将这种柔性集中于前缘处的扭转弹簧中可以使推力最大化（Moore，2015年）。许多扑翼推进器仅驱动升沉运动，并让俯仰运动通过流固耦合被动地产生，通常借助弹性铰链或扭转弹簧（Spagnolie 等，2010年；Zhang 等人，2010年；Chen 等，2016年；Hu 等，2021年）。随后，俯仰运动由水动力矩、拍动片的惯性和弹簧响应之间的平衡产生。因此，其相对于升沉运动的振幅和相位取决于弹簧

刚度以及拍动片相对于流体的密度。对于指定运动学而言，这一相位本身会显著影响升沉和俯仰翼型的推力和效率（Guglielmini 和 Blondeaux，2004年；Moriche 等人，2017年）。

在自推进运动中，前进速度源于拍动运动所产生的水动力。在这一问题的典型模型中，板或翼片按照规定运动升沉，并可沿垂直于规定升沉的方向自由运动（在成功自推进时即为流向）。即使没有俯仰运动，当拍动频率高于临界阈值时，刚性翼片也能实现自推进，这归因于流场的对称性破缺不稳定性（Vandenberghe 等人，2004年；Alben 和 Shelley，2005年；Deng 和 Caulfield，2018年）。若在翼片前缘加装扭转弹簧，被动俯仰翼片的游动速度可显著提高（Spagnolie 等，2010年；Zhang 等人，2010年）。Zhang 等人（2010年）指出，运动方向取决于弹簧-板系统的固有频率与升沉频率之比，其中系统固有频率由弹簧刚度决定。当升沉频率低于系统固有频率时，板向前运动；当拍动频率约为固有频率的一半时，运动达到最佳状态。 Arora 等人（2018年）将这一模型拓展至弦向柔性板，并将其表示为由扭转弹簧连接的若干刚性段。最高巡航速度同样出现在升沉频率低于固有频率时。随着板的惯性相对于流体动力减小，这一最佳状态对应的频率会进一步高于固有频率。 Arranz 等人（2022a，b）将这一模型拓展至有限展长的三维板。

在这些研究中，固有频率高于最佳升沉频率，这意味着最佳弹簧的刚度高于共振弹簧。然而，有理由认为，最佳性能应由能够使俯仰运动发生共振的刚度与惯性组合产生。事实上，Spagnolie 等（2010年）发现，最高推进速度出现在接近共振处；Phoemsapthawee 等人（2020年）则指出，带扭转弹簧的升沉翼片的最高效率与共振相关。在一个通过平移弹簧和扭转弹簧弹性安装的自推进翼片线性势流模型中，L´opez-Tello 等人（2023年）同样将最佳游动性能与共振弹簧常数联系起来。Xiao 等人（2014年）发现，其最软弹簧在接近共振处产生的推力最大，但较硬弹簧的效率最高；此时固有频率为拍动频率的两到三倍。相比之下，柔性翼实验表明，翼片刚度高于共振状态时性能最佳（Thiria 和 Godoy-Diana，2010年；Ramananarivo 等人，2011年），而 Moore（2015年）的线性理论也表明，刚度高于共振弹簧的弹簧能够产生最大的推力。在带主动升沉和被动俯仰的柔性板线性细长体模型中，Wu（2020年）发现，共振主要增强推力，而相位动力学主导推进效率。在线性无黏极限下，Fern´andez-Feria 和 Alaminos-Quesada（2021年）发现，带被动俯仰的升沉翼片的最佳性能通常出现在接近流固耦合系统第一固有频率处。这些结果表明，最佳刚度是否与共振相一致仍是一个悬而未决的问题。

共振刚度取决于拍动片的惯性，因此拍动片与流体之间的密度比 $\rho$是该问题的一个关键参数。它决定了拍动片的惯性相对于流体附加惯性和流体动力的大小，因此会影响被动俯仰运动的振幅和相位。在弹簧刚度固定时，Shao 等人(2016年)发现，密度比较低的翼片会在较高的拍动频率下反转其运动方向。这一变化与翼片在固有频率附近发生反转的情况一致（Zhang 等人，2010年），但随着密度比降低，这种一致性会变差。对于无限展长的机翼，Xiao 等人(2014年)发现，较大的惯性会使推进速度略有提高，同时俯仰振幅减小。Arora 等人(2018年)比较了各自处于最佳刚度下的二维板，并通过改变密度比与板厚的乘积来改变板的惯性。他们发现，随着板的惯性增大，其最大推进速度降低，输入功率通常升高。这些研究将

弹簧刚度、固有频率或最佳刚度固定不变，同时改变密度比，因此其变化趋势难以比较。

上述研究的一个常见假设是二维流动，而真实的扑翼则受到以下因素的影响：i）三维流动结构可能形成；ii）有限展长带来的几何效应。在低展弦比下，翼尖涡会将前缘和后缘脱落的涡连接成环状，尾流则分裂为两支（Dong 等人，2006；Kurt 等人，2020）。尾流的这种三维演化会改变作用于扑翼的力，而二维模拟无法捕捉这一现象（Arranz 等人，2020；Zurman-Nasution 等人，2020）。已有研究考察了置于自由来流中的带扭转弹簧三维翼（Hu 等，2021；Martínez-Muriel 等，2023，2024；Hu 等，2025）。带被动俯仰的自推进三维扑翼，曾被建模为连续柔性板（Tang 和 Lu，2016；Yeh 和 Alexeev，2016；Wang 等，2020），或建模为由扭转弹簧连接的刚性段组成的板（Arranz 等，2022a,b）。在后者的研究中，密度比固定，刚度则取自二维最优值，或从两个数值中选取。Xiao 等人（2014）改变了带扭转弹簧的自推进机翼的密度比，并发现密度比的影响取决于展弦比。然而，他们的机翼绕半弦位置俯仰，且是在固定频率比下而非最佳刚度下比较密度比。除自推进运动外，还有两项研究探讨了扑翼的惯性与其最佳刚度之间的关系。Phoemsapthawee 等人（2020）比较了惯性不同的三维翼型在效率最高时对应的刚度，但其前进速度是预先设定的，且采用忽略黏度的边界元法。在悬停飞行中，Dai 等人（2012）发现，弹性翼产生升力时的最佳刚度取决于其质量比。据我们所知，尚无三维研究在各自的最佳刚度下比较不同密度比的自推进扑翼，也没有研究将这些最优值与共振刚度联系起来。

本研究通过数值方法探究密度比如何影响三维自推进拍动片的流固相互作用，以弥补这一研究空白。拍动片是一个刚体，按照规定运动垂荡，并在扭转弹簧的约束下绕质心被动俯仰。其运动学遵循Arranz 等人(2022a的构型，所得结果可作为其他研究中所报告的串列构型的参考（Schenk 等人，2026）。对于从 $\tilde{\rho} = 1$ 到 $\tilde{\rho} = 100$的密度比，我们确定了使推进速度达到最大的弹簧刚度。随后，我们考察在这一最佳刚度下，密度比如何改变被动俯仰运动的振幅和相位。最后，我们比较不同密度比的扑翼的输入功率，以及单位输入功所行进的距离。

本文结构安排如下。第2 节介绍问题、数值方法和性能指标。第3 节呈现结果。我们首先分析弹簧刚度对 $\tilde{\rho} = 1$(§ 3.1）的影响，然后将分析扩展到所考察的三种密度比（§ 3.2）。第4 节总结主要发现。

# 2 方法论

## 2.1 问题描述

我们研究三维扑翼的自推进：扭转弹簧响应水动力，使扑翼被动俯仰。扑翼浸没在密度为

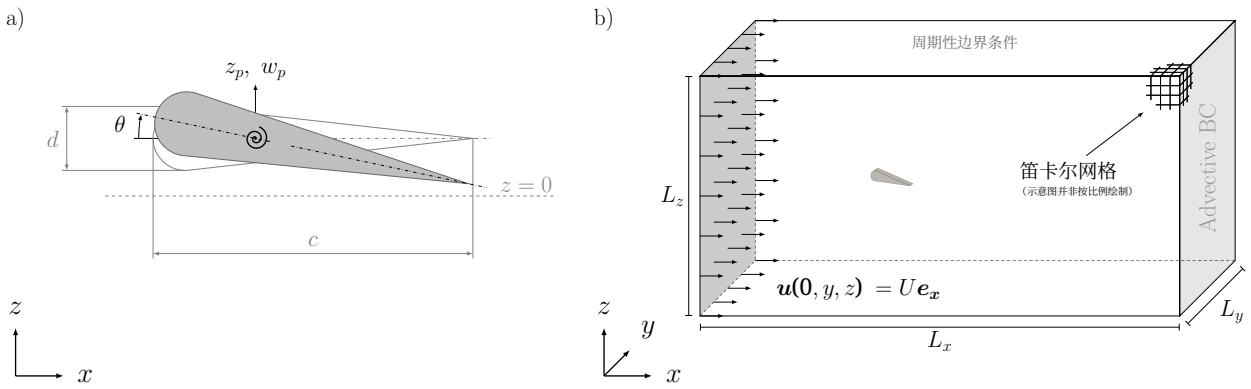



图 1：a）问题示意图，包含主要几何定义以及拍动片的规定运动；b）带边界条件（BC）的计算域。a）中的水平虚线标示竖直方向上的计算域中心线（$z=0$）。a）中的白色拍动片表示其相对于弹簧的平衡位置（$\theta=0$）。

$\rho_f$、运动黏度为 $\nu$的静止流体中。我们求解不可压缩流的纳维–斯托克斯方程

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0\,, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}=-\frac{\nabla p}{\rho_f}+\nu\nabla^2\mathbf{u}\,, \tag{1b}$$

其中 $\mathbf{u}=(u,\ v,\ w)$ 表示流体速度，$p$ 表示压力。方程（1）还需满足拍动片表面的不可穿透、无滑移边界条件。

我们将拍动片建模为密度均匀的刚体 $\rho_p$。其横截面沿展向保持不变 $b$，由一个直径为 $d$ 的圆钝前缘以及两条与圆钝前缘相切、向尖锐后缘逐渐变窄的直边组成。该直径 $d$ 因此决定了拍动片的最大厚度。我们取 $d=0.2c$，从而得到横截面积 $A_c=0.106\,c^2$。当展向长度为 $b=0.5c$时，拍动片的体积为 $V_p=A_c\,b=0.053\,c^3$。拍动片绕其质心进行俯仰运动，$\mathbf{x}_P$该质心位于距前缘 $0.349\,c$ 的位置。拍动片绕一条平行于展向且经过质心的轴的单位质量转动惯量（即单位质量的转动惯量）为 $J=0.055\,c^2$。附录A.1 给出了这些量的推导过程。

质心的位置 $\mathbf{x}_P=(x_p,\ y_p,\ z_p)$ 和速度 $\mathbf{u}_P=(u_p,\ v_p,\ w_p)$受到部分约束。横向运动受到抑制，因此 $v_p=0$；在垂直方向，我们施加正弦升沉运动

$$z_p(t)=A\cos(2\pi ft)\,, \tag{2a}$$

$$w_p(t)=-2\pi fA\sin(2\pi ft)\,, \tag{2b}$$

其中 $A$ 为升沉振幅，$f$ 为振荡频率。此外，$x/z$–不考虑旋转，因此唯一的角运动为俯仰（绕展向轴旋转，$y$方向），其特征量为俯仰角 $\theta$和角速度 $\Omega$（见图1中的示意图）。综上，由牛顿–欧拉运动方程描述的非约束自由度简化为：i）流向线动量方程

$$\rho_pV_p\,\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t}=F_{hx}\,, \tag{3}$$

以及 ii) a　展向角动量方程　　截面

$$\rho_p V_p J \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = M_{hy} + M_{ky}\,, \tag{4}$$

其中，$F_{hx}$ 是水动力 $\mathrm{F}_h = \int_S \tau \cdot \mathrm{n}\,\mathrm{d}\sigma$ 的 $x$分量，n 为外单位法向量，$\tau = -p\,\boldsymbol{I} + \rho_f \nu(\nabla \mathrm{u} + (\nabla \mathrm{u})^\top)$ 为流体动力应力张量，其中 $\boldsymbol{I}$为单位张量。 $M_{hy}$定义为水动力矩 $\mathrm{M}_h = \int_S \mathrm{r} \times (\tau \cdot \mathrm{n})\,\mathrm{d}\sigma$ 的展向分量，其中 $\mathrm{r} = \mathrm{x} - \mathrm{x}_p$表示表面点相对于质心的位置。 $M_{ky}$ 是位于 $\mathrm{x}_p$ 处（图 1）的扭转弹簧所产生的回复力矩，该弹簧允许产生被动俯仰运动，以模拟弦向柔性（如 Arranz 等，2022a）。假设刚度 $k$ 恒定，该力矩与俯仰角 $\theta$呈线性关系，

$$M_{ky} = -k\theta\,. \tag{5}$$

由于拍动片的垂直运动是预先设定的，因此不考虑重力。

在拍动片几何形状固定的情况下，该问题由四个无量纲数控制。这里，我们采用固体与流体之间的密度比，

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho_p}{\rho_f}\,, \tag{6}$$

the 基于质心最大垂直速度的雷诺数，$V = 2\pi\,A\,f$,

$$Re_V = \frac{V\,c}{\nu}\,, \tag{7}$$

运动归一化振幅 $A/c$，以及弹簧的无量纲刚度

$$\kappa = \frac{k}{\rho_f c^3 V^2}\,. \tag{8}$$

我们采用 Arranz 等人(2022a) 的大部分控制参数，因此本研究也可作为采用相同参数的串列构型研究的参考（Schenk 等人，2026）。雷诺数为 $Re_V = cV/\nu = 200$，升沉运动的振幅为 $A/c = 0.5$，展弦比为 $b/c = 0.5$。我们考虑三种密度比：$\tilde{\rho} = 1$、10 和 100，分别涵盖密度匹配状态、Arranz 等人(2022a) 所采用的数值以及惯性主导状态。对于每种密度比，我们对 $\kappa$ 开展参数研究，以评估其对推进性能的影响，并优化其取值以最大化推进速度。

## 2.2 计算设置

我们使用内部代码 TXPS 进行直接数值模拟（DNS），该代码对式（1）所示的不可压缩流纳维–斯托克斯方程进行积分，3以及方程（4）（此外还包括上述约束）。流动求解器在交错网格上采用二阶有限差分和半隐式格式（亚当斯–巴什福思/克兰克–尼科尔森），其中线性项采用隐式处理，非线性项采用显式处理。

根据Moriche 等人 （2026），我们在运动参考系中对控制方程进行积分。这种方法非常适用于非均匀方向上物体的运动无法预先确定的问题。它避免了在流向（非周期性边界条件）方向上使用过大的计算域，否则，为容纳未知的推进速度，就必须采用过大的计算域。在Moriche 等人（2026）所提出的算法中，沉降速度和伽利略数在此分别由推进速度和

雷诺数 $Re_V$取代。如Moriche 等人 （2026）所述，我们定义了两个参考系：i）实验室参考系，在没有拍动片运动时，流体在其中处于静止状态；ii）相对于实验室参考系以速度 $-U\mathbf{e}_x$ 平移的运动参考系。通过迭代过程获得 $U$ 的值；收敛后，该值与拍动片相对于流体的平均推进速度一致（在给定容差范围内），而根据定义，这就是实验室参考系中的平均推进速度。由于引入运动参考系仅是出于计算目的，所有结果均以实验室参考系呈现，对应于拍动片在静止流体中自推进的情形。

计算域为一个边长为 $[L_x, L_y, L_z]$的长方体，如图 1 所示。在流向（$x$）上，我们在入口处施加 $\mathbf{u} = U\mathbf{e}_x$，并在出口处施加对流流出条件。横向和竖直方向（$y$ 和 $z$）采用周期性边界条件。拍动片的前缘初始位置位于入口下游 $5c$ 处，并要求该距离保持在 $5c$ 和 $6c$ 之间，以确保收敛，从而保证入口的（微小）影响在所有情况下均相同。在 $L_x = 16c$ 条件下，尾流可在到达流出边界之前，于后缘后方经过 $9c$ 至 $10c$ 的距离充分发展。在横向和竖直方向上，我们选取 $L_y = L_z = 8c$，其大于 Arranz 等（2022a）所使用计算域的横向范围。网格加密研究（附录 A.3）表明，分辨率为 $c/\Delta x = 64$ 时可提供足够的准确性。所得网格包含 $[1024 \times 512 \times 512]$ 个网格点。时间步长为 $\Delta t = T/2048$，其中 $T = 1/f$ 是升沉运动的周期，这使所有模拟中的 $CFL < 0.3$ 保持不变。

采用浸入边界法（浸入边界法）对物体的存在进行建模。该方法最初由Uhlmann （2005年) 提出，后来由 Moriche 等人(2021年) 扩展，以处理非球形物体。由于当密度比趋近于 1 时该公式不稳定，因此密度匹配情形 $\tilde{\rho} = 1$ 采用 Schenk 等人(2025) 提出的浸入边界法计算。 Schenk 等人(2025) 对这两种公式进行了比较，并在 $\tilde{\rho} \geq 1.5$下得到了良好的一致性。对于 $\tilde{\rho} = 10$ 和 100，我们采用 Moriche 等人(2021年) 提出的公式；对于当前构型，该公式的计算速度快约 7%。两种公式均采用相同的拉格朗日标记点分布，共 13 952 个标记点；这些标记点以分辨率 $c/\Delta x = 64$填充拍动片的体积。此外，我们在此处采用特设方式加入扭转弹簧弹性响应对应的项，如方程（5）所示。

## 2.3 评估水动力性能的定义

本节介绍用于分析下文所示结果的性能指标，并采用 Arranz 等人（2022a）的定义。在所有模拟中，拍动片均达到完全周期状态，其周期等于所施加垂直运动的周期，$T$。由于该状态下的每个振荡周期都相同，我们通过对一个周期取平均来评估所有平均量。首先介绍周期平均推进速度

$$\langle U_p \rangle = \frac{-1}{T} \int_{t^*}^{t^*+T} u_p(t)\, \mathrm{d}t\,, \tag{9}$$

其中，$t^*$ 表示周期状态内的任意时刻，负号确保拍动片在自推进状态下（沿负 $x$ 方向游动）具有正的 $\langle U_p \rangle$ 值。为评估拍动片的平均输入功率，我们舍弃瞬时输入功率的负值

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{t^*}^{t^*+T} \max(P(t),\, 0)\, \mathrm{d}t\,, \tag{10}$$

其中，$P = R \cdot w_p$和 $R$是拍动片质心处执行器力的垂直分量，该分量由线动量方程的 $z$分量得出

$$R = \rho_p V_p \frac{\mathrm{d}w_p}{\mathrm{d}t} - F_{hz}\,. \tag{11}$$

计算平均输入功率时忽略 $P$ 负值的理由是，我们假设致动器无法回收能量，这与先前研究一致（Berman 和 Wang，2007；Michelin 和 Llewellyn Smith，2009）。扭转弹簧确实会储存并返还能量，但仅限于转动自由度，且这一过程是被动的；本文采用的度量针对主动升沉驱动，因此不假设存在此类能量回收。我们还将拍动片的推进效率定义为流向动能与一个周期内输入功的比值

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\rho_p V_p \langle U_p \rangle^2}{\langle P \rangle T}\,. \tag{12}$$

这种基于功的定义适用于无法获得推力/阻力的情况（详情请参见 Zhang 等人，2022）。请注意， $\eta$ 考虑了拍动片通过自推进获得的动能，因此与拍动片的质量成正比，这使得不同密度比之间的比较变得困难（Arora 等人，2018年）。为了进一步评估拍动片的推进效率，我们在 Arranz 等人 (2022a的定义基础上，补充了一个单位质量量，即无量纲巡航性能

$$\varepsilon = \frac{\langle U_p \rangle / V}{\langle P \rangle / (\rho_f V^3 c^2)} = \rho_f V^2 c^2 \frac{\langle U_p \rangle}{\langle P \rangle}\,, \tag{13}$$

该指标衡量单位输入功所行进的距离，Yeh 和 Alexeev (2014年、2016曾将其称为效能，而 Arora 等人 (2018年) 也使用过这一指标。

# 3 结果

## 3.1 扭转弹簧刚度对推进的影响

现在，我们将详细分析其中一种密度比下扭转弹簧刚度对推进性能的影响， $\tilde{\rho} = 1$。首先，概述弹簧刚度为 $\kappa = \kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$时的流场，其中 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$ 是推进速度达到最大值时的取值（详情见下文）。图2 展示了上行程接近结束时（ $Q$）的$t/T = 0.8125$准则等值面。在每个行程反转点（$t/T = 0$，0。5），都会有一个涡环脱落并进入尾流。由于涡环的自诱导速度，其运动轨迹相对于流向倾斜。在连续的行程反转点脱落的涡环朝相反方向运动，一个向上，另一个向下。因此

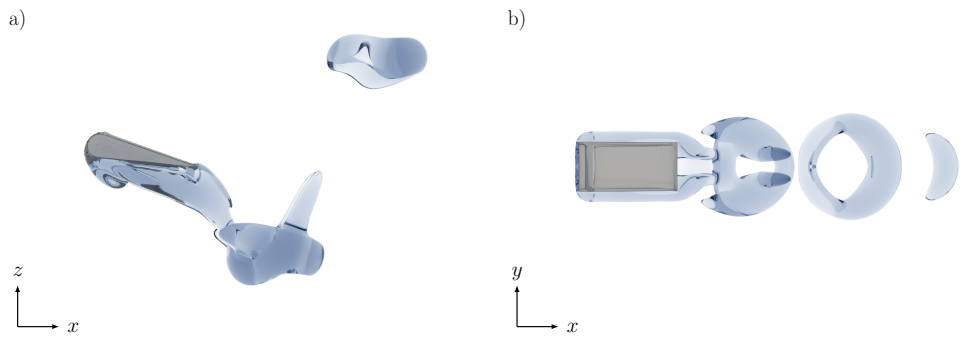



图 2：密度比为 $\tilde{\rho} = 1$ 、弹簧刚度为 $\kappa = \kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$ 时，拍动片在上行程末端（$t/T = 0.8125$）周围流场的 a）侧视图和 b）俯视图。流场以 $Q$ 准则的等值面（$Qc^2/V^2 = 0.5$）表示。

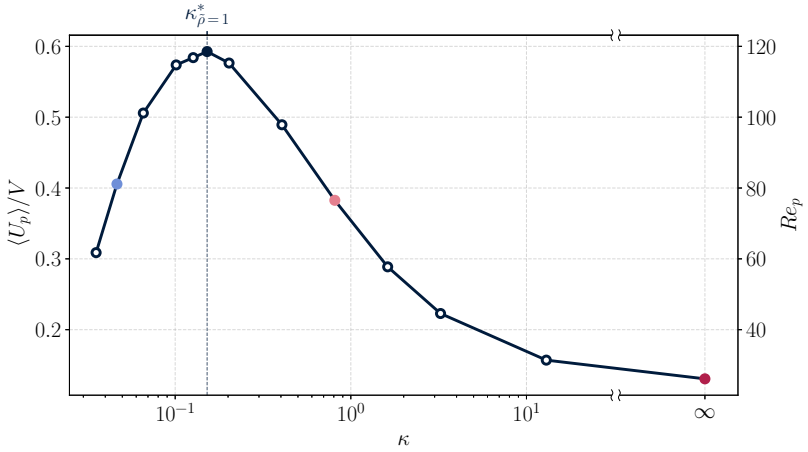



图 3：周期平均推进速度 $\langle U_p \rangle / V$ 和推进雷诺数 $Re_p$随归一化扭转弹簧刚度 $\kappa$的变化关系。竖直虚线表示使推进速度达到最大的弹簧刚度，即 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$。实心符号标出了四个代表性工况 $\kappa = 0.047$ （柔软）、0.15（最佳）、0.81（硬）和 $\kappa = \infty$ （刚性）。

，尾流分为两支，由环量交替的涡环组成（Dong 等人，2006；Kurt 等人，2020年）。

为确定使 $\kappa$ 推进速度达到最大的取值，我们扫描了范围为 $\kappa \in [0.035, 13]$的归一化弹簧刚度，同时加入了俯仰运动受到抑制的刚性扑翼（$\kappa = \infty$）。图3 显示了平均推进速度 $\langle U_p \rangle$ 随 $\kappa$的变化关系，其中清晰地确定了一个最佳值。使用初始设定的取值时，该最佳值位于范围 $\kappa \in [0.1, 0.2]$内，因此我们进一步细化了这一子区间，最终得到 $\kappa = 0.15$ ，即为使推进速度达到最大的取值。我们将该取值称为$\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$。为便于分析刚度的影响，我们选取了四个代表性工况。前两个分别是弹簧刚度为无穷大的工况，标记为“刚性”，以及弹簧刚度使推进速度达到最大的工况，称为“最佳”。另外两个工况具有相近的推进速度（$\langle U_p \rangle / V \approx 0.4$），其弹簧刚度分别低于和高于最佳值，我们将它们分别标记为“柔软”和“硬”。需要注意的是，这些工况的刚度差异极大：它们各自的 $\kappa$取值相差约 17 倍。

当前系统在所评估的 $\kappa$ 上限处表现出自推进，此时为刚性情形（$\kappa = \infty$），推进速度达到 $\langle U_p \rangle / V \approx 0.13$。从这一上限开始逐渐降低弹簧刚度，推进速度随之逐步增加，直至达到最大值 $\langle U_p \rangle / V = 0.59$ （最优情形）。进一步降低刚度会导致推进速度急剧下降（请注意图 3 中的对数表示），最终失去自推进；尚未确定拍动片无法自推进的阈值。最佳构型所获得的推进速度对应的、基于推进速度计算的雷诺数为 $Re_p = \langle U_p \rangle c / \nu = 118$。作为比较，Arranz 等（2022a）报告了采用相同运动学参数的弦向柔性板的最大推进速度 $\langle U_p \rangle / V = 0.88$ （$Re_p = 176$）。我们将这一差异归因于用于模拟拍动片对流体动力响应的不同方法（见 § 2.1）。如果比较最优情形（$\kappa = \kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$）与刚性情形（$\kappa = \infty$）的推进速度，可以观察到其提高了 350%。这一推进增强幅度$\langle U_p \rangle$ 明显大于 Zhang 等人（2010）在类似二维分析中报告的结果。对于升沉与俯仰的组合运动，可以使用后缘的峰峰值位移，而不是升沉运动的振幅来计算斯特劳哈尔数（Smits, 2019）。对于最优情形，我们得到的位移为 $A_{TE} = 1.24c$，因此斯特劳哈尔数为 $St = f A_{TE} / \langle U_p \rangle = 0.67$，

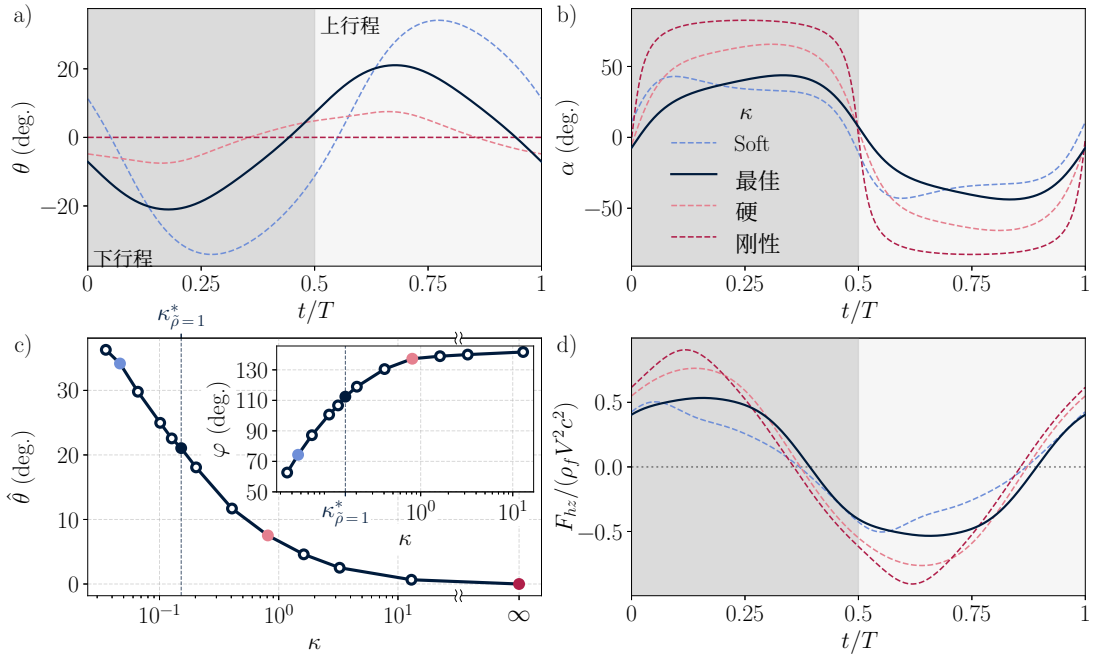



图4：a) 所选案例在一个周期内的俯仰角 $\theta$ 和 b) 有效攻角 $\alpha$ 。c) ˆ 俯仰运动的第一傅里叶模态 $\theta$随 $\kappa$的变化，其中插图显示了升沉运动与该模态之间的相位差 $\varphi$。d) 代表性刚度下，一个周期内的水动力 $F_{hz}/(\rho_f V^2 c^2)$垂直分量。a)、b) 和 d) 中的阴影区域表示下行程和上行程，如 a) 中所标示。b) 中的图例适用于 a)、b) 和 d)，c) 中的深蓝色竖直虚线标示 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$。

其高于 $0.2 \leq St \leq 0.4$ 游泳和飞行动物的巡航条件范围（Taylor 等人，2003年）。在当前较低的雷诺数下，可能会预期更高的斯特劳哈尔数，$Re_p = 118$，因为低雷诺数下较大的阻力会使游泳动物偏好的斯特劳哈尔数向更高值移动（Saadat 等人，2017年；Smits，2019年）。在低雷诺数下，处于 $St \approx 0.3$ 的俯仰翼型产生的阻力大于推力（Smits，2019年）。

### 3.1.1 被动俯仰运动分析

现在，我们将注意力转向被动俯仰运动，它由水动力矩、拍动片的转动惯量和弹簧响应之间的平衡决定。图4a) 展示了所选情形下俯仰角 $\theta$ 在一个周期内的瞬时变化。刚性情形的俯仰角为 $\theta = 0$ ，此处列出以供完整参考。所有情形共有的升沉速度模值，在下行程（$t/T = 0.25$）和上行程（$t/T = 0.75$）的中点达到最大值，并在行程反转点（$t/T = 0$ 和 0。5）处降为零。为便于后续讨论，我们将这样一种运动定义为参考羽化运动：在行程反转点，拍动片与水平面（$\theta = 0$）对齐，并在行程中点发生俯仰反转（俯仰角最大）。这种参考羽化运动与施加的升沉运动之间的相位差为 90°。我们观察到，在所有评估的情形中， $\theta$ 整体上呈正弦变化；然而，柔性和刚性情形中都可见高次谐波，表明流体动力对拍动片响应的影响并非简单。对于最优情形（$\kappa = \kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$）， $\theta$ 在两个行程中点之前达到峰值，这意味着当垂直运动达到最大速度以及在行程反转点时，其角速度均不为零。它经过

$\theta = 0$ 每个半个行程结束前不久，因此翼片在行程反转前与水平面对齐，也就是说，俯仰运动超前于基准拍动行为。柔性情形下，最大俯仰角出现在两个行程中点稍后，而 $\theta = 0$ 则在两个行程结束后稍晚发生。因此，降低刚度会使俯仰运动相对于最优情形以及基准拍动行为出现滞后。柔性情形下俯仰运动的振幅明显大于最优情形。Huang 等人(2023年) 报告了类似的依赖关系：在悬停飞行中，被动俯仰机翼的翼片在行程反转后与水平面对齐时，性能会下降。刚性情形则表现相反：其产生的俯仰运动超前于最优情形，且振幅明显较小。这是意料之中的，因为弹簧越柔软，抵抗水动力矩的阻力越小；刚性情形则相反。

现在，我们继续刻画俯仰运动及其与所施加升沉运动的关系。图4c) ˆ显示了俯仰运动的振幅 $\theta$，其定义为该运动的第一傅里叶模态的振幅。我们采用这一定义，是因为在某些情况下，通常是弹簧最硬和最软的情形，俯仰运动会呈现高次谐波。在ˆ刻画升沉与俯仰运动之间的相位差时，这一点尤为重要。对于所评估的情形，$\theta$ 随着 $\kappa$ ˆ ˆ单调减小：从最软弹簧情况下的 $\theta = 36.3°$ ，降至最硬非刚性弹簧情况下的 $\theta \approx 0$ 。对于带有扭转弹簧的被动俯仰机翼，Spagnolie 等（2010年；Xiao 等人，2014年）也报告了相同的趋势。有趣的是，最佳状态并不对应于最大的俯仰振幅，而是ˆ对应于 $\theta = 21.1°$的中间值；这与Zhang 等人（2010年）关于带有前缘扭转弹簧的二维板的研究结果一致，在该研究中，最大的前进速度出现在 $5°$ 与 $25°$之间的中等俯仰幅度下。除振幅外，刚度还会影响升沉与俯仰运动之间的相位差 $\varphi$。图4c)表明，对于所评估的情形，相位差 $\varphi$ 随着 $\kappa$ 单调增加。 $\kappa < 0.05$ 的情形表现出滞后于基准拍动行为的俯仰运动，而 $\kappa > 0.05$ 的情形则表现为超前。所选取的柔软和硬情形清楚地体现了这一点：前者产生 $\varphi = 74° < 90°$ ，后者产生 $\varphi = 142° > 90°$。

最优情形的相位差（$\varphi = 113°$）接近Moriche 等人（2017年报告的数值。他们发现，对于在自由来流中进行指定升沉和俯仰运动的二维翼型，当两种运动之间的相位差为 $110°$时，平均推力系数达到最大。这表明，在最优情形下，扭转弹簧会被动地将相位差设定为接近指定运动学下推力最大的值。

现在，让我们聚焦于有效攻角 $\alpha$。有效攻角与俯仰角不同，因为其定义包含了翼型因垂直运动而感受到的自由来流倾角。 $\alpha$ 的大小与环量效应所产生的水动力大小直接相关，在自推进中至关重要（即使不进行俯仰运动的翼片，也能由于垂直振荡产生非零有效攻角而产生推力）。有效攻角定义为

$$\alpha = \theta - \arctan\left(\frac{w_p}{\langle U_p \rangle}\right) = \theta + \arctan\left(\frac{V\sin(2\pi f t)}{\langle U_p \rangle}\right). \tag{14}$$

垂直运动（第二项）的贡献在下行程期间为正，在上行程期间为负。图 4a）显示，俯仰角在下行程的大部分时间内为负，在上行程期间为正，这与项 $-\arctan(w_p/\langle U_p \rangle)$ 的行为相反。由于 $-\arctan(w_p/\langle U_p \rangle)$ 的大小大于 $\theta$所得到的大小，因此有效攻角在下行程（上行程）中为正（负）。因此，俯仰运动对 $\alpha$ 在没有俯仰运动时可能达到的大值起到了阻尼器或软化机制的作用。对于刚性情形，推进速度相对于最大升沉速度较小，

因此 $\alpha$ 在每个半个行程开始时突然升高，并在其中的大部分时间内略高于 $80^\circ$。如此大的 $\alpha$ 值会导致前缘和后缘均发生流动分离。对于刚性情形， $\alpha$ 在每个行程的大部分时间内约为 $50^\circ$。从刚性情形到硬性情形，俯仰运动和推进速度的增加都会使有效攻角减小，但后者是主导因素。最佳情形显示， $\alpha$ 在每个行程期间逐渐增加，在 $44^\circ$ 处达到约 $t/T \approx 0.33$的最大值，此时拍动片仍处于倾斜状态。下面将讨论这种倾斜与较大有效攻角组合所产生的正向贡献。对于柔软工况， $\alpha$ 再次在每个行程开始时突然增加，随后在每个行程的大部分时间内保持在约 $30^\circ$ 和 $40^\circ$ 之间。图 $F_{hz}$ 中的垂向水动力 4d）显示，非最优情形在每个行程开始时出现 $\alpha$ 的突然增加，其变化过程呈现单个峰值，随后获得的力下降。看来，最佳情形中 $\alpha$ 的较慢变化有助于使力以更稳定的方式建立起来，此时有效攻角与合力紧密耦合。刚性、硬性和最佳情形所获得的最大垂向水动力的变化呈现出明显趋势：有效攻角越小，所获得的力越小；而柔软工况的 $\alpha$ 值与最佳情形相近，但其力明显更小。

这些结果表明，拍动片的刚度通过两种机制影响推进速度：i）纯几何效应，即较大的俯仰振幅使气动力的环量分量向运动方向倾斜；ii）有效攻角的影响，该角度与水动力大小直接相关。为了更好地理解这两种机制之间的相互作用，下面比较四种选定工况。图4d)显示，刚性扑翼的垂直力最大；然而，由于不存在俯仰运动（$\theta = 0$），所产生的力并未向上游倾斜。刚性情形呈现出较小的倾斜，垂直力也仅略小一些。对于柔性工况，拍动片表现出最大的倾斜（见图4a)），但所产生的力的大小明显更小，推进速度也随之下降。对于较硬和较软的弹簧，这种权衡最为明显，因为二者达到相近的推进速度：较硬弹簧使 $F_{hz}$ 保持较大，但仅倾斜约 $7.5^\circ$，而较软弹簧倾斜约 $34^\circ$，但只能达到 $F_{hz} \approx 0.5$。因此，最佳状态是在俯仰振幅和时序两方面取得平衡，既不过度偏离刚性极限下俯仰不足的情况，也不过度趋向柔性极限下俯仰过大的情况。

### 3.1.2 流动可视化

为说明上述流动分离及其与 $\kappa$的关系，我们比较了各选定情形在中平面（$\omega = \partial u/\partial z - \partial w/\partial x$）处的展向涡量场（$x$–$z$）。在图5 中，我们展示了下行程中四个等间隔的时刻， $t/T = 0$、$0.125$、$0.25$、$0.375$；上行程呈镜像对称，因此未予展示。最佳情形采用 $\omega$ 的填充等值线，四种情形则均采用等值线，以突出其差异。可以看出，最佳情形形成的前缘涡随着拍动片垂荡而增大，并在所表示的四个时刻始终保持附着。在下表面会生成一层剪切层。剪切层的强度从 $t/T = 0$ 增大到 $t/T = 0.25$，并不断脱落进入尾流，随后卷起形成后缘涡。在前一个行程（上行程）中脱落并进入尾流的剪切层，可以观察到该剪切层的卷起过程。后缘涡在前一个半个行程内脱落，并伴随着垂直漂移向下游对流。分析各选定情形之间的差异可以发现，最显著的特征是，最佳情形的前缘涡具有高度紧凑的结构，并且在上表面上的延伸范围最大。刚性情形的分离程度最大，这正是预期结果，因为该情形达到的 $\alpha$ 值最大。在后缘处，刚性扑翼的剪切层几乎垂直于弦长离开，而对于较低的 $\kappa$，剪切层离开时与弦长更加一致。总体而言，刚性扑翼和采用较硬弹簧的拍动片具有最大的 $\alpha$，在前缘表现出更强的流动分离，并且

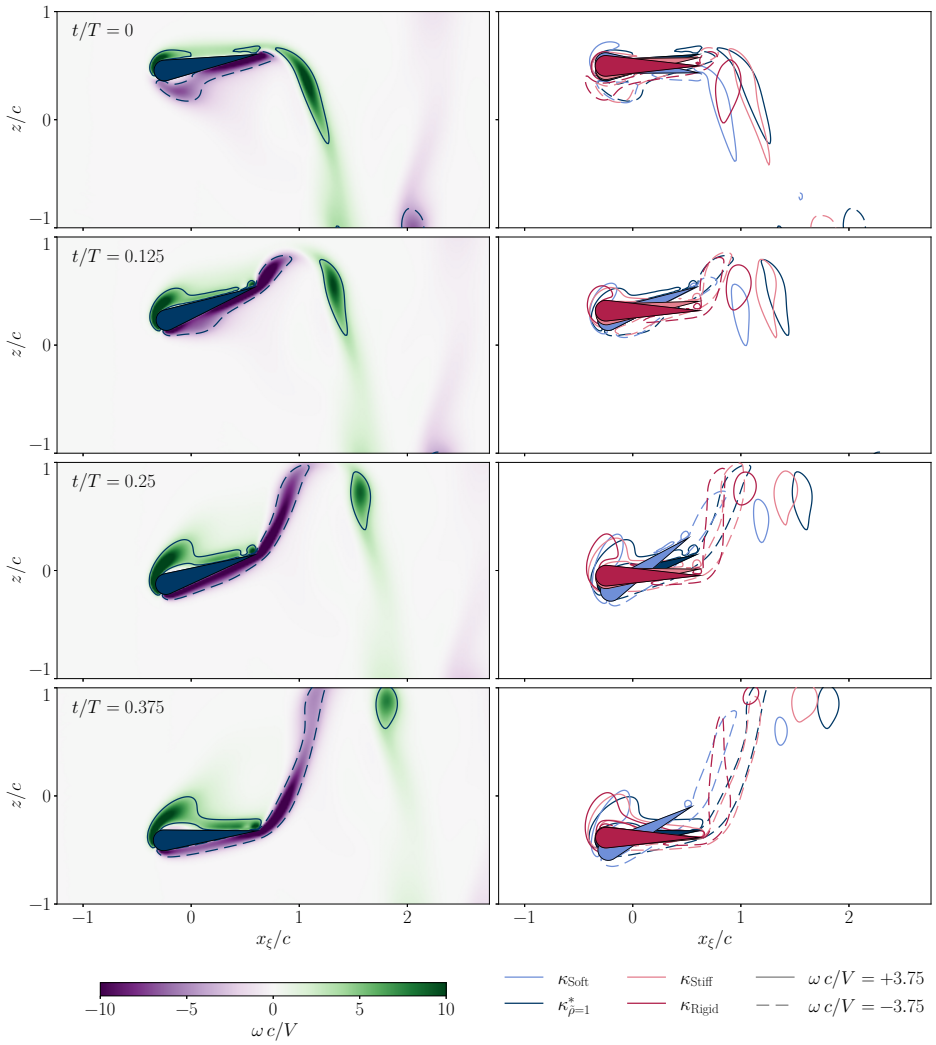



图5：下行程中四个等间隔时刻，拍动片周围中平面上的涡量（ $\tilde{\rho} = 1$）。左列显示最优情形（$\kappa = \kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$）的填充等值线，并叠加 $\omega\, c/V = \pm 3.75$的等值线。右列显示阈值与左列相同的等值线，其中包括四个代表性工况。各工况沿流向平移了一个恒定值，使质心的平均位置重合； $x_\xi$ 则是按相应值平移后的流向坐标。

刚性扑翼在后缘处也表现出更强的流动分离。尾流同样反映了涡旋对流速度的差异，而这与推进速度有关。最佳情形产生的后缘涡位于最下游，而刚性情形产生的后缘涡在 $t/T = 0.375$处距离拍动片最近。有趣的是，柔软情形和硬情形脱落的涡旋具有略有不同的对流速度，尽管这两种情形达到的推进速度大致相同。

### 3.1.3 功率和效率

现在我们来考察平均输入功率 $\langle P \rangle$、推进效率 $\eta$ 和巡航性能 $\varepsilon$，如图6所示。在 $\kappa \in [0.05, 2]$范围内，平均输入功率随刚度单调增加，数值从 $\langle P \rangle = 0.15$ 增加至 0。3。刚度低于 $\kappa \approx 0.05$ 时， $\langle P \rangle$会略有增加。这种行为看似可能是偶然现象，但事实上，在密度比较高时观察得更为明显（见下文图10a中的插图）。

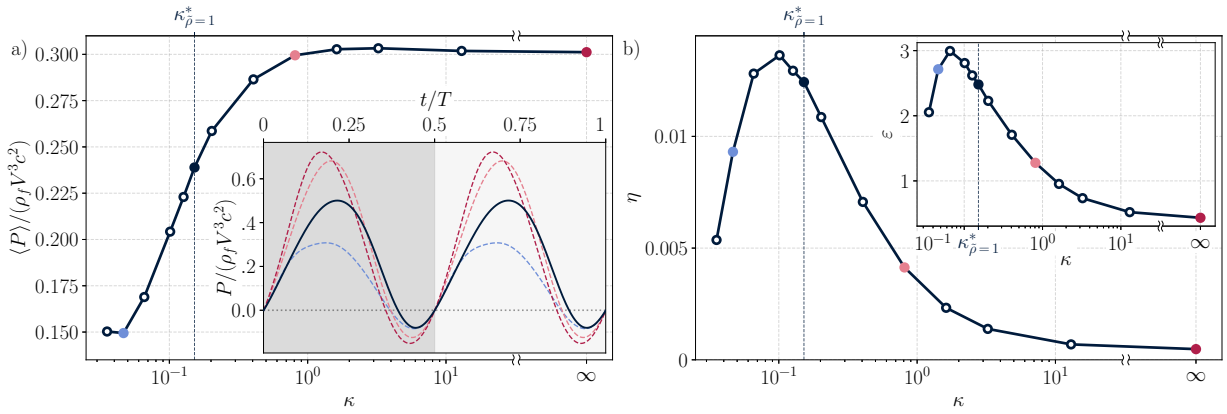



图6：a）周期平均输入功率 $\langle P\rangle/(\rho_f V^3 c^2)$ 和 b）推进效率 $\eta$随 $\kappa$变化。a）中的插图显示了代表性刚度下一个周期内的输入功率 $P$，b）中的插图则显示了 $\varepsilon$ 随 $\kappa$变化的巡航性能。a）插图中的深色和浅色阴影区域分别表示下行程和上行程。图44b）中的图例适用于 a）中的插图，竖直虚线标示 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$。

下文所示的图10a中的插图）。刚度从 $\kappa \approx 2$ 增加时，$\langle P\rangle$略有下降，几乎可以忽略不计，我们将其视为一个平台。在˜范围 $\kappa \in [0.05, 2]$ 内，平均输入功率的增加伴随着俯仰振幅 $\theta$的减小。这是可以预料的，因为较硬的弹簧会抑制俯仰，因此拍动片与流场相遇时的 $\alpha$更大，而这与垂直力直接相关（如图4b、d所示）。然而，对于最软的弹簧（$\kappa \approx 0.035$），$\langle P\rangle$ 略大于柔性工况（$\kappa \approx 0.047$）。在这种弹簧条件下，推进速度较低（图 3），因此来流相对于游动方向的倾斜程度更大。此外，在行程反转时俯仰角仍为正值，因此只有在行程反转后才呈现水平对齐（$\theta = 0$），如图4a所示的柔性工况。在每个半个行程开始时，拍动片仍保持着与前一个半个行程相同的倾斜状态，因此每个半个行程开始时都会出现一个 $\alpha$ 峰值。在柔性工况下，这一点已可从图4b中看出：$\alpha$ 在每次行程反转后不久都会出现一个额外峰值。对于最软的弹簧，这个峰值更大（未显示）。图6a的插图展示了所选工况下输入功率$P$ 的瞬时变化。在每个半个行程中，$P$ 在前半段为正，随后在行程反转前变为负值。这些负值不计入周期平均值$\langle P\rangle$ （方程（10））。 $P$ 的正峰值与 $F_{hz}$ 呈现相同趋势，随 $\kappa$从刚性扑翼的约 0.72 降至柔性工况的约 0.3。这与较硬工况产生更大的垂直力、因而需要更多输入功率的情况一致。

现在，让我们重点关注效率 $\eta$ 和巡航性能 $\varepsilon$。比较刚性情形和硬情形的输入功率时，可以发现二者几乎相同；然而，硬情形的推进速度几乎是刚性情形的三倍（图3）。因此，较小的俯仰振幅几乎无需增加额外输入功率，便能提高推进速度。对于最优情形，其推进速度是刚性情形的4.5倍，而输入功率降低至约0.8倍。由于$\eta$ 随 $\langle U_p\rangle^2/\langle P\rangle$缩放，$\eta$ 约大 $4.5^2/0.8 \approx 25$ 倍。值得注意的是，使推进速度达到最大的 $\kappa$ 的最佳值，并不等于使推进效率达到最大的数值。当 $\kappa \approx 0.10$取值为约0.014时，$\eta$ 达到最大值；该取值略小于 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$，而最优情形（$\kappa = \kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$）达到 $\eta \approx 0.013$。这是因为在 $\kappa$ 的这些取值附近，推进速度几乎不变，而随着 $\kappa$减小，输入功率却明显下降。随着 $\kappa$ 进一步减小，推进速度急剧下降，而较低的输入功率不足以阻止 $\eta$ 也随之下降。A

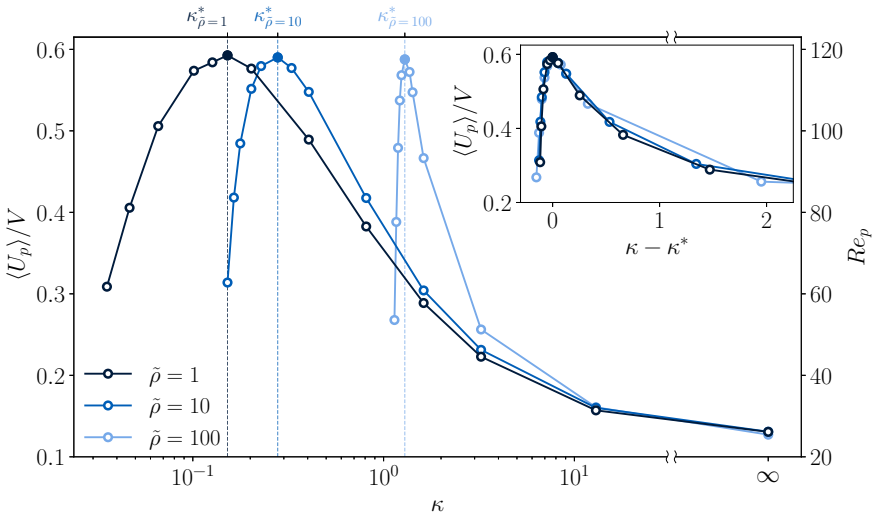



图 7：周期平均推进速度 $\langle U_p\rangle/V$ 随扭转弹簧刚度 $\kappa$的变化，适用于密度比 $\tilde\rho=1$、10 和 100。右侧坐标轴给出了相应的推进雷诺数 $Re_p$。实心符号标出最佳刚度 $\kappa^*_{\tilde\rho=1}$、$\kappa^*_{\tilde\rho=10}$ 和 $\kappa^*_{\tilde\rho=100}$，图中也以竖直虚线标示。插图显示相同数据随相对于各自最佳刚度的刚度$\kappa-\kappa^*$的变化，横轴采用线性尺度。横坐标轴上的断裂表示刚性情形未按比例绘制。

Xiao 等人（2014年）在具有椭圆形截面和扭转弹簧的三维翼研究中，也报告了最佳值之间存在类似差异：在所考察的弹簧中，最软弹簧产生的推力最大，而效率则在中等刚度下达到峰值。相比之下，对于柔性板，Tang 和 Lu（2016年）以及 Wang 等（2020年）发现，最大推进速度和效率对应的刚度几乎相同。图 6b)的插图显示了巡航性能 $\varepsilon$，即单位输入功所行进的距离（Yeh 和 Alexeev，2014年、2016年；Arora 等人，2018年）。对于最优情形（$\kappa=\kappa^*_{\tilde\rho=1}$），我们得到 $\varepsilon=2.5$，是刚性扑翼的5.6倍，其原理与上文所述相同：推进速度提高4.5倍，输入功率降低至0.8倍。 $\varepsilon\approx3.0$ 的最大值对应的弹簧甚至比 $\eta$更软，为 $\kappa\approx0.066$，因为 $\varepsilon$ 仅以线性方式包含 $\langle U_p\rangle$，而 $\eta$ 随 $\langle U_p\rangle^2/\langle P\rangle$缩放。Yeh 和 Alexeev（2014年）还发现，对于三维弹性板，单位输入功所行进的距离在低于最大推进速度的某一推进速度下达到最大值。对于较软的弹簧， $\varepsilon$ 急剧下降，随推进速度一同下降。

## 3.2 密度与扭转弹簧刚度：一种共同的流动状态

现在，我们将分析扩展到三个密度比 $\tilde\rho=1$、10 和 100。对于每个密度比，我们重复第 3.1 节中所述的、针对 $\kappa$ 以最大化推进速度的优化过程（见图 7）。所得 $\kappa$ 最佳值分别为 0.15、0.28 和 1.29，对应于 $\tilde\rho=1$、10 和 100；我们分别将其称为$\kappa^*_{\tilde\rho=1}$、$\kappa^*_{\tilde\rho=10}$ 和 $\kappa^*_{\tilde\rho=100}$。因此，密度比越高，为达到最大推进速度所需的扭转弹簧刚度就越大。有趣的是，对于三个密度比，所得最大推进速度几乎相同，即 $\langle U_p\rangle/V=0.59$，这对应于 $Re_p=118$ 和 $St=0.67$。从刚性扑翼开始，三个密度比均以相同的速度自推进，即 $\langle U_p\rangle/V\approx0.13$。直到刚度最大的弹簧处，三条曲线仍然重合，即 $\kappa=13$。随着我们使弹簧变得柔软，对于所有三个密度比，推进速度都逐渐增加。随后曲线分离；密度比越高，这一增幅开始出现时所对应的弹簧刚度就越大。每条曲线都在各自的最佳值处达到最大值，而进一步使弹簧变柔软会导致推进速度急剧下降，这与第 3.1 节中对 $\tilde\rho=1$ 的观察结果一致。图 7 的插图以 $\kappa-\kappa^*$ 为横坐标、在线性尺度上展示了相同的数据。经过这样的平移后，三种密度比的曲线

重合为一条曲线。这种表示方式还突出了刚度低于最佳值时推进速度的急剧下降。

为了检验最佳状态是否对应被动俯仰运动的共振，我们将使推进速度达到最大的刚度与共振刚度进行比较。由于我们针对每个密度比分别进行分析，因此用符号 $\kappa^*$ 表示最佳值，而不区分其密度比。在静止流体中，拍动片以固有频率 $f_n = \sqrt{k}/(I_p + I_a)/(2\pi)$进行俯仰振荡。这里，$k$ 为弹簧刚度（有量纲），$I_p = \rho_p V_p J$ 为拍动片绕其质心的转动惯量（附录 A.1），$I_a$ 为流体绕同一轴的附加转动惯量。我们使用 Brennen（1982年）的附加质量系数，并针对有限展长进行修正，据此估算势流中薄板的$I_a$（附录 A.2）。由于我们估算的是薄板的 $I_a$，因此未考虑拍动片的有限厚度和圆钝前缘。此外，势流估算忽略了黏度和平均流，并假设俯仰幅度较小。共振条件 $f_n = f$ 由此给出 $\kappa_{res} = 0.0117\,\tilde{\rho} + 0.047$，其中第一项包含拍动片的惯性，第二项包含流体的附加惯性。对于 $\tilde{\rho} = 1$，10 和 100，得到的结果分别为 $\kappa_{res} \approx 0.058$、0.16 和 1.21，而最佳值分别为 0.15、0.28 和 1.29。因此，对于这三个密度比，最佳弹簧都比共振弹簧更硬，最佳状态并不对应共振。尽管 $\kappa^*$ 本身随 $\tilde{\rho}$显著增大，但对于三个密度比，$\kappa^*$ 与 $\kappa_{res}$之间的差异几乎相同。这表明 $\kappa^*$ 随 $\tilde{\rho}$ 增大，其变化规律类似拍动片的惯性，而流体带来的贡献则近乎恒定。先前研究也发现，最佳弹簧比共振弹簧更硬；这一结论既适用于二维模拟中的推进速度（Zhang 等人，2010年；Arora 等人，2018年），也适用于线性二维理论中的推力（Moore，2015年）。柔性扑翼实验也得出了相同结论：机翼刚度高于共振刚度时，推力功率最大（Ramananarivo 等人，2011年）。相比之下，Fern´andez-Feria 和 Alaminos-Quesada（2021年）发现，最佳性能出现在接近流固耦合系统固有频率的范围内，该频率计入了平均流的水动力贡献。Arora 等人（2018年）还表明，自推进板的最大推力与最高推进速度并不同时出现。这与我们在第 3.1 节中给出的 $\tilde{\rho} = 1$ 结果一致：刚性和硬弹簧情形产生的水动力最大，但要获得最高推进速度，则需要较软的弹簧，使水动力朝游动方向倾斜。

在各自的最佳刚度下，$\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$、$\kappa^*_{\tilde{\rho}=10}$ 和$\kappa^*_{\tilde{\rho}=100}$这三个拍动片达到了相同的推进速度，尽管 $\tilde{\rho} = 1$ 与100之间的最佳刚度相差约8.5倍。它们的俯仰角ˆ几乎完全重合，振幅 $\theta$ 为 $21.1°$，其中 $\tilde{\rho} = 100$略大；在行程反转前不久，拍动片处于水平对齐状态（$\theta = 0$）（图8a）。由于 $\alpha$ 仅取决于 $\theta$、升沉速度和 $\langle U_p \rangle$，因此有效攻角也相同，在 $t/T \approx 0.33$处最大约为 $44°$（图8b）。因此，垂向水动力也完全重合，振幅约为0.54（图8c）。以 $\alpha$为函数绘制时，$F_{hz}$ 对三个拍动片呈现出几乎完全相同的环路；它们的大部分力都产生于每个半个行程的前半段（图8d）。因此，在最佳状态下，三个密度比基本上达到了相同的运动学和水动力状态。密度比只会改变达到这一状态所需的刚度，因为密度比较高的拍动片具有更大的转动惯量，需要更硬的弹簧才能产生相同的俯仰运动。

为比较所有模拟，我们在图9 中展示了所有刚度和密度比下的推进速度，分别表示为 a) 第一傅里叶模态的俯仰振幅 $\theta$ 的 $\theta$，b) 相位差 $\varphi$以及 c) 最大 $|\alpha|_{max}$的函数。就 $\theta$而言，三种密度比下的结果都汇聚到同一条曲线（图9a）。从刚性扑翼（$\theta = 0$）开始，推进速度随俯仰振幅增大，在三种密度比下均于 $\theta = 21.1°$ 处达到最大值，随后在振幅更大时再次下降。对于置于均匀流中、惯性各异的被动俯仰翼片，Phoemsapthawee 等人（2020年）同样发现，效率在相同的俯仰振幅下达到最大值。就相位

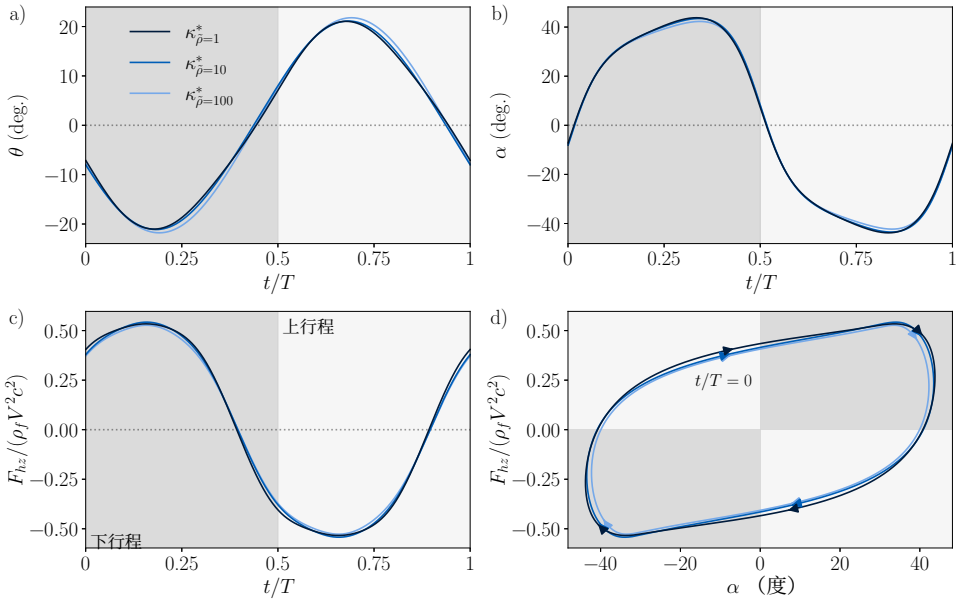
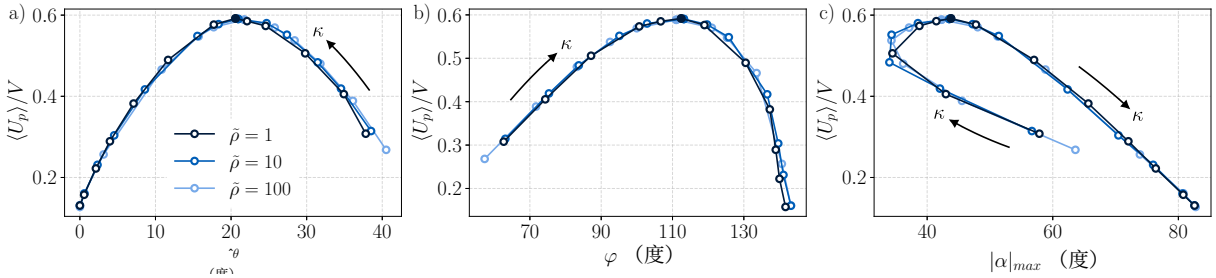



图 8：在最佳刚度 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$、$\kappa^*_{\tilde{\rho}=10}$ 和 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=100}$ 下，一个周期内的 a) 俯仰角 $\theta$、b) 有效攻角 $\alpha$ 和 c) 垂向水动力 $F_{hz}/(\rho_f V^2 c^2)$，以及 d) 垂向水动力分量 $F_{hz}/(\rho_f V^2 c^2)$ 随有效攻角 $\alpha$ 的变化。a)–c) 中的阴影区域标示下行程和上行程，如 c) 中所示。d) 中的箭头标示 $t/T = 0$、0.25、0.5 和 0.75，并表示环路的方向。a) 中的图例适用于所有面板。

差 $\varphi$而言，所有工况也都汇聚到一起（图9b），且推进速度在 $\varphi = 113°$处达到最大值。趋近刚性极限时，$\varphi$ 趋近于约 $140°$，推进速度随 $\varphi$急剧下降；而对于较软的弹簧，$\varphi$ 减小，推进速度仅逐渐下降。图9c)所示的最大有效攻角在三种密度比下也呈现相同的变化趋势。对于刚性扑翼，$|\alpha|_{max}$从 $82.5°$ 减小至最佳状态下的 $44°$，与此同时推进速度增大。在此范围内，拍动片的顺流倾斜程度更大，迎向的来流倾角也更小，这两者都会降低$|\alpha|_{max}$。然而，低于最佳值后，$|\alpha|_{max}$ 先进一步降至 $34°$，随后在最软弹簧下再次增大，而推进速度则持续下降。接近最佳值时，增大的俯仰振幅仍会降低 $|\alpha|_{max}$。弹簧更软时，推进速度下降，因此来流的倾斜程度更大。此外，如图4a)中柔性工况在 $\tilde{\rho} = 1$（$\kappa = 0.047$）下所示，俯仰角只有在行程反转之后才越过 $\theta = 0$。因此，在每个半个行程开始时，拍动片仍保持着与前一个半行程相同的倾斜状态，且 $|\alpha|_{max}$ 再次增大。与 $\theta$ 和 $\varphi$不同，推进速度并非 $|\alpha|_{max}$的单值函数：两个具有相同 $|\alpha|_{max}$ 的扑翼，其游动速度可能截然不同，具体取决于其弹簧刚度是接近最佳值还是软得多。因此，运动学相同的扑翼无论密度比如何，都会达到相同的推进速度。

最后，图10 展示了输入功率及由此产生的性能。对于三个密度比，$\langle P \rangle$的变化趋势与 $\tilde{\rho} = 1$相同：它随 $\kappa$ 增加，并在接近刚性扑翼时趋于平稳（图10a）。然而，$\langle P \rangle$的水平随密度比显著增加，在刚性极限下，从.3（对应 $\tilde{\rho} = 1$）增至约.9（对应 $\tilde{\rho} = 100$）。这种差异源于拍动片的惯性：质量较大的拍动片在升沉运动中加速时需要更多功率。尽管如此，刚性扑翼在三个密度比下达到的推进速度相同（图7）。对于 $\tilde{\rho} = 100$，拍动片的惯性超过水动力，因此 $\langle P \rangle$ 在整个 $\kappa$范围内的变化不到 10%。对于 $\tilde{\rho} = 1$，




ˆ 图 9：周期平均推进速度 $\langle U_p \rangle / V$ 与以下因素的关系：a) $\theta$，即 $\theta$的第一傅里叶模态的振幅；b) $\varphi$，即升沉运动与 $\theta$ 的第一傅里叶模态之间的相位差；以及 c) $|\alpha|_{max}$，即最大有效攻角。箭头表示 $\kappa$逐渐增大。实心符号标记 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$、$\kappa^*_{\tilde{\rho}=10}$ 和 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=100}$，a) 中的图例适用于所有面板。

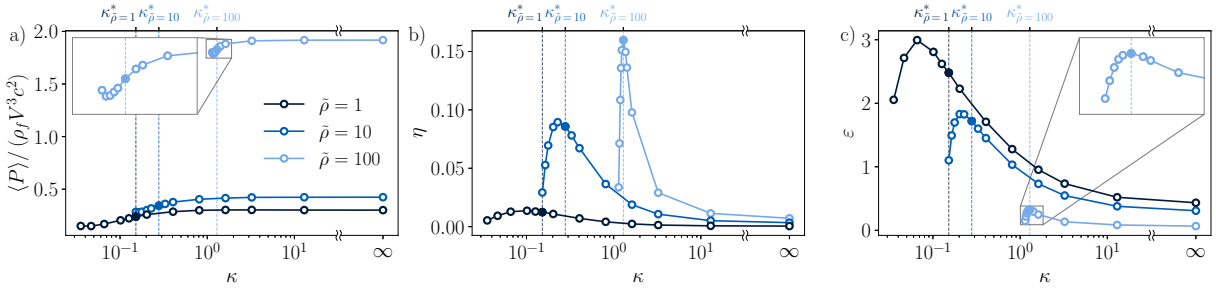



图 10：a) 周期平均输入功率 $\langle P \rangle / (\rho_f V^3 c^2)$、b) 推进效率 $\eta$以及 c) 巡航性能 $\varepsilon$ 随 $\kappa$的变化。a) 和 c) 中的插图放大了 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=100}$附近的区域。a) 中的图例适用于所有面板，实心符号和垂直虚线标记 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$、$\kappa^*_{\tilde{\rho}=10}$ 和 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=100}$。横坐标轴的断裂表示刚性情形未按比例绘制。

相比之下，$\langle P \rangle$从最软弹簧到刚性扑翼增加了一倍。图10a）中的插图放大显示了 $\langle P \rangle$在 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=100}$附近的情况。对于 $\tilde{\rho} = 10$ 和 100，$\langle P \rangle$ 在低于最佳值时达到最小值，随后在弹簧最软时再次上升。对于弹簧最软的情况，行程反转后不久出现了一个额外的 $\alpha$ 峰值，这与该上升有关；对于 $\tilde{\rho} = 1$ 的情况，§ 3.1中对此进行了讨论。

由于三种扑翼在最佳 $\kappa$下达到相同的推进速度，因此密度比仅通过输入功率影响性能指标。不包含拍动翼质量的巡航性能 $\varepsilon$会随密度比增大而大幅下降（图 10c）。因此，密度比更高的扑翼单位输入功所行进的距离更短，这与 Arora 等人（2018）对带扭转弹簧的俯冲平板的研究结果一致。推进效率 $\eta$ 的变化顺序则相反（图 10b），但这仅仅是因为它将扑翼的动能与输入功率联系起来（Arranz 等，2022a）。从 $\tilde{\rho} = 1$到 100，扑翼质量增加了 100 倍，而最佳状态下的 $\langle P \rangle$ 仅增加了约 7.5 倍。因此，$\eta$ 不适合用于比较不同密度比的扑翼，比较时应依据 $\varepsilon$。使 $\eta$ 和 $\varepsilon$ 达到最大值的刚度低于 $\kappa^*$（对于 $\tilde{\rho} = 1$ 而言），并且随着密度比增大而逐渐接近它。对于 $\tilde{\rho} = 1$，$\varepsilon$ 在远低于 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=1}$时达到最大值，因为弹簧较软时，输入功率的下降速度快于推进速度。对于 $\tilde{\rho} = 100$，$\langle P \rangle$ 随 $\kappa$的变化幅度不到 10%，且$\varepsilon$ 和 $\eta$ 均在 $\kappa^*_{\tilde{\rho}=100}$ 时达到最大值（图 10b 和图 10c 插图）。密度比越高，弹簧的选择在推进速度与能量性能之间造成的权衡就越小。对于所有三种密度比，$\eta$ 和 $\varepsilon$ 的最大值也都出现在刚度高于 $\kappa_{res}$的弹簧上。

# 4 结论

本研究通过数值方法考察了一种三维扑翼，该扑翼由其质心的预设正弦升沉运动驱动，实现自推进。我们将其建模为一个刚体，可绕展向轴被动俯仰，并由扭转弹簧约束。我们针对三种密度比 $\tilde{\rho} = 1$、10 和 100，改变归一化弹簧刚度 $\kappa$，以评估其对扑翼推进性能的影响。对于每种密度比，我们还进一步优化了 $\kappa$ 的取值，使推进速度达到最大。

对于 $\tilde{\rho} = 1$的情况，所达到的最大推进速度为 $\langle U_p \rangle / V = 0.59$ ，归一化刚度为 $\kappa = 0.15$。当弹簧刚度为最佳值时获得的被动俯仰运动，与无俯仰情况相比，使推进速度提高了约 350%。推进速度的提升伴随着输入功率降低约 20%，这使得本文采用的被动俯仰成为改善推进性能的一种具有吸引力的策略。请注意，与采用其他条件相同的计算设置、在 Arranz 等人 (2022a) 中提出的弦向柔性板相比，这一改进幅度明显较低。然而，此处提出的方案更为简单；并且由于弹簧位于质心而非前缘处，质心不会像集中质量那样发生驱动，从而避免产生更大的结构载荷需求。不过，这目前仅是一种推测，仍需进行详细研究。

如果考虑这样一种假想的参考羽化情形：拍动片与自由来流对齐时发生行程反转（$\theta = 0$），我们会发现，最优情形源于两种运动之间的平衡：与较硬弹簧相关的领先、小振幅俯仰运动，以及与较软弹簧相关的滞后、大振幅俯仰运动。当羽化运动能够抑制较大的有效攻角（这些攻角在纯升沉运动中原本会出现），并将部分法向力（通常由环量效应产生）转移至前进方向时，便能显著提升拍动片的推进性能。较硬的弹簧对应较小的俯仰角，因此拍动片无法从羽化运动中获益：有效攻角仍然过大，前缘和后缘均发生流动分离，水动力主要作用于垂直方向。然而，较软的弹簧对应较大的俯仰角，但俯仰运动与升沉运动之间的相位差小于 $90°$，这意味着俯仰运动相对于参考羽化运动出现滞后，且拍动片在行程反转后才与水平方向对齐（$\theta = 0$）。拍动片转向过晚，导致有效攻角在行程反转后不久又出现一个峰值，结果对拍动片的推进性能产生不利影响。因此，最佳情形是这两个极限之间的平衡，既体现在俯仰振幅上，也体现在升沉运动与俯仰运动之间的相位差上。具体而言，最佳情形对应的俯仰振幅（第一傅里叶模态系数）为 $21.1°$；俯仰运动领先升沉运动 $113°$，或者说，领先参考羽化运动 $23°$（拍动片在行程反转前与水平方向对齐）。

有趣的是，三种密度比均达到相同的最大推进速度，但密度比越高，所需弹簧刚度就越大，才能达到这一速度。对于 $\tilde{\rho} = 100$ 的情况与 $\tilde{\rho} = 1$的情况，所得归一化刚度相差 8.5 倍。当以相对于各自最佳值偏移后的归一化刚度表示推进速度时，三种密度比的结果会汇聚到同一条曲线上。这种结果的汇聚不仅出现在周期平均量中，也出现在俯仰运动、有效攻角和垂向水动力的瞬时演化中。此外，我们发现，对于三种密度比，能够使推进速度达到最大的弹簧，其刚度均高于拍动片在静止流体中发生共振时的弹簧刚度；在分析中还计入了流体的附加惯性。最佳刚度与共振刚度之间的差异几乎不随密度比变化。

输入功率　　不过，由于拍动片的惯性，er 会随密度比显著增大　　.

推进效率 $\eta$ 表明，密度比较高的拍动片单位输入功所能行进的距离更短，而单位质量量 $\varepsilon$ （巡航性能）则随密度比增大而下降。使 $\varepsilon$ 和 $\eta$ 达到最大值的刚度低于 $\tilde{\rho} = 1$ 对应的 $\kappa^*$ ，并且随着密度比增大而趋近于该值。密度比越高，弹簧的选择在推进速度与能量性能之间涉及的权衡就越小。

总体而言，最佳弹簧并非由共振决定，而是由其产生的羽化运动决定。对于所考察的所有密度比，当拍动片以21.1° 的振幅进行羽化运动并领先于参考羽化运动时，可达到最高推进速度；密度比较高的拍动片只需使用较硬弹簧即可实现这种运动。

## 声明与披露

**作者个人贡献** 概念化：MGV、MM；方法论：MGV、MM；调查：MS；形式分析：MS；可视化：MS；软件：MS、MM；撰写——初稿准备：MS；撰写——审阅与编辑：MGV、MM；监督：MM。

**关于生成式人工智能使用情况的声明**在准备本文期间，作者使用了 Claude（Anthropic）来提升文本的可读性和流畅度，并检查文本的一致性。使用该工具后，作者对内容进行了审阅和必要的编辑，并对已发表文章的内容承担全部责任。

# 参考文献

Alben, S. 和 Shelley, M.（2005）。作为自由扑动体吸引态的相干运动。《美国国家科学院院刊》，102(32):11163–11166。Arora, N.、Kang, C.-K.、Shyy, W. 和 Gupta, A.（2018）。利用扭簧模型分析俯仰平板推进过程中的被动弯曲。《流体力学杂志》，857:562–604。Arranz, G.、Flores, O. 和 Garc´ıa-Villalba, M.（2020）。串列构型扑翼气动性能的三维效应。《流体与结构杂志》，94:102893。Arranz, G.、Flores, O. 和 Garc´ıa-Villalba, M.（2022a）。串列自推进柔性板的三维流动相互作用。《流体力学杂志》，931:A5。Arranz, G.、Mart´ınez-Muriel, C.、Flores, O. 和 Garc´ıa-Villalba, M.（2022b）。多体系统的流固耦合：方法与应用。《流体与结构杂志》，110:103519。Berman, G. J. 和 Wang, Z. J.（2007）。昆虫悬停飞行中的能量最优运动学。《流体力学杂志》，582:153–168。Brennen, C. E.（1982年）。附加质量与流体惯性力综述。技术报告 N62583-81-MR-554，美国海军土木工程实验室，波特休尼米，加利福尼亚州。Chen, Y.、Gravish, N.、Lussier Desbiens, A.、Malka, R. 和 Wood, R. J.（2016）。扑动且被动旋转的昆虫翅膀气动性能的实验与计算研究。《流体力学杂志》，791:1–33。Dai, H.、Luo, H. 和 Doyle, J. F.（2012）。悬停运动中弹性矩形翼的动态俯仰。《流体力学杂志》，693:473–499。Deng, J. 和 Caulfield, C. P.（2018）。垂直扑动扁椭球体的水平运动。《流体力学杂志》，840:688–708。Dong, H.、Mittal, R. 和 Najjar, F. M.（2006）。低展弦比扑动翼型的尾流拓扑与水动力性能。《流体力学杂志》，566:309–343。Fern´andez-Feria, R. 和 Alaminos-Quesada, J.（2021）。小振幅强迫升沉运动中柔性薄翼型的推进与能量采集性能，以及其被动俯仰和变形。《流体与结构杂志》，102:103255。Guglielmini, L. 和 Blondeaux, P.（2004年）。振荡翼型的推进效率。《欧洲力学杂志*B*辑：流体》，23(2):255–278。Hu, H.、Wang, J.、Wang, Y. 和 Dong, H.（2021）。可调刚度对被动俯仰板水动力性能及流动特征的影响。《流体与结构杂志》，100:103175。Hu, H.、Yang, J.、Zhao, L.、Wang, Y.、Liao, W. 和 Yu, W.（2025）。基于扭簧的被动俯仰推进器的共振、推力与水动力效率之间的关系。《流体物理学》，37:031906。Huang, Q.、Bhat, S. S.、Yeo, E. C.、Young, J.、Lai, J. C. S.、Tian, F.-B. 和 Ravi, S.（2023）。功率同步决定被动俯仰扑翼的悬停飞行效率。《流体力学杂志》，974:A41。Katz, J. 和 Weihs, D.（1978）。具有弦向柔性的翼型大振幅振荡所产生的水动力推进。《流体力学杂志》，88(3):485–497。Kurt, M.、Eslam Panah, A. 和 Moored, K. W.（2020）。低展弦比水翼之间的流动相互作用

在线列和错列排列中。仿生学, 5(2):13。L´opez-Tello, P. E., Fern´andez-Feria, R., and Sanmiguel-Rojas, E. (2023)。由力矩驱动的弹性支撑刚性翼片实现高效自推进运动。*Appl. Math. Model.*, 116:236–253。Mart´ınez-Muriel, C., Arranz, G., Garc´ıa-Villalba, M., and Flores, O. (2023)。展向柔性扑翼中的流固共振。《流体力学杂志》, 964:A5。Mart´ınez-Muriel, C., Garc´ıa-Villalba, M., and Flores, O. (2024)。论尾流捕获和共振在串列展向柔性扑翼中的作用。*J. Fluids Struct.*, 130:104175。Michelin, S. and Llewellyn Smith, S. G. (2009)。升沉柔性翼的共振与推进性能。《流体物理学》, 21:071902。Moore, M. N. J. (2015)。扭转弹簧是扑翼产生推力的最佳柔性配置。《流体物理学》, 27(9):091701。Moriche, M., Flores, O., and Garc´ıa-Villalba, M. (2017)。低雷诺数下升沉与俯仰翼型所受气动力研究。《流体力学杂志》, 828:395–423。Moriche, M., Garc´ıa-Villalba, M., and Uhlmann, M. (2026)。沉降颗粒的颗粒解析模拟：一种适用于长时间积分区间的方法。《力学学报》, pages 1–21。Moriche, M., Uhlmann, M., and Du˘sek, J. (2021)。无界周围流体中单个扁椭球体的沉降：定常与非定常尾流状态模拟的基准。*Int. J. Multiph. Flow*, 136:103519。Phoemsapthawee, S., Thaweewat, N., and Juntasaro, V. (2020)。共振对半主动扑动推进器性能的影响。*Ship Technol. Res.*, 67(1):51–60。Ramananarivo, S., Godoy-Diana, R., and Thiria, B. (2011)。扑翼飞行者或许并非依靠共振，而是利用空气动力学来提升性能。*Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 108(15):5964–5969。Saadat, M., Fish, F. E., Domel, A. G., Di Santo, V., Lauder, G. V., and Haj-Hariri, H. (2017)。论水生运动的规律。*Phys. Rev. Fluids*, 2:083102。Schenk, M., Arranz, G., Flores, O., Moriche, M., and Garc´ıa-Villalba, M. (2026)。具有被动俯仰的自推进串列扑动体的流体动力相互作用。已提交。Schenk, M., Garc´ıa-Villalba, M., Du˘sek, J., Uhlmann, M., and Moriche, M. (2025)。一种用于任意形状刚性颗粒颗粒解析模拟的浸入边界法。*Int. J. Multiph. Flow*, 188:105200。Shao, X., Zhang, X., and Yu, Z. (2016)。被动俯仰翼片运动滞后现象的数值研究。*J. Hydrodyn.*, 28(3):359–368。Shyy, W., Aono, H., Chimakurthi, S. K., Trizila, P., Kang, C.-K., Cesnik, C. E. S., and Liu, H. (2010)。扑翼空气动力学与气动弹性研究的最新进展。*Prog. Aerosp. Sci.*, 46(7):284–327。Smits, A. J. (2019)。波动式与振荡式游泳。《流体力学杂志》, 874:P1。Spagnolie, S. E., Moret, L., Shelley, M. J., and Zhang, J. (2010)。被动俯仰扑动运动中的意外行为。《流体物理学》, 22(4):041903。Tang, C. and Lu, X.-Y. (2016)。三维扑动柔性板的自推进。*J. Hydrodyn.*, 28(1):1–9。Taylor, G. K., Nudds, R. L., and Thomas, A. L. R. (2003)。飞行与游泳动物以经过调谐、实现高功率效率的斯特劳哈尔数巡航。自然, 425(6959):707–711。Thiria, B. and Godoy-Diana, R. (2010)。翼柔顺性如何影响自推进扑翼飞行者的效率

。《物理评论*E*》, 82(1):015303。Triantafyllou, M. S., Triantafyllou, G. S., and Yue, D. K. P. (2000)。鱼类式游动的流体动力学。《流体力学年度评论》, 32(1):33–53。Uhlmann, M. (2005)。一种用于颗粒流模拟的直接强制浸入边界法。《计算物理学杂志》, 209(2):448–476。Vandenberghe, N., Zhang, J., and Childress, S. (2004)。对称性破缺导致向前扑翼飞行。《流体力学杂志》, 506:147–155。Wang, S., He, G., and Zhang, X. (2016)。黏性流体中扑动体的自推进：最新进展与展望。《力学学报》, 32(6):980–990。Wang, W., Huang, H., and Lu, X.-Y. (2020)。自推进升沉柔性板的最佳弦向刚度分布。《流体物理学》, 32:111905。Wu, W. (2020)。柔性板的运动：前缘边界条件如何影响其自推进性能。《欧洲力学杂志*B*辑：流体》, 84:40–50。Xiao, Q., Hu, J., and Liu, H. (2014)。扭转刚度和惯性对低展弦比扑翼动力学的影响。《仿生学与生物拟态》, 9(1):016008。Yeh, P. D. and Alexeev, A. (2014)。低雷诺数下俯冲运动弹性板的自由游动。《流体物理学》, 26(5):053604。Yeh, P. D. and Alexeev, A. (2016)。展弦比对柔性板自由游动俯冲运动的影响。《计算流体》, 124:220–225。Zhang, D., Zhang, J.-D., and Huang, W.-X. (2022)。游动与飞行的物理模型和涡动力学：综述。《力学学报》, 233(4):1249–1288。Zhang, J., Liu, N.-S., and Lu, X.-Y. (2010)。被动扑动平板的运动。《流体力学杂志》, 659:43–68。Zurman-Nasution, A. N., Ganapathisubramani, B., and Weymouth, G. D. (2020)。三维性对推进性扑动的影响。《流体力学杂志》, 886:A25。

# A 附录

## A.1 拍板几何形状

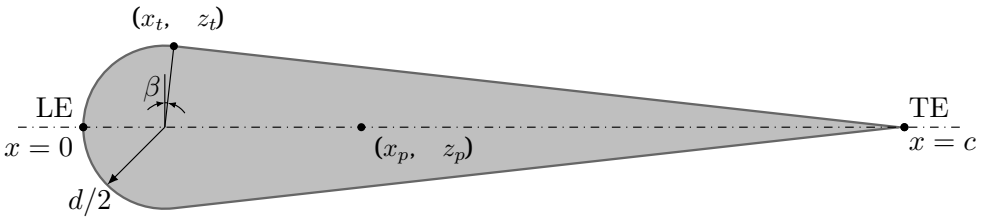



图 11：三维扑翼的横截面：一段直径为 $d$的圆形前缘与两条直边相连，并在后缘 $x=c$处相交；切点为 $(x_t,\ z_t)$，边缘角为 $\beta$，质心为 $(x_p,\ \ z_p)$。

拍动片的横截面如图 11所示：直径为 $d$的圆形前缘与两条直边相切连接，并向后缘汇合。以 $x$ 从前缘起测量，半厚度轮廓为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{(d/2)^2-(x-d/2)^2}, & 0\le x\le x_t\,,\\ (c-x)\tan\beta, & x_t\le x\le c\,,\end{cases} \tag{15}$$

其中，第一分支表示圆形前缘，第二分支表示直边。两个分支在切点 $x_t=\frac{d}{2}(1+\sin\beta)$ 处相接；要求直边与圆相切，即可确定边缘角 $\beta=\arcsin[d/(2c-d)]$。

面积和弦向形心为

$$\begin{aligned}A_c&=2\int_0^c f\,\mathrm{d}x=2\int_0^{x_t}\sqrt{(d/2)^2-(x-d/2)^2}\,\mathrm{d}x+2\int_{x_t}^c(c-x)\tan\beta\,\mathrm{d}x\\&=\frac{d^2}{4}\left(\beta+\frac{\pi}{2}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}x_p&=\frac{2}{A_c}\int_0^c x\,f\,\mathrm{d}x=\frac{2}{A_c}\left[\int_0^{x_t}x\sqrt{(d/2)^2-(x-d/2)^2}\,\mathrm{d}x+\int_{x_t}^c x\,(c-x)\tan\beta\,\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{d}{\beta+\frac{\pi}{2}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}}\left[\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\beta\cos\beta}{2}-\frac{\cos^3\beta}{3}+\frac{\cos^3\beta\left(3+3\sin\beta-2\cos^2\beta\right)}{6\sin^2\beta}\right]\end{aligned} \tag{17}$$

其中，根据对称性可得 $z_p=0$，而体积则通过将横截面沿展向拉伸得到，$V_p=A_c\,b$。

以下所有力矩均是相对于展向 $y$轴而言的；在 §2.1 的平面运动约束下，拍动片仅绕此轴转动。对 $x^2+z^2$ 在横截面上积分，并沿

展向挤出，然后在 $x_t$ 处拆分，得到相对于前缘的转动惯量，

$$
\begin{aligned}
I_{y,(\mathrm{LE})} &= \rho_p b \int_{A_c} \left(x^2 + z^2\right) \mathrm{d}A = 2\rho_p b \int_0^c \left(x^2 f + \tfrac{1}{3} f^3\right) \mathrm{d}x \\
&= 2\rho_p b \int_0^{x_t} \left(x^2 \sqrt{(d/2)^2 - (x - d/2)^2} + \tfrac{1}{3}\left[(d/2)^2 - (x - d/2)^2\right]^{3/2}\right) \mathrm{d}x \\
&\quad + 2\rho_p b \int_{x_t}^c \left(x^2 (c - x) \tan\beta + \tfrac{1}{3}(c - x)^3 \tan^3\beta\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\rho_p b\, d^4}{192} \left[9(\pi + 2\beta) + \frac{18\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{8\cos^3\beta}{\sin^2\beta} + \frac{2\cos^3\beta}{\sin^3\beta}\right]
\end{aligned}
\tag{18}
$$

根据平行轴定理，可得到质心处的相应值，$I_{y,\,(x_p)} = I_{y,\,(\mathrm{LE})} - \rho_p V_p\, {x_p}^2$。单位质量转动惯量，即每单位质量的转动惯量，随后为

$$
J = \frac{I_{y,(x_p)}}{\rho_p V_p} = \frac{d^2 \left[9(\pi + 2\beta) + \dfrac{18\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{8\cos^3\beta}{\sin^2\beta} + \frac{2\cos^3\beta}{\sin^3\beta}\right]}{48\left(\beta + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)} - {x_p}^2 \tag{19}
$$

在本文中，我们将直径设为 $d = 0.2c$ ，将展向设为 $b = 0.5c$，因此方程（16）–（19）给出$A_c = 0.106\,c^2$，$x_p = 0.349\,c$ 以及 $J = 0.055\,c^2$，且拍动片的体积为 $V_p = A_c\, b = 0.053\,c^3$。

## A.2 附加转动惯量

我们按照 $I_a$ 的方法估算附加转动惯量Brennen （1982年），对于在势流中具有弦长 $c$ 和展向$b$ 的薄板。对于前后对称的板，以角速度 Ω 绕$x_p$ 旋转，等效于绕半弦位置旋转，同时半弦位置以速度（$c/2 - x_p$）Ω进行升沉运动，因此

$$
I_a = I_{a,m} + \left(\frac{c}{2} - x_p\right)^2 m_a, \tag{20}
$$

其中，$I_{a,\,m}$ 为绕半弦位置的附加转动惯量，$m_a$ 为升沉方向的附加质量。根据条带理论，即将二维板的数值（Brennen，1982年，表 II）乘以展向，得到

$$
I_{a,m} = \frac{\pi}{8}\,\rho_f \left(\frac{c}{2}\right)^4 b, \qquad m_a = \pi\,\rho_f \left(\frac{c}{2}\right)^2 b. \tag{21}
$$

由于条带理论忽略了绕端部的流场，因此我们采用弦长和展向相同的椭圆盘修正这两项贡献，该椭圆盘的精确三维数值已知（Brennen，1982年，表 IV）。椭圆盘的精确值与条带理论值之比，旋转时为 0。655，升沉时为 0。413，我们假定拍动片也具有相同比值。对于升沉，矩形板的测量结果（Brennen，1982年，表 III）为 0。420，与椭圆盘的数值相差不到 2%。取 $b = 0.5c$ 和 $x_p = 0.349c$，可得$I_a \approx 0.0117\,\rho_f c^5$。

## A.3 网格敏感性分析

在本附录中，我们介绍为选择模拟所用空间分辨率而开展的网格加密研究。尽管论文主体中的模拟是三维的，但加密研究是在一个流向和垂向范围相同的简化二维区域上进行的（$L_x$ =16$c$，$L_z = 8c$）。由于论文主体中的拍动片运动本身已是平面的——通过流固耦合实现流体中的流向平移、施加升沉运动，以及绕展向轴俯仰——因此将其简化为二维

不会舍弃任何相关动力学，同时还能大幅降低高分辨率算例的计算成本。网格加密研究针对拍动翼构型的二维设置开展。研究采用§ 2.1中给出的相同控制参数，即 $Re_V = 200$ 和升沉振幅$A = 0.5c$，同时施加相同的升沉运动（见公式（2a））。由于网格加密研究并不涉及扭转弹簧刚度的优化，为简单起见，俯仰运动直接设定为

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(2\pi f t + \varphi), \tag{22}$$

俯仰振幅为 $\theta_0 = \pi/6$，且俯仰运动与升沉运动之间的相位差为 $\varphi = \pi/2$，后者按照 Moriche 等人(2017年的研究选取；该研究报告称，在此相位差下推进效率达到最大值。考虑了四个逐步加密的网格，其每个弦长包含 $c/\Delta x = 32$、64、128 和 256 个点，加密比恒为 2。时间分辨率也随网格一同加密，四个网格每个周期分别采用 $S_{pp} = 1024$、2048、4096 和 8192 个时间步，即 $\Delta t = T/S_{pp}(T = 1/f)$。这使得所有网格上的 $CFL = U_{\max}\Delta t/\Delta x \lesssim 0.3$均保持不变，其中 $U_{\max}$为计算域内的最大流速。由于拍动片是自推进的，且模拟在运动参考系中进行，因此按照 §2.2 以及 Moriche 等人(2026中所述的方法对来流速度 $U$ 进行迭代，直至其与推进速度相匹配并达到收敛，从而使拍动片在计算域中按周期平均保持静止。在稳态下，周期平均流向力因此为零；由于施加的运动关于流向轴对称，周期平均垂直力也为零，如图 12b)所示。因此，通过以下四个量评估收敛性：推力系数和升力系数的均方根、周期平均推进速度 $\langle U_p \rangle$（见方程（9））以及周期平均输入功率 $\langle P \rangle$。推力系数和升力系数定义为

$$c_t = \frac{-2F_{hx}}{\rho_f c^3 f^2}, \qquad c_l = \frac{2F_{hz}}{\rho_f c^3 f^2}, \tag{23}$$

其中 $F_{hx}$ 和 $F_{hz}$ 分别表示作用于拍动片上的流体力在流向和垂直方向的分量。由于流场完全具有周期性，图 12 还展示了最后一个扑动周期内的瞬时推力系数、升力系数和输入功率。注意，图 12c) 中的瞬时输入功率在周期的部分时段为负值，而正功率截断会将这些负值排除在周期平均值之外（见公式 (

10）。为量化收敛性，对于一般量 $\phi$，我们定义相对于最高分辨率的相对误差：

$$\epsilon_\phi(r) = \frac{|\phi_r - \phi_{256}|}{|\phi_{256}|}, \tag{24}$$

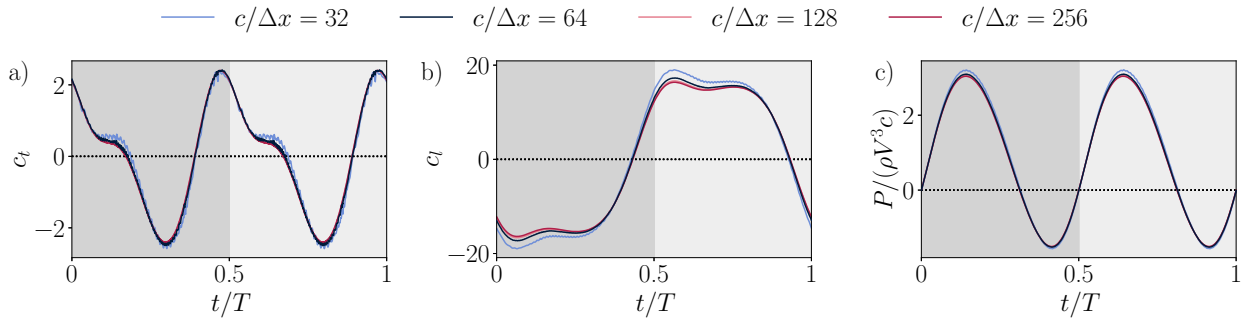



图 12：网格敏感性分析：孤立扑翼在质心按规定运动时，一个扑动周期内的 a) 推力系数 $c_t$、b) 升力系数 $c_l$ 和 c) 单位展长输入功率 $P$。深色和浅色阴影区域分别表示下行程 ($0 \le t/T \le 0.5$) 和上行程 ($0.5 \le t/T \le 1$)。

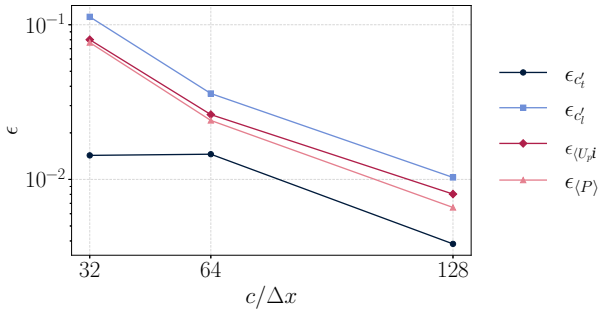



图13：用于评估收敛性的四个量相对于最高分辨率（$c/\Delta x = 256$）的相对误差——推力系数和升力系数的均方根、周期平均输入功率以及推进速度。

其中，$r$ 表示每个案例的分辨率 $c/\Delta x$，而 $\phi$依次表示 $c_t'$、$c_l'$（撇号表示均方根值）、周期平均推进速度和周期平均输入功率。尽管 $c/\Delta x = 32$存在一些偏差，但随着分辨率的提高，四个量均趋近于最高分辨率案例。如图 13所示，在 $c/\Delta x = 64$下，四个量的误差已经相当低。因此，在计算中采用该分辨率，以在计算成本和准确性之间取得折中。