arXiv:2611.30980v1 [q-fin.MF] 23 Nov 2026

美式固定执行价回望看跌期权的稳健界

YongQing Xu

Sch人工智能学院，深圳技术大学，中国深圳 518118

摘要

我们开启了鞅最优传输（MOT）约束下美式回望期权的稳健（模型无关）定价研究。给定贴现价格的有限个边缘分布，我们研究美式固定执行价回望看跌期权的最大期望贴现收益，其在 t 时的行权价值为 $(K - \min_{u\le t} e^{ru}X_u)^+$，即为未贴现价格的运行最小值$m_t$ 的函数。两个结构性事实使该工具成为非平凡的美式回望期权问题。首先，在零利率下，每个经典回望期权都退化为其欧式对应期权（贴现收益为次鞅）。其次，在 $r > 0$ 时，基于max的固定执行价回望看涨期权仍属于欧式型（运行最大值无界且在较晚时刻达到），而基于min的固定执行价回望看跌期权则是真正的美式期权（运行最小值有下界且在较早时刻达到）。我们证明了定价—对冲对偶性，将 Guo–Ob´loj 的连续时间对偶性与将对冲约化至二维状态（X_t, m_t）相结合。在两期模型中，我们建立了一个凸性引理，并将继续持有收益精确分解为锁定内在部分与最小值跌幅看跌期权之和，由此推导出行权准则和自由继续持有价值的闭式表达。随后，我们将最优继续耦合识别为单调鞅耦合——第三种极值鞅耦合，其两个影子函数均为非递减函数，不同于左帘耦合和右帘耦合——并证明且通过线性规划进行数值验证：最优行权区域为右尾 $\{x \ge x^*\}$，这与标准美式看跌期权的左尾行权区域形成鲜明对比。阈值 x^* 随参数单调变化（随波动率增加，随 r 减少，并在 $r \to 0$ 时发散且美式溢价趋于零），并且关于 K 为仿射函数，在 $K \ge s_0$ 时具有与 K 无关的影子对。该结构无条件地扩展至有限个边缘分布：在每个阶段，最优行权区域都是右尾，最优耦合则是反射的迭代 Az´ema–Yor 嵌入（即 Henry-Labord`ere–Ob´loj–Spoida–Touzi 最大值—最大值嵌入的反射），其最小化

随机序下的运行最小值。在反射的 Ob´loj–Spoida 假设 $\circledast$下，这一嵌入是两点迭代单调鞅耦合；当 $\circledast$ 不成立时，它包含 Ob´loj–Spoida 的质量扩散修正，我们通过数值计算表明，该修正具有局部 性质（在投影下保持一致），从而将 $n > 3$ 问题简化为对显式 $n = 3$ 修正的迭代。我们量化了美式期权溢价和模型风险溢价。

关键词。 模型无关金融；鞅最优传输；美式期权；回望期权；单调鞅耦合；右尾行权区域；质量扩散。

数学主题分类（2020）。主要分类 91G20；次要分类 49Q22、60G40、60G42、91G80。

1 引言

鞅最优传输（MOT）根据有限个已观测期权价格，对所有与之相一致的鞅模型类别中的衍生品进行鲁棒定价和对冲。对于欧式索赔，这一理论如今已相当成熟：其基础对偶性可追溯至 [16, 6, 9]，极端（“幕帘”和单调）耦合可追溯至 [7, 8]，回望期权和最长持续运行最大值界可追溯至 [1, 15]，而 [2, 3] 则涵盖了相关的路径依赖型稳健界。美式索赔的鲁棒定价 则更为复杂：美式价格是对模型和 停止时 [4]的上确界，而二者不可交换。Hobson–Neuberger [5] 证明了无模型上确界可由机制模型达到；Hobson–Norgilas 得到了美式看跌期权的显式两期界，其最优行权区域是一个左侧尾部——这就是熟悉的低价时提前行权现象。

本文将这两条研究脉络——美式稳健界 × 回望路径泛函——交汇起来；据我们所知，此前尚无人研究过这一问题。我们聚焦于这一类中真正具有美式特征的工具：**固定执行价回望看跌期权**。

定义 1.1（固定执行价回望看跌期权）。 对于贴现价格 X，其中 $X_0 = s_0$，且利率为 $r > 0$，固定执行价回望看跌期权 在

$$Z(t,\omega) = e^{-rt}\big(K - \underline{m}_t(\omega)\big)^+, \qquad \underline{m}_t(\omega) = \min_{0\le u\le t} e^{ru} X_u(\omega),$$

时刻 t行权时支付

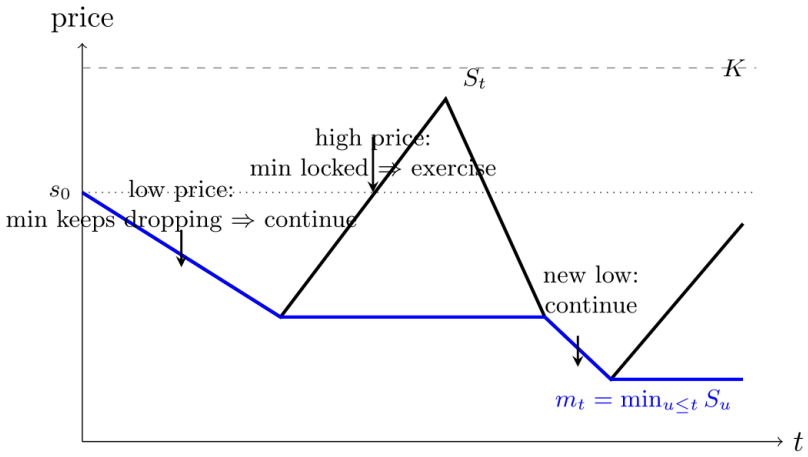


图 1：为何行权区域是一个右尾。一个示例价格路径 S_t 及其运行最小值$m_t = \min_{u\le t} S_u$。最小值只会下降：价格走低会使最小值不断下降（继续持有具有价值），而价格走高则不会改变最小值，因此等待只会损失贴现因子，立即行权则可锁定内在价值（$K - m_t$）$^+$。

我们通过结构退化将其分离出来。在 $r = 0$ 处，四种经典回望期权均退化为其欧式价值（贴现收益是次鞅，命题2.1），因此无需为美式期权定价。在 $r > 0$ 处，基于最大值的固定执行价回望看涨期权仍属于欧式类型（运行最大值无界，且在较晚时刻达到），而基于最小值的看跌期权则是

真正的美式期权（运行最小值有下界，且在较早时刻达到，命题2.2）。本文其余部分均 $r > 0$。

我们的贡献。

(1) 定价—对冲对偶性。 定理 4.1 将 [13] 的连续时间对偶应用于运行最小值收益，并将对冲简化为二维状态（X_t， m_t）（引理 4.3）。

(2)两期结构。 凸性引理（引理 5.1）以及将继续持有收益精确分解为锁定内在部分与 最小值跌幅看跌期权 （引理 5.2）得出了行权准则（命题 5.3）和闭式自由继续持有价值（命题 5.4），并将问题简化为标量鞅最优传输问题（引理5.7）。

(3) 右尾行权与第三种极值耦合。 主要结构定理（定理 5.10）证明，最优行权区域是一个右尾 $\{x \geq x^*\}$——这与标准美式看跌期权的左尾行权区域相反，因为运行最小值只会下降。最优继续持有耦合是 单调鞅耦合，由 [8] 给出（命题 5.14）；这是一种第三类极值鞅耦合，不同于左帘和右帘耦合，其两个影子均单调不减。本文通过包络定理论证而非次模性识别出这一耦合（注释 5.15）。

(4) 比较静态。 阈值 x^* 关于参数是单调的，并且关于 K 是仿射的，具有一个K-无关的影子对，适用于 $K \geq s_0$ （命题 5.13）： x^* 随波动率增加，随 r减少，并且当 $r \to 0$ 时发散，而美式溢价消失。

(5) 多边缘扩展与质量扩散。 在反射型 Ob-l´oj–Spoida 假设 7.3下，该结构可扩展至有限个边缘分布：最优耦合是反射迭代 Az´ema–Yor 嵌入，并且在每个阶段，行权区域都是右尾（定理7.7）。在没有该假设时，耦合包含第 *4* 节 [14,§的质量扩散2], 修正，我们通过数值方法在 $n = 3$ （备注 7.9）和 $n = 4$ （备注 7.12）中检测到了该修正；该修正是局部的（在投影下保持一致，见引理 7.11），因此显式的 $n > 3$ 问题可归结为迭代显式的 $n = 3$ 修正。

结构安排。第2 节阐明结构退化；第3 节建立两期进入问题；第4 节证明对偶性和马尔可夫化约；第5 节探讨两期最优结构和比较静态；第6 节包含线性规划实验；第7节将分析推广到 n 边缘分布。

1.1 符号说明

$\mu \leq_{\mathrm{cx}} \nu$ 表示凸序。 $\Pi_m(\mu,\ \nu)$ 是 μ 和 ν的鞅耦合集合。在全文中，$d_1 = e^{-rt_1}$、 $d_2 = e^{-rt_2}$ 和 $m_1(x) = \min(s_0,\ e^{rt_1}x)$。

2 设定与结构退化

令 $\Omega = C([0,T];\mathbb{R}_+)$ 为连续贴现价格路径 $X=(X_t)$ 的典范空间，其中 $X_0 = s_0$。定价测度是使 X 成为鞅的概率测度。未贴现价格为 $S_t = e^{rt}X_t$，对于 $r>0$而言，这是一个具有向上漂移的过程。

2.1 零利率

命题 2.1. 设 $r=0$。对于四种经典回望期权，

$$(M_t-K)^+, \quad M_t - X_t, \quad (K-m_t)^+, \quad X_t - m_t,$$

其中 $M_t = \text{最大值}_{u\le t} X_u$， $m_t = \text{最小值}_{u\le t} X_u$，贴现收益过程是次鞅，因此提前行权从来都不是严格最优的：鲁棒美式价格等于鲁棒欧式价格。

证明。在 $r=0$ 时， X 是鞅， M 单调不减， m 单调不增。对于 $(M_t-K)^+$:$x\mapsto(x-K)^+$ 是凸且单调不减的，因此 $(M_t-K)^+$ 是次鞅。对于 M_t-X_t： M 是次鞅， X 是鞅，因此二者之差是次鞅。对于 $(K-m_t)^+$： $x\mapsto(K-x)^+$ 是凸且单调不增的，而 m 是上鞅，因此 $(K-m_t)^+$ 是次鞅。对于 X_t-m_t： $-m$ 是次鞅，因此 $X-m$ 也是次鞅。由可选抽样可得，对每个停时 τ，均有 $Z_\tau \le \mathbb{E}[Z_T \mid \mathcal{F}_\tau]$。

□

2.2 正利率：看涨／看跌不对称性

命题 2.2。当 $r>0$ 固定执行价回望看涨期权（M_t-K）$^+$ 具有欧式型特征：对于任意 K,r，其鲁棒美式价格等于鲁棒欧式价格。相比之下，固定执行价回望看跌期权（$K-m_t$）$^+$ 则是真正的美式期权：当 $K\ge s_0$ 和$r>0$时，其美式溢价严格为正，且随 r 和 K单调递增。

其机制在于 $S_t = e^{rt}X_t$的向上漂移：运行最大值在较晚时达到（因此看涨期权会等待），而运行最小值在较早时达到（因此看跌期权可以行权，锁定较低的最小值，避免其因贴现而被侵蚀）。第 6节的线性规划实验证实了这一点：在所有测试过的（K， r）组合中，看涨期权的美式溢价始终为零，而看跌期权的溢价随 r和 K 增大（表2）。

因此，真正的差距在于美式固定执行价回望看跌期权，其状态为二维状态（X_t， m_t）；下文将从此处开始讨论这一问题。

3 两期进入问题

固定时刻 $t_1<t_2$，边缘分布 $\mu=\text{Law}(X_{t_1})$、 $\nu=\text{Law}(X_{t_2})$ 按凸序排列且共同均值为 s_0。美式回望期权看跌期权的稳健（无模型）价格为

$$P \;=\; \sup_{\pi\in\Pi_m(\mu,\nu)} \; \sup_{B\subseteq\mathbb{R}_+} \mathbb{E}_\pi\Big[\, a_1(X)\,\mathbf{1}_{X\in B} \;+\; a_2(X,Y)\,\mathbf{1}_{X\notin B}\Big], \tag{1}$$

其中

$$a_1(x) = d_1\big(K - m_1(x)\big)^+, \qquad a_2(x,y) = d_2\big(K - \min(m_1(x), e^{rt_2}y)\big)^+, \tag{2}$$

以及 $m_1(x) = \min(s_0, e^{rt_1}x)$ 是时刻 t_1的运行最小值。请注意，它与 [4, 5]中的标准美式看跌期权存在结构差异：继续持有收益 $a_2(x,y)$ 确实是双变量的（它通过运行最小值 x 依赖于 $m_1(x)$），而标准看跌期权的继续持有收益 $(K_2 - y)^+$ 仅取决于 y。这正是全部难点，也是这种新颖结构的来源。

4 对偶性与马尔可夫化约

以下是 Guo–Ob l´oj [13] 的连续时间定价-对冲对偶在运行最小值情形下的特化。

定理 4.1 (稳健定价—对冲对偶性**)。** 设 $Z(t,\omega) = e^{-rt}(K - m_t(\omega))^+$，且设 $\mathcal{Q}_E^g$ 为校准鞅测度（波动率约束 E、静态工具 g）的集合。那么

$$\sup_{P \in \mathcal{Q}_E^g,\ \tau \in \mathcal{T}^P} \mathbb{E}^P[Z_\tau] \;=\; \pi^A_{g,E}(Z),$$

其中 $\pi^A_{g,\,E}(Z)$是稳健超对冲价格

$$\inf\Big\{ x : \exists\,(q,\tilde q,h)\ \ x + \int_0^u q_s\,\mathrm{d}X_s + \int_u^1 \tilde q_u(s)\,\mathrm{d}X_s + h\cdot g \ge Z(u,\cdot)\ \ \forall u,\ \mathcal{Q}_E^g\text{-q.s.}\Big\}.$$

此外，由于 Z 仅通过(X, m)依赖于路径，因此最优对冲可以取为马尔可夫形式 $q_s = q(s, X_s, m_s)$，即二维状态(X_t, m_t)的函数。

注 4.2。 收益 $Z(t,\ \omega) = e^{-rt}(K - m_t(\omega))^+$ 恰好满足 *[13,* 定理 *5。2]*的基本假设：它有界（$0 \le Z \le K$），且 m_t 是停止路径的连续泛函 $\omega_{\cdot\wedge t}$，因此 $Z \in C_b(\Lambda)$ 以及定理 *4.1* 的无间隙对偶性可直接应用。该定理真正的新内容在于其第二句话，即对冲的马尔可夫约化；我们现在将对此作出精确定义并予以证明。

引理 4.3 (马尔可夫价值与对冲**)。** 在定理 *4.1* 的基本假设下，以下结论成立。

(i) 对每个 $P \in \mathcal{Q}_E^g$，(X_t, m_t) 都是一个（时间非齐次）马尔可夫过程，且折现价值过程

$$V_t = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t^P} \mathbb{E}^P\big[e^{-r(\tau - t)}(K - m_\tau)^+ \,\big|\, \mathcal{F}_t\big], \qquad \mathcal{T}_t^P = \{\tau \in \mathcal{T}^P : \tau \ge t\}, \tag{3}$$

其形式为 $V_t = V(t, X_t, m_t)$，其中 $V\colon [0,T]\times\mathbb{R}_+\times[0,s_0] \to \mathbb{R}_+$ 是一个确定性博雷尔函数。

(ii) 定理 *4.1* 的超对冲表示中的动态策略可以取为马尔可夫型，$q_s = q(s, X_s, m_s)$（嵌套项 $\tilde q$ 也同样如此）。在 $V \in C^{1,2}$ 所在区域，有$q(s, x, m) = \partial_x V(s, x, m)$。

证明。 (i) 设 $S_t = e^{rt}X_t$，使得 $m_t = \min_{u\le t} S_u$。在 P 下，过程 S 是一个马尔可夫过程（鞅 X 的双射），且运行最小值对 (S, m) 是标准反射对 $m_{t+s} = \min(m_t, \inf_{u\in[t,t+s]} S_u)$，因此是马尔可夫型。因此，$(X_t, m_t) = (e^{-rt}S_t, m_t)$ 是一个（时间非齐次）马尔可夫过程。收益 $Z_\tau = e^{-r\tau}(K - m_\tau)^+$ 是 (τ, X_τ, m_τ) 的函数；根据马尔可夫性质和 Snell 包络不动点 $V_t = \max\big(Z_t, \mathbb{E}^P[V_{t+} \mid \mathcal{F}_t]\big)$，价值过程仅通过 (t, X_t, m_t) 依赖于 $\mathcal{F}_t$，从而证明 (i)。

（ii）过程 V 是 Z 的斯内尔包络，是一个 P-上鞅；根据杜布-迈耶分解 $V_t = V_0 + M_t - A_t$，其中 M 是鞅，A 是可预测递增过程。定理 4.1 中的动态对冲就是鞅部分 M，根据（i），它是马尔可夫泛函 $V(t, X_t, m_t)$ 的上鞅分解；因此，$M_t = \int_0^t q_s \,\mathrm{d}X_s$ 中的被积函数 q_s 继承了马尔可夫结构，即 $q_s = q(s, X_s, m_s)$。对于这一识别：运行最小值 m 是非递增的（有限变差），且仅在对角线 $\{S_s = m_s\}$ 上有 $\mathrm{d}m_s \neq 0$；在 $V \in C^{1,\,2}$ 所在区域，伊藤公式给出

$$\mathrm{d}V(t, X_t, m_t) = \partial_t V \,\mathrm{d}t + \partial_x V \,\mathrm{d}X_t + \partial_m V \,\mathrm{d}m_t + \tfrac{1}{2}\,\partial_{xx} V \,\mathrm{d}\langle X\rangle_t.$$

由于 X 是一个 P-鞅，右侧唯一的鞅项是 $\partial_x V \,\mathrm{d}X_t$；其余项均为有限变差项，并入补偿子 A。因此，在光滑区域上，$q(s, x, m) = \partial_x V(s, x, m)$；一般情况下，$q$ 是 V 的上鞅分解中的 x 分量，其特征由斯内尔包络的标准粘性（变分不等式）表述给出。由此证明（ii）。

□

5 两期最优结构

本节始终假设处于非退化情形（见下文注释 5.17），此时最优行权决策是严格的。

5.1 凸性与清晰的分解

引理 5.1。对于 固定的 x，继续持有收益 $y \mapsto a_2(x, y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上递减且为凸函数 $_+$.

证明。 $y \mapsto \min(m_1(x)\ e^{rt_2}y)$ 是凹且递增的（仿射函数与常数的最小值），因此 $y \mapsto K - \min(m_1(x)\ e^{rt_2}y)$ 是凸且递减的，而凸递减函数的正部仍是凸且递减的。

□

引理 5.2（分解）。对于 $m_1(x) < K$，

$$a_2(x, y) \;=\; d_2\big(K - m_1(x)\big) \;+\; d_2\big(m_1(x) - e^{rt_2}y\big)^+. \tag{4}$$

证明。对于 $m_1(x) < K$，

$$\big(K - \min(m_1, e^{rt_2}y)\big)^+ = (K - m_1) + (m_1 - e^{rt_2}y)^+,$$

这可以通过对 $e^{rt_2}y \gtrless m_1$ 进行分类直接验证。 □

分解（4）是该问题的结构核心：继续持有收益分解为一部分锁定内在价值 $d_2(K - m_1(x))$（给定 x 时为确定值），以及一个行权价为 的最小值跌幅看跌期权 $m_1(x)e^{-rt_2}$。两部分都只通过运行最小值 x 依赖于 $m_1(x)$：收益结构归结为单一变量 m_1，而 x 仅通过鞅约束进入耦合 $\mathbb{E}[Y \mid x] = x$。

命题 5.3（行权准则）。设 $\Delta = t_2 - t_1$。在任意继续持有耦合下 ，

继续 $\textit{is (weakly) optimal at } x \iff \mathbb{E}\big[(m_1(x) - e^{rt_2}Y)^+\big] \geq (e^{r\Delta} - 1)\big(K - m_1(x)\big).$

证明。当且仅当 $d_2(K - m_1) + d_2\,\mathbb{E}[(m_1 - e^{rt_2}Y)^+] \geq d_1(K - m_1)$ 时继续持有；两边除以 d_2，并使用 $d_1/d_2 = e^{r\Delta}$。 □

5.2 自由延续价值

在施加全局约束之前，我们先计算单个节点 x 在不与其他节点竞争、可以使用 ν 的左尾时能够达到的继续持有价值。这揭示了为何行权是全局 稀缺效应，而非局部权衡。

命题 5.4 (自由延续价值**)**。对于延续分布支撑在 $[a, b]$ 上的单个节点 x，在满足 $\mathbb{E}_q[Y] = x$ 的条件下，对所有鞅核 q 取上确界，得

$$c_{\text{free}}(x) = \alpha\, a_2(x, a) + (1 - \alpha)\, a_2(x, b), \qquad \alpha = \frac{b - x}{b - a}. \tag{5}$$

证明。由于 $y \mapsto a_2(x, y)$ 是凸的（引理 5.1），对均值为 x 的 q 取上确界，可在这类核集合的一个极点处取得，即两点鞅耦合 $q = \alpha\delta_a + (1-\alpha)\delta_b$，其中 α 由 $\alpha a + (1 - \alpha)b = x$唯一确定。

□

推论 5.5 (不存在局部行权动机**)**。对于每个满足 $m_1(x) < K$ 且 ν 的左尾足够丰富的 x， $c_{\text{free}}(x) > a_1(x)$；因此，行权在局部上永远 无利可图。行权纯粹是因为 ν 的左尾稀缺，并通过全局耦合分配给深度实值的低-x 节点，从而挤出高-x 节点。

备注 *5.6*（数值验证）。对于第 *6* 节的 *CRR*边缘分布（$s_0 = 100$, $r = 0.05$,$t_1 = 0.5$, $t_2 = 1$, $K = 120$），在 $x = 61$ 处，我们有 $m_1(x) = 62.69$, $a \approx 30$, $b \approx 354$，因此 $a_2(x, a) = 84.1$,$a_2(x, b) = 54.4$, $\alpha \approx 0.904$，得到 $c_{\text{free}} \approx 81.2$，而 $a_1(x) = 55.9$。自由延续价值是行权价值的 *1.45* 倍。

5.3 化简为标量鞅最优传输问题

利用分解（4），两期问题得以简化：整个行权区域的延续价值等于一个固定项加上一个单一的标量MOT 问题。这个化简后的问题正是

命题5.14中的单调鞅耦合必须优化的对象。

引理 5.7 （化简）。 设 $K \geq s_0$ ，并固定一个行权阈值 x^*。则

$$P(x^*) := \sup_{\pi \in \Pi_m(\mu,\nu)} \mathbb{E}_\pi \Big[a_1(X)\mathbf{1}_{X \geq x^*} + a_2(X,Y)\mathbf{1}_{X<x^*} \Big]$$

满足

$$P(x^*) \;=\; \mathbb{E}_\mu\big[a_1(X)\mathbf{1}_{X\geq x^*}\big] \;+\; d_2 \int_{(-\infty,x^*)} \big(K - m_1(x)\big)\,\mu(\mathrm{d}x) \;+\; d_2\,V(x^*),$$

其中

$$V(x^*) \;=\; \sup_{\pi \in \Pi_m(\mu,\nu)} \mathbb{E}_\pi \Big[\big(m_1(X) - e^{rt_2}Y\big)^+ \mathbf{1}_{X<x^*} \Big]. \tag{6}$$

在继续区域内，运行最小值是 X 的非递减函数，因此 （6）是一个标量鞅最优传输问题：写作

$$\alpha(x) = e^{-r\Delta}x\,\mathbf{1}_{x<s_0e^{-rt_1}} + s_0e^{-rt_2}\,\mathbf{1}_{s_0e^{-rt_1}\leq x<x^*},$$

它是连续、非递减的，并且在 $[0,x^*)$ 上满足 α（x） $\leq x$ ，于是

$$V(x^*) = e^{rt_2} \sup_{\pi \in \Pi_m(\mu,\nu)} \mathbb{E}_\pi\big[(\alpha(X) - Y)^+\big].$$

证明。由引理 5.2（对所有 x 均成立，因为 $m_1(x) \leq s_0 \leq K$） ， $d_2^{-1}a_2(x,y)$ $=(K - m_1(x))$ $+(m_1$ (x) $-e^{rt_2}y)^+$。对 $\mathbf{1}_{X<x^*}$ 积分后， $\mathbb{E}_\mu[a_1\mathbf{1}_{X\geq x^*}]$ 和 $d_2\int_{(-\infty,x^*)}(K - m_1)\mu$ 这两项仅取决于 X 边缘分布 μ，因此在 π 上固定；剩余项即为 (6)。在 $x < s_0e^{-rt_1}$ 上， $m_1(x) = e^{rt_1}x = e^{rt_2}e^{-r\Delta}x$；在 $s_0e^{-rt_1} \leq x < x^*$ 上， $m_1(x) = s_0 = e^{rt_2} \cdot s_0e^{-rt_2}$；因此在 $[0,x^*)$ 上有 $m_1(x) = e^{rt_2}\alpha(x)$，从而得到 α-形式。 □

5.4 Th最优继续耦合与右尾行权区域

Beiglb¨ock–Juillet 的左帘鞅耦合 [6] 是单调耦合（低 x 与低 y匹配），它通过“尽可能少地”移动质量得到。在 [5] 两期美式看跌期权中，最优继续耦合恰好是左帘耦合，由两个函数参数化：对于高于弥散点 x e_-，位于 x 的质量分配到 $f(x)$ $< x$ 和 $g(x)$ $> x$，其中下影 f 非递增，上影 g 非递减，并由质量与均值保持条件（16）确定，而行权边界 x^* 是以下方程的唯一根：

$$\Lambda(x) \;=\; \frac{K_2 - f(x)}{x - f(x)} - \frac{K_1 - x}{g(x) - x} \;=\; 0. \tag{7}$$

在我们的问题中，继续持有收益（4）除加法常数 $d_2(K - m_1(x))$ 外，是以 $e^{rt_2}Y$ 为标的、行权价为 状态依赖执行价 $m_1(x$的看跌期权。由于该行权价关于 x单调，单调

命题 5.14 的鞅耦合 π_{MM} 将 ν 的左尾分配给较低的 x（此时 $m_1(x)$ 较低，因此最小值跌幅看跌期权深度实值，运行最小值持续下降），将 ν 的右尾分配给较高的 x（此时 $m_1(x) = s_0$，最小值跌幅看跌期权虚值，因此运行最小值停留在 s_0）。因此，对于较低的 x， $\mathbb{E}[(m_1(x) - e^{rt_2}Y)^+]$ 较大；对于较高的 x，该值则为零。根据命题 5.3，继续区域是左尾，行权区域是右尾——方向与 [5] 相反。

命题 *5.8*（广义根条件）。假设最优继续耦合是命题 *5.14* 中的单调鞅耦合 π_{MM}，由 (f, g) 参数化，其中 f 和 g 非递减，$f(x) < \alpha(x) \le x < g(x)$，且条件分布 $q(x)\delta_{f(x)} + (1 - q(x))\delta_{g(x)}$，其中 $q(x) = \frac{g(x) - x}{g(x) - f(x)}$ 由鞅约束确定。则行权阈值 x^* 位于平台区 $m_1(x^*) = s_0$，且是下式的唯一解——

$$\frac{g(x^*) - x^*}{g(x^*) - f(x^*)} \big(s_0 - e^{rt_2} f(x^*)\big)^+ \;=\; (e^{r\Delta} - 1)(K - s_0). \tag{8}$$

证明。在 x^* 处，$m_1(x^*) = s_0$，因此行权所得为 $a_1(x^*) = d_1(K - s_0)$。在单调鞅耦合下，继续价值为 $c_{\mathrm{MM}}(x^*) = d_2(K - s_0) + d_2\, q(x^*)(s_0 - e^{rt_2} f(x^*))^+$；由于 $g(x^*) > x^* \ge s_0 e^{-rt_1} > s_0 e^{-rt_2}$，$g$ 原子项的贡献为零。将无差异条件 $a_1(x^*) = c_{\mathrm{MM}}(x^*)$ 除以 d_2，得到 $e^{r\Delta}(K - s_0) = (K - s_0) + q(x^*)(s_0 - e^{rt_2} f(x^*))^+$，即式（8）。 □

推论 5.9 (继续持有影子的逐点结构)。 单调鞅耦合的下影和上影$(f,\ g)$ π_{MM} 命题 *5.14* 中的二者均为非递减函数，并且满足$f(x) < \alpha(x) \le g(x)$，并由凸对偶势函数 ψ 和鞅乘子ξ 通过 (14)的接触条件确定：

$$\psi'(f(x)) = -\big(1 + \xi(x)\big), \qquad \psi'(g(x)) = -\xi(x),$$

在远期重标度变量 $y \mapsto e^{rt_2}y$中。这是与 *[6]*, 的左帘相反的极值耦合；其影子由质量与均值保持条件 *(16)* 决定，与行权价无关，且具有 f 非递增性；而此处影子取决于行权价 α，通过 ξ体现，且下影 f 被驱动至低于 $\alpha(x)$。两条分支在水平 $x = s_0 e^{-rt_1}$处分开，此处 $\alpha(x)$从上升分支 $\alpha(x) = e^{-r\Delta}x$ 转入平台区 $\alpha(x) = s_0 e^{-rt_2}$。平台区上的行权价为常数，因此最小值下降成本与 x 无关，乘子也为常数，$\xi(x) \equiv \xi_p$。此时，实值接触条件是一个固定点 $f(x) \equiv f_p$，即 $\psi'(f_p) = -(1 + \xi_p)$ 的唯一解；而价外分支是退化的（凸势函数 ψ 在右半直线上为线性函数）。因此，上影 $g(x) \equiv g_p$ 并非由接触条件决定，而是由根条件 *(8)* 决定；权重 $q(x) = \frac{g_p - x}{g_p - f_p}$ 在平台区上呈线性递减。因此，阈值处的边界对为常数值 $(f(x^*)\ g(x^*)) = (f_p, g_p)$；在第 *6* 节的参考情形中，这表示为 $f(x^*) \approx 83.6$ 和 $g(x^*) \approx 110.5$。

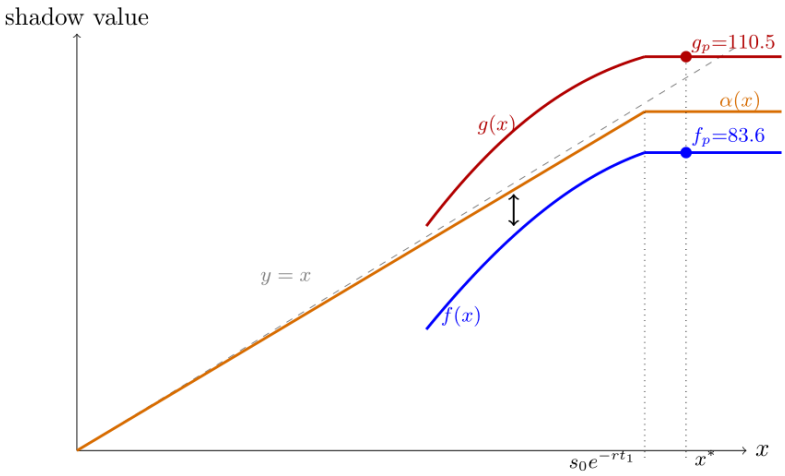


图 2：命题 5.14 的单调鞅耦合（示意图）。两个影子均为非递减；下影 f 被推至行权价 $\alpha(x)$ 以下（深度价差），而上影 g 位于对角线上方（均值保持 $f \le x \le g$）。两个分支在$x = s_0e^{-rt_1}$处分开；在平台区，这一对扁平化为推论 f_p, g_p的边界值 5.9，其中 g_p由根条件而非退化接触条件确定。

定理 5.10 (主要结构)。 令 $\mu \le_{\mathrm{cx}} \nu$， $r > 0$， $K \ge s_0$，并假设满足备注 *5.17* 中的非退化情形（虚值情形 $K < s_0$ 推迟至备注 *5.11*讨论）。那么，**(1)** 中的最优行权区域是右尾 $B = \{x \ge x^*\}$，其中 x^* 是以下方程的唯一根

$$d_1\big(K - m_1(x^*)\big)^+ \;=\; c_{\mathrm{MM}}(x^*), \qquad c_{\mathrm{MM}}(x) = \mathbb{E}_{\mathrm{MM}}\big[a_2(x, Y)\big], \tag{9}$$

$\mathbb{E}_{\mathrm{MM}}$ 表示在命题*5.14*的单调鞅耦合下的期望。鲁棒价格为

$$P^N \;=\; \int_{(-\infty, x^*)} c_{\mathrm{MM}}(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \;+\; \int_{[x^*, \infty)} d_1\big(K - m_1(x)\big)^+ \mu(\mathrm{d}x). \tag{10}$$

此外， x^* 随 ν的波动率（尾部厚度）增加而增加，随 r 增加而减小，且当$\lim_{r\to 0} x^* = \infty$时，趋于；它是关于 K 的仿射函数，且具有一个与 K无关的影子对；具体陈述与证明汇总于命题*5.13*。

注记 5.11 (虚值行权价)。 定理 *5.10* 针对 $K \ge s_0$，即存在锁定内在价值 $K - s_0$ 的实值情形。对于 $K < s_0$，看跌期权最初为虚值（$(K - s_0)^+ = 0$），只有当运行最小值跌破 K后才产生价值；此时不存在锁定内在部分，且引理 *5.2* 的双分支分解无法以相同形式沿用。我们将这一情形留待未来工作。

引理 5.12 （凸序下的影子扩散）。 设 $\nu \preceq_{\mathrm{cx}} \tilde{\nu}$并设 $(f,\ g)$，$(f,\ \tilde{g})$分别是命题 *5.14* 中 ν 和 $\tilde{\nu}$所对应的单调鞅耦合的影子对。则随着扩散，下影逐点非增，$f \le f$而上影逐点非减，$\tilde{g} \ge g$。特别地，在平台区，固定的实值和虚值

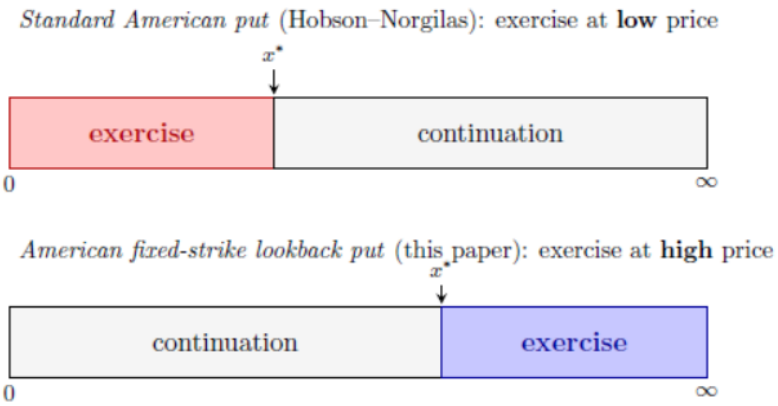


图3：最优行权区域（示意图）。上图：标准美式看跌期权在左侧尾部 $\{x \le x^*\}$ 行权（Hobson–Norgilas）。下图：美式固定执行价回望看跌期权在右侧尾部 $\{x \ge x^*\}$ 行权（定理 5.10）——运行最小值只会逐步下降，因此高价会锁定内在价值，而低价会使最小值继续下降。

影子满足 $\tilde{f}_p \le f_p$ 和 $\tilde{g}_p \ge g_p$，因此最小值下降价值 $\left(s_0 - e^{rt_2} f_p\right)^+$ 会随 ν的尾部厚度增加而非递减。

证明。下影是对偶势函数导数的左逆，$f(x) = \inf\{y : \psi'(y) \ge -(1+\xi(x))\}$；见式（14）。随着 ν 在凸序下扩散，对偶势函数 ψ 是运行最小值势函数的凸下包络，而后者在目标边缘分布的凸序下具有单调性（将 [7] 的影子单调性专门应用于最小值下降成本 $(\alpha(\cdot) - Y)^+$）；因此 ψ' 逐点上升，其左逆则下降，$f \le f$。随后，鞅约束 $\mathbb{E}[Y \mid X = x] = x$将互补原子向上推动，$\tilde{g} \ge g$。将结论限制于$\{\alpha' = 0\}$即可得到平台结论。

□

命题 5.13（阈值的比较静态）。 在注记 *5.17*的非退化情形下，定理 x^* *5.10* 的阈值满足以下性质。

（*i*）（显式 K 依赖性。）影子对 $(f_p,\ g_p)$ 仅由最小值下降问题 $(\alpha(x) - y)^+$ 确定，并且独立于 K；对（8）求逆可得

$$x^* \;=\; g_p - \left(g_p - f_p\right) \frac{(e^{r\Delta} - 1)(K - s_0)}{\left(s_0 - e^{rt_2} f_p\right)^+} \;\ge\; s_0 e^{-rt_1}, \tag{11}$$

因此 x^* 是 K 的仿射、非递增函数，且斜率与 K无关。在第 *6* 节的参考情形中，斜率为 ≈ -0.056，因此 x^* 在 K 的平台区间内基本保持平坦。

（*ii*）（波动率。）x^* 关于 ν 的尾部厚度是非递增的（等价地，在 *CRR/Black–Scholes* 族中关于 σ 是非递增的）。

(iii)（利率。）x^* 关于 r 非递增，且 $\lim_{r \to 0} x^* = \infty$。

证明。（i）反演（8）（因 x^* 位于平台区，且 $f \equiv f_p$， $g \equiv g_p$， q（x） $= \frac{g_p - x}{g_p - f_p}$）得到（11）；$K$ 不出现在（14）–（13）中。

(ii) 式（8）的右端与 σ 无关。根据引理 5.12，分散 ν 会降低 f_p 并提高 g_p，因此 $\left(s_0 - e^{rt_2} f_p\right)^+$ 会增加，而权重 $q(x^*) = \frac{g_p - x^*}{g_p - f_p}$ 必须降低；由于在平台区上， q 关于 x 严格递减， x^* 会增加。

(iii) 在式（11）中，溢价因子（$e^{r\Delta} - 1$）（$K - s_0$）随 r 增加，而最小跌幅值$\left(s_0 - e^{rt_2} f_p\right)^+$ 随 r 减小（行权价 $s_0 e^{-rt_2}$ 随 r 降低）；两者都会使 x^* 降低。当 $r \to 0$ 趋于零时，注 释 5.17 中的非退化情形退化为命题 2.1 中的退化情形，在该情形下，继续持有严格优于行权；因此 $x^* \to \infty$。 □

存在性/唯一性的证明 x^* 遵循 [5, 引理 3.5、定理 3.6], 中的斜率匹配论证，其中将根条件（7）替换为广义根条件（8），在该条件中，锁定内在价值 $K - s_0$ 和最小跌幅 $s_0 - e^{rt_2} f(x^*)$ 扮演了 [5] 中两个行权价的角色； x^* 的比较静态汇总于命题 5.13。根据引理 5.7 ，剩下的一步就是证明以下最优性陈述

$$\sup_{\pi \in \Pi_m(\mu,\nu)} \mathbb{E}_\pi\left[(\alpha(X) - Y)^+\right] \;=\; \mathbb{E}_{\mathrm{MM}}\left[(\alpha(X) - Y)^+\right], \tag{12}$$

其中 α 非递减，且 $\alpha \le x$ 如引理 5.7所述。下一个结果完成了这一步，也是本文主要的分析贡献。

命题 5.14 (单调鞅耦合：单调行权价下的最优性)。 设 $\mu \le_{\mathrm{cx}} \nu$定义在 $\mathbb{R}_+$ 上，并设 $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 为非递减函数，且 $\alpha(x) \le x$。则（(12) 中的上确界由单调鞅耦合 π_{MM}取得；该鞅耦合的条件分布为两点分布

$$q(x)\,\delta_{f(x)} + (1 - q(x))\,\delta_{g(x)}, \qquad q(x) = \frac{g(x) - x}{g(x) - f(x)}, \tag{13}$$

其中两个影子映射均为非递减，满足 $f(x) < \alpha(x) \le g(x)$，且下影 f 被严格推至行权价 $\alpha(x)$ 之下方（即“深价差”方向）。它不是 *[6],* 的左帘耦合（其下影是非递增的），也不是它的反射，即右帘耦合。

证明。我们从对偶问题推导出双分支结构和接触条件，再通过对偶比较静态论证得出两个分支的单调性；这使陈述中的结构得以精确确定。

(i) 对偶性与两个分支。根据直线上的鞅最优传输完全对偶性 [9], ，(12)的值等于对偶

$$\inf_{\varphi,\psi,\xi} \Big[\int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\nu\Big], \qquad \varphi(x) + \psi(y) + \xi(x)(y - x) \;\ge\; (\alpha(x) - y)^+, \tag{14}$$

其中 ψ 在 y 中为凸函数， ξ 为鞅乘子，且上确界由某个$\pi \in \Pi_m(\mu,\ \nu)$取得，该$\pi \in \Pi_m$由一个最优三元组$(\varphi,\ \psi,\ \xi)$的接触集承载。成本关于 y是凸的，因为它是关于 y的一个仿射函数的正部；此外

$$(\alpha(x)-y)^+ \;=\; (y-\alpha(x))^+ \;+\; \alpha(x)-y, \tag{15}$$

且 $\mathbb{E}_\pi[\alpha(X)\ -Y]=\mathbb{E}_\mu[\alpha]-\mathbb{E}_\nu[Y]$ 在 $\Pi_m(\mu,\nu)$上为常数，因此（12）的优化器与看涨型成本（$y-\alpha(x)$的优化器相同+；下文仍采用看跌形式。固定 x ，将对偶间隙写成 y的函数，

$$G_x(y)\ :=\ \varphi(x)+\psi(y)+\xi(x)(y-x)-(\alpha(x)-y)^+\ \geq\ 0.$$

在 $\{y<\alpha(x)\}$ 上，它是 $\psi(y)\ +(1+\xi(x))y+$ 常数；在 $\{y>\alpha(x)\}$ 上，它是 $\psi(y)\ +\xi(x)y+$ 常数；由于 ψ 是凸函数，两者关于 y 均为凸函数，而非负凸函数的零点集只能是单点（但在注5.17的退化情形下可以是一个区间）。因此，接触集$\{y:\ G_x(y)\ =0\}$ 至多包含一个低于 $\alpha(x)$的点 $f(x)$，以及一个高于它的点 $g(x)$；鞅约束 $\mathbb{E}[Y\,|\,X=x]=x$，再加上 x 严格位于两条分支之间，迫使这两个点都必须存在：条件分布为式（13）中的两点分布，其中 $f(x)\ <\alpha(x)\ <g(x)$且 $q(x)\ =\ \frac{g(x)-x}{g(x)-f(x)}$。

(ii) 接触条件。 在内部接触点处， G_x 的梯度为零。在价内分支 $y=f(x)\ <\alpha(x)$ 上，这意味着 $\psi'(f(x))\ +1+\xi(x)\ =0$；在价外分支 $y=g(x)\ >\alpha(x)$ 上，则意味着 $\psi'(g(x))+\xi(x)\ =0$。因此

$$\psi'(f(x))=-\big(1+\xi(x)\big),\qquad \psi'(g(x))=-\xi(x),$$

推论 5.9 的接触条件。

(iii) 两个分支的单调性。最优对偶函数 φ 是 y-包络 $\varphi(x)=\max_y\big[(\alpha(x)\ -y)^+-\psi(y)\ -\xi(x)(y-x)\big]$，且最大值在 $y\ =\ f(x)$ 和$y\ =\ g(x)$ 处均取得。对两个恒等式 $\varphi(x)\ =\ H(x,f(x))$ 和 $\varphi(x)\ =\ H(x,g(x))$ 求导，其中 $H(x,y)\ =(\alpha(x)\ -y)^+-\psi(y)\ -\xi(x)(y-x)$，并应用包络定理（在内部极大点处为 $\partial_y H=0$），得到

$$\alpha'(x)-\xi'(x)\big(f(x)-x\big)+\xi(x)\ =\ -\xi'(x)\big(g(x)-x\big)+\xi(x),$$

因为在价内分支上为 $\partial_x(\alpha(x)-y)^+=\alpha'(x)$，在价外分支上为 0。约去 $\xi(x)$并合并各项可得

$$\xi'(x)\ =\ -\frac{\alpha'(x)}{g(x)-f(x)}\ \leq\ 0,$$

由于 α是非递增的，且 $g-f>0$。因此 ξ是非递增的，所以 $\psi'(f(x))\ =-(1+\xi(x))$ 和$\psi'(g(x))\ =-\xi(x)$ 关于 x均为非递减。由于 ψ' 是非递减的（在非退化

情形下严格递增），f 和 g 本身均为非递减，正如所述。在平台区 $\{\alpha' = 0\}$ 这给出$\xi' \equiv 0$——一个常数乘子，它将 f固定在常数水平 $\psi'(f_p) = -(1+\xi_p)$，即推论 5.9中的结果。

(iv) 扩散方向。由于 $\alpha(x) \le x = \mathbb{E}[Y \mid X = x]$ 且在看跌期权可行权的所有位置都严格不等式成立，实值接触条件 $f(x$严格低于 $\alpha(x)$：下分支向下移动，这与左帘耦合恰好相反；左帘耦合使 $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$ 最小化，并使其下影保持非递增且接近 x。关于式（14）中的对偶目标与线性规划最优值相一致的数值验证见第 6节。

□

注 5.15（术语：单调耦合与帘式耦合）。这里涉及直线上的三种极值鞅耦合。左帘（又称 左单调，在 *[6]*中简称“单调”）的下影非递增、上影非递减，并且对满足 $c_{xyy} > 0$ *[6, 10, 8]*的成本函数而言是最优的；其反射为右帘（$c_{xyy} < 0$）。命题 π_{MM}*5.14*中的耦合是第三种极值对象：两个影子均为非递减，是 ***Hoeffding–Fr´echet*** 同序重排在鞅情形下的对应物。对于当前成本函数，交叉偏导数是子模的边界测度 $c_{xy} = -\alpha'(x)\,\delta_{\alpha(x)}(y) \le 0$，因此 c_{xyy} 是一个偶极子——两个帘式区间之间的退化边界情形；相应地，优化器是单调（两个影子均非递减）耦合，而非帘式耦合。请注意术语上的冲突： *[8]* 使用“单调鞅输运计划”指左单调计划；本文所说的“单调”则指两个影子均非递增。

值得指出它与经典看跌期权的对比：对于标准美式看跌期权，继续持有收益为 $(K-y)^+$，与状态 x 无关（因此 $c_{xy} = 0$，这是次模性的边界情形）；而在这里，状态依赖执行价 $\alpha(x)$ 通过运行最小值使 c 严格具有次模性——这正是回望期权的右尾行权区域有别于看跌期权左尾区域的机制。

命题 *5.16*（左帘耦合的逐点构造）。设 $\mu \le_{\mathrm{cx}} \nu$，其中 μ 连续，并设 $(f, g) = (T_d, T_u)$ 为左帘耦合 π_{LC}的下影/上影，因此在给定 $X = x$ 的条件下，Y的分布为 $q(x)\delta_{f(x)} + (1-q(x))\delta_{g(x)}$，其中 $q(x) = \frac{g(x)-x}{g(x)-f(x)}$，且 $f(x) \le x \le g(x)$。那么f 非递增，g 非递减，并且对于每个 x，该数对都是质量—均值守恒方程组的解

$$\int_{f(x)}^{x} \mu(\mathrm{d}z) = \int_{f(x)}^{g(x)} \nu(\mathrm{d}z), \qquad \int_{f(x)}^{x} z\,\mu(\mathrm{d}z) = \int_{f(x)}^{g(x)} z\,\nu(\mathrm{d}z). \tag{16}$$

等价地，记 $P_\eta(k) = \int (k-z)^+ \eta(\mathrm{d}z)$ 为测度 η 的修正（看跌期权）势函数，并记 $\cdot^c$ 为下凸包（最大凸下界），则限制测度 $\mu|_{(-\infty,x]}$ 在 ν 中的影子 $S = S(\mu|_{(-\infty,x]})$ 具有修正势函数

$$P_S(k) = P_\nu(k) - \big(P_\nu - P_{\mu|_{(-\infty,x]}}\big)^c(k), \tag{17}$$

且 $g(x)$ 是 $P_\nu - P_{\mu|_{(-\infty,x]}}$ 的凸包的上接触点。在离散情形下

（密度 ψ 和 μ 的密度 φ 与 ν 只有一次交叉）影子满足 *Henry-Labord`ere–Touzi* 系统

$$f'(x) = \frac{g(x) - f(x)}{g(x) - x} \frac{(\varphi - \psi)(f(x))}{\psi(x)}, \qquad g'(x) = \frac{g(x) - f(x)}{x - f(x)} \frac{\varphi(g(x))}{\psi(x)}, \tag{18}$$

在左侧离散点 e_- 处满足 $f(e_-) = e_- = g(e_-)$。由于 *(16)–(17)* 仅涉及 (μ, ν)，影子 (f, g) 与行权价 α 无关。此构造是 *[6]*，的左帘耦合，它使 $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ 最小。对于单调行权价，它并非 *(12)* 的优化器：优化器是命题 *5.14* 中的单调鞅耦合，其下影会被推至行权价以下，而非保持非递增。

证明。 **(16)** 及 (f, g) 的单调性见 [6, 引理 3.5]；**(17)** 是影子势公式[11]（另见 [12] 的完整构造）；**(18)** 见 [10, 方程 (3.9)–(3.10)]。左单调性迫使 f 非递增且 g 非递减，而二点形式 $q(x)\delta_{f(x)} + (1 - q(x))\delta_{g(x)}$及其权重由鞅约束 $qf + (1 - q)g = x$ 确定。

□

注5.17 (退化情形)。 若 $d_2(K - m_2)^+ \le d_1(K - m_1)^+$ 对每一种可行延续都成立（ r 较大或 ν尾部较薄），则 $B = \mathbb{R}_+$ （处处行权），且最优拆分并不唯一；$P^N = \mathbb{E}_\mu[d_1(K - m_1)^+]$。在此情形下，线性规划解 $\rho(x)$ 取决于求解器，只有非退化的右尾结构才是真正的定理。

6 数值证据

我们通过考克斯–罗斯–鲁宾斯坦可重组二叉树对边缘分布进行离散化（因此 $\mu \le_{\mathrm{cx}} \nu$以及共同均值 s_0 均为精确值，避免了对数正态离散化产生的均值不匹配伪影），并求解 Hobson–Neuberger 的两期机制线性规划 [4]，其二元收益为（2）。该实现再现了 $P^N = 5/16$ Hobson–Norgilas看跌期权示例的基准值，从而验证了该实现。

K	BS-欧式	BS-Amer	稳健欧式	稳健美式 (P^N)	美式溢价	模型溢价
80	0.760	0.760	0.808	0.809	0.000	0.048
90	2.780	2.780	3.013	3.013	0.000	0.232
100	7.064	7.064	7.711	7.711	0.000	0.647
110	16.576	16.586	17.223	17.304	0.081	0.647
120	26.089	26.124	26.736	26.897	0.162	0.647

表 1：回望看跌期权价格（s_0=100, r=0.05, σ=0.2, t_1=0.5, t_2=1）。美式溢价 = 稳健美式− 稳健欧式；模型风险溢价 = 稳健欧式 − 布莱克-舒尔斯欧式期权。价外或平价时，美式溢价为 0；价内时则为正。对于 $K \ge s_0$， K 中的模型风险溢价是平坦的。

有两点值得特别指出。首先，对于 $K \ge s_0$，模型风险溢价（稳健欧式期权减去布莱克-舒尔斯欧式期权）在 K 中保持平坦：因为 $m_2 \le s_0$, $\mathbb{E}[(K - m_2)^+] = \int_0^K \mathbb{P}(m_2 < t)\, \mathrm{d}t$，且在每一种耦合下，$\mathbb{P}(m_2 < t) = 1$ 对于 $t \ge s_0$，所以两者之差为 $\int_0^{s_0} (\mathbb{P}^{\mathrm{rob}}(m_2 < t) - \mathbb{P}^{\mathrm{BS}}(m_2 < t))\, \mathrm{d}t$，与 K 无关。这是最坏情况耦合对.....影响的闭式特征

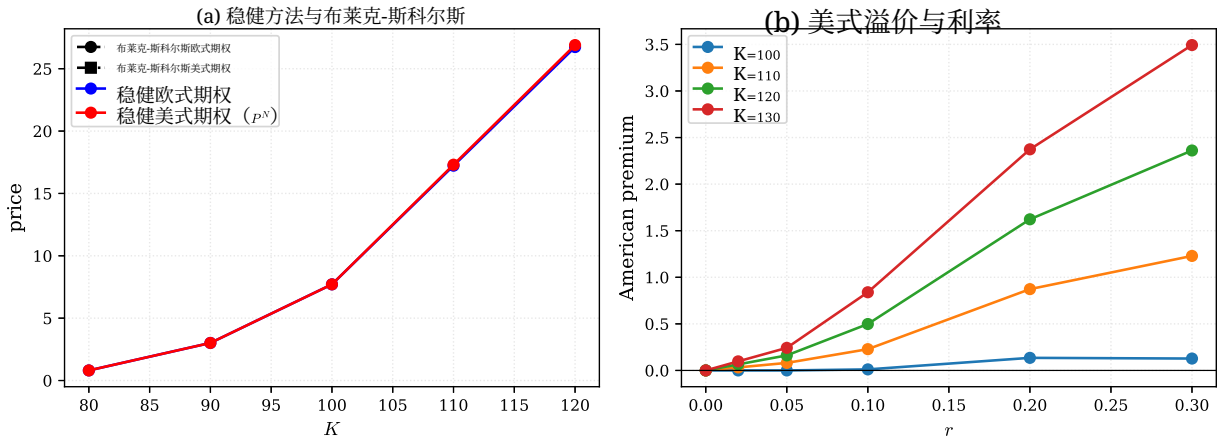


图 4：(a) 鲁棒（无模型）价格与布莱克–斯科尔斯价格随行权价 K 变化的关系：对于 $K \geq s_0$，模型风险溢价（蓝色带）在 K 中保持平坦，而美式溢价（红色带）因模型不确定性而放大。(b) 美式溢价随利率 r 变化的关系，并在 $r = 0$ 处消失。

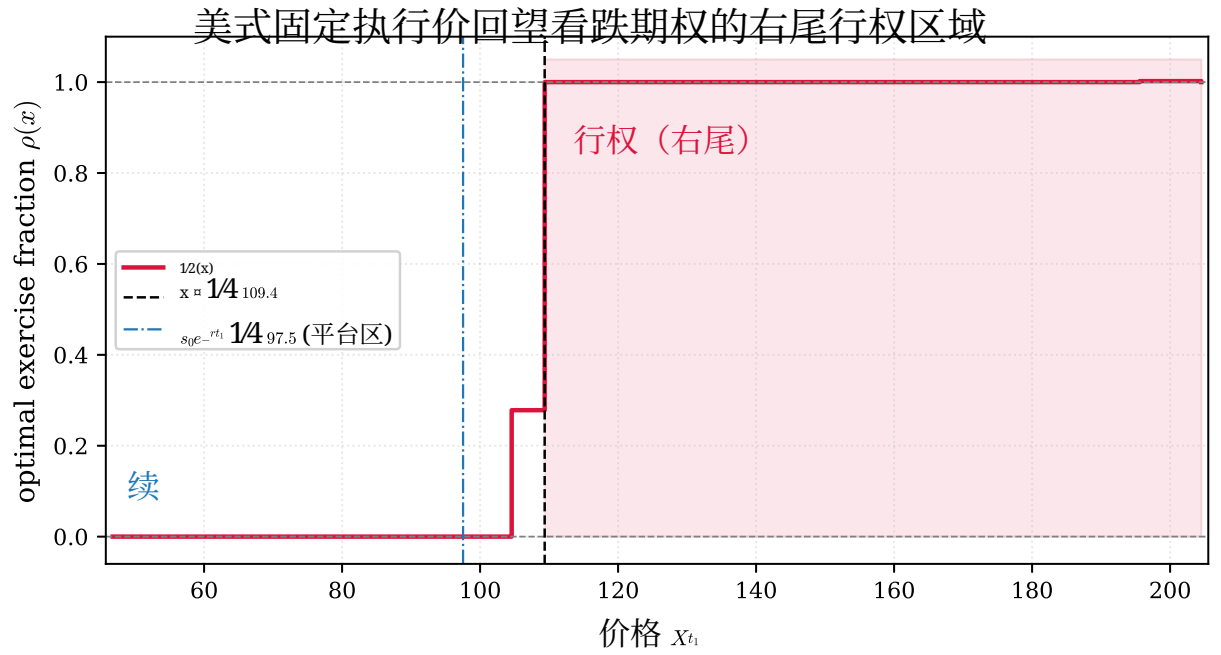


图 5：参考点（s_0=100, r=0.05,σ=0.2, K=120）处机制线性规划中的最优行权比例 $\rho(x)$。行权区域为右尾 $\{x \geq x^*\}$，其中 $x^* \approx 109.4$；点划线标示平台边界 $s_0 e^{-rt_1} \approx 97.5$，超过该边界后运行最小值锁定为 s_0。与标准美式看跌期权的左尾行权区域形成对比。

r	K=100	K=110	K=120	K=130
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000
0.02	0.000	0.032	0.065	0.097
0.05	0.000	0.081	0.162	0.242
0.10	0.011	0.228	0.498	0.839
0.20	0.135	0.873	1.622	2.374
0.30	0.128	1.229	2.361	3.493

表 2：美式溢价 稳健美式 − 稳健欧式作为 $(r,\ K)$ 的函数：在 $r = 0$ 处恒等为零，并且关于两个参数均单调递增。模型风险溢价（未显示）关于 K 保持平坦，并且随 r $(0.779 \to 0.196)$ 递减。

x	$m_1(x)$	行权比例 $\rho(x)$
61–100（低 x）	< 100	0（继续）
104.6（边界）	100	0.278（混合／机制）
109–354（高 x）	100	1（行权）

表 3：机制线性规划（s_0=100, r=0.05, σ=0.2, K=120）得出的最优行权比例：右尾行权区域 $\{x \geq x^*\}$，与标准美式看跌期权的左尾区域相反。

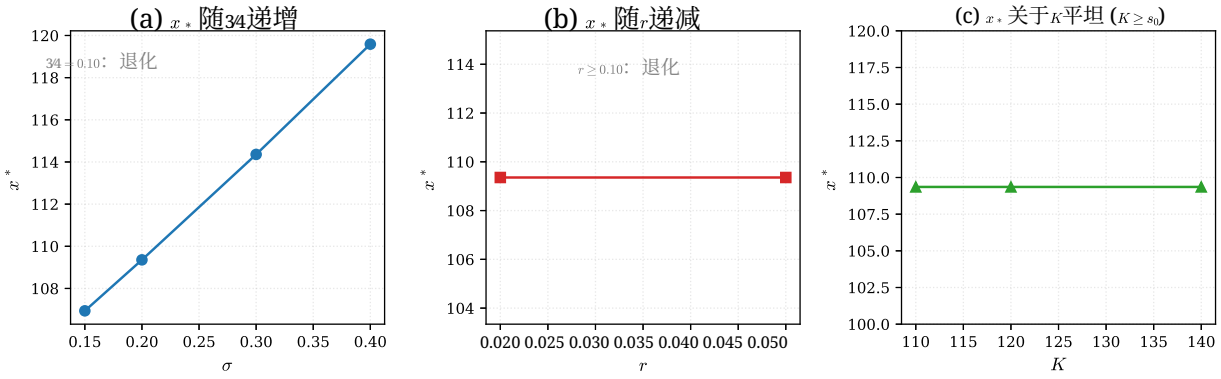


图 6：行权阈值的比较静态 x^*（定理 5.10，命题 5.13）： x^* 随 σ 递增，且在 K 下基本保持平坦，适用于 $K \geq s_0$；退化端点（$\sigma = 0.10$， $r \geq 0.10$）已标注，与表4相符。

运行最小值。其次，模型不确定性会放大美式溢价：在单一布莱克–斯科尔斯模型下，美式（百慕大式）溢价微不足道（≈ 0.01–0.04），而鲁棒美式溢价则大出一个数量级（0.08–0.16），因为只有最坏情形（单调鞅）耦合会在高 x 时将运行最小值固定在 s_0，从而使提前行权具有价值。这体现了美式期权与模型不确定性之间非平凡的相互作用，而在纯欧式或单一模型情形下均无法观察到。

最后，我们在参考点 s_0=100，r=0.05， σ=0.2， K=120， t_1=0.5， t_2=1 处直接验证第 5 节中的两项结构性主张， M=40 树步数。

变化的参数	阈值 x^*
$\sigma = 0.10$	83.6（退化，5 个混合节点）
$\sigma = 0.15$	106.9
$\sigma = 0.20$	109.4
$\sigma = 0.30$	114.4
$\sigma = 0.40$	119.6
$r = 0.02$	109.4
$r = 0.05$	109.4
$r \geq 0.10$	退化
$K = 110/120/140$	104.6–109.4（约与 K 无关）

表 4：结构稳健性扫描： x^* 增加于 σ，减少于 r，并且基本独立于 K ，对于 $K \geq s_0$，与定理 5.10一致。

(i) 约化恒等式(引理 5.7)。机制线性规划给出 $P^N = 26.867$，而引理 5.7 右侧的计算结果为 26。852；残差 1.4×10^{-2} 完全由单个边界节点 $x \approx x^*$ 承担，在该节点上，最优 $\rho(x) \in (0,$ 1)，这是混合节点离散化伪影，随着 $M \to \infty$ 而消失。

（ii）单调鞅结构（12）。标量问题（6）是退化的，因此原始线性规划解是最优面上的任意一点；规范最优解是命题 5.14 的单调鞅耦合 π_{MM}，其条件分布是二点分布 $\{f（x） \ g（x）\}$，两个影子均为非递减，并且下影 f 严格低于行权价 $\alpha（x）$。标量最优值 $V（x^*） = 3.515$ 由 π_{MM} 取得，并且与（14）中的对偶目标相匹配，从而确认强对偶性，进而确认命题 5.14 的闭式表达。对偶势函数 ψ是凸的，并在 $s_0 e^{-rt_2} \approx 95.1$处取得最小值；推论 5.9 的接触斜率达到网格精度：价内为 $\psi'（f） = -（1 + \xi）$，价外为 $\psi'（g） = -\xi$。在平台区$x \geq s_0 e^{-rt_1}$ 上，乘子为常数（$\xi_p \approx -0.38$），将价内影子固定为 $f_p \approx 83.6$；价外影子则由根条件（8）固定在 $g_p \approx 110.5$处，从而得到边界对（$f（x^*） \ g（x^*）$） $\approx$（83.6, 110.5）。（相反，原始线性规划顶点将平台区的价外质量放置在 ν的远端尾部，因为此处成本与 x无关； $g_p \approx 110.5$ 是由根条件选出的最小非递减延拓。）该值严格高于：（i）左帘耦合 π_{LC} 的值 2.344，该耦合最小化 [6], 的 $\mathbb{E}[（X - Y）^2]$，因此在此处并非最优；（ii）右帘（反单调）耦合的值 2.497；以及（iii）在相同目标下由（独立的）布莱克–斯科尔斯耦合取得的值 2.621。因此，最坏情形确实是单调鞅耦合，而不是 [5]的左帘耦合。

(iii) 反射联系（注 7.8）。将 $(X, Y) \mapsto (-X, -Y)$ 反射后，会把最小下降成本 (12) 映射为最大下降成本 $\big(Y - \widetilde{M}(X)\big)^+$，其运行最大值为 $\widetilde{M}(x) = \max(-s_0, e^{rt_1} x)$，并将边缘分布映射为 $\mu^- = \mathrm{law}(-X)$、 $\nu^- = \mathrm{law}(-Y)$。反射线性规划取得相同的值 3.3437（ $V(x^*)$ 的 α-形式；乘以 e^{rt_2} 后为 3.515），残差 9×10^{-7} 达到机器精度。在这种反射下，单调影子具有自对偶性：若 π_{MM} 的影子为 (f, g)，且二者均~ ~非递减，则反射后的耦合的影子为 $(f, \widetilde{g})$，其中 $f($ $x) = -g(-x)$， $\widetilde{g}(x) = -f(-x)$,

同样二者均非递减，因此，两期单调鞅耦合的反射恰好是两期（右侧）Az´ema–Yor 嵌入，且最小下降值等于最大跌幅值。与 (ii) 中一样，原始反射线性规划顶点在反射后的平台区$\widetilde{\ }$上退化（M 在此处为常数），因此边界对是根据根条件而非原始顶点确定的。

数量	值
P^N （机制线性规划）	26.867
引理5.7的右端	26.852
残差 $\lvert P^N -$ 右端$\rvert$	1.4×10^{-2}
$V(x^*)$（线性规划最优值 $=$ 单调鞅耦合）	3.515
反射最大跌幅值（注7.8）	3.344
(6) 上的左幕值	2.344
(6) 上的右幕值	2.497
(6) 上的 CRR/BS 耦合目标	2.621
f，g 非递减，$f < \alpha \le g$	一致
边界对（$f(x^*)$ $g(x^*)$）	(83.6, 110.5)

表 5：在参考点 (M=40) 验证定理 5.10 。约化残差是边界混合节点伪影；线性规划最优值 3.515 由单调鞅耦合取得，并严格优于左帘（2.344）、右帘（2.497）和布莱克–斯科尔斯（2.621）耦合。

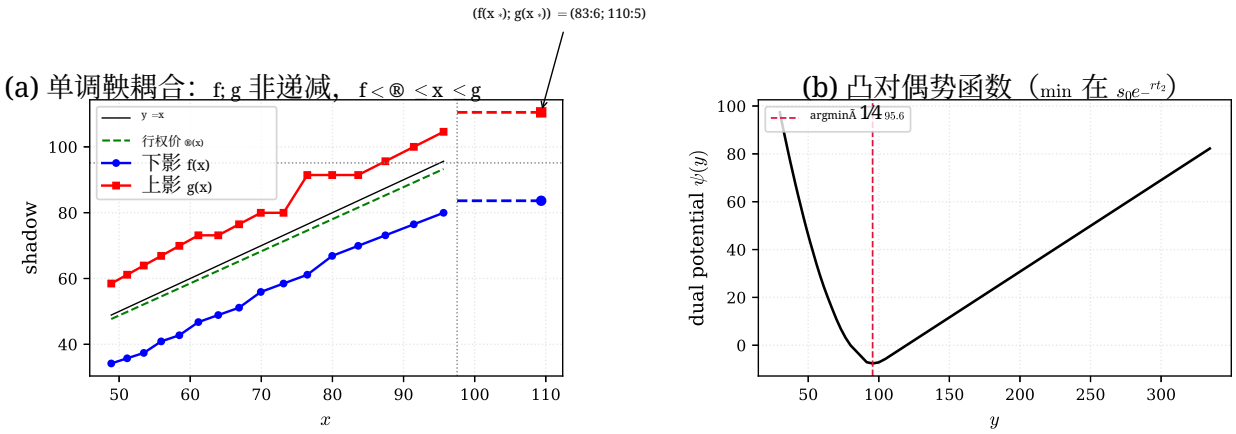


图 7：(a) 命题 5.14 的单调鞅耦合：两个影子 f, g 均随 $f < \alpha \le x \le g$ 非递减，下影在行权价 α 下方驱动（深度价差）。在平台区上，这一对趋平至推论 5.9 的边界值（ $f(x^*)$ $g(x^*)$ ） $=$(83.6, 110.5)，其中 g_p 由根条件确定，而非由退化接触条件确定。(b) 凸对偶势函数 ψ，其 arg min 为 $\psi \approx s_0 e^{-rt_2}$，且 $\psi'(f) = -(1+\xi)$， $\psi'(g) = -\xi$。

M	$n=2$ V_n^{am} / $V_{\text{欧元}n}$	$n=3$ V_n^{am} / $V_{\text{欧元}n}$	$n=4$ V_n^{am} / $V_{\text{欧元}n}$
4	25.031 / 24.942	26.910 / 26.785	28.566 / 28.448
6	25.836 / 25.719	27.843 / 27.700	29.589 / 29.430

表6：第7节的 n边缘分布机制线性规划所得多期鲁棒价值 $V\mathsf{am}_n$ / V_n^{eu}（美式 / 欧式），采用 $t_i = i \cdot 0.5$, σ=0.2, r=0.05, s_0=100, K=120处的CRR边缘分布。数值随 n 递增（嵌套性：运行最小值只会逐步下降，因此多一个时期绝不会降低欧式价值，美式价值也由此继承这一性质），并随 M 递增（向上收敛； M=40处为 $V_2^{\mathrm{am}} \to 26.90$， M=14处为 $V\mathsf{am}_3 \to 29.66$）。对于 $n = 2$，延续耦合为两点耦合（命题 5.14 的单调鞅耦合）；对于 $n = 3$和4，延续耦合为多点耦合——这是注 7.9 所述的质量扩散特征。

7 多边缘扩展

现在我们说明定理 5.10 如何从两个扩展到 n 个给定边缘分布，代价是需要满足唯一的结构性假设 [14]。设 $0 < t_1 < \cdots < t_n$并设 $\mu_1 \leq_{\mathrm{cx}} \cdots \leq_{\mathrm{cx}} \mu_n$为贴现价格 $X_i = e^{-rt_i} S_{t_i}$的给定分布；存在鞅耦合的充要条件是凸序 [16]。记 $\Pi_m(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 为 $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 的鞅耦合，并且

$$m_k = \min\bigl(s_0,\, e^{rt_1} X_1, \ldots, e^{rt_k} X_k\bigr) \tag{19}$$

表示未贴现价格的运行最小值。美式固定执行价回望看跌期权的鲁棒价格为

$$P^N = \sup_{\pi \in \Pi_m(\mu_1, \ldots, \mu_n)} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mathbb{E}_\pi\bigl[(K - m_\tau)^+\bigr], \tag{20}$$

其中 $\mathcal{T}_n$ 是取值于 $\{1, \ldots, n\}$ 的 $\mathbb{F}$-停时。根据 [13] 的连续时间定价-对冲对偶， P^N 等于二维状态（X_t， m_t）上的最小超对冲成本。

运行最小值只会向下调整，这正是每个阶段结构的驱动力。在阶段 k，给定当前最小值 m 和当前价格 x，持有者会将立即行权价值 $(K - m)^+$ 与延续价值进行比较

$$c_k(x, m) = \sup_{\pi} \mathbb{E}_\pi\Bigl[\bigl(K - \min(m,\, e^{rt_{k+1}} X_{k+1}, \ldots, e^{rt_n} X_n)\bigr)^+ \;\Big|\; X_k = x\Bigr], \tag{21}$$

对剩余边缘分布的上确界。被积函数作为终端值的函数，再次是如下形式的看跌期权型函数（$\alpha(\cdot) - Y)^+$，其中 α 单调不减；因此，与命题 5.14 中相同的对偶包络定理论证，在每个阶段都选出 单调鞅耦合 作为最优单步耦合，前提是单步延续成本继承看跌期权型形式。这种继承在终端阶段 $k = n - 1$ （其中（21）恰好是引理 5.2中的两期成本）成立，而对于 $k < n - 1$则构成归纳步骤；二者在下文定理 7.7 的证明中均得到精确定义。该多边缘对象是迭代单调鞅耦合，而将其识别为反射嵌入则基于以下反射

恒等式。

引理 7.1 （多边际价值的动态规划）。 令 $V_k(x,m)$ 表示从 $(X_k = x,\ m)$ 出发、行权时刻限定为 $\{t_k,\dots,t_n\}$ 的美式期权问题中，折现至时刻 0 的最优预期收益。则 $V_n(x,m) = d_n\,(K-m)^+$，且对于 $k < n$，

$$V_k(x,m) \;=\; \max\Big(d_k\,(K-m)^+,\ \sup_{\pi_k}\mathbb{E}_{\pi_k}\big[V_{k+1}\big(X_{k+1},\min(m,e^{rt_{k+1}}X_{k+1})\big)\;\big|\;X_k=x\big]\Big), \tag{22}$$

在满足总体一致性约束的条件下，对从 δ_x 到 μ_{k+1} 的单步鞅耦合取内层上确界；该约束要求对 $x\sim\mu_k$ 混合后，得到 μ_{k+1}。多边际美式期权价值为$V_1(s_0,s_0)$，最优停止规则是在 (22) 的最大值首次由行权分支取得时行权。因此，多期问题可分解为一系列成本为 $g_k^m(\cdot) = V_{k+1}(\cdot,\min(m,e^{rt_{k+1}}\cdot))$ 的引理 *7.4* 中的一步鞅最优传输问题，而最优多边际耦合则是最优单步耦合的拼接。

证明。 的机制模型通过将完整路径与适应性行权规则结合为单个鞅耦合，达到无模型美式期权上确界。对于固定规则，通过对 X_k 进行条件化并更新运行最小值$m\mapsto\min(m,e^{rt_{k+1}}X_{k+1})$，可得到相应的Snell包络递推；对规则和耦合取上确界即得（22），其中一步上确界恰好是边缘分布为 $\mu_k\le_{\mathrm{cx}}\mu_{k+1}$ 、成本为 g_k^m的一步鞅最优输运问题。

□

引理 7.2 （反射：最小值看跌期权 $\leftrightarrow$ 最大值看涨期权）。 在对合$(S_t)_t\mapsto(-S_t)_t$ 下，$\widetilde{\ }$运行最小值 $m_t=\min_{u\le t}S_u$ 与反射后的运行最大值 $M_t:=\max^{u\le t}(-S_u)$ 满足$\widetilde{\ }M_t=-m_t$，因此

$$(K-m_t)^+=\big(\widetilde{M}_t+K\big)^+,$$

也就是说，以运行最小值为标的的固定执行价回望看跌期权，等同于以反射后的运行最大值为标的、行权价为$-K$ 的固定执行价回望看涨期权。在耦合层面，对合$(X,Y)\mapsto(-X,-Y)$将具有影子对(f,g) 的鞅耦合映射为具有影子对$\big(-g(-\cdot)\ -f(-\cdot)\big)$的鞅耦合；特别地，单调鞅耦合（两个影子均非递减）的类在此对合下保持不变，而最小值问题恰好是最大值问题的反射。

假设 7.3（Ob-l´oj–Spoida，反射形式）。边缘分布 μ_1、……、μ_n 按凸序排列；以均值 s_0 为中心化后，反射边缘分布 $\mu_i^-(\cdot)=\mu_i(s_0-\cdot)$ 满足 [14,Ass. $\circledast$，§2.2] 的条件 (ii)：对于每个 $2\le i\le n$ 以及支撑 μ_i^- 中的每个 y，映射 $\zeta\mapsto c^i(\zeta,y)/(y-\zeta)$ 在 $[\ell_{\mu_i^-},y]$ 上有唯一极小值点 c^i，其中 c^i 是 [14] 的第 i 个迭代势函数（即对 [14] 的势函数施加由 μ_1^-、……、μ_{i-1}^- 所承载的约束后得到的函数）；并且当极小值点严格小于 y 时，$c_i(y)>c_{\iota_i}(y;y)(y)$。

引理 7.4 (Put 型继承)。 对于给定的当前最小值 m，将阶段 $k<n-1$ 的单步延续成本记为

$$g_k^m(y) \;=\; V_{k+1}\big(y,\ \min(m,e^{rt_{k+1}}y)\big), \tag{23}$$

其中 V_{k+1} 是阶段-$(k{+}1)$ 价值函数。如果对于每个 m，映射 $y \mapsto V_{k+1}(y, \min(m, e^{rt_{k+1}} y))$ 关于 y 是凸且非递增的，那么 g_k^m 是看跌期权的叠加，

$$g_k^m(y) \;=\; \int_0^\infty (a-y)^+ \, \eta_k^m(\mathrm{d}a) \;+\; \beta_k^m - \gamma_k^m y, \qquad \eta_k^m \geq 0,\ \gamma_k^m \geq 0,$$

根据非递增凸函数的凸表示（其二阶导数即为测度η_k^m）。此外，y-斜率 $\partial_y g_k^m$关于 x是非递增的：执行价参数仅通过$m = \min(\bar{m}, e^{rt_k} x)$进入，该函数关于 x非递减，而每个看跌期权$(a-y)^+$的斜率 $-1_{\{y<a\}}$关于 a非递增。因此，阶段k 成本关于是凸的 y，并且是子模的——这恰好是命题*5.14*的对偶包络论证所用的两项性质；由于看跌期权表示关于成本是线性的，该论证可从单个看跌期权推广到其叠加，因此最优单步耦合是单调鞅耦合。

命题7.5 (单步耦合：当且仅当凸时为两点分布**)**。 固定 $k < n$ 和一个运行最小值m。引理$(\cdot)\,(\cdot, \min(m,\ e^{rt_{k+1}}\cdot))$ 中的单步成本关于 y是非递增的。式(22)的最优单步耦合为

(i) 命题 *5.14* 所述的单调两点鞅耦合，在 $y \mapsto g_k^m(y)$ 为凸时成立；以及

(ii) 一般情形下，由 *[9]* 的完全对偶性刻画的耦合：对每个 x，条件分布支撑在 $y \mapsto g_k^m(y) - \xi(x)y$ 与其凸包络（对偶势函数 ψ）的接触集上，其中 $\xi(x)$ 为鞅乘子；支撑恰好在 $y \mapsto g_k^m(y)$ 不再为凸处超过两点，而这种多点结构正是备注 *7.8* 中的质量扩散。

证明。 (i) 部分由引理 7.4 和命题 5.14 得出。对于 (ii) 部分，完全对偶性[9] 给出 $\sup \mathbb{E}[g_k^{m(X)}(Y)] = \inf\{\mathbb{E}_\mu[\varphi] + \mathbb{E}_\nu[\psi] :\ \varphi(x) + \psi(y) + \xi(x)(y-x) \geq g_k^{m(x)}(y)\}$；固定 x时，紧约束使 ψ 成为 $y \mapsto g_k^{m(x)}(y)$ 的凸包络，差一个仿射项 $\xi(x)y$；而最优条件分布仅赋质量于接触集。在包络的仿射片段上，质量分散到其端点，从而在反射图景中产生 [14, §4.2] 所述的边界外扩散。该论证局限于各阶段，因此对 k 一致适用，而引理 7.1 的递推无需任何进一步的全局条件即可闭合。

□

注 *7.6*（继承范围）。终端阶段满足凸性-y 假设，因为 $V_n(y, m') = d_n\big(K - \min(m', e^{rt_n} y)\big)^+$ 是一个行权价为 y 的看跌期权。只要单步最大化 $V_k = \max(\text{exercise}\ c_k)$ 保持凸性-y，归纳便可完成。在假设 *7.3* 下，这种保持性成立，但一般情况下并不成立：复合函数 $y \mapsto V_{k+1}(y, \min(m, e^{rt_{k+1}} y))$ 不一定是凸函数，而其失效恰好对应注 *7.8* 中的质量扩散（命题 *7.5(ii)*），并在注 *7.9* 的数值观察中表现为多点（而非两点）单步耦合。因此，引理 *7.4* 精确刻画了迭代耦合为两点耦合的“$\circledast$ 成立”情形；无条件耦合则是证明中步骤 *(iv)* 所述 *Az´ema–Yor* 嵌入的反射版本

定理 7.7的内部区域上，$\{e^{rt_k}x > \bar{m}\}$ 运行最小值是固定的 $\bar{m}$，因此行权价与 x无关：成本与源无关，单步耦合是一个自由参数（单调鞅耦合是一个极端选择），这与推论 5.9中的两期平台退化相吻合。

定理 7.7（多边缘右尾结构）。 每个阶段的最优行权区域 $k < n$都是一个右尾

$$\{\, x \geq x_k^*(m) \,\}, \tag{24}$$

其中，m 是当前的运行最小值，$x_k^*(m)$是阶段-k 问题（*21*）的无差异根；阈值 $x_k^*(m)$关于 m单调不减，而 $x_k^*(s_0) = x^*$ 则恢复了定理 *5.10* 中的两期阈值。最优耦合是 *[15]* 的反射迭代 *Az´ema–Yor* 嵌入（证明中的步骤 *(iv)*），它在随机序意义下使运行最小值最小；在假设 *7.3* 下，这是两点迭代单调鞅耦合（ *[14]*嵌入的反射），而在不满足该假设时，该耦合带有 *[14, §4.2]*中的质量扩散修正。

证明。 我们通过 反向归纳进行，同时将耦合步骤与停止步骤区分开来 t.

(i) 终端阶段。在 $k = n-1$，对于固定的当前最小值 m，继续价值 (21) 恰好是边缘分布为 μ_{n-1}、μ_n 的第 5 节两期问题：终端收益 $(K - \min(m, e^{rt_n}X_n))^+$ 是两期继续持有收益 (2)，其中以锁定最小值 m 替代 $m_1(x)$。由引理 5.7 和命题 5.14，最优单步耦合是单调鞅耦合；由定理 5.10，行权区域是一个右尾 $\{x \geq x_{n-1}^*(m)\}$。

(ii) 归纳：停止结构。假设阶段-$(k+1)$价值 $V_{k+1}(y, m')$ 由步骤 (iv) 的反射迭代 Az´ema–Yor 嵌入达到，且具有右尾行权区域 $\{y \geq x_{k+1}^*(m')\}$，其中 $x_{k+1}^*(\cdot)$ 非递减。对于固定的 m，即时行权价值 $(K-m)^+$ 与 x 无关。继续价值 $c_k(x, m) = \sup_\pi \mathbb{E}_\pi[V_{k+1}(X_{k+1}, \min(m, e^{rt_{k+1}}X_{k+1})) \,|\, X_k{=}x]$ 关于 x 非递增：提高 x 会使下一期价格的分布在凸序下向上移动，因为反射迭代 Az´ema–Yor 嵌入具有非递减的影子映射，因此其单步条件分布随机单调——这一性质在其两点形式和质量扩散形式下均成立，所以并不依赖假设 7.3——而有效最小值 $\min(m, e^{rt_{k+1}}X_{k+1})$ 只会逐步下降；并且 V_{k+1} 关于其最小值参数非递增，且根据阶段-$(k+1)$ 的右尾结构，在延续区域内关于价格非递增。因此，“继续持有收益减去行权收益”关于 x 非递增，其唯一零点是无差异根 $x_k^*(m)$：行权区域 $\{x \geq x_k^*(m)\}$ 是一个右尾。$x_k^*(m)$ 关于 m 的单调性，与定理 5.10 中的斜率比较相同，只是以锁定内在价值 $(K-m)^+$ 替代 $(K-s_0)^+$。

(iii) 归纳：耦合。 在延续区域上，单步成本是 $g_k^m(\cdot)$ 的 23。根据阶段-（$k+1$）归纳假设，V_{k+1} 关于 y是凸且非递增的，因此引理7.4 适用：g_k^m是看跌期权的叠加，其行权价关于 x 从 $m =$到 $\min(\bar{m}, e^{rt_k}x)$ 非递增，因此成本关于 y 是凸的且为子模函数，并且命题 5.14的对偶包络论证——通过线性性从单个看跌期权推广到叠加——表明，在阶段 k，单调鞅耦合是最优单步耦合。逐阶段应用这一结论，即得到两点

迭代单调鞅耦合作为多边际最优耦合 的前提是 关于 y的凸性假设（引理 7.4 ）在每个阶段都得到保持——等价地，即满足假设 7.3。这就是当前步骤的唯一内容；关于 y 的凸性假设 一般并不成立，且其失效正是备注 7.9所追踪的质量扩散修正 。耦合的一般最优性将在步骤（iv）中证明，该步骤不使用两点形式。

(iv) 反射识别（一般耦合最优性）。根据引理 7.2，最低回望看跌期权是最高回望看涨期权的反射，因此前者的最优耦合是后者最优耦合的反射。根据 [15],的最大值—最大值锐界，迭代 Az´ema–Yor 嵌入在所有边缘分布为（$\mu_1^-, \ldots, \mu_n^-$）的鞅中，按照随机序最大化运行最大值；进行反射后，该嵌入按照随机序最小化运行最小值。这一全局结论与引理 7.1 的局部递推一致：在每个阶段，单步最优解由命题7.5刻画；根据假设 7.3，它是两点耦合，否则则携带质量扩散。由于（$K - m_\tau$）$^+$ 是运行最小值的非递增函数，反射后的迭代 Az´ema–Yor 嵌入对于美式价值（20）是最优的——这一结论无条件成立，不依赖于假设 7.3。在假设 7.3 下，´ema–Yor 嵌入 [14] 是步骤 (iii) 中的两点迭代单调耦合（根据 [14, 定理 2.3] ，它是显式的，并且在每个停时实现最大值分布）；没有该假设时，该嵌入携带 [14, §4.2], 的质量扩散修正，该修正是多点的，并不属于两点单调形式。

□

注 *7.8*（反射与最大值中的最大值）。最低回望看跌期权是最高回望看涨期权的反射：*($K - \min_i S_{t_i}$)$^+$* 是反射过程 $-S$的运行最大值的函数。两期单调鞅耦合是两期 *Az´ema–Yor*（右）障碍的反射，而上文的多边缘分布结论则是 *[15]*“最大值中的最大值”界的反射；这就是为何要对反射边缘分布μ_i^-施加假设 *7.3*。与 *[14, §4]* 中一样，这一假设并非必要：当假设 ⊛*(ii)* 不成立时，迭代 *Az´ema–Yor* 嵌入必须通过连续停时之间的质量扩散加以修正——将第二个停时替换为另一个停时，使在边界点停止的质量扩散到两个边界外点，同时不改变运行最大值；而确定下一个边界的优化则会多出一个明确的“误差”记账项。 *[14, §4.2]* 中对$n = 3$完成了这一处理，明确给出了修正后的边界 ξ_3 及误差项，但并未将其推广到 $n > 3$。在反射（最小值）形式下，这恰好就是反射边缘分布不满足 ⊛*(ii)*时对迭代单调鞅耦合所作的修正；对一般 n 情形下这些修正项进行定量分析，是一项独立完整的构造性研究计划，最好另行撰写后续论文处理。根据注 *7.12*，这种修正具有局部性，因此 $n > 3$ 构造是对 *[14, §4.2]* 的 $n = 3$ 算子进行迭代，而非一个新对象。

注 7.9 （质量扩散的数值验证（$n = 3$））。 第 *7* 节中的三边缘分布制度线性规划——两期线性规划的直接推广，其中每个行权阶段对应一个机制，且各机制分别满足鞅条件——针对 *CRR*边缘分布 （μ_1， μ_2， μ_3）在 $t =$（0。5，1。0，1。5）求解

其中 $\sigma = 0.2$、 $r = 0.05$、 $s_0 = 100$、 $K = 120$。其数值为 $V_3 \approx 29.66$ （网格含 $3M+1$ 个节点，$M = 14$，且仍随 M 增大；见表*6*）；相比之下，两期问题的数值为 $V_2 \approx 26.87$，三期欧式价值为 ≈ 28.84。第一阶段行权区域仍为阈值为$x_1^* \approx 109$的右尾。由此得出两个结构性结论。*(i)* 在 t_2 行权的质量采用两点单调鞅耦合，与两期问题完全相同。*(ii)* 继续至 t_3 的质量则并非如此：给定 X_1 时， X_2 的条件分布支撑包含 *10–12* 个网格点，而非 *2* 个；这一现象在网格细化（$M = 10$, *12*，*14*）以及收益的 10^{-4} 相对扰动下都保持稳定，因此并非线性规划退化。欧式 $n = 3$ 耦合（持有至 t_3，不停止）中已存在相同的多点结构，其给定 X_1 时 X_2 的条件分布支撑包含 *2–8* 个点。因此，这种扩散具有一般性，并非美式停止自由度造成的假象；这也证实，此处的反射边缘分布违反了假设 *7.3*。这正是 *§4.2]* 中 *[14,* 的质量扩散特征：迭代单调耦合通过在边界处停止的质量扩散作出修正，而定理 *7.7* 第 *(iii)* 步中朴素的两点迭代单调耦合对于 $n = 3$ 严格次优。多边缘右尾行权结构依然成立；需要修正的是耦合步骤，而非停止步骤。

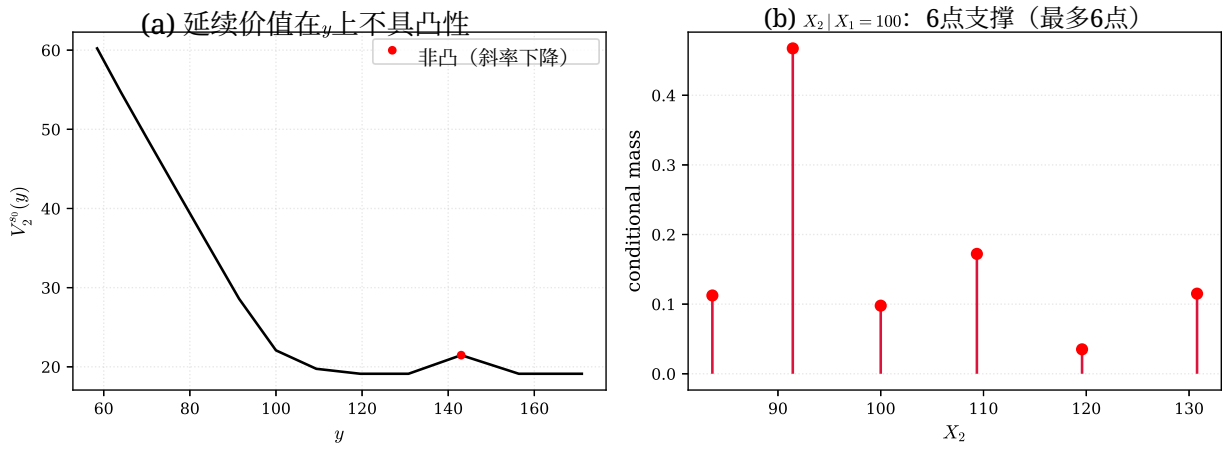


图8：三期问题中的质量扩散（注7.9）。（a）延续价值$y \mapsto V_2^{s_0}(y)$不具凸性（斜率下降处的红色节点）。（b）最优第一阶段条件分布 $X_2 \mid X_1$ 具有六个支撑点，而不是两点单调鞅耦合——这是 [14, §4.2]中的质量扩散修正的标志。

注7.10 （单步机制的直接验证）。 命题 *7.5*的分岔在两期问题的线性规划数据中清晰可见：第一阶段成本是凸看跌期权叠加 $y \mapsto d_2$（$K - \min(s_0,\ e^{rt_2}y)$）$^+$；在（几何分布、因此为非均匀的）*CRR*网格上，其有限差分斜率非递减——这是该网格上正确的离散凸性检验；最优继续耦合则是命题 *5.14*中的两点单调鞅耦合。对于三期问题，第一阶段成本是引理 $y \mapsto V_2(y,\ \min(s_0,\ e^{rt_2}y))$ 中的延续价值 *7.1*，它不满足凸性：其斜率并非单调，其中有多个严格为负的

二阶差商。因此，最优第一阶段条件分布 $X_2|X_1$ 相应地具有6–8 个支撑点，而非两个（$M=6$, 8）；这种多点支撑在收益受到随机扰动和二次扰动时依然稳定，因此它是命题 *7.5*（*ii*）中的真实质量扩散——即接触集耦合，而非线性规划退化。凸性失效的确切位置取决于两期子问题的价外退化（命题 *5.14*中的平坦对偶势函数），但其存在以及由此产生的多点支撑都是稳健的。

引理 ***7.11***（迭代嵌入的一致性）。 *´ema–Yor* 对*[15]*的迭代嵌入——当假设 ***7.3(ii)***不成立时，按 *[14, §4.2]*中的方法进行质量扩散修正——在投影下是一致的：对任意 $k<n$，其在（$X_1,\dots,X_k$）上的边缘分布就是 k阶段的迭代嵌入。等价地，最优 k阶段耦合不依赖于边缘分布 $\mu_{k+1},\dots,\mu_n$，且在阶段 k 所作的修正仅取决于局部边缘分布三元组（$\mu_{k-1},\mu_k,\mu_{k+1}$）。

证明。 该嵌入按构造是迭代的： μ_1 嵌入到 μ_2，所得分布再嵌入到μ_3，依此类推；第 k 阶段的转移仅取决于状态（X_k， m_k）和下一个边缘分布μ_{k+1}。当假设7.3(ii)不成立时， [14, §4.2] 中的质量扩散修正只会改变第 k个与第（k+1）个停时之间的局部转移，而不影响更早的阶段。因此，将 n 阶段构造投影到前 k 个坐标上，就会得到 k阶段构造。

□

注 ***7.12***（数值验证一致性（$n=4$））。引理 ***7.11*** 将显式$n>3$ 质量扩散问题归结为对 ***§4.2]*** 中显式 $n=3$ 算子 *[14,* 的迭代：未来边缘分布不会扰动较早阶段，因此不会出现新的全局现象。我们针对 $n=4$以机器精度验证了一致性。四边缘分布制度线性规划——将注 ***7.9*** 中的 $n=3$ 线性规划直接扩展到四个阶段 $t=$ ***(0.5, 1.0, 1.5, 2.0)***， $\sigma=0.2$ $r=0.05$ $s_0=100K=120$——的美式价值为 $V_4\approx 29.59$ ，欧式价值为 ≈ 29.43 （网格上有 $4M$+1 个节点，$M=6$；见表***6***）。将最优欧式四边缘耦合投影到 ***(***X_1***,*** X_2***,*** X_3***)*** 上后，在三期收益下，其值与三边缘欧式最优值相差不超过 10^{-13} ，对应$K=100$***110***、***120***、***140***（差值为 5×10^{-14} 5×10^{-14} 4×10^{-14} 6×10^{-14}）；也就是说，该投影是一个最优 $n=3$ 耦合。此外，在 $n=4$ 耦合中，给定 X_3 时 X_4 的条件分布具有与注 ***7.9*** 的 $n=3$ 情形相同的多点支撑（五个点），因此质量扩散特征在后一个阶段再次出现，恰如局部迭代图景所预测的那样。

结论

我们已将美式固定执行价回望看跌期权确定为非平凡的美式回望期权问题，证明了定价—对冲对偶性，并在两期模型中确立了右尾行权结构，且有线性规划实验作为佐证。逐点延续耦合是命题 5.14 中的单调鞅耦合，其下影/上影（f， g）均为非递减，其中下影由低于行权价的部分驱动，并由式（14）的凸对偶势函数刻画；行权阈值由无差异条件（9）确定。多边缘扩展（第 7 节）将这一结果推广至 n 个边缘分布：在反射的 Ob-l´oj–Spoida 假设 7.3 下

最优耦合是迭代单调鞅耦合，且每个阶段的行权区域都是右尾，见定理 7.7。注 $n = 3$ 中的线性规划 7.9 证实了右尾行权结构，并表明超过两期后，最优耦合包含真正的质量扩散修正，详见 [14, §4。2]——停止（行权）结构清晰；多边缘修正则体现在耦合步骤中。根据注 7.12 ，这种修正具有局部性（在投影下保持一致），因此显式$n > 3$ 构造是对显式 $n = 3$ 算子的迭代，而非一个新对象。对这些 $n > 3$ 修正项进行明确记账，本身就是一项值得独立研究的构造性研究计划，我们将留待后续论文探讨。

参考文献

[1] D. Hobson，回望期权的鲁棒对冲，《Finance Stoch.》2 (1998), 329–347。[2] D. Hobson, M. Klimmek，远期起始跨式期权的鲁棒价格界，《Finance Stoch.》19 (2015), no. 1, 189–214。[3] D. Hobson, M. Klimmek，方差互换的模型无关对冲策略，《Finance Stoch.》16 (2012), no. 4, 611–649。[4] D. Hobson, A. Neuberger，模型不确定性与美式期权定价，《Finance Stoch.》21 (2017), 285–329。[5] D.Hobson, D. Norgilas，美式看跌期权的鲁棒界，《Finance Stoch.》23 (2019), 359–395。[6] M. Beiglb¨ock, N. Juillet，关于边缘鞅约束下的最优传输问题，《Ann. Probab.》44 (2016), 42–106。[7] M. Beiglb¨ock, N. Juillet，影子耦合，《Trans. Amer. Math. Soc.》368 (2016), no. 7, 4973– 5002。[8] M. Beiglb¨ock, P. Henry-Labord`ere, N. Touzi，单调鞅传输计划与 *Skorokhod* 嵌入，《Stochastic Process. Appl.》127 (2017), 3005–3013。[9] M. Beiglb¨ock, M. Nutz, N. Touzi，实线上鞅最优传输的完全对偶性，《Ann. Probab.》45 (2017), no. 5, 3038–3074。[10] P. Henry-Labord`ere, N. Touzi，一维 *Brenier* 定理的显式鞅版本，《Finance Stoch.》20 (2016), 635–668。[11] M. Beiglb¨ock, D. Hobson, D. Norgilas，影子测度的势函数，《Electron. Commun. Probab.》27 (2022), paper no. 16, 1–12。[12] D. Hobson, D. Norgilas，左帘耦合的构造，《Electron. J. Probab.》27 (2022), paper no. 147, 1–46。

[13]G. Guo, J. Ob-l´oj，连续时间美式期权的鲁棒定价与对冲，arXiv:2510.05463 (2025)。[14] J. Ob-l´oj, P. Spoida，一种迭代的 *Az´ema–Yor* 型有限个边缘分布嵌入，《Ann. Appl. Probab.》27 (2017), no. 4, 2210–2247。[15] P. Henry-Labord`ere, J. Ob-l´oj, P. Spoida, N. Touzi，给定边缘分布的鞅的最大值之最大值，《Ann. Appl. Probab.》26 (2016), 1–44。[16] V. Strassen，具有给定边缘分布的概率测度的存在性，《Ann. Math. Statist.》36 (1965), 423–439。