arXiv:2611.30981v1 [math.QA] 23 Nov 2026

量子包络代数的 Cartan 环面及中心上诱导的自同构

Yu Wang 数学与物理学院，江苏理工学院，中国江苏省常州市 213001 电子邮箱：yu.wang@mail.sdu.edu.cn

摘要

设 $U = U_q(\mathfrak{g})$ 是与复单李代数 $\mathfrak{g}$ 相关的量子包络代数的根格形式，其定义在特征零域 $\Bbbk$ 上，且 $q \in \Bbbk^\times$ 不是单位根。我们确定了由代数自同构在 U 的 Cartan 环面 U^0 及其中心 $Z(U)$ 上诱导的自同构群。这些群为

$$\mathrm{Aut}_U(U^0) \cong \mathrm{Hom}(Q, \{\pm 1\}) \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi),$$

$$\mathrm{Aut}_U(Z(U)) \cong \mathrm{Hom}((P/Q)[2], \{\pm 1\}) \rtimes \Gamma,$$

其中 Q 和 P 分别为根格和权格，Φ 为根系，Γ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图自同构群，而 $(P/Q)[2]$ 是 P/Q 的 2- 扭子群。证明利用有限维模的特征和 Weyl 群不变域，说明由环面限制确定的 Q 的自同构保持 Φ。记 ρ_0 和 ρ_Z 分别为到 U^0 和 $Z(U)$ 的限制映射，我们证明 $\ker \rho_0 \subseteq \ker \rho_Z$，并确定商群 $\ker \rho_Z / \ker \rho_0$。

关键词。 量子包络代数；诱导自同构；Cartan 环面；中心；Harish–Chandra 同构。

2020 年数学主题分类。 17B37, 16W20, 16T20.

1 引言

设 $U = U_q(\mathfrak{g})$ 为复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的量子包络代数的根格形式。我们假设基域 $\Bbbk$ 的特征为零，但不一定是代数闭域，并且 $q \in \Bbbk^\times$ 不是单位根。所有自同构均指 $\Bbbk$-代数自同构。关于 U 的结构与表示论，可参阅标准文献 [6, 9, 15]。一般而言，确定 $\mathrm{Aut}(U)$ 是一件困难的事：任意代数自同构未必保持 Hopf 代数结构，即使给定其在 Cartan 环面 U^0 上的作用，也无法确定生成元 E_i 和 F_i 的像。我们研究这些自同构在 U^0 和 $Z(U)$ 上的限制，并根据根系及其格确定两个限制映射的像。

Twietmeyer [18] 以对角自同构和 Dynkin 图自同构描述了 U 的 Hopf 自同构。Chin 和 Musson [7]对 $\mathbb{Q}(q)$上的 Hopf 自同构群给出了描述，其中 q 是一个未定元。Lusztig 辫群算子 [15]是代数自同构，其在 U^0 上的限制实现了 Weyl 群作用。在秩一情形下，Alev 和 Chamarie [1] 确定了 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的完整代数自同构群。Alev 和 Dumas [2,§3.1] 以权格表述回顾了这一分类，该表述不同于此处考虑的根格

形式。对于秩至少为二的正部分 $U_q^+(\mathfrak{g})$，Andruskiewitsch 和 Dumas [3] 猜想，每个代数自同构都是生成元缩放与 Dynkin 图自同构的复合。Launois [12] 确定了类型B_2下的这一自同构群。Yakimov [19] 利用完备量子环面的刚性证明了该猜想，并得到 $\mathrm{Aut}(U_q^+(\mathfrak{g})) \cong (\Bbbk^\times)^n \rtimes \Gamma$，其中 n 是 $\mathfrak{g}$ 的秩， Γ 是其 Dynkin 图的自同构群。由于 U 的自同构未必保持 $U_q^+(\mathfrak{g})$，这一结果无法直接确定它们在 U^0 或 $Z(U)$上的限制。

令 q 为不定元，Zha [20] 研究了 $U_q(\mathfrak{g})$ 的变形自同构；这些自同构保持一个整形式，并在经典极限 $q = 1$下诱导出 $\mathfrak{g}$ 的李代数自同构。他证明了，这些自同构在根格上诱导的自同构保持根系。我们将在上述假设下对每个代数自同构建立这一约束，而不施加变形条件。

U 的单位描述表明，每个自同构都保持 U^0。由于每个自同构也保持 $Z(U)$，限制便定义了群同态

$$\rho_0 : \mathrm{Aut}(U) \longrightarrow \mathrm{Aut}(U^0), \qquad \sigma \longmapsto \sigma|_{U^0},$$
$$\rho_Z : \mathrm{Aut}(U) \longrightarrow \mathrm{Aut}(Z(U)), \quad \sigma \longmapsto \sigma|_{Z(U)}.$$

我们分别将它们的像记为 $\mathrm{Aut}_U(U^0)$ 和 $\mathrm{Aut}_U(Z(U))$。

设 Φ 为根系，其根格为 Q，权格为 P，Weyl 群为W 定理 4.1 表明，每个 $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$ 都满足

$$\sigma(K_\lambda) = \varepsilon(\lambda) K_{\varphi(\lambda)} \qquad (\lambda \in Q),$$

其中 $\varepsilon \in \mathrm{Hom}(Q, \{\pm 1\})$，且 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Phi) = W \rtimes \Gamma$。反之，每个这样的环面作用都可通过复合符号自同构、Lusztig 辫群算子和图自同构来实现。因此

$$\mathrm{Aut}_U(U^0) \cong \mathrm{Hom}(Q, \{\pm 1\}) \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi).$$

Lusztig 辫群算子逐点固定中心。定理 4.10 表明， $Z(U)$ 的自同构可扩张为 U 的代数自同构，当且仅当它由符号自同构与图自同构的复合诱导。因此，

$$\mathrm{Aut}_U(Z(U)) \cong \mathrm{Hom}((P/Q)[2], \{\pm 1\}) \rtimes \Gamma,$$

其中 $(P/Q)[2]$ 是 P/Q 的 2-扭子群。特征群因子通过将符号特征限制到 $Q \cap 2P$，并利用自然同构 $(Q \cap 2P)/2Q \cong (P/Q)[2]$ 得到。

这两个限制满足 $\ker \rho_0 \subseteq \ker \rho_Z$。因此，在 U^0 上一致的自同构在 $Z(U)$ 上也一致，而 ρ_Z 可经由 ρ_0 分解。命题 4.12 刻画了逐点固定中心的自同构的环面限制，并给出

$$\ker \rho_Z / \ker \rho_0 \cong \mathrm{Hom}\big(Q/(Q \cap 2P), \{\pm 1\}\big) \rtimes W,$$

其中 W 对特征的作用为 $(w \cdot \delta)(\lambda) = \delta(w^{-1}\lambda)$。对 $\ker \rho_0$ 及完整自同构群的确定仍超出本文的研究范围。

证明中使用有限维不可约 1 型模。去除自同构的符号部分后，我们通过扭曲研究其对权和特征的影响。结合 Weyl 群不变域，可得根系约束。随后，我们比较中心特征，并应用量子 Harish–Chandra 同构来确定诱导的中心作用，而无需为每种 Cartan 型选取显式的中心生成元。关于中心的结构，我们使用 [10, 11, 16, 17]；另见 [4, 13, 14]。

本文安排如下。第 2 节汇总预备知识。第 3 节建立根系约束，第 4 节确定两个限制像并说明它们的核之间的关系。根系编号遵循 Bourbaki [5]；Cartan 矩阵约定在第 2 节中给出。

2 预备结果

全文中，设 $\Bbbk$ 为特征零的域，设 $\mathfrak{g}$ 为秩为 $n \geq 1$、定义在 $\mathbb{C}$ 上的有限维单李代数，其根系为 Φ，单根系为 $\Delta = \{\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n\}$，Cartan 矩阵为

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

在 Φ 的有理张成空间上固定标准的、Weyl 群不变的对称双线性型, 。将此型归一化，使得这些数

$$\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

是最大公因数为 1 的正整数。我们采用 Jantzen 约定 [9]

$$a_{ij} = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}.$$

在非单边情形中，这与 [8] 中使用的 Cartan 矩阵约定互为转置；下文所有 Cartan 矩阵均遵循上面展示的约定。令

$$d_i = \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}, \qquad q_i = q^{d_i}, \qquad D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n).$$

那么 DA 是对称的。我们始终假设 $q \in \Bbbk^\times$ 不是单位根。

2.1 量子包络代数与 Cartan 环面

令 $U = U_q(\mathfrak{g})$ 表示 Drinfeld–Jimbo 量子包络代数的根格形式，由 E_i、F_i、$K_i^{\pm 1}$($1 \leq i \leq n$) 生成，并满足通常的定义关系

$$\begin{aligned} K_i K_j &= K_j K_i, & K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, \\ K_i E_j K_i^{-1} &= q_i^{a_{ij}} E_j, & K_i F_j K_i^{-1} &= q_i^{-a_{ij}} F_j, \end{aligned}$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}.$$

对于 $i \neq j$，量子 Serre 关系为

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-k} E_j E_i^k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-k} F_j F_i^k = 0,$$

其中

$$[m]_{q_i} = \frac{q_i^m - q_i^{-m}}{q_i - q_i^{-1}}, \qquad [m]_{q_i}! = \prod_{s=1}^{m} [s]_{q_i}, \qquad \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q_i} = \frac{[m]_{q_i}!}{[k]_{q_i}! [m-k]_{q_i}!}.$$

Let

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i, \qquad P = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\omega_i$$

分别为根格和权格，其中 ω_i，$\alpha_j^\vee = \delta_{ij}$。令

$$Q^+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i, \qquad P^+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$$

分别为正根锥和支配积分权集合。我们在 P 上使用支配序：若 $\lambda-\mu\in Q^+$，则 $\mu\le\lambda$。当 $\mu\le\lambda$ 且 $\mu\neq\lambda$ 时，我们记作 $\mu<\lambda$。对于 $\lambda=\sum_i m_i\alpha_i\in Q$，记 $K_\lambda=K_1^{m_1}\cdots K_n^{m_n}$。那么

$$U^0=\Bbbk[K_1^{\pm1},\dots,K_n^{\pm1}]=\Bbbk[Q].$$

令 $\mathrm{E}:=\mathrm{Hom}(Q,\{\pm1\})$ 表示从可加群 Q 到乘法群 $\{\pm1\}\subseteq\Bbbk^\times$ 的同态群，其运算为逐点乘法。令 $\Gamma:=\mathrm{Aut}(\mathrm{Dyn}(\mathfrak{g}))$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图自同构群。由于 Q 是秩为 n 的自由群，

$$\mathcal{E}\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n,\qquad |\mathcal{E}|=2^n.$$

令 U^+ 和 U^- 分别为由 E_i 和 F_i 生成的子代数。我们采用由 $\deg K_i^{\pm1}=0$、$\deg E_i=\alpha_i$ 和 $\deg F_i=-\alpha_i$ 给出的Q-分次，以及三角分解 $U=U^-U^0U^+$。对于 $\nu\in Q^+$，令 U^+_ν 和 $U^-_{-\nu}$ 分别表示 U^+ 和 U^- 中次数为 ν 和 $-\nu$ 的齐次分量。

2.2 量子 Harish–Chandra 同构

令 U_0 表示根格分次的零分量，以区别于环面子代数 U^0。三角分解给出

$$U_0=U^0\oplus\bigoplus_{\nu\in Q^+\setminus\{0\}}U^-_{-\nu}U^0U^+_\nu.$$

令 $\pi\colon U_0\to U^0$ 为到第一个直和项的投影。由于 q 不是单位根，$Z(U)\subseteq U_0$。令 ρ 为所有正根之和的一半，并定义

$$\gamma_{-\rho}(K_\lambda)=q^{-(\rho,\lambda)}K_\lambda,\qquad U^0_{\mathrm{ev}}=\bigoplus_{\lambda\in Q\cap 2P}\Bbbk K_\lambda.$$

由于 $(\rho,\ \alpha_i)=d_i\in\mathbb{Z}$，我们有 $(\rho,\ \lambda)\in\mathbb{Z}$，对每个 $\lambda\in Q$都成立。因此，此定义中的所有标量都属于 $\Bbbk$。W 在 U^0 上的作用就是作用 $w(K_\lambda)=K_{w\lambda}$。

命题 2.1。映射

$$\gamma_{-\rho}\circ\pi\colon Z(U)\xrightarrow{\sim}(U^0_{\mathrm{ev}})^W$$

是一个 $\Bbbk$-代数同构。

证明。 这是量子 Harish–Chandra 同构；参见 [9, 定理 6.25 和 §6.26],，以及 §8.30 中关于将其推广到任意非单位根参数的内容。 □

2.3 单位、环面作用与指数矩阵

我们首先回顾单位的标准描述。

引理 2.2。 U 的单位元恰为

$$U^\times=\{cK_\lambda : c\in\Bbbk^\times,\ \lambda\in Q\}.$$

证明。 [20, 引理 2]中的论证在此同样适用。该论证用到了根格分次、平凡模以及 PBW 单项式的首项乘法；在我们的假设下，这些条件均仍然成立。特别是，它不要求 q 是超越的。□

引理 2.3。 令 $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$。那么存在唯一的元素 $\varepsilon \in \mathcal{E}$ 和 $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(Q)$ 使得

$$\sigma(K_\lambda) = \varepsilon(\lambda) K_{\varphi(\lambda)} \qquad (\lambda \in Q).$$

证明。 根据引理 2.2， U 中的每个单位元都有唯一的表达式 aK_λ，其中 $a \in \Bbbk^\times$ 且 $\lambda \in Q$。由于 σ 将单位映射为单位，因此存在唯一确定的映射 $c\colon Q \to \Bbbk^\times$ 和 $\varphi\colon Q \to Q$，使得

$$\sigma(K_\lambda) = c(\lambda) K_{\varphi(\lambda)} \qquad (\lambda \in Q).$$

对于 λ， $\mu \in Q$，将 σ 作用于 $K_{\lambda+\mu} = K_\lambda K_\mu$ 可得

$$c(\lambda+\mu) K_{\varphi(\lambda+\mu)} = c(\lambda)c(\mu) K_{\varphi(\lambda)+\varphi(\mu)}.$$

因此，单位元表达式的唯一性意味着

$$\varphi(\lambda+\mu) = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu), \qquad c(\lambda+\mu) = c(\lambda)c(\mu).$$

因此， φ 是可加的，且 c 是 Q的一个特征。

对 σ^{-1}应用相同的论证，写作

$$\sigma^{-1}(K_\nu) = d(\nu) K_{\psi(\nu)} \qquad (\nu \in Q),$$

其中 $d\colon Q \to \Bbbk^\times$ 是一个特征，且 $\psi\colon Q \to Q$ 是可加的。由于 σ^{-1} 固定标量，我们有 e

$$K_\lambda = \sigma^{-1}\big(\sigma(K_\lambda)\big) = c(\lambda) d\big(\varphi(\lambda)\big) K_{\psi(\varphi(\lambda))}.$$

比较指数可得 $\psi(\varphi(\lambda)) = \lambda$。类似地， $\sigma(\sigma^{-1}(K_\nu)) = K_\nu$给出 $\varphi(\psi(\nu)) = \nu$。因此 $\psi = \varphi^{-1}$ 和 $\varphi \in$属于 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(Q)$。

最后，令 $\eta : U \to \Bbbk$ 为如下定义的代数同态:

$$\eta(E_i) = \eta(F_i) = 0, \qquad \eta(K_i) = 1.$$

设 $\chi = \eta \circ \sigma$。则 $\chi(K_i) = c(\alpha_i)$ 且 $\chi(K_i^{-1}) = c(\alpha_i)^{-1}$。由于 $\Bbbk$ 是交换的， $\chi($ $E_iF_i - F_iE_i) = 0$。将 χ应用于

$$E_iF_i - F_iE_i = \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$$

可得

$$0 = \frac{c(\alpha_i) - c(\alpha_i)^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}.$$

由于 q 不是单位根， $q_i - q_i^{-1} \neq 0$。因此 $c(\alpha_i)^2 = 1$，从而对每个 i， $c(\alpha_i) \in \{\pm 1\}$。由于这些简单根构成 Q的一个 $\mathbb{Z}$-基，特征 c 的取值属于 $\{\pm 1\}$。令 $\varepsilon = c$，即可证明该断言，包括唯一性。□

由引理 2.3 可知， U 的每个代数自同构都保持 U^0 ，因此我们可以写作

$$\mathrm{Aut}_U(U^0) := \{\sigma|_{U^0} : \sigma \in \mathrm{Aut}(U)\}.$$

由引理 2.3 可知，每个 $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$ 都通过带符号的劳朗单项式作用于环面生成元。记

$$\sigma(K_i) = \varepsilon_i K_1^{b_{i1}} \cdots K_n^{b_{in}}, \qquad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, \qquad 1 \le i \le n,$$

我们定义相应的指数矩阵 $A_\sigma := (b_{ij})_{1 \le i,\ j \le n}$。 由于 $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(Q)$ 且 $\varphi(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij}\alpha_j$， 转置矩阵 A_σ^T是 φ关于基 α_1， ...， α_n的矩阵。因此$A_\sigma \in GL_n(\mathbb{Z})$。

对于 $\delta \in \mathrm{E}$，令 $\delta_i = \delta(\alpha_i)$，并定义 U 上的符号自同构 s_δ 如下：

$$s_\delta(E_i) = \delta_i E_i, \qquad s_\delta(F_i) = F_i, \qquad s_\delta(K_i) = \delta_i K_i \quad (1 \le i \le n).$$

特别地，对每个 $\lambda \in Q$，$s_\delta(K_\lambda) = \delta(\lambda) K_\lambda$。

如果对每个 $\lambda \in Q$，$\tau(K_\lambda) = K_{\varphi(\lambda)}$，其中 $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(Q)$，则称自同构 τ 在 *Cartan* 环面上无符号。我们有如下引理。

引理 2.4。设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$，并写作

$$\sigma(K_\lambda) = \varepsilon(\lambda) K_{\varphi(\lambda)} \qquad (\lambda \in Q)$$

如引理 *2.3* 中所示。令

$$\delta = \varepsilon \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{E}, \qquad \tau = s_\delta \circ \sigma.$$

那么 τ 是无符号的。特别地，$A_\tau = A_\sigma$。

证明。由于 φ 是格自同构，$\delta = \varepsilon \circ \varphi^{-1}$ 属于 E，并且对每个$\lambda \in Q$，$\delta(\varphi(\lambda)) = \varepsilon(\lambda)$。因此

$$\tau(K_\lambda) = s_\delta\big(\varepsilon(\lambda) K_{\varphi(\lambda)}\big) = \varepsilon(\lambda)\delta(\varphi(\lambda)) K_{\varphi(\lambda)} = \varepsilon(\lambda)^2 K_{\varphi(\lambda)} = K_{\varphi(\lambda)}.$$

因此，τ 和 σ 具有相同的指数矩阵。 □

对于 $\lambda \in P$，令 $[\lambda]$ 表示其关于有序基 ω_1，……，ω_n的坐标列。W 在 P 上的自然作用定义了一个忠实表示

$$\vartheta \colon W \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}), \qquad \vartheta(w) = \big([w(\omega_1)], \ldots, [w(\omega_n)]\big).$$

Thus

$$[w(\lambda)] = \vartheta(w)[\lambda] \qquad (w \in W,\ \lambda \in P),$$

并记作 $\vartheta(W) = \{\vartheta(w) \colon\ w \in W\}$。

每个 $\xi \in \Gamma$ 通过以下方式在线性地作用于根空间和余根空间：

$$\xi(\alpha_i) = \alpha_{\xi(i)}, \qquad \xi(\alpha_i^\vee) = \alpha_{\xi(i)}^\vee \quad (1 \le i \le n).$$

由于 ξ 保持 Cartan 矩阵不变，这些作用保持自然配对。因此，

$$\langle \xi(\omega_i), \alpha_{\xi(j)}^\vee \rangle = \langle \omega_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij},$$

所以 $\xi(\omega_i) = \omega_{\xi(i)}$。特别地，$\xi$保持 P不变。令 $[\xi] \in GL_n(\mathbb{Z})$表示其关于有序基 ω_1，……，ω_n的相应置换矩阵。于是

$$[\xi(\lambda)] = [\xi][\lambda] \qquad (\lambda \in P).$$

2.4 标准自同构与根系自同构

引理 2.5. 代数 $U = U_q(\mathfrak{g})$ 具有以下自同构。

(a) 由 I 定义的对合自同构

$$I(E_i) = F_i, \qquad I(F_i) = E_i, \qquad I(K_i) = K_i^{-1}.$$

(b) 对于 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\Bbbk^\times)^n$，由 D_a 定义的对角自同构

$$D_a(E_i) = a_i E_i, \qquad D_a(F_i) = a_i^{-1} F_i, \qquad D_a(K_i) = K_i.$$

(c) 对于 $\xi \in \Gamma$，由 G_ξ 定义的图自同构

$$G_\xi(E_i) = E_{\xi(i)}, \qquad G_\xi(F_i) = F_{\xi(i)}, \qquad G_\xi(K_i) = K_{\xi(i)}.$$

（*d*）上述定义的符号自同构 $s_\delta, \delta \in \mathcal{E}$。它们满足

$$s_\delta \circ s_\varepsilon = s_{\delta\varepsilon}, \qquad s_\delta^2 = \mathrm{id}_U \quad (\delta, \varepsilon \in \mathcal{E}),$$

其中 $(\delta\varepsilon)(\lambda) = \delta(\lambda)\varepsilon(\lambda)$。映射 $\delta \mapsto s_\delta$ 将 $\mathcal{E}$ 与 U 的符号自同构子群对应起来。

（*e*）*Lusztig* 辫自同构 $T_1、\ldots、T_n$，它们满足

$$T_i(K_\lambda) = K_{s_i(\lambda)} \qquad (\lambda \in Q),$$

其中，s_i 是对应于 α_i 的简单反射，$1 \le i \le n$。

证明。对于（a）—（d），这些赋值保持 U 的定义关系，且它们的逆分别为 $I、D_{a^{-1}}、G_{\xi^{-1}}$ 和 s_δ，其中 $a^{-1} = (a_1^{-1}、\ldots、a_n^{-1})$。通过在生成元上进行计算即可得到（d）中的恒等式。此外，$s_\delta = \mathrm{id}_U$ 蕴含对于每个 i 都有 $\delta(\alpha_i) = 1$，从而得到 $\delta = 1$。关于（e），参见 [9,第 8]章。□

供后文参考，下面列出单李型的 Dynkin 图自同构群。对于类型 D 和 E，我们采用简单根的 Bourbaki 编号。

type	Γ =Aut（Dyn($\mathfrak{g}$)）	非平凡的图作用
A_1	1	none
A_n $(n \ge 2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\xi(i) = n + 1 - i$
B_n，C_n $(n \ge 2)$	1	none
D_4	S_3	对 $\{1,3,4\}$ 的任意置换，2 保持不变
D_n $(n \ge 5)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\xi(n-1) = n$，$\xi(n) = n - 1$
E_6	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\xi = (1\ 6)(3\ 5)$，$\xi(2) = 2, \xi(4) = 4$
E_7, E_8, F_4, G_2	1	none

因此，唯一具有非平凡图自同构的单根系类型是 A_n $(n \ge 2)$、D_n $(n \ge 4)$ 和 E_6；在类型 D_4 中，完整的图自同构群为 S_3。

我们通过其在简单根上的作用，将 Γ 视为 Aut(Φ) 中保持所选单根系 Δ 的子群。回顾以下标准结果；参见 [8, §12.2]。

引理 2.6. 根系自同构群是以下半直积

$$\mathrm{Aut}(\Phi) = W \rtimes \Gamma.$$

特别地，每个 $\psi \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ 都有唯一表示 $\psi = w\xi$，其中 $w \in W$ 且 $\xi \in \Gamma$。

对于 $\varepsilon \in \mathrm{E}$ 和 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Phi)$，令 $\tau_{\varepsilon,\varphi} \in \mathrm{Aut}(U^0)$ 定义如下：

$$\tau_{\varepsilon,\varphi}(K_\lambda) = \varepsilon(\lambda) K_{\varphi(\lambda)} \qquad (\lambda \in Q).$$

命题 2.7. $\tau_{\varepsilon、\varphi}$ 这些自同构，其中 $\varepsilon \in \mathcal{E}$ 且 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Phi)$，构成 $\mathrm{Aut}_U(U^0)$ 的一个子群，该子群与 $\mathcal{E} \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi)$ 同构，其作用为

$$\varphi \cdot \varepsilon = \varepsilon \circ \varphi^{-1}.$$

证明. 由引理 2.6，可写作 $\varphi = w\xi$，其中 $w \in W$ 且 $\xi \in \Gamma$。取一个约化表达式$w = s_{i_1}\cdots s_{i_r}$，并令 $T_w = T_{i_1} \circ \cdots \circ T_{i_r}$。由引理 2.5，$T_w(K_\lambda) = K_{w(\lambda)}$，因此

$$(T_w \circ G_\xi \circ s_\varepsilon)(K_\lambda) = \varepsilon(\lambda)K_{w\xi(\lambda)} = \tau_{\varepsilon,\varphi}(K_\lambda) \qquad (\lambda \in Q).$$

因此，每个$\tau_{\varepsilon,\varphi}$ 都可扩张为 U的代数自同构。

群运算是复合。对于 $\varepsilon, \delta \in \mathrm{E}$ 和 $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(\Phi)$，在 K_λ上直接计算可得

$$\tau_{\varepsilon,\varphi} \circ \tau_{\delta,\psi} = \tau_{\delta(\varepsilon\circ\psi),\,\varphi\psi},$$

其中，$\varphi\psi = \varphi \circ \psi$，且特征逐点相乘。

映射$\varepsilon \mapsto \tau_{\varepsilon,\mathrm{id}}$ 和$\varphi \mapsto \tau_{1,\varphi}$ 是到 $\mathrm{Aut}_U(U^0)$ 中的单射群同态。它们的像的交集是平凡的：若$\tau_{\varepsilon,\mathrm{id}} = \tau_{1,\varphi}$，则对每个 $\lambda \in Q$都有 $\varepsilon(\lambda)K_\lambda = K_{\varphi(\lambda)}$，所以，由元素 K_λ 的线性无关性可知 $\varphi = \mathrm{id}$ 且 $\varepsilon = 1$。此外，

$$\tau_{\varepsilon,\varphi} = \tau_{\varepsilon\circ\varphi^{-1},\mathrm{id}} \circ \tau_{1,\varphi}.$$

由于 $\varepsilon \mapsto \varepsilon \circ \varphi^{-1}$ 是 E 上的双射，所有$\tau_{\varepsilon,\varphi}$ 构成这两个子群的乘积。

对于 $\lambda \in Q$，直接计算可得

$$\big(\tau_{1,\varphi} \circ \tau_{\varepsilon,\mathrm{id}} \circ \tau_{1,\varphi}^{-1}\big)(K_\lambda) = \varepsilon\big(\varphi^{-1}(\lambda)\big)K_\lambda = \tau_{\varepsilon\circ\varphi^{-1},\mathrm{id}}(K_\lambda).$$

因此，第二个子群以所述作用正规化第一个子群。于是，它们的乘积是 $\mathrm{Aut}_U(U^0)$ 的一个子群，并且是这两个子群的内部半直积。明确地说，所得同构为

$$\tau_{\varepsilon,\varphi} \longmapsto (\varepsilon \circ \varphi^{-1}, \varphi). \qquad \square$$

2.5 扭曲模与 1 型表示

对于一个 U-模 M 和 $\mu \in P$，令

$$M_\mu = \{v \in M : K_i v = q_i^{\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle} v \text{ for all } i\}.$$

如果 M 是一个 1 型模，则称之为

$$M = \bigoplus_{\mu \in P} M_\mu.$$

定义 2.8。设 M 是一个左 U-模，并设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$。$\sigma$-扭曲模 M^σ 是向量空间 M，并赋予如下 U-作用

$$x \cdot_\sigma m = \sigma(x)m \qquad (x \in U,\ m \in M).$$

由于 $\sigma(U) = U$，子空间 $N \subseteq M$ 是 M^σ 的子模，当且仅当它是 M 的子模。因此，M^σ 不可约，当且仅当 M 不可约。

接下来，我们记录扭曲对权的影响。

引理 2.9. 设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$ 满足

$$\sigma(K_i) = K_1^{b_{i1}} \cdots K_n^{b_{in}} \qquad (1 \le i \le n).$$

设 M 是一个 l U 型模，且 $v \in M$ 是一个权为 $\mu \in P$ 的非零权向量。若将 v 视为 M^σ 中的向量时，其权为 $\mu' \in P$ 型权，则

$$[\mu'] = D^{-1}A_\sigma D[\mu].$$

证明。写

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} r_j \omega_j, \qquad \mu' = \sum_{j=1}^{n} r'_j \omega_j, \qquad r_j, r'_j \in \mathbb{Z}.$$

由于 $K_j v = q_j^{r_j} v = q^{d_j r_j} v$，定义 2.8 给出

$$K_i \cdot_\sigma v = \sigma(K_i) v = \left(\prod_{j=1}^{n} q_j^{b_{ij} r_j} \right) v = q^{\sum_{j=1}^{n} b_{ij} d_j r_j} v.$$

另一方面，关于 μ' 的假设给出

$$K_i \cdot_\sigma v = q_i^{r'_i} v = q^{d_i r'_i} v.$$

由于 $v \neq 0$ 和 q 不是单位根，比较可得

$$d_i r'_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} d_j r_j \qquad (1 \leq i \leq n).$$

这些等式等价于

$$D[\mu'] = A_\sigma D[\mu].$$

乘以 D^{-1} 可得所需公式。 □

我们回顾有限维不可约 U-模的标准分类；参见 [9,§§5.1–5.2 及定理 5.10]。

引理 2.10. 设 V 是有限维不可约的 U-模。则存在 $\lambda \in P^+$ 和$\varepsilon \in \mathcal{E}$ 使得

$$V \cong L(\lambda)^{s_\varepsilon},$$

其中， $L(\lambda)$ 表示最高权为.....的有限维不可约*1* U型模 λ.

引理 2.11. 设 $\tau \in \mathrm{Aut}(U)$ 在 *Cartan* 环面上无符号。那么，对每个 $\lambda \in P^+$，存在唯一的 $\mu \in P^+$ 使得

$$L(\lambda)^\tau \cong L(\mu).$$

证明. 扭曲保持有限维性和不可约性。根据引理 2.10，存在$\mu \in P^+$ 和 $\varepsilon \in$ E使得

$$L(\lambda)^\tau \cong L(\mu)^{s_\varepsilon}.$$

由于 $L(\lambda)$是1 型的， K_j在 $L(\lambda)$上同时可对角化，其特征值属于 $q_j^{\mathbb{Z}} \subseteq q^{\mathbb{Z}}$。由于 τ无符号，每个 $\tau(K_i)$都是 K_j中的一个 Laurent 单项式。因此， $L(\lambda)$上的每个K_i特征值$^\tau$都属于 $q^{\mathbb{Z}}$。

设 v_μ 是 $L(\mu)$ 的最高权向量。在 $L(\mu)^{s_\varepsilon}$ 中，我们有

$$K_i \cdot_{s_\varepsilon} v_\mu = \varepsilon(\alpha_i) q_i^{\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle} v_\mu.$$

Thus

$$\varepsilon(\alpha_i) q_i^{\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle} \in q^{\mathbb{Z}}.$$

由于 $q^{\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle_i} \in q^{\mathbb{Z}}$，因此

$$\varepsilon(\alpha_i) \in q^{\mathbb{Z}} \cap \{\pm 1\} = \{1\},$$

其中，最后一个等式由以下假设得出： q 不是单位根，且 $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$。简单根生成 Q，因此 $\varepsilon = 1$。于是，

$$L(\lambda)^\tau \cong L(\mu).$$

μ 的唯一性源于这样一个事实：最高权彼此不同的不可约最高权模互不同构。□

3 根系的保持

本节证明，对于无符号自同构 τ，由 $D^{-1}A_\tau D$ 定义的权变换保持根系不变。我们首先证明该变换保持权格和 Weyl 不变特征环不变。接着，我们利用相应的不动域证明它将 Weyl 群正规化，并通过权格上的反射作用恢复根。这便得到定理 3.6 中的矩阵分解。

3.1 形式特征与特征环的保持

记

$$\mathbb{Z}[P] = \bigoplus_{\mu \in P} \mathbb{Z} e^\mu$$

P 的整群代数，乘法为 $e^\mu e^\nu = e^{\mu+\nu}$。Weyl 群通过其在权格上的作用作用于 $\mathbb{Z}[P]$:

$$w(e^\mu) = e^{w\mu} \qquad (w \in W,\ \mu \in P).$$

我们将相应的不变子环记为

$$\mathbb{Z}[P]^W := \{f \in \mathbb{Z}[P] \mid w(f) = f \text{ for all } w \in W\}.$$

如果 M 是一个有限维 type-1 U 模，其形式特征为

$$\operatorname{ch} M = \sum_{\mu \in P} (\dim M_\mu) e^\mu \in \mathbb{Z}[P].$$

对于 $\lambda \in P^+$， $L(\lambda)$ 的权重数具有 W不变性，因此

$$\operatorname{ch} L(\lambda) \in \mathbb{Z}[P]^W.$$

对于 $\lambda \in P^+$，定义 Weyl 轨道和

$$m_\lambda := \sum_{\mu \in W\lambda} e^\mu.$$

P 中的每个 Weyl 轨道都包含唯一的支配权，而 aW不变元素的系数在每个轨道上均为常数。因此

$$\mathbb{Z}[P]^W = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{Z} m_\lambda.$$

不可约特征构成 $\mathbb{Z}[P]^W$的一个 $\mathbb{Z}$-基。事实上，Weyl 轨道 $W\lambda$ 中的每个权在 $L(\lambda)$ 中的重数均为一。特征中出现的其他每个 Weyl 轨道都有唯一的支配代表元 μ，且满足支配序中的 $\mu < \lambda$。由于该特征具有 W不变性，按 Weyl 轨道对其各项分组可得

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = m_\lambda + \sum_{\substack{\mu \in P^+ \\ \mu < \lambda}} a_{\lambda\mu} m_\mu, \qquad a_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

对于每个 $\lambda \in P^+$，满足 $\mu \leq \lambda$的 $\mu \in P^+$ 只有有限多个。因此，这些单位三角关系给出

$$\mathbb{Z}[P]^W = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{Z} \operatorname{ch} L(\lambda).$$

我们称 $\mathbb{Z}[P]^W$ 为 Weyl 不变特征环。

设 $\tau \in \mathrm{Aut}(U)$ 在 U^0 上是无符号的，并令

$$Y := D^{-1} A_\tau D \in GL_n(\mathbb{Q}).$$

由于 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ 构成 $P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的一组基，矩阵 Y 唯一确定一个 $\mathbb{Q}$-线性自同构

$$\psi_Y : P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

其特征为

$$[\psi_Y(\mu)] = Y[\mu] \qquad (\mu \in P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}). \tag{1}$$

引理 3.1. 线性映射 ψ_Y 保持权格：

$$\psi_Y(P) = P.$$

特别地，$Y \in GL_n(\mathbb{Z})$。

证明。对每个基本权 ω_i，选取一个非零最高权向量 $v_i \in L(\omega_i)$。由于每个 $\tau(K_j)$ 都是 $K_1, \ldots, K_n$ 中的一个 Laurent 单项式，向量 v_i 也是扭曲模 $L(\omega_i)^\tau$ 中 K_j 的公共特征向量。由引理 2.11，该模是 1 型的，因此扭曲模中v_i 的权属于 P。由引理 2.9，该权的坐标列为$Y[\omega_i] = [\psi_Y(\omega_i)]$。因此该权是 $\psi_Y(\omega_i)$。于是

$$\psi_Y(\omega_i) \in P \qquad (1 \le i \le n).$$

Sin由于基本权构成 $\mathbb{Z}$ 的 P-基，矩阵 Y 的元素均为整数。此外，

$$\det Y = \det(D^{-1} A_\tau D) = \det A_\tau = \pm 1.$$

因此 $Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，从而 $\psi_Y(P) = P$。 □

根据引理 3.1，ψ_Y 诱导出一个 $\mathbb{Z}$-代数自同构

$$\Psi_Y : \mathbb{Z}[P] \longrightarrow \mathbb{Z}[P], \qquad \Psi_Y(e^\mu) = e^{\psi_Y(\mu)}.$$

引理 3.2. 自同构 Ψ_Y 保持 *Weyl* 不变特征环：

$$\Psi_Y(\mathbb{Z}[P]^W) = \mathbb{Z}[P]^W.$$

更准确地说，Ψ_Y 置换不可约特征 $\mathrm{ch}\ L(\lambda)$，$\lambda \in P^+$。

证明. 设 $\lambda \in P^+$。根据引理 2.11，存在唯一的 $\lambda' \in P^+$ 使得

$$L(\lambda)^\tau \cong L(\lambda').$$

由引理 2.9，扭曲将权 μ 映射为 $\psi_Y(\mu)$。由于 ψ_Y 在 P 上由引理 3.1 可知是双射，因此我们有

$$\big(L(\lambda)^\tau\big)_{\psi_Y(\mu)} = L(\lambda)_\mu \qquad (\mu \in P)$$

作为共同底层向量空间的子空间。因此权重数得以保留

d，且

$$\begin{aligned}\Psi_Y\big(\mathrm{ch}\, L(\lambda)\big) &= \Psi_Y\left(\sum_{\mu \in P} \dim_{\mathbb{k}} L(\lambda)_\mu\, e^\mu\right) = \sum_{\mu \in P} \dim_{\mathbb{k}} L(\lambda)_\mu\, e^{\psi_Y(\mu)} \\ &= \sum_{\mu \in P} \dim_{\mathbb{k}} \big(L(\lambda)^\tau\big)_{\psi_Y(\mu)}\, e^{\psi_Y(\mu)} = \mathrm{ch}\big(L(\lambda)^\tau\big) = \mathrm{ch}\, L(\lambda').\end{aligned}$$

自同构 τ^{-1} 也是无符号的，因此引理 2.11 同样适用于它。通过 τ 和通过 τ^{-1} 的扭曲互为逆运算，因为对于每个 U-模 M，

$$(M^{\tau})^{\tau^{-1}} = M, \qquad (M^{\tau^{-1}})^{\tau} = M.$$

特别地，$L(\lambda')^{\tau^{-1}} \cong L(\lambda)$。因此，对应关系 $\lambda \mapsto \lambda'$ 在 P^+ 上是双射的，而 Ψ_Y 置换不可约特征。

最后，这些特征构成 $\mathbb{Z}[P]^W$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。因此

$$\Psi_Y\big(\mathbb{Z}[P]^W\big) = \bigoplus_{\lambda\in P^+} \mathbb{Z}\,\Psi_Y\big(\operatorname{ch} L(\lambda)\big) = \bigoplus_{\lambda'\in P^+} \mathbb{Z}\,\operatorname{ch} L(\lambda') = \mathbb{Z}[P]^W,$$

其中第二个等式使用了 $\lambda \mapsto \lambda'$ 的双射性。 □

3.2 Weyl 群的不动域与正规化

Let

$$F := \operatorname{Frac}\big(\mathbb{Q}[P]\big).$$

W 和 Ψ_Y 在 $\mathbb{Z}[P]$ 上的作用自然延拓到 $\mathbb{Q}[P]$ 和 F。我们将 $\mathbb{Q}[P]$ 的不变子环记为 $\mathbb{Q}[P]^W$，将 W 在 F 中的不动域记为 F^W。

引理 3.3。有

$$F^W = \operatorname{Frac}\big(\mathbb{Q}[P]^W\big).$$

证明。包含关系 $\operatorname{Frac}(\mathbb{Q}[P]^W) \subseteq F^W$ 显然成立。反之，设 $f = a/b \in F^W$，其中 $a, b \in \mathbb{Q}[P]$ 且 $b \neq 0$。令

$$B := \prod_{w\in W} w(b) \in \mathbb{Q}[P]^W \setminus \{0\}.$$

由于 b 整除 B，我们有 $fB = a(B/b) \in \mathbb{Q}[P]$。$f$ 和 B 都是 W 不变的，因此 $fB \in \mathbb{Q}[P]^W$。于是

$$f = \frac{fB}{B} \in \operatorname{Frac}\big(\mathbb{Q}[P]^W\big),$$

这就证明了反向包含关系。 □

引理 3.4。自同构 ψ_Y 在 $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}}(P)$ 中正规化 W；也就是说，

$$\psi_Y W \psi_Y^{-1} = W.$$

证明。根据引理 3.2，

$$\Psi_Y\big(\mathbb{Z}[P]^W\big) = \mathbb{Z}[P]^W.$$

$\mathbb{Q}[P]^W$ 的每个元素都有一个正整数倍属于 $\mathbb{Z}[P]^W$。因此，作 Ψ_Y $\mathbb{Q}$-线性延拓可得

$$\Psi_Y\big(\mathbb{Q}[P]^W\big) = \mathbb{Q}[P]^W.$$

由引理 3.3 可知 F^W = 分式域($\mathbb{Q}[P]^W$)，因此

$$\Psi_Y(F^W) = F^W.$$

W 在 F 上的作用是忠实的。事实上，如果 $w \in W$ 在 F 上作用平凡，那么

$$e^{w\mu} = w(e^{\mu}) = e^{\mu} \qquad (\mu \in P).$$

由于不同的权标记 $\mathbb{Q}[P]$的不同基元素，因此对每个 $\mu \in P$都有 $w\mu = \mu$。因此，W 在 P 上的忠实作用意味着 $w = 1$。由于W 是有限的，Artin不变域定理给出

$$\mathrm{Aut}_{F^W}(F) = W.$$

现在令 $w \in W$ 对于每个 $f \in F^W$ 我们有 $\Psi_Y^{-1}(f) \in F^W$ 因此

$$(\Psi_Y w \Psi_Y^{-1})(f) = \Psi_Y\big(w(\Psi_Y^{-1}(f))\big) = \Psi_Y(\Psi_Y^{-1}(f)) = f.$$

因此，$\Psi_Y w \Psi_Y^{-1}$逐点固定 F^W，所以对于某个 $u \in W$ 有 $\Psi_Y w \Psi_Y^{-1} = u$。对于每个 $\mu \in P$，这给出

$$e^{(\psi_Y w \psi_Y^{-1})(\mu)} = (\Psi_Y w \Psi_Y^{-1})(e^\mu) = u(e^\mu) = e^{u\mu}.$$

由于元素 e^μ、$\mu \in P$ 是 $\mathbb{Q}[P]$ 的不同基元素，我们得到 $\psi_Y w \psi_Y^{-1} = u \in W$ 因此，

$$\psi_Y W \psi_Y^{-1} \subseteq W.$$

两个群的有限阶相同，因此这个包含关系实际上是等式。 □

3.3 根系自同构

命题 3.5。 设 $\tau \in \mathrm{Aut}(U)$ 在 *Cartan* 环面上是无符号的，令 $Y = D^{-1}A_\tau D$，并设 ψ_Y由(1)定义。则

$$\psi_Y(\Phi) = \Phi.$$

证明。 由引理 3.1 和 3.4,

$$\psi_Y(P) = P, \qquad \psi_Y W \psi_Y^{-1} = W.$$

我们首先证明

$$(1 - s_\gamma)P = \mathbb{Z}\gamma \qquad (\gamma \in \Phi).$$

对于每个 $\lambda \in P$，反射公式给出

$$(1 - s_\gamma)(\lambda) = \langle \lambda, \gamma^\vee \rangle \gamma \in \mathbb{Z}\gamma.$$

因此 $(1 - s_\gamma)P \subseteq \mathbb{Z}\gamma$。

反过来，设 $\gamma = w(\alpha_i)$，其中 $w \in W$，且 α_i 是某个单根。由于 $w(\omega_i) \in P$且$\gamma^\vee = w(\alpha_i^\vee)$，我们有

$$\langle w(\omega_i), \gamma^\vee \rangle = \langle w(\omega_i), w(\alpha_i^\vee) \rangle = \langle \omega_i, \alpha_i^\vee \rangle = 1.$$

因此，对于每个 $m \in \mathbb{Z}$,

$$(1 - s_\gamma)\big(mw(\omega_i)\big) = m\gamma.$$

因此 $\mathbb{Z}\gamma \subseteq (1 - s_\gamma)P$，这就证明了该恒等式。

现在令 $\alpha \in \Phi$。共轭元 $\psi_Y s_\alpha \psi_Y^{-1}$属于 W，且其不变子空间的余维为一。由于 W 正交作用，该共轭元是一个反射。由于 W 中的每个反射都是根反射，因此存在 $\beta \in \Phi$ 使得

$$\psi_Y s_\alpha \psi_Y^{-1} = s_\beta.$$

利用上述恒等式和 $\psi_Y(P) = P$，我们得到

$$\mathbb{Z}\psi_Y(\alpha) = \psi_Y\big((1 - s_\alpha)P\big) = (1 - \psi_Y s_\alpha \psi_Y^{-1})P = (1 - s_\beta)P = \mathbb{Z}\beta.$$

因此 $\psi_Y(\alpha) = \pm\beta \in \Phi$，从而 $\psi_Y(\Phi) \subseteq \Phi$。由于 Φ 是有限的且 ψ_Y是单射，该包含关系实际上是等式。□

定理 3.6。 设 $\tau \in \mathrm{Aut}(U)$ 在 *Cartan* 环面上是无符号的。则存在唯一的元素$\xi \in \Gamma$ 和 $w \in W$，使得

$$D^{-1}A_\tau D = [\xi]\vartheta(w).$$

证明。 令 $Y = D^{-1}A_\tau D$。由命题 3.5， $\psi_Y \in$Aut(Φ)。引理 2.6 给出了唯一分解

$$\psi_Y = w_0\xi, \qquad w_0 \in W, \quad \xi \in \Gamma.$$

由于 W 是 Aut(Φ) 的正规子群，我们可以设 $w = \xi^{-1}w_0\xi \in$W 于是

$$\psi_Y = w_0\xi = \xi(\xi^{-1}w_0\xi) = \xi w.$$

ξ 和 w 的唯一性由引理 2.6 得出。相对于有序基 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ 取矩阵可得

$$D^{-1}A_\tau D = Y = [\psi_Y] = [\xi]\vartheta(w). \qquad \square$$

推论 3.7。 对于每个 $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$，存在唯一的元素 $\xi \in \Gamma$ 和 $w \in W$，使得

$$D^{-1}A_\sigma D = [\xi]\vartheta(w).$$

证明。 由引理 2.4，取 $\delta \in$ E，使得 $\tau = s_\delta \circ \sigma$ 在 Cartan 环面上是无符号的，并且 $A_\tau = A_\sigma$。由定理 3.6 可得存在性和唯一性。□

4 嘉当环面和中心的诱导自同构群

4.1 Cartan 环面上的诱导自同构群

现在我们来确定 $\mathrm{Aut}_U(U^0)$。剩下的主要步骤是将第 3 节中得到的权变换与环面限制所诱导的根格自同构联系起来。

定理 4.1。 *A* $\mathbb{k}$-代数自同构 τ *of* U^0 是某个 U 的代数自同构的限制，当且仅当存在唯一的元素 $\varepsilon \in \mathcal{E}$ 和 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ 使得

$$\tau(K_\lambda) = \varepsilon(\lambda)K_{\varphi(\lambda)} \qquad (\lambda \in Q).$$

因此，

$$\mathrm{Aut}_U(U^0) \cong \mathcal{E} \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi),$$

其中 $\varphi \cdot \varepsilon = \varepsilon \circ \varphi^{-1}$。

证明。 设 $\tau \in \mathrm{Aut}_U(U^0)$，并选取 $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$，使得 $\sigma|_{U^0} = \tau$。由引理 2.3，存在唯一的元素 $\varepsilon \in$ E 和 $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(Q)$，使得

$$\tau(K_\lambda) = \sigma(K_\lambda) = \varepsilon(\lambda)K_{\varphi(\lambda)} \qquad (\lambda \in Q).$$

记作 $A_\sigma = (b_{ij})$，并令 $Y = D^{-1}A_\sigma D = (y_{ij})$。根据 A_σ 的定义，

$$\varphi(\alpha_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\alpha_k \qquad (1 \le i \le n).$$

根据推论 3.7，存在 $\xi \in \Gamma$ 和 $w \in W$ 使得

$$[\psi_Y] = Y = [\xi]\vartheta(w).$$

因此 $\psi_Y = \xi w \in$ Aut({v2)。

由于 $A_\sigma D = DY$ 我们有

$$b_{ij}d_j = d_i y_{ij} \qquad (1 \le i, j \le n). \tag{2}$$

利用 $(\alpha_k, \omega_j) = d_k\delta_{kj}$和 $\psi_Y(\omega_j) = \sum_{k=1}^n y_{kj}\omega_k$，我们得到

$$(\varphi(\alpha_i), \omega_j) = \sum_{k=1}^n b_{ik}(\alpha_k, \omega_j) = b_{ij}d_j,$$
$$(\alpha_i, \psi_Y(\omega_j)) = \sum_{k=1}^n y_{kj}(\alpha_i, \omega_k) = d_i y_{ij}.$$

由于 W 和 Γ 都保持标准双线性形式，因此 $\psi_Y = \xi w$也保持该形式。结合 (2)，可得

$$(\varphi(\alpha_i), \omega_j) = (\alpha_i, \psi_Y(\omega_j)) = (\psi_Y^{-1}(\alpha_i), \omega_j) \qquad (1 \le i, j \le n).$$

The 基本权构成有理权空间的一组基，而双线性型是 s
non退化的。因此

$$\varphi(\alpha_i) = \psi_Y^{-1}(\alpha_i) \qquad (1 \le i \le n).$$

因此，φ 在 Q上与 ψ_Y^{-1}一致。由于 ψ_Y^{-1}保持 Φ，我们得到 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Phi)$。

反过来，命题 2.7 表明，所述形式的每个映射都可扩张为 U的代数自同构，并且这些映射构成一个与 $\mathrm{E} \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi)$ 同构的群，其作用如上所述。这证明了逆命题以及半直积描述。□

注。由于 $U^0 = \Bbbk[Q]$ 是劳伦多项式代数，其单位恰好是满足 $c \in \Bbbk^\times$ 和 $\lambda \in Q$的元素cK_λ。由此可得

$$\mathrm{Aut}(U^0) \cong \mathrm{Hom}(Q, \Bbbk^\times) \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(Q) \cong (\Bbbk^\times)^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}),$$

其中 φ 通过 $\varphi \cdot \chi = \chi \circ \varphi^{-1}$作用于特征 χ。定理 4.1指出可延拓到 U 的自同构子群为

$$\mathrm{Aut}_U(U^0) \cong \mathrm{Hom}(Q, \{\pm 1\}) \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi).$$

因此，可延拓到 U 的充要条件是特征的取值属于$\{\pm 1\}$，且格自同构保持 Φ。

推论 4.2. 对于每种 *Cartan* 型，在 *Cartan* 环面上诱导的自同构群为

$$\mathrm{Aut}_U(U^0) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, & A_1, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \big(S_{n+1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big), & A_n,\ n \ge 2, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n\big), & B_n,\ C_n,\ n \ge 2, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes W(F_4), & D_4, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n\big), & D_n,\ n \ge 5, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6 \rtimes \big(W(E_6) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big), & E_6, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7 \rtimes W(E_7), & E_7, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8 \rtimes W(E_8), & E_8, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes W(F_4), & F_4, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes D_6, & G_2. \end{cases}$$

这里 D_6 表示阶为12的二面体群。在每个外半直积中，第一个因子为 $\mathcal{E} = \mathrm{Hom}(Q,\{\pm 1\}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$。第二个因子按证明中的方式与Aut(Φ) 等同，并通过以下方式作用：

$$(\varphi \cdot \varepsilon)(\lambda) = \varepsilon\big(\varphi^{-1}(\lambda)\big) \qquad (\varphi \in \mathrm{Aut}(\Phi),\ \varepsilon \in \mathcal{E},\ \lambda \in Q).$$

证明。 由定理 4.1 和引理 2.6,

$$\mathrm{Aut}_U(U^0) \cong \mathcal{E} \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi), \qquad \mathrm{Aut}(\Phi) = W \rtimes \Gamma.$$

因此，只需确定各类型的根系自同构群。

对于 A_1，我们有 $W = \{1, -\mathrm{id}\}$ 和 $\mathrm{E} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。对于每个 $\varepsilon \in \mathrm{E}$ 和 $\lambda \in Q$,

$$((-\mathrm{id}) \cdot \varepsilon)(\lambda) = \varepsilon(-\lambda) = \varepsilon(\lambda)^{-1} = \varepsilon(\lambda).$$

因此，W 在 E 上作用平凡，从而

$$\mathrm{Aut}_U(U^0) \cong \mathcal{E} \times W \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

对于具有 $n \geq 2$ 的 A_n，我们有 $W(A_n) \cong S_{n+1}$。映射 $-\mathrm{id}$ 保持根系不变，且与 $W(A_n)$ 对易，但不属于 $W(A_n)$。由于 Γ 的阶为 2，Weyl 群在 $\mathrm{Aut}(A_n)$ 中的指数为 2。由于 $-\mathrm{id} \notin W(A_n)$，我们得到

$$\mathrm{Aut}(A_n) = W(A_n)\langle -\mathrm{id}\rangle, \qquad W(A_n) \cap \langle -\mathrm{id}\rangle = \{1\}.$$

由于 $-\mathrm{id}$ 与 $W(A_n)$ 对易，因此

$$\mathrm{Aut}(A_n) = W(A_n) \times \langle -\mathrm{id}\rangle \cong S_{n+1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

对于 B_n 和 C_n，图自同构群是平凡群，而 Weyl 群是带符号坐标置换构成的全群，同构于 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$。对于 D_n，其中 $n \geq 5$，Weyl 群由符号改变次数为偶数的带符号坐标置换组成。非平凡的图自同构可通过改变一个坐标的符号来实现。它们共同生成所有带符号坐标置换，因此

$$\mathrm{Aut}(D_n) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n.$$

对于 D_4，标准 F_4 根系的长根构成一个 D_4 型根系。由于 $W(F_4)$ 保持这些长根不变，因此它是 $\mathrm{Aut}(D_4)$ 的子群。此外，

$$|\mathrm{Aut}(D_4)| = |W(D_4)|\,|\Gamma| = (2^3 \cdot 4!) \cdot 6 = 1152 = |W(F_4)|.$$

因此，$\mathrm{Aut}(D_4) \cong W(F_4)$。

最后，$\Gamma \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 E_6 型中成立，而在 E_7、E_8、F_4 和 G_2 型中是平凡的。此外，$W(G_2)$ 是一个 12 阶二面体群。将这些描述代入定理 4.1，即可得到其余情形及所述作用。□

4.2 中心特征与中心上的无符号作用

接下来，我们利用定理 3.6 中唯一的矩阵分解，确定无符号自同构如何作用于有限维不可约 1 型模。这将是确定其在中心上所诱导作用的主要依据。

引理 4.3. 设 $\tau \in \mathrm{Aut}(U)$ 在 *Cartan* 环面上是无符号的，并设 $\xi \in \Gamma$ 和 $w \in W$ 是满足下述条件的唯一元素：

$$D^{-1} A_\tau D = [\xi]\vartheta(w).$$

那么，对于每个支配积分权 $\lambda \in P^+$,

$$L(\lambda)^\tau \cong L(\xi(\lambda)).$$

证明。 根据引理 2.11， $L(\lambda)^\tau$是一个有限维不可约 1 型模。根据引理 2.9， $L(\lambda)$的权 μ 在扭曲作用下变换为满足以下条件的权 μ'

$$[\mu'] = D^{-1}A_\tau D[\mu] = [\xi]\vartheta(w)[\mu] = [\xi(w(\mu))].$$

因此 $\mu' = \xi(w(\mu))$. 由于 ξw可逆，且 $L(\lambda)$ 的权集在 W作用下保持不变，我们得到

$$\mathrm{wt}\big(L(\lambda)^\tau\big) = \xi w\big(\mathrm{wt}\, L(\lambda)\big) = \xi\big(\mathrm{wt}\, L(\lambda)\big).$$

由于 ξ 置换简单根，因此保持 Q^+ 和 P^+。对于每个 $\mu \in$ 权 $L(\lambda)$，都有$\lambda - \mu \in Q^+$，于是

$$\xi(\lambda) - \xi(\mu) = \xi(\lambda - \mu) \in Q^+.$$

此外， $\lambda \in$是 $L(\lambda)$ 的权，因此 $\xi(\lambda)$ 是 $L(\lambda)^\tau$的一个权。因此， $L(\lambda)^\tau$的最高权为$\xi(\lambda)$。由支配最高权分类可得

$$L(\lambda)^\tau \cong L(\xi(\lambda)). \qquad \square$$

对于 $\lambda \in P^+$，令

$$\chi_\lambda : Z(U) \longrightarrow \Bbbk$$

为 $L(\lambda)$ 的中心特征。尽管不假设 $\Bbbk$ 代数闭，该特征仍取值于 $\Bbbk$。事实上，令 v_λ 张成 $L(\lambda)$ 的一维最高权空间。每个$z \in Z(U)$ 都保持该空间，因此对于某个 $c \in \Bbbk$，有 $zv_\lambda = cv_\lambda$。由中心性，

$$z(uv_\lambda) = u(zv_\lambda) = c\, uv_\lambda \qquad (u \in U).$$

由于 $L(\lambda) = Uv_\lambda$，元素 z通过标量 $c = \chi_\lambda(z)$ 作用于整个 $L(\lambda)$。下面的引理表明，这些中心特征可以区分 $Z(U)$ 的元素。

引理 4.4. 设 $z \in Z(U)$。若对所有 $\lambda \in P^+$，都有 $\chi_\lambda(z) = 0$，则 $z = 0$。

证明。 假设 $z \neq 0$。由命题 2.1， π 在 $Z(U)$ 上的限制是单射，因此$\pi(z) \neq 0$。记

$$\pi(z) = \sum_{j=1}^{r} a_j K_{\nu_j}, \qquad a_j \in \Bbbk \setminus \{0\}, \quad \nu_j \in Q,$$

其中 $r \geq 1$，且 ν_j 两两不同。

对于 $\lambda \in P^+$，令 v_λ 如上所述。根据 π的定义，元素 $z - \pi(z)$ 是 $U^-_\nu U^0 U^+_\nu$中若干项之和，其对应的 $\nu \in Q^+ \setminus \{0\}$，因此湮灭 v_λ。由于 $K_\nu v_\lambda = q^{(\lambda,\nu)}v_\lambda$，我们得到

$$0 = \chi_\lambda(z) = \sum_{j=1}^{r} a_j q^{(\lambda,\nu_j)} \qquad (\lambda \in P^+).$$

我们选取一个严格支配整权 η，使得 $(\eta, \nu_1), \ldots, (\eta, \nu_r)$ 是两两不同的整数。为此，考虑

$$\eta = \omega_1 + t\omega_2 + \cdots + t^{n-1}\omega_n, \qquad t \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

对于每个 $j \neq k$，表达式 $(\eta,\ \nu_j - \nu_k)$ 是关于 t 的非零多项式，因为基本权构成一组基，且双线性型非退化。这样的多项式只有有限个，且每个多项式的根也只有有限个。因此，可以选取一个正整数 t，使它们都不为零，从而得到所需的 η。

令 $\lambda = m\eta$ 依次取 $m = 0$、.....、$r-1$，可得

$$\sum_{j=1}^{r} a_j \left(q^{(\eta,\nu_j)}\right)^m = 0 \qquad (0 \le m \le r-1).$$

系数矩阵是一个范德蒙德矩阵，其行列式为

$$\prod_{1\le j<k\le r} \left(q^{(\eta,\nu_k)} - q^{(\eta,\nu_j)}\right) \neq 0,$$

因为整数指数彼此不同，且 q 不是单位根。因此 $a_1 = \cdots = a_r = 0$，这与 a_j的选取相矛盾。因此 $z = 0$。□

命题 4.5。设 $\tau \in \mathrm{Aut}(U)$ 在 *Cartan* 环面上是无符号的，并设 $\xi \in \Gamma$ 是由定理 *3.6* 根据 τ 所对应的唯一 *Dynkin* 图自同构。那么

$$\tau|_{Z(U)} = G_{\xi^{-1}}|_{Z(U)}.$$

证明。根据引理 4.3,

$$L(\lambda)^\tau \cong L(\xi(\lambda)) \qquad (\lambda \in P^+).$$

对于 $z \in Z(U)$，其在 $L(\lambda)^\tau$上的作用就是 $\tau(z)$在 $L(\lambda)$上的作用。因此,

$$\chi_\lambda(\tau(z)) = \chi_{\xi(\lambda)}(z).$$

另一方面，设 v_λ如上。根据 $G_{\xi^{-1}}$的定义,

$$E_i \cdot_{G_{\xi^{-1}}} v_\lambda = E_{\xi^{-1}(i)} v_\lambda = 0,$$

and

$$K_i \cdot_{G_{\xi^{-1}}} v_\lambda = K_{\xi^{-1}(i)} v_\lambda = q_{\xi^{-1}(i)}^{\langle \lambda, \alpha^\vee_{\xi^{-1}(i)} \rangle} v_\lambda = q_i^{\langle \xi(\lambda), \alpha_i^\vee \rangle} v_\lambda.$$

这里我们使用了

$$q_{\xi^{-1}(i)} = q_i, \qquad \langle \lambda, \alpha^\vee_{\xi^{-1}(i)} \rangle = \langle \xi(\lambda), \alpha_i^\vee \rangle.$$

因此， v_λ是 $L(\lambda)^{G_{\xi^{-1}}}$的最高权向量，其最高权为 $\xi(\lambda)$。由于扭曲保持不可约性，故可得

$$L(\lambda)^{G_{\xi^{-1}}} \cong L(\xi(\lambda)).$$

因此,

$$\chi_\lambda(G_{\xi^{-1}}(z)) = \chi_{\xi(\lambda)}(z) = \chi_\lambda(\tau(z)) \qquad (\lambda \in P^+).$$

$\tau(z)$和$G_{\xi^{-1}}(z)$都属于 $Z(U)$，故由引理 4.4 得

$$\tau(z) = G_{\xi^{-1}}(z).$$

由于 $z \in Z(U)$是任意的，结论得证。 □

现在我们证明，自同构在 Cartan 环面上的限制决定了它在中心上的限制。

推论 4.6。有

$$\ker \rho_0 \subseteq \ker \rho_Z.$$

因此，存在唯一的满射群同态

$$\overline{\rho}_Z : \mathrm{Aut}_U(U^0) \longrightarrow \mathrm{Aut}_U(Z(U))$$

使得

$$\rho_Z = \overline{\rho}_Z \circ \rho_0.$$

它由下式给出

$$\overline{\rho}_Z(\sigma|_{U^0}) = \sigma|_{Z(U)} \qquad (\sigma \in \mathrm{Aut}(U)).$$

证明。令 $\sigma \in \ker \rho_0$。则 σ 在 Cartan 环面上是无符号的，且 $A_\sigma = I_n$，因此

$$D^{-1} A_\sigma D = I_n.$$

由定理 3.6 的唯一性可知， Γ 和W 对应的元素均为恒等式。因此，由命题 4.5 可得

$$\sigma|_{Z(U)} = \mathrm{id}_{Z(U)}.$$

因此 $\ker\ \rho_0 \subseteq \ker\ \rho_Z$。

若 $\sigma|_{U^0} = \tau|_{U^0}$，则

$$\tau^{-1} \circ \sigma \in \ker \rho_0 \subseteq \ker \rho_Z,$$

从而 $\sigma|_{Z(U)} = \tau|_{Z(U)}$。因此， ρ_Z是良定义的。此外，

$$\begin{aligned} \overline{\rho}_Z\big((\sigma|_{U^0}) \circ (\tau|_{U^0})\big) &= (\sigma \circ \tau)|_{Z(U)} \\ &= (\sigma|_{Z(U)}) \circ (\tau|_{Z(U)}), \end{aligned}$$

因此，ρ_Z 是一个群同态。

对于每个 $h \in \mathrm{Aut}_U(Z(U))$，存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$，使得 $h = \sigma|_{Z(U)}$。因此，

$$h = \overline{\rho}_Z(\sigma|_{U^0}),$$

这证明了满射性。根据定义， $\rho_Z = \rho_Z \circ \overline{\rho}_0$ 是恒等式。

最后，如果另一个群同态 f满足 $\rho_Z = f \circ \rho_0$，那么

$$f(\rho_0(\sigma)) = \rho_Z(\sigma) = \overline{\rho}_Z(\rho_0(\sigma)) \qquad (\sigma \in \mathrm{Aut}(U)).$$

由于 ρ_0映射到 $\mathrm{Aut}_U(U^0)$ 上，这就得到 $f = \overline{\rho}_Z$，从而证明了唯一性。 □

4.3 格 $Q \cap 2P$ 与符号自同构

命题 4.7。 存在一个群同构

$$(Q \cap 2P)/2Q \cong (P/Q)[2],$$

其中

$$(P/Q)[2] = \{x \in P/Q \mid 2x = 0\}$$

是 P/Q 的 2-挠子子群。商群如下表所示。

type	$(Q \cap 2P)/2Q$
A_n	$\begin{cases} 0, & n \text{ 偶}, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & n \text{ 奇}, \end{cases}$
B_n、 C_n、 E_7	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
D_n	$\begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, & n \text{ 偶数}, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & n \text{ 奇数}, \end{cases}$
E_6、 E_8、 F_4、 G_2	0

证明。定义

$$\eta : (P/Q)[2] \longrightarrow (Q \cap 2P)/2Q, \qquad \mu + Q \longmapsto 2\mu + 2Q.$$

若 $\mu + Q \in (P/Q)[2],$，则 $2\mu \in Q$。又因 $2\mu \in 2P$，可得 $2\mu \in Q \cap 2P$，因此所示映射的取值属于 $(Q \cap 2P)/2Q$。

我们先验证 η 定义良好。若 $\nu + Q = \mu + Q$，则 $\nu - \mu \in Q$，故 $2\nu - 2\mu \in 2Q$，进而 $2\nu + 2Q = 2\mu + 2Q$。由可加性可知，映射 η 是群同态。接下来，设 $\eta(\mu + Q) = 2Q$。那么 $2\mu \in 2Q$，故存在某个 $\nu \in Q$使得 $2\mu = 2\nu$。由于权格 P 是无挠的，因此可得 $\mu = \nu \in Q$。于是 $\mu + Q = Q$，所以 η 是单射。最后，设 $\lambda + 2Q \in (Q \cap 2P)/2Q$。由于 $\lambda \in 2P$，可写成 $\lambda = 2\mu$，其中 $\mu \in P$。因为 $\lambda \in Q$，所以有$2\mu \in Q$，故 $\mu + Q \in (P/Q)[2]$ 且 $\eta(\mu + Q) = \lambda + 2Q$。因此 η 是满射，进而是同构。

对于不可约根系，标准商群 P/Q 如下；参见 [5, I–IX号图版，（VIII）]。

type	P/Q
A_n	$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
B_n、C_n、E_7	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
D_n	$\begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, & n \text{ 偶}, \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & n \text{ 奇}, \end{cases}$
E_6	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
E_8, F_4, G_2	0

取其 2-扭子群，恰好得到陈述中的表。 □

引理 4.8。 设 $\delta \in \mathcal{E}$。那么，对每个 $z \in Z(U)$,

$$(\gamma_{-\rho} \circ \pi)(s_\delta(z)) = s_\delta\big((\gamma_{-\rho} \circ \pi)(z)\big).$$

证明。 符号自同构 s_δ 保持 Q-分次和三角分解。因此，对每个 $\nu \in Q^+$,

$$s_\delta(U^+_\nu) = U^+_\nu, \qquad s_\delta(U^-_{-\nu}) = U^-_{-\nu}, \qquad s_\delta(U^0) = U^0.$$

因此，它保持

$$U_0 = U^0 \oplus \bigoplus_{\nu \in Q^+ \setminus \{0\}} U^-_{-\nu} U^0 U^+_\nu.$$

由于 π 是沿第二个直和分量到 U^0 上的投影，我们得到

$$\pi \circ s_\delta = s_\delta \circ \pi$$

作用于 U_0上。此外，对每个 $\lambda \in Q$,

$$\gamma_{-\rho}(s_\delta(K_\lambda)) = \delta(\lambda) q^{-(\rho,\lambda)} K_\lambda = s_\delta(\gamma_{-\rho}(K_\lambda)).$$

因此， s_δ和 $\gamma_{-\rho}$在 U^0上可交换。结合这两个交换关系即可得到结论。 □

命题 4.9. 设 $\delta \in \mathcal{E}$。那么

$$s_\delta|_{Z(U)} = \mathrm{id}_{Z(U)} \quad \textit{if and only if} \quad \delta|_{Q \cap 2P} = 1.$$

赋值

$$s_\delta|_{Z(U)} \longmapsto \big(\mu + Q \longmapsto \delta(2\mu)\big) \qquad (\mu + Q \in (P/Q)[2])$$

定义一个群同构

$$\{s_\delta|_{Z(U)} : \delta \in \mathcal{E}\} \cong \mathrm{Hom}\big((P/Q)[2], \{\pm 1\}\big).$$

证明。 根据命题 2.1 和引理 4.8，Harish–Chandra 同构

$$\gamma_{-\rho} \circ \pi : Z(U) \xrightarrow{\sim} (U_{\mathrm{ev}}^0)^W$$

交织符号作用，其中

$$U_{\mathrm{ev}}^0 = \bigoplus_{\lambda \in Q \cap 2P} \Bbbk K_\lambda, \qquad s_\delta(K_\lambda) = \delta(\lambda) K_\lambda.$$

因此， s_δ 逐点固定 $Z(U)$，当且仅当它逐点固定 $(U_{\mathrm{ev}}^0)^W$。

每个 $\delta \in \mathrm{E}$ 在 $2Q$ 上都是平凡的，因为对于 $\nu \in Q$， $\delta(2\nu) = \delta(\nu)^2 = 1$。对于 $\lambda \in Q \cap 2P$，写作 $\lambda = 2\mu$，其中 $\mu \in P$。由于对每个 $w \in W$ 都有 $w\mu - \mu \in Q$，我们得到

$$w\lambda - \lambda = 2(w\mu - \mu) \in 2Q, \qquad \delta(w\lambda) = \delta(\lambda).$$

因此，对于 Weyl 轨道和

$$M_\lambda := \sum_{\nu \in W\lambda} K_\nu \in (U_{\mathrm{ev}}^0)^W,$$

可得

$$s_\delta(M_\lambda) = \sum_{\nu \in W\lambda} \delta(\nu) K_\nu = \delta(\lambda) M_\lambda.$$

单项式 K_ν 线性无关，因此 $M_\lambda \neq 0$。此外，当 λ 遍历 $Q \cap 2P$ 中 Weyl 轨道的代表元时，这些轨道和构成 $(U_{\mathrm{ev}}^0)^W$ 的一个 $\Bbbk$-基。事实上，一个元素是 W 不变的，当且仅当其系数在每个 Weyl 轨道上都是常数。因此， s_δ 逐点固定 $(U_{\mathrm{ev}}^0)^W$，当且仅当对每个 $\lambda \in Q \cap 2P$ 都有 $\delta(\lambda) = 1$。Harish–Chandra 相容性由此证明了所述判据。

现在我们来确定诱导出的群。由于每个符号特征在 $2Q$ 上都平凡，限制定义了一个群同态

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Hom}\big((Q \cap 2P)/2Q, \{\pm 1\}\big), \qquad \delta \longmapsto \big(\lambda + 2Q \longmapsto \delta(\lambda)\big).$$

为证明满射性，任取特征 $\chi : (Q \cap 2P)/2Q \to \{\pm 1\}$。商群 $Q/2Q \cong \bar{} \quad \bar{}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的向量空间，而 $(Q \cap 2P)/2Q$ 是一个子空间。取该子空间的一组基 $\lambda_1, \dots, \lambda_r \quad \bar{}$，并将其扩充为 $Q/2Q$ 的一组基 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$。定义

$$\widetilde{\chi}\left(\sum_{i=1}^n a_i \bar{\lambda}_i\right) := \prod_{i=1}^r \chi(\bar{\lambda}_i)^{a_i}, \qquad a_i \in \{0, 1\}.$$

换言之，我们保留 χ 在原基上的取值，并将每个新增基向量的取值设为 1。基展开的唯一性保证此映射定义良好。由于系数按模 2 相加，且每个符号的平方均为 1，映射 $\widetilde{\chi}$ 是一个群同态。它在 $(Q \cap 2P)/2Q$ 上与 χ 一致。现在令 $\delta(\lambda) = \widetilde{\chi}(\lambda + 2Q)$ 表示 $\lambda \in Q$。于是 $\delta \in \mathrm{E}$，并且

$$\delta(\lambda) = \chi(\lambda + 2Q) \qquad (\lambda \in Q \cap 2P).$$

因此， δ 映射到指定的特征 χ，从而证明了满射性。

这个限制同态的核为 $\{\delta \in \mathrm{E} : \delta|_{Q \cap 2P} = 1\}$。根据已证明的判据，这也是 $\delta \mapsto s_\delta|_{Z(U)}$ 的核。因此，第一同构定理给出一个同构

$$\{s_\delta|_{Z(U)} : \delta \in \mathcal{E}\} \cong \mathrm{Hom}\big((Q \cap 2P)/2Q, \{\pm 1\}\big).$$

最后，令

$$\eta : (P/Q)[2] \xrightarrow{\sim} (Q \cap 2P)/2Q, \qquad \eta(\mu + Q) = 2\mu + 2Q,$$

为命题 4.7 中的同构。与 η 复合可得到一个群同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}\big((Q\cap 2P)/2Q,\{\pm 1\}\big) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\big((P/Q)[2],\{\pm 1\}\big),\\ \chi &\longmapsto \chi\circ\eta,\end{aligned}$$

其逆映射由与 η^{-1} 复合给出。与 $s_\delta|_{Z(U)}$ 对应的 $(Q\cap 2P)/2Q$ 的特征由 $\chi(\lambda+2Q)=\delta(\lambda)$ 给出，其中 $\lambda\in Q\cap 2P$。因此，

$$(\chi\circ\eta)(\mu+Q)=\chi(2\mu+2Q)=\delta(2\mu)\qquad(\mu+Q\in(P/Q)[2]).$$

因此，复合同构恰好就是陈述中的对应关系。

□

4.4 中心的诱导自同构群

现在，我们结合命题 4.5 和命题 4.9，刻画那些作为 U 的代数自同构之限制的中心自同构，并确定它们的群结构。

定理 4.10。 $\Bbbk$-代数自同构 τ 是 $Z(U)$ 的代数自同构之限制，当且仅当存在 $\delta\in\mathcal{E}$ 和 $\xi\in\Gamma$，使得

$$\tau=(s_\delta\circ G_{\xi^{-1}})|_{Z(U)}.$$

此外，ξ 和 $\delta|_{Q\cap 2P}$ 由 τ 唯一确定。因此，

$$\mathrm{Aut}_U(Z(U))\cong\mathrm{Hom}\big((P/Q)[2],\{\pm 1\}\big)\rtimes\Gamma,$$

其中，Γ 的作用由下式给出

$$(\xi\cdot\chi)(x)=\chi(\xi^{-1}x)\qquad\big(\xi\in\Gamma,\ \chi\in\mathrm{Hom}((P/Q)[2],\{\pm 1\}),\ x\in(P/Q)[2]\big).$$

证明。设 $\tau=\sigma|_{Z(U)}$，其中 $\sigma\in\mathrm{Aut}(U)$。由引理 2.4，取 $\delta\in\mathrm{E}$，使得 $s_\delta\circ\sigma$ 在 Cartan 环面上是无符号的。由定理 3.6，令 $\xi\in\Gamma$ 为与 $s_\delta\circ\sigma$ 对应的唯一 Dynkin 图自同构。于是命题 4.5 给出

$$(s_\delta\circ\sigma)|_{Z(U)}=G_{\xi^{-1}}|_{Z(U)}.$$

由于 $s_\delta^2=\mathrm{id}_U$，可得

$$\tau=\sigma|_{Z(U)}=(s_\delta\circ G_{\xi^{-1}})|_{Z(U)}=s_\delta|_{Z(U)}\circ G_{\xi^{-1}}|_{Z(U)}.$$

反过来，若 τ具有这种形式，则它是 $s_\delta\circ G_{\xi^{-1}}\in\mathrm{Aut}(U)$ 在.....上的限制。这就证明了等价性。由于当 ξ变化时，ξ^{-1}遍历 Γ，$\mathrm{Aut}_U(Z(U))$ 是由符号自同构和图自同构诱导的子群的乘积。

接下来，我们通过 Harish–Chandra 同构比较这两个子群。对于 $\xi\in\Gamma$，图自同构 G_ξ保持三角分解，并根据 ξ置换 Q-次数。因此，$\pi\circ G_\xi=G_\xi\circ\pi$作用于 U_0。由于 ξ 保持双线性型并固定 ρ，G_ξ 也与 $\gamma_{-\rho}$ 在 U^0 上的作用可交换。因此

$$(\gamma_{-\rho}\circ\pi)(G_\xi(z))=G_\xi\big((\gamma_{-\rho}\circ\pi)(z)\big)\qquad(z\in Z(U)).$$

结合命题 2.1 和引理 4.8，这表明 $Z(U)$ 上诱导的图作用和符号作用分别与 $(U^0_{\mathrm{ev}})^W$上的相应作用一致。

假设对于某些 $\xi \in \Gamma$ 和 $\delta \in \mathrm{E}$，有 $G_\xi|_{Z(U)} = s_\delta|_{Z(U)}$。我们证明 $\xi = 1$。由于 P/Q 是有限的，取正整数 m 使得 $mP \subseteq Q$。回顾 Weyl 轨道和

$$M_\lambda = \sum_{\nu \in W\lambda} K_\nu \qquad (\lambda \in Q \cap 2P)$$

由命题 4.9 的证明可知。由于 $\xi W \xi^{-1} = W$ 我们有 $\xi(W\lambda) = W\xi(\lambda)$，因此

$$G_\xi(M_\lambda) = \sum_{\nu \in W\lambda} G_\xi(K_\nu) = \sum_{\nu \in W\lambda} K_{\xi(\nu)} = \sum_{\mu \in W\xi(\lambda)} K_\mu = M_{\xi(\lambda)}.$$

此外，对于每个 $2m\omega_i \in 2Q$ i， $2Q$ 上的每个符号特征都是平凡的。因此，诱导作用相等可得

$$M_{2m\xi(\omega_i)} = G_\xi(M_{2m\omega_i}) = s_\delta(M_{2m\omega_i}) = M_{2m\omega_i}.$$

由单项式 K_ν 的线性无关性可知，支配权 $2m\xi(\omega_i)$ 和 $2m\omega_i$ 属于同一个 Weyl 轨道，因而相等，因为每个 Weyl 轨道都有唯一的支配代表元。因此，对于每个 i， $\xi(\omega_i) = \omega_i$ ，所以 $\xi = 1$。由假设的相等关系可得$s_\delta|_{Z(U)} = \mathrm{id}_{Z(U)}$。这证明两个诱导子群的交平凡。取 $\delta = 1$ 也表明，图自同构在 $Z(U)$ 上忠实作用。由于两个诱导子群的交平凡，且图作用是忠实的， ξ 和 $s_\delta|_{Z(U)}$由 τ 唯一确定。根据命题 4.9，两个符号自同构在 $Z(U)$ 上相同，当且仅当它们的特征在 $Q \cap 2P$ 上相同；因此 $\delta|_{Q\cap 2P}$ 也唯一确定。

对于群结构，通过同态 $\xi \mapsto G_\xi|_{Z(U)}$将 Γ 与所诱导的图自同构子群对应起来。生成元上的定义公式给出

$$G_\xi \circ s_\delta \circ G_\xi^{-1} = s_{\delta \circ \xi^{-1}},$$

因此，由符号自同构诱导的子群是 $\mathrm{Aut}_U(Z(U))$ 的正规子群。根据命题 4.9，该子群同构于 $\mathrm{Hom}((P/Q)\,[2], \{\pm 1\})$，其中 $s_\delta|_{Z(U)}$对应于特征

$$\chi(\mu + Q) = \delta(2\mu) \qquad (\mu + Q \in (P/Q)[2]).$$

与 $s_{\delta\circ\xi^{-1}}|_{Z(U)}$对应的特征将 $\mu + Q$映射为

$$(\delta \circ \xi^{-1})(2\mu) = \delta(2\xi^{-1}(\mu)) = \chi\big(\xi^{-1}(\mu + Q)\big).$$

因此，通过 G_ξ进行共轭所诱导的作用为 $(\xi \cdot \chi)(x) = \chi(\xi^{-1}x)$。结合上文证明的分解、忠实的图作用以及平凡交，这就给出了所述的半直积分解。在此对应下，自同构 $(s_\delta \circ G_{\xi^{-1}})|_{Z(U)}$对应于 (χ, ξ^{-1})。□

推论4.11。 对于每种 *Cartan* 型，中心上所诱导的自同构群为

$$\mathrm{Aut}_U(Z(U)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & A_n,\ n = 1 \text{ or } n \text{ even}, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, & A_n,\ n \geq 3 \text{ odd}, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & B_n,\ C_n,\ n \geq 2, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, & D_n,\ n \geq 5 \text{ odd}, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & D_n,\ n \geq 6 \text{ even}, \\ S_4, & D_4, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & E_6,\ E_7, \\ 1, & E_8,\ F_4,\ G_2. \end{cases}$$

对于偶数 $n \geq 6$ 、类型为 D_n 的情形， $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的非恒等元素会交换所示半直积中 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ 的两个标准生成元。

证明。 由定理 4.10,

$$\mathrm{Aut}_U(Z(U)) \cong \mathrm{Hom}\big((P/Q)[2], \{\pm 1\}\big) \rtimes \Gamma, \qquad (\xi \cdot \chi)(x) = \chi(\xi^{-1}x).$$

我们使用命题 4.7 中 $(P/Q)[2]$ 的取值，以及第 2.4 节列出的 Dynkin 图自同构群。

除 D_n 型且 n 为偶数的情形外，群 $(P/Q)[2]$ 要么是平凡群，要么是二阶循环群。因此，它没有非恒等自同构，所以 Γ 在其上以及在其特征群上的作用都是平凡的。因此，相应的半直积都是直积。

对于 A_n 型，我们有 $P/Q \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$。因此，当 n 为偶数时，$(P/Q)[2] = 0$；而当 n 为奇数时，$(P/Q)[2] \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。此外，对于 A_1，Γ 是平凡的；对于$n \geq 2$，它同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。结合作用的平凡性，这些描述给出了 A_n 型中所述的群。

对于 B_n、C_n 和 E_7 型，我们有 $P/Q \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，因此 $(P/Q)[2] \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。由于 $\Gamma = 1$，所得群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。对于 E_6 型，我们有 $P/Q \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，因此 $(P/Q)[2] = 0$。由于 $\Gamma \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，所得群仍为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。对于 E_8、F_4 和 G_2 型，我们有 $P/Q = 0$ 和 $\Gamma = 1$，因此所得群是平凡群。最后，对于 $n \geq 5$ 为奇数的 D_n 型，我们有 $P/Q \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，因此 $(P/Q)[2] \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。结合 $\Gamma \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 以及作用的平凡性，得到 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$。

现在考虑类型 D_n，其中 $n \geq 6$ 为偶数。我们有

$$(P/Q)[2] = P/Q \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

采用 Bourbaki 编号，其三个非零元素为

$$\omega_1 + Q, \qquad \omega_{n-1} + Q, \qquad \omega_n + Q,$$

and

$$\omega_1 + Q = (\omega_{n-1} + Q) + (\omega_n + Q).$$

特别地，$\omega_{n-1} + Q$ 和 $\omega_n + Q$ 构成 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的一组基。非恒等的 Dynkin 图自同构 ξ 交换这两个基元素，并固定 $\omega_1 + Q$。由于 $\xi^{-1} = \xi$，诱导的特征群上的作用满足

$$(\xi \cdot \chi)(\omega_{n-1} + Q) = \chi(\omega_n + Q),$$
$$(\xi \cdot \chi)(\omega_n + Q) = \chi(\omega_{n-1} + Q).$$

一个特征由其在这两个基元素上的取值唯一确定。因此，在将特征群与 $\{\pm 1\}^2$，等同后，该作用会交换两个坐标。这就给出了所述的半直积

$$\mathrm{Aut}_U(Z(U)) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

F最后，考虑类型 D_4。这里 $(P/Q)[2] = P/Q \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, , 有三个非零元素

$$\omega_1 + Q, \qquad \omega_3 + Q, \qquad \omega_4 + Q.$$

Dynkin 图自同构群 $\Gamma \cong S_3$ 忠实地置换这三个元素。它在特征群上的诱导作用也忠实。事实上，若对每个特征 χ 以及每个 $x \in (P/Q)$ [2],, 都有 $\chi(\xi^{-1}x) = \chi(x)$，则由于特征可以区分元素，$\xi^{-1}x = x$ 对所有 x 都成立。在 $(P/Q)[2]$ 上的忠实性进而推出 $\xi = 1$。特征群同构于 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$。因此，其三个非恒等元素由整个对称群 S_3 置换，于是

$$\mathrm{Aut}_U(Z(U)) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes S_3 \cong S_4. \qquad \square$$

最后，我们刻画逐点固定中心的自同构的环面限制，并确定商群 $\ker\ \rho_Z/\ker\ \rho_0$。

命题 4.12。 一个 $\Bbbk$-代数自同构 $\tau\ of\ U^0$ 是某个代数自同构在 $Z(U)$ 上的限制，且该自同构逐点固定 U，当且仅当存在唯一的元素 $\varepsilon\in\mathcal{E}$ 和 $w\in W$，使得

$$\varepsilon|_{Q\cap 2P}=1,\qquad \tau(K_\lambda)=\varepsilon(\lambda)K_{w(\lambda)}\qquad(\lambda\in Q).$$

因此，存在一个群同构

$$\ker\rho_Z/\ker\rho_0\cong \mathrm{Hom}\big(Q/(Q\cap 2P),\{\pm1\}\big)\rtimes W.$$

这里，$\mathrm{Hom}(Q/(Q\cap 2P),\{\pm1\})$ 与 $\{\delta\in\mathcal{E}:\ \delta|_{Q\cap 2P}=1\}$相对应，且作用为

$$(w\cdot\delta)(\lambda)=\delta(w^{-1}\lambda)\qquad(w\in W,\ \lambda\in Q).$$

证明。 设 $\sigma\in\mathrm{Aut}(U)$。由定理 4.1，可写为

$$\sigma(K_\lambda)=\varepsilon(\lambda)K_{\varphi(\lambda)},\qquad \varepsilon\in\mathcal{E},\quad \varphi\in\mathrm{Aut}(\Phi).$$

令 $\delta=\varepsilon\circ\varphi^{-1}$。由引理 2.4，$s_\delta\circ\sigma$ 在 Cartan 环面上是无符号的。事实上，

$$(s_\delta\circ\sigma)(K_\lambda)=\varepsilon(\lambda)\delta(\varphi(\lambda))K_{\varphi(\lambda)}=K_{\varphi(\lambda)}\qquad(\lambda\in Q).$$

由定理 3.6，存在唯一的 $\xi\in\Gamma$ 和 $v\in W$，使得

$$D^{-1}A_{s_\delta\circ\sigma}D=[\xi]\vartheta(v).$$

命题 4.5 给出

$$(s_\delta\circ\sigma)|_{Z(U)}=G_{\xi^{-1}}|_{Z(U)}.$$

由于 $s_\delta^2=\mathrm{id}_U$，因此

$$\sigma|_{Z(U)}=(s_\delta\circ G_{\xi^{-1}})|_{Z(U)}.$$

接下来，我们联系 φ 与 ξv。定理 4.1 证明中的论证给出

$$(\varphi(\lambda),\mu)=(\lambda,(\xi v)(\mu))=((\xi v)^{-1}(\lambda),\mu)\qquad(\lambda\in Q,\ \mu\in P).$$

这里第二个等式成立是因为 ξv 保持双线性型。由于 P 张成有理权空间，且该型非退化，我们得到

$$\varphi=(\xi v)^{-1}.$$

根据定理 4.10 中的唯一性断言，$\sigma|_{Z(U)}$ 是恒等映射当且仅当 $\xi=1$ 和$\delta|_{Q\cap 2P}=1$。此外，$\varphi=(\xi v)^{-1}$ 和 $W\cap\Gamma=\{1\}$表明，$\xi=1$ 当且仅当 $\varphi\in W$ 当$\varphi\in W$时，它保持 $Q\cap 2P$，因此 $\delta|_{Q\cap 2P}=1$ 当且仅当 $\varepsilon|_{Q\cap 2P}=1$。由此我们证明了

$$\sigma\in\ker\rho_Z\quad\text{ if and only if }\quad\varphi\in W\text{ and }\varepsilon|_{Q\cap 2P}=1.$$

若 $\tau=\sigma|_{U^0}$ 对于某个 $\sigma\in\ker\ \rho_Z$成立，则该判据给出了 τ所需的形式。反过来，假设 τ 具有所述形式。定理 4.1 给出了一个扩张 $\sigma\in\mathrm{Aut}(U)$，而同一判据表明 σ 逐点固定 $Z(U)$。ε和 w 的唯一性由定理 4.1 得出。这就证明了所述等价性。

根据推论 4.6，$\ker\rho_0 \subseteq \ker\rho_Z$，且同态

$$\overline{\rho}_Z : \mathrm{Aut}_U(U^0) \longrightarrow \mathrm{Aut}_U(Z(U))$$

满足 $\rho_Z = \rho_Z \circ \rho_0$。将 ρ_0 限制在 $\ker\rho_Z$ 上，其核为 $\ker\rho_0$，像为 $\ker\rho_Z$。事实上，一个包含关系由分解直接得出。反之，对于 $\eta \in \ker\rho_Z$，取 $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$，使得$\rho_0(\sigma) = \eta$。那么 $\rho_Z(\sigma) = \rho_Z(\eta) = 1$，故 $\sigma \in \ker\overline{\rho_Z}$。由第一同构定理可得

$$\ker\rho_Z/\ker\rho_0 \xrightarrow{\sim} \ker\overline{\rho}_Z, \qquad \sigma\ker\rho_0 \longmapsto \sigma|_{U^0}.$$

为确定右侧的群，使用命题 2.7 的半直积坐标。令 $\delta = \varepsilon \circ \varphi^{-1}$ 如上，则有

$$\sigma|_{U^0} = (s_\delta|_{U^0}) \circ \tau_{1,\varphi}, \qquad \tau_{1,\varphi}(K_\lambda) = K_{\varphi(\lambda)}.$$

因此，(δ, φ) 是表示 $\mathrm{E} \rtimes \mathrm{Aut}(\Phi)$ 中 $\sigma|_{U^0}$ 的有序对。根据命题 2.7，每个这样的有序对都由 U 的一个自同构实现。因此，上述判据给出

$$\ker\overline{\rho}_Z = \{\delta \in \mathcal{E} : \delta|_{Q\cap 2P} = 1\} \rtimes W.$$

特征子群在 $\delta \mapsto \delta \circ w^{-1}$ 下保持不变，因为 W 保持 $Q \cap 2P$。命题 2.7 给出共轭公式

$$\tau_{1,w} \circ (s_\delta|_{U^0}) \circ \tau_{1,w}^{-1} = s_{\delta\circ w^{-1}}|_{U^0},$$

这恰好是陈述中的作用。最后，Q 的一个特征在 $Q \cap 2P$上平凡，当且仅当它经由 $Q/(Q \cap 2P)$分解。这将特征子群与 $\mathrm{Hom}(Q/(Q \cap 2P), \{\pm 1\})$对应起来，并证明了所述的群同构。具体而言，在这一对应下，同构映射为

$$\sigma\ker\rho_0 \longmapsto (\varepsilon \circ w^{-1}, w), \qquad \sigma(K_\lambda) = \varepsilon(\lambda)K_{w(\lambda)}.$$

它与代表元 σ的选取无关，因为 ε 和 w 由 $\sigma|_{U^0}$唯一确定 . □

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12371041）的资助。作者感谢江苏省教育厅资助其赴南京大学访学，其间完成了本文的写作；并衷心感谢刘公祥教授在访学期间给予的热情接待和慷慨帮助。作者还感谢扬州大学的李立斌教授提出的宝贵建议和建设性意见。

声明

作者声明，与本文内容相关的利益冲突不存在 e.

参考文献

[1] J. Alev 和 M. Chamarie，若干量子代数的导子与自同构，*Communications in Algebra***20**(1992)，第 6 期，1787–1802。

[2] J. Alev 和 F. Dumas，《最小原始商群从U_q(sl(2))嵌入 Weyl–Hayashi 量子代数的刚性》，名古屋数学杂志 143 (1996)，119–146。[3] N. Andruskiewitsch 和 F. Dumas，《关于 $U_q^+(\mathfrak{g})$的自同构》，载于《量子群》，IRMA 数学与理论物理讲座，第 12 卷，欧洲数学学会，苏黎世，2008，107–133。[4] P. Baumann，关于量子化包络代数的中心，代数杂志 203 (1998)，第 1 期，244–260。[5] N. Bourbaki，《李群与李代数》第 4–6 章，数学原理丛书，施普林格出版社，柏林，2002。[6] V. Chari 和 A. Pressley，《量子群指南》，剑桥大学出版社，剑桥，1994。[7] W. Chin 和 I. M. Musson，量子化包络代数的余根基滤过，伦敦数学会杂志 (2) 53 (1996)，第 1 期，50–62。[8] J. E. Humphreys，《李代数与表示论导论》，数学研究生教材，第 9 卷，施普林格出版社，纽约，1972。[9] J. C. Jantzen，《量子群讲义》，数学研究生进阶丛书，第 6 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996。[10] A. Joseph 和 G. Letzter，量子化包络代数伴随作用的局部有限性，代数杂志 153 (1992)，第 2 期，289–318。[11] A. Joseph 和 G. Letzter，量子化包络代数的变量分离，美国数学杂志 116 (1994)，第 1 期，127–177。[12] S. Launois，$U_q^+(B_2)$的原始理想与自同构群，代数及其应用杂志 6 (2007)，第 1 期，21–47。[13] L. Li、L. Xia 和 Y. Zhang，关于单李代数量子化包络代数的中心，arXiv:1607.00802v2 (2017)。[14] L. Li、L. Xia 和 Y. Zhang，关于 A_n型量子群的中心，中国科学：数学 61 (2018)，287–294。[15] G. Lusztig，《量子群导论》，数学进展丛书，第 110 卷，Birkhäuser，波士顿，1993。[16] M. Rosso，量子群的 Killing 形式与 Harish–Chandra 定理的类似物，高等师范学校科学年刊 (4) 23 (1990)，第 3 期，445–467。[17] T. Tanisaki，量子代数的 Killing 形式、Harish–Chandra 同构与通用 R矩阵，国际现代物理学杂志 A 7 (1992)，增刊 1B，941–961。[18] E. P. Twietmeyer，$U_q(\mathfrak{g})$的实形式，数学物理通讯 24 (1992)，第 1 期，49–58。[19] M. Yakimov，量子环面的刚性与 Andruskiewitsch–Dumas 猜想，数学选刊 (新系列) 20 (2014)，第 2 期，421–464。[20] J. Zha，量子包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$的代数自同构，中国科学 A辑 37 (1994)，1025–1031。