arXiv:2611.30985v1 [math.CV] 23 Nov 2026

双曲型Bishop曲面的 Brjuno条件的尖锐性*

Dijia Chen†

摘要

设 $\mu \in \mathbb{C}$ 满足 $|\mu| = 1$，并假设 μ 不是单位根且不满足 Brjuno 条件。令 Q_γ 表示满足 $\gamma = 1/\sqrt{2 + \mu + \mu^{-1}} > 1/2$的 Bishop 二次曲面。Gong 和 Stolovitch 猜想，存在一个位于 $\mathbb{C}^2$ 中的实解析曲面，其 Moser–Webster 不变量为 μ，并且它与 Q_γ在形式意义上等价，但不全纯等价。我们证明了这一猜想。

1 引言

令 Q_γ为 $\mathbb{C}^2$ 中的 Bishop 二次曲面，它在 [2] 中由 $z_2 = z_1\bar{z}_1 + \gamma(z_1^2 + \bar{z}_1^2)$定义，且满足 $\gamma > 1/2$。在原点， Q_γ 的实切平面是一条复直线，因此原点是一个复切点。一般而言，Bishop 根据不变量 γ对 Q_γ 的复相切及其高阶扰动进行分类：当 $0 \le \gamma < 1/2$时为椭圆型，当 $\gamma = 1/2$时为抛物型，当 $\gamma > 1/2$时为双曲型。在椭圆型情形下，Bishop 证明，椭圆型 Bishop 二次曲面的高阶扰动仍然存在附着全纯圆盘。这些圆盘构成一些族，并收缩至复切点 [2]。相比之下，双曲型复相切附近的曲面是局部多项式凸的 [4]。然而，在抛物型情形下，局部多项式凸性可能成立，也可能不成立，这取决于高阶项 [12]。关于 Bishop 对椭圆型光滑或实解析实曲面在 $\mathbb{C}^2$中的附着解析圆盘族正则性及局部全纯包的研究进展，读者可参阅 Kenig 和 Webster [13]以及 Huang 和 Krantz [10] 。关于高维椭圆流形，有限光滑情形可参见 Kenig-Webster [14]，而有限光滑和实解析情形的完整理论可参见 Huang [9] 。

除了这些几何性质之外，另一个核心问题是复切点附近实解析曲面的形式等价与全纯等价问题。Moser and Webster 证明，这些等价问题可以归结为对合三元组的共轭问题[15]。对于具有非零 Bishop 不变量复切点的实解析曲面 M ，其对应的三元组为 $(\tau_{1,M}, \tau_{2,M}, \rho_M)$。这里 $\tau_{1,M}$ 和 $\tau_{2,M}$ 是全纯对合，而ρ_M 是编码实结构的反全纯对合。这两个全纯对合源自 M 复化的自然投影。这些对合满足$\tau_{2,M} = \rho_M \circ \tau_{1,M} \circ \rho_M$。在 Moser–Webster 对应下，形式等价对应于

相关三元组的形式同时共轭。全纯等价对应于全纯同时共轭。

令 $\sigma_M = \tau_{1,M} \circ \tau_{2,M}$。对 Bishop 二次曲面 Q_γ 类似地定义 σ_{Q_γ}。若 M 与 Q_γ形式等价，则 σ_M 与 σ_{Q_γ} 形式共轭。若 M 与

*2020 数学主题分类。主要分类：32V40；次要分类：37F50、32H50。*Key words and phrases.* 双曲型 Bishop曲面、Brjuno 条件、Moser–Webster 不变量、全纯线性化、位势论。

†威斯康星大学麦迪逊分校数学系，威斯康星州麦迪逊，邮编 53706，美国。电子邮箱：dchen426@wisc.edu。

Q_γ全纯等价，则这两个映射全纯共轭。由于在适当的坐标下 σ_{Q_γ} 是线性的，与 Q_γ 全纯等价要求 σ_M 可全纯线性化。

对于双曲型 Bishop 不变量 γ，取 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得 $|\lambda| = 1$ 且 $\lambda + \lambda = \gamma^{-1}$。令 $\mu = \lambda^2$。σ_M的线性部分的特征值为 μ 和 μ^{-1}，其中 $\mu + \mu^{-1} = \gamma^{-2} - 2$。按照 Gong 和 Stolovitch [8], 的做法，我们将 μ称为 Moser–Webster 不变量。在 σ_{Q_γ} 为线性的坐标系中，形式共轭方程为 $H \circ \sigma_M = \sigma_{Q_\gamma} \circ H$。即使该方程存在形式解，这个解也未必收敛。事实上，当 μ 不是单位根时，系数方程可能涉及任意小的小除数。这引出了一个自然的问题：实解析曲面与 Q_γ 形式等价，是否意味着它们全纯等价?

2004年，Gong 构造了一个实解析双曲型 Bishop 曲面，它与其二次曲面 [6]形式等价，但并非全纯等价。该构造将障碍归结为一维全纯映射芽的线性化问题。形式线性化映射的系数包含分母 $\mu^n - \mu$，这些分母可能非常小。Gong 选取了一个具有极小除数的乘子，并逐一选定辅助全纯函数 u 的系数，使形式线性化映射的系数沿某个子序列至少按阶乘速度增长。Gong 的例子还具有一项几何性质：它不包含在任何光滑 Levi 平坦实解析超曲面中 [6, 定理1。1]。他的证明确立了这类曲面的存在性，却没有给出具体例子。此外，该构造需要特别选取乘子。因此，这一结果表明形式等价并不必然意味着全纯等价。但哪些特征值可能出现在此类反例中，仍是一个悬而未决的问题。

另一方面，Gong 在 1994 [5] 中证明了一个收敛性结果。具体而言，假设一个实解析曲面在形式上等价于其双曲型 Bishop 二次曲面。如果相应的乘子满足丢番图条件，那么这种等价可以通过双全纯坐标变换实现。因此，在这一算术假设下，形式等价与全纯等价是一致的。

一个自然的问题是，能否弱化这一丢番图假设。Brjuno 条件 [3] 提供了一个较弱的算术假设。记 $\mu = e^{2\pi i\alpha}$，其中 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。令 q_n 为 α 的连分数渐近分数的分母。Brjuno 条件为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{对数} q_{n+1}}{q_n} < \infty$。Gong 和 Stolovitch 证明，若一个实解析曲面在形式上等价于其双曲型 Bishop 二次曲面，且相应的乘子满足 Brjuno 条件 [7, （定理 6.7]），那么它与该二次曲面全纯等价。这给出了对每个 Brjuno 乘子的一个收敛性结果。Gong 和 Stolovitch 猜想，对于每个非 Brjuno 的模为一的乘子 μ（且不是单位根），都存在一个实解析双曲型 Bishop 曲面，其 Moser–Webster 不变量为 μ，并且它在形式上等价于其二次曲面、但不与之全纯等价 [8, （猜想 11.3]）。

我们的主要结果证明了这一猜想。

定理 1.1. 设 $\mu \in \mathbb{C}$ 满足 $|\mu| = 1$。假设 μ 既不是单位根，也不满足 *Brjuno* 条件。令 $\gamma = 1/\sqrt{2 + \mu + \mu^{-1}} > 1/2$。那么存在一个 *Moser–Webster* 不变量为 μ 的实解析曲面芽 $M \subset \mathbb{C}^2$，使得 M 与其双曲型 *Bishop* 二次曲面 Q_γ在形式上等价，但在全纯意义下不等价。

结合 Gong 和 Stolovitch 的收敛定理，定理 1.1 表明 Brjuno 条件是尖锐的。

我们还在命题 4.2 中证明，定理 1.1 中构造的曲面 M 不可能包含在任何光滑 Levi 平坦实解析超曲面内。光滑 Levi 平坦实解析超曲面在局部由复曲线叶状分解。Gong 证明，在我们的构造所满足的亚纯特征函数条件下，包含于这类超曲面中的曲面必与其 Bishop 二次曲面 [6,全纯等价（定理 1.2]）。

主要区别在于，现在可以指定乘子。Gong 先前的构造要求选取一种具有极小小除数的特殊乘子。我们的结果表明，这一限制并非必要。对于每个不是单位根的非 Brjuno 模为一的乘子，我们都构造出一个实解析曲面，它与其二次模型形式等价，却不与之全纯等价。此外，我们的反例来自 [6] 中引入的特殊族，其中辅助函数 u 的次数为一（见第 2.4 节）。我们无需逐一选取 u 的系数。

事实上，小除数问题早已出现在一维全纯动力系统中。一个芽可以是形式线性化的，却并非全纯线性化的。1942 年，Siegel 证明，当乘子满足适当的丢番图条件 [20] 时，全纯线性化成立。他的结果表明，乘子的算术性质可以决定形式线性化是否收敛。一维动力系统表明，Brjuno 条件是自然的算术阈值。Brjuno 证明了该条件对全纯线性化的充分性，而 Yoccoz 则证明了它对二次多项式 $\mu z + z^2$ [3, 21] 的必要性。

现在我们概述证明。证明主要用到三个要素。首先，Yoccoz 定理表明，对于每个非 Brjuno 乘子 μ，$P_\mu(z) = \mu z + z^2$ 都不能全纯线性化。其次，我们使用 Gong 的构造中的一个实单参数子族。该族中一个不可线性化的芽，会阻碍相应二维 Moser–Webster映射的全纯线性化。第三，按照 P´erez-Marco [16], 的做法，我们利用 Bernstein–Walsh不等式，将非极紧集上的界推广为每个固定复参数处的界。我们将完整给出针对我们这一族的论证。

为了将 P_μ 与 Gong 的构造联系起来，我们定义 $a_t = \frac{1+it}{2}$，$b_t = \frac{1-it}{2}$，$A_t(z) = z + a_t z^2$，$B_t(z) = z + b_t z^2$，以及

$$F_t = A_t^{-1} \circ R_\mu \circ B_t, \qquad R_\mu(z) = \mu z. \tag{1}$$

该参数有两种作用：对于实 t，芽 F_t 恰好是 Gong 的一维芽，而在 $t = i$ 处有 $F_i(z) = \mu(z + z^2)$，它与 P_μ线性共轭。对于非实 t，我们仅将F_t 用作全纯复化；我们不声称它源自 Moser–Webster 曲面。

关键事实是，规范化形式线性化映射 $H_t(z) = z + \sum_{n\geq 2} h_n(t) z^n$ 的系数 $h_n(t)$是关于 t 的多项式，且其次数为 $\deg h_n \leq n - 1$。Bernstein–Walsh不等式表明，可线性化复参数的集合 $\mathcal{L}_\mu$ 要么是整个 $\mathbb{C}$，要么是一个极集。Yoccoz 定理给出 $i \notin \mathcal{L}_\mu$，因此 $\mathcal{L}_\mu$ 是极集。极集不可能包含非退化实区间。因此，存在一个实参数，使得 Gong 的芽不是全纯线性化的。这就得到了 Moser–Webster构造所需的一维障碍。

本文结构安排如下。第 2 节汇总证明中用到的定义和结果。第3节证明参数二分，并将其应用于族 (1) 以证明定理 3.3。第4节证明定理 1.1，并给出关于 $\mathbb{C}^4$ 中四维实子流形的一个推论。

2 预备知识

2.1 Brjuno 条件与 Yoccoz 定理

设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，并令 p_n/q_n 为其连分数的渐近分数。Brjuno和为$B(\alpha) = \sum_{n\geq 0} \log \frac{q_{n+1}}{q_n}$。若 α 满足 $B(\alpha) < \infty$ [3]，则称其为 Brjuno 数。若 $\mu = e^{2\pi i\alpha}$，我们也称 μ为 Brjuno 数。

Gong 和 Stolovitch 使用以下小除数条件 [8, 式（10.14）]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \log \frac{1}{\min_{1\le j\le 2^k} |\mu^j - 1|} < \infty.$$

对于无理数 α，此条件等价于 $B(\alpha) < \infty$；参见 Brjuno [3, Chapter II, §5, Lemmas12–13 and Example 7] andPonce [17, Section 2.1]。

考虑二次多项式 $P_\mu(z) = \mu z + z^2$。我们使用 Yoccoz 定理 [21]的以下推论。

定理 2.1。若 $\mu = e^{2\pi i\alpha}$ 满足 $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 且 α 不是 *Brjuno* 数，则芽 $P_\mu(z) = \mu z + z^2$在原点处不可全纯线性化。

因此，对于每个非 Brjuno 乘子，Yoccoz 都给出了一个具体的不可线性化芽。在$t = i$处，芽 F_i 与这个二次多项式线性共轭。我们不使用 Yoccoz 证明中的任何定量估计。

2.2 极集、对数容量与实区间

我们回顾参数论证中用到的势论概念。

定义 2.2. 如果存在定义在 $\mathbb{C}$ 上的次调和函数 U，且该函数不恒等于 $-\infty$，使得对每个 $z \in E$ 都有 $U(z) = -\infty$，则称集合 $E \subset \mathbb{C}$ 为极集。这里，次调和函数是指满足次平均不等式的上半连续函数 $U : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty)$

$$U(z_0) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

对每个 $z_0 \in \mathbb{C}$ 和 $r > 0$ 都成立。

设 $K \subset \mathbb{C}$ 是非空紧集，令 $\mathcal{P}(K)$ 表示支撑在 K 上的博雷尔概率测度集合。因此，$\nu \in \mathcal{P}(K)$ 表示 ν 是一个非负博雷尔测度，满足 $\nu(K) = 1$ 且 $\nu(\mathbb{C}\setminus K) = 0$。$\nu \in \mathcal{P}(K)$ 的对数能量为

$$I(\nu) = \iint_{K\times K} \log \frac{1}{|z-w|}\, d\nu(z)\, d\nu(w).$$

当 $z = w$ 时，被积函数取值为 $+\infty$。由于 K 是紧集，被积函数在 $K \times K$ 上有下界，因此该积分有定义，但其值可能为 $+\infty$。定义

$$W(K) = \inf_{\nu\in\mathcal{P}(K)} I(\nu), \qquad \operatorname{cap}(K) = e^{-W(K)},$$

其中 $e^{-\infty} = 0$。数值 $\operatorname{cap}(K)$ 是 K 的对数容量。

我们使用这两个定义之间以下标准的联系：紧集 K 是极集，当且仅当 $\operatorname{cap}(K) = 0$。参见 [18, 第 3.2 节和第 5.1 节，第 55–57 页及第 127–128] 页；这一等价关系也在 [1, 第 4 节第 119] 页中明确陈述。我们还会用到极集的可数并仍为极集这一性质；参见 [16, 第 459] 页。

以下引理将用于寻找一个使线性化失效的实参数。

引理 2.3. 每个长度为正的闭实区间都具有正的对数容量。更确切地说，如果 $a < b$，那么

$$\operatorname{cap}([a,b]) \geq (b-a)e^{-3/2} > 0.$$

特别地，$\mathbb{C}$ 中的任何极性子集都不可能包含一个非退化实区间，也不可能包含整个实轴。

证明。固定 $a < b$，令 $L = b - a > 0$ 和 $K = [a,b]$，并令 ν 为 K 上的均匀概率测度。因此，对于 $a \leq x \leq b$，有 $d\nu(x) = dx/L$，其中 dx 表示一维勒贝格测度，且 $\nu(K) = L^{-1}\int_a^b dx = 1$。

根据定义，$I(\nu) = L^{-2}\int_a^b \int_a^b \log(1/|x-y|)\,dy\,dx$。$x = y$ 处的奇点是可积的，因为 $\int_0^L |\log t|\,dt < \infty$。令 $x = a + s$ 和 $y = a + r$。关于对角线 $s = r$ 的对称性给出

$$I(\nu) = \frac{2}{L^2}\int_0^L \int_0^s \log\frac{1}{s-r}\,dr\,ds.$$

现在令 $t = s - r$。积分区域变为 $0 \leq t \leq s \leq L$。交换积分次序，得到

$$I(\nu) = \frac{2}{L^2}\int_0^L (L-t)\log\frac{1}{t}\,dt.$$

分部积分可得

$$\int_0^L \log\frac{1}{t}\,dt = L - L\log L, \qquad \int_0^L t\log\frac{1}{t}\,dt = \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{2}\log L.$$

原函数分别为 $-t\log t + t$ 和 $-t^2\log t/2 + t^2/4$。当 $t \downarrow 0$ 时，$t\log t \to 0$ 和 $t^2\log t \to 0$，因此 $t = 0$ 处的极限存在。代入可得

$$I(\nu) = \frac{2}{L^2}\left[L(L - L\log L) - \left(\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{2}\log L\right)\right] = \frac{3}{2} - \log L < \infty.$$

由于 $\nu \in \mathcal{P}(K)$，我们有 $W(K) \leq I(\nu)$。因此

$$\operatorname{cap}(K) = e^{-W(K)} \geq e^{-I(\nu)} = Le^{-3/2} > 0.$$

根据极性与零对数容量之间的等价关系，K 不是极集。极集的任意子集都是极集，因此极集不能包含非退化实区间。特别地，极集不能包含整个实轴。

□

区间的精确容量也已知：

$$\operatorname{cap}([a,b]) = \frac{b-a}{4}, \qquad \operatorname{cap}([-1,1]) = \frac{1}{2};$$

参见 [19, 例 1.11，第 174] 页。下文不需要这些确切数值。

2.3 Bernstein–Walsh不等式

非退化实区间具有正的对数容量，尽管其平面勒贝格测度为零。Bernstein–Walsh不等式解释了为什么这样的集合足够大，能够控制其外部的多项式。

设 $K \subset \mathbb{C}$ 是一个非极紧集。对于任意多项式 P，记 $\|P\|_K = \sup_{s\in K} |P(s)|$。我们将 V_K 记作单变量西亚克极值函数，其定义如下

$$V_K(t) = \sup\left(\{0\} \cup \left\{ \frac{\log|Q(t)|}{\deg Q} : Q \in \mathbb{C}[t],\ \deg Q \geq 1,\ \|Q\|_K \leq 1 \right\}\right).$$

当 K 是非极性的时，函数 V_K 在每个 $t \in \mathbb{C}$ 处都有限。对于任意次数至多为 d的多项式 P，Bernstein–Walsh不等式给出

$$|P(t)| \leq \|P\|_K \exp\big(dV_K(t)\big), \qquad t \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

这是经典的Bernstein–Walsh不等式；参见 [18, 第 156]页以及 [16, 第1.1节，第 459]页。它表明，如果 $\|P\|_K$有指数界，那么在次数受控的前提下，对任意固定的复参数 t， $|P(t)|$ 也有指数界。

正如P´erez-Marco所指出的，在小除数问题中使用多项式参数依赖可追溯至Ilyashenko [11]；参见 [16, 引言，第451–452]页。我们的论证遵循P´erez-Marco[16, 对定理1的证明，第460–461]页。他将这种依赖性与Bernstein–Walsh不等式结合起来，证明形式线性化映射要么对每个参数都收敛，要么收敛参数集是极性的。为方便读者，我们给出针对我们这一族的证明。

我们将 (2) 应用于形式线性化映射的多项式系数 $h_n(t)$，其次数至多为 $n-1$。若收敛集是非极性的，我们就能找到一个非极性紧致子集 K 和一个整数 $N \geq 1$，使得对每个 $n \geq 2$都有 $\|h_n\|_K \leq N^n$。于是由 (2) 得

$$|h_n(t)| \leq N^n \exp\big((n-1)V_K(t)\big) \leq \big(Ne^{V_K(t)}\big)^n$$

对每个固定的 $t \in \mathbb{C}$ 都成立。由于 $V_K(t) < \infty$，这是关于 n 的指数界。因此，形式线性化映射在 t 处收敛。参数二分的证明见第3节。

2.4 Gong 的对合族

我们回顾 Gong 的构造 [6]。

对于全纯芽 $u(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n$，记

$$\overline{u}(z) = \overline{u(\overline{z})} = \sum_{n\geq 0} \overline{u_n} z^n.$$

若 $u(0) = 1$，令 v 为满足以下条件的唯一全纯芽

$$u(z)v(zu(z)) = 1. \tag{3}$$

为了证明 v 存在且唯一，注意映射 $z \mapsto zu(z)$ 在 0 处的导数为 1，因此在 0 附近有全纯逆映射。该逆映射的形式为 $z \mapsto zv(z)$，其中 v 是全纯的，且 $v(0) = 1$。通过复合这两个映射即可得到方程 (3)。

令 $|\lambda| = 1$ 并置 $\mu = \lambda^2$。定义 $\rho(\xi,\ \eta) = (\xi,\ \overline{\eta})$ 以及 $\tau_1^*(\xi,\ \eta) = (\lambda\eta,\ \overline{\lambda}\xi)$。以上取 u，令

$$\psi(\xi, \eta) = (\xi u(\xi), \eta u(\xi)). \tag{4}$$

则 $\psi^{-1}(\xi,\ \eta) = (\xi v(\xi)\ \eta v(\xi))$。事实上，恒等映射 $u(z)v(zu(z)) = 1$ 给出 $v(zu(z)) = 1/u(z)$。

按照 Gong 的做法，定义两个全纯对合及其复合映射如下：

$$\tau_1 = \psi^{-1}\tau_1^*\psi, \qquad \tau_2 = \rho\tau_1\rho, \qquad \sigma = \tau_1\tau_2. \tag{5}$$

直接计算可得

$$\tau_1(\xi,\eta) = \big(\lambda\eta\, p(\xi,\eta), \overline{\lambda}\,\xi\, p(\xi,\eta)\big), \tag{6}$$

其中

$$p(\xi,\eta) = u(\xi)v(\lambda\eta u(\xi)). \tag{7}$$

特别地，$p(\xi,0) = u(\xi)$，且 $p(0,\eta) = v(\lambda\eta)$。

我们将用到这一构造的两个性质。

(i) 设 $m(\xi,\eta) = \xi/\eta$。由于 ψ 保持这个商空间不变，我们有 $m\circ\tau_1 = \mu/m$ 和 $m\circ\tau_2 = \mu^{-1}/m$。因此，$m\circ\sigma = \mu^2 m$，所以 m 是 σ的亚纯特征函数。如果 μ 不是单位根，那么 [6] 中的命题 3.1 表明，σ 是形式线性化的。

(ii) 坐标轴 $\{\eta = 0\}$ 在 σ 下保持不变。在此坐标轴上，

$$\sigma(\xi,0) = (f(\xi),0), \qquad f(\xi) = \mu\xi\,\overline{u}(\xi)v(\mu\xi\,\overline{u}(\xi))\,. \tag{8}$$

如果 σ 是全纯线性化的，那么 f 也是全纯线性化的。我们将在第4节中直接计算 $\sigma(\xi,\ 0)$，并证明关于线性化的这一推论。

因此，剩下的任务是选取一个全纯芽 u，使得（8）中的一维芽 f 不是全纯线性化的。

2.5 Moser–Webster 实现

我们采用 Gong 在 [6, 第 2] 节和 Gong–Stolovitch 的定理 2.2] 中回顾的 Moser–Webster 对应 [15]。取 $|\lambda| = 1$，使得 $\Re\lambda > 0$，并假设 $\mu = \lambda^2$ 不是单位根。于是 $\gamma = (\lambda + \lambda^{-1})^{-1} > 1/2$。$\tau_1$ 和 τ_2 的线性部分分别为 $\tau_1^*(\xi,\ \eta) = (\lambda\eta,\ \lambda\xi)$ 和 $\tau_2^*(\xi,\ \eta) = (\lambda\eta,\ \lambda\xi)$。这些对合满足 $\tau_2 = \rho\tau_1\rho$。因此，Moser–Webster 实现定理给出了一个具有 Bishop 不变量γ的实解析 Bishop 曲面芽。

在这种对应关系下，两个曲面形式等价（分别地，全纯等价），当且仅当它们所关联的对合三元组可通过一个与 ρ交换的形式（分别地，全纯）坐标变换同时共轭。由于 μ 不是单位根，依据 Moser–Webster 形式正规形 [8, 定理2.3]，$\sigma = \tau_1\tau_2$ 的形式线性化也意味着对合三元组可同时形式线性化。我们将在第4节应用这一对应关系来证明定理 1.1。

3 一维障碍

3.1 参数二分法

本小节中的论证本质上是 P´erez-Marco [16, 证明定理1（第460–461]页）中的论证。为方便读者，我们针对本文的情形给出证明。

命题 3.1。 设 $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，并假设 μ 不是单位根。对于每个 $t \in \mathbb{C}$，令$F_t(z) = \mu z + \sum_{n\geq 2} c_n(t)\, z^n$ 为原点处的收敛全纯芽。假设每个$c_n(t)$ 都是 t 上的多项式，且 次数 $c_n \leq n-1$。

令 $H_t(z) = z + \sum_{n\geq 2} h_n(t) z^n$ 为 $H_t(F_t(z)) = \mu H_t(z)$的唯一规范化形式解。则：

(a) 每个 $h_n(t)$ 都是满足 $\deg h_n \leq n-1$ 的多项式。

(b) 使 F_t 全纯线性化的参数 $t \in \mathbb{C}$ 的集合 $\mathcal{L}$，要么是 $\mathbb{C}$，要么是一个极集。

证明。 我们先证明 (a) 部分。令 $c_1(t) = \mu$。对于 $k \geq 2$，记

$$F_t(z)^k = \sum_{n\geq k} C_{n,k}(t) z^n.$$

每个 $C_{n,k}(t)$ 都是乘积 $c_{j_1}(t)\cdots c_{j_k}(t)$ 的和，其中 $j_1, \ldots, j_k \geq 1$ 且 $j_1 + \cdots + j_k = n$。由于 $\deg c_j \leq j-1$，每个乘积的次数至多为 $(j_1 - 1) + \cdots + (j_k - 1) = n - k$。因此 $\deg C_{n,k} \leq n - k$。

比较 $H_t(F_t(z)) = \mu H_t(z)$ 中 z^n 的系数，得到

$$(\mu - \mu^n) h_n(t) = c_n(t) + \sum_{k=2}^{n-1} h_k(t) C_{n,k}(t), \qquad n \geq 2. \tag{9}$$

由于 μ 不是单位根，因此对每个 $n \geq 2$，$\mu - \mu^n \neq 0$ 都成立。于是，该方程唯一确定每个 h_n。

当 $n = 2$ 时，求和为空，且 $\deg h_2 \leq 1$。假设对 $2 \leq k < n$，$\deg h_k \leq k-1$。那么，(9) 中每个乘积 $h_k C_{n,k}$ 的次数至多为 $(k-1) + (n-k) = n-1$。c_n 也满足相同的界。因此，h_n 是一个次数为 $\deg h_n \leq n-1$ 的多项式。这就证明了 (a) 部分。

对于 (b) 部分，F_t 全纯线性化当且仅当 H_t 收敛。事实上，一个收敛的H_t 具有 $H_t'(0) = 1$，并给出一个局部全纯共轭。反过来，任何全纯线性化映射都可以归一化为在原点处的导数为 1。根据唯一性，其泰勒级数为 H_t。因此

$$F_t \text{ is holomorphically linearizable} \quad \Longleftrightarrow \quad H_t \text{ converges near } 0. \tag{10}$$

设 $\mathcal{L} = \{t \in \mathbb{C} : H_t \text{ 在 } 0\}$ 附近收敛。对每个整数 $N \geq 1$，定义

$$K_N = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq N,\ |h_n(t)| \leq N^n \text{ for all } n \geq 2\}.$$

每个 K_N 都是紧致的，因为它有界且每个 h_n 都是连续的。此外，$\mathcal{L} = \bigcup_{N\geq 1} K_N$。事实上，若 $t \in K_N$，级数 H_t 对 $|z| < 1/N$ 收敛。反过来，若 H_t收敛，则$|h_n(t)| \leq M^n$对某个 $M > 0$ 及所有 $n \geq 2$成立。取整数 $N \geq \max\{1, |t|, M\}$，得到 $t \in K_N$。

假设 $\mathcal{L}$ 不是极集。由于极集的可数并仍为极集，至少有一个 K_N是非极性的。固定这样一个 N并令 $K = K_N$。根据定义，对每个 $n \geq 2$都有 $\|h_n\|_K = \sup_{s\in K} |h_n(s)| \leq N^n$。由 (a) 部分可得 $\deg h_n \leq n-1$。因此，Bernstein–Walsh不等式 (2) 给出

$$|h_n(t)| \leq N^n \exp\big((n-1) V_K(t)\big) \leq \big(N e^{V_K(t)}\big)^n, \qquad t \in \mathbb{C}.$$

由于对每个 $t \in \mathbb{C}$，$V_K(t) < \infty$，级数 H_t 都收敛。因此 $\mathcal{L} = \mathbb{C}$，二分性随之得证。

□

3.2 特殊参数族

现在我们构造一个单参数族，将 P_μ 与 Gong 的一维芽联系起来。复参数使我们能够应用命题 3.1，而实参数则将给出几何构造所需的芽。

固定 $\mu \in \mathbb{C}$，满足 $|\mu| = 1$，并假设 μ 不是单位根。对于 $t \in \mathbb{C}$，设 $a_t = (1+it)/2$以及 $b_t = (1-it)/2$。定义 $A_t(z) = z + a_t z^2$ 和 $B_t(z) = z + b_t z^2$。由于 $A_t'(0) = 1$，对于每个固定的 t，逆函数A_t^{-1}都是一个收敛全纯芽。我们定义

$$F_t(z) = A_t^{-1}(\mu B_t(z)). \tag{11}$$

因此，对于每个 $t \in \mathbb{C}$，映射 F_t 都是原点处的收敛全纯芽，且 $F_t(0) = 0$以及 $F_t'(0) = \mu$。

为应用参数二分性，我们先考察 F_t 的系数如何依赖于 t。定义方程给出

$$F_t(z) + a_t F_t(z)^2 = \mu z + \mu b_t z^2. \tag{12}$$

写作 $F_t(z) = \sum_{n\geq 1} c_n(t) z^n$，其中 $c_1(t) = \mu$。比较式 (12) 中的系数，得到 $c_2(t) = \mu b_t - \mu^2 a_t$ 并且对于每个 $n \geq 3$,

$$c_n(t) = -a_t \sum_{j=1}^{n-1} c_j(t) c_{n-j}(t). \tag{13}$$

下一个引理验证命题 3.1 所要求的次数界。该结论可直接由此递推关系推出。

引理 3.2. 对于　　每个 $n \geq 2$，系数 $c_n(t)$ 都是满足 次数 $c_n \leq n-1$ 的 t 多项式。

证明。由于 a_t 和 b_t 关于 t 是仿射的，因此断言对 $n = 2$ 成立。假设对每个 $2 \leq j < n$ 都有 $\deg c_j \leq j-1$。由于 $c_1(t) = \mu$ 是常数，(13) 中的每个乘积 $c_j(t)c_{n-j}(t)$ 的次数至多为 $(j-1) + (n-j-1) = n-2$。乘以 a_t 至多使次数增加一。因此 $\deg c_n \leq n-1$，归纳步骤得证。 □

接下来我们确定两个有用的参数。在 $t = 0$ 处，我们有 $a_0 = b_0 = 1/2$，从而 $A_0 = B_0$。由此可得 $F_0 = A_0^{-1} \circ R_\mu \circ A_0$，其中 $R_\mu(z) = \mu z$。因此 F_0 是全纯线性化的。

在 $t = i$ 处，我们有 $a_i = 0$ 和 $b_i = 1$。因此

$$F_i(z) = \mu(z + z^2). \tag{14}$$

设 $P_\mu(z) = \mu z + z^2$ 和 $L(z) = \mu z$。直接计算可得 $F_i = L^{-1} \circ P_\mu \circ L$。因此，$F_i$ 与 P_μ 线性共轭。

现在我们将 (11) 与 Gong 的构造联系起来。对于实数 t，令 $u_t(z) = 1 + a_t z$，并令 v_t 由 (3) 确定。由于 $b_t = a_t$，我们有 $A_t(z) = z u_t(z)$ 和 $B_t(z) = z u_t(z)$。u_t 与 v_t 之间的定义关系还给出 $A_t^{-1}(w) = w v_t(w)$。因此,

$$F_t(z) = \mu z\, \overline{u_t}(z) v_t(\mu z\, \overline{u_t}(z)) = f_t(z), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

这正是 Gong 的构造 [6], 中带有辅助函数$u = u_t$的一维芽。

备注。 当 t 不是实数时，关系 $b_t = a_t$ 不再成立。我们仅将这些参数用作实族的全纯复化，并不声称相应的芽源自 Moser–Webster 曲面。

现在我们可以证明主定理所需的一维结果。该结果表明，使 Gong 的芽可全纯线性化的实参数构成一个极集。特别地，每个长度为正的实区间都包含一个使全纯线性化失效的参数。

定理 3.3. 设 $\mu \in \mathbb{C}$ 满足 $|\mu| = 1$，并假设 μ 既不是单位根，也不是 *Brjuno* 数。令 E_μ 为使 f_t 可全纯线性化的实参数 t 的集合。那么，作为 $\mathbb{C}$的子集， E_μ是极集。因此，每个长度为正的实区间都包含一个参数 t ，使得 f_t 形式上线性化，但不能全纯线性化。

证明。 由引理 3.2， F_t 的系数满足命题 3.1 的次数条件。此外，对于每个 $t \in \mathbb{C}$， F_t 都是一个收敛全纯芽，且具有相同的非共振乘子 μ。因此，该命题适用。令 $\mathcal{L}_\mu = \{t \in \mathbb{C}\colon\ F_t$ 可全纯线性化$\}$。命题 3.1 表明， $\mathcal{L}_\mu = \mathbb{C}$ 或 $\mathcal{L}_\mu$ 是极集。

由于 μ 不是 Brjuno 数，根据定理 2.1， P_μ 不能全纯线性化。由 (14)，芽 F_i 与 P_μ线性共轭。因此 $i \notin \mathcal{L}_\mu$。所以第一种情况不可能成立， $\mathcal{L}_\mu$ 必为极性。对于实数 t，方程 (15) 给出 $F_t = f_t$。因此 $E_\mu = \mathcal{L}_\mu \cap \mathbb{R}$，所以作为 $\mathbb{C}$子集的 E_μ 也为极性。设 I 是任意一个长度为正的实区间。它包含一个闭区间 $[a, b]$ ，满足 $a < b$；由引理 2.3 可知该区间是非极性的。因此 I 不能包含于E_μ。故存在 $t \in I \setminus E_\mu$，使得 f_t 不能全纯线性化。

最后， $f_t'(0) = \mu$，且 μ 不是单位根。因此，根据系数递推 (9)，形式线性化方程有唯一的规范化形式解。于是 f_t 形式线性化，但不能全纯线性化。这就证明了该定理。

□

4 主定理的证明

现在，我们利用一维结果构造所需的 Bishop 曲面。关键在于证明：不变轴上的线性化失败，会阻碍整个二维映射的全纯线性化。我们先记录这一事实。

引理 4.1. 设 $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，并假设 μ 不是单位根。设 S 是定义在 $\mathbb{C}^2$ 原点处、线性部分为 $S^*(\xi, \eta) = (\mu\xi, \mu^{-1}\eta)$的全纯芽。假设两个坐标轴在 S作用下均为不变轴。若 S 全纯线性化，则其在每个坐标轴上的限制均全纯线性化。

证明. 首先证明，对于 S^*，坐标轴是经过原点的唯一光滑不变全纯曲线。这类曲线的切线必须在 $DS^*(0)$ 作用下保持不变。由于 $\mu \neq \mu^{-1}$，它必定是两条坐标轴之一。

与 ξ轴相切的曲线可写为 $\eta = q(\xi)$，其中 $q(0) = q'(0) = 0$。在 S^* 作用下保持不变，意味着 $q(\mu\xi) = \mu^{-1}q(\xi)$。若 q 不恒为零，则写作 $q(\xi) = c\xi^r + O(\xi^{r+1})$，其中$r \geq 2$ 且 $c \neq 0$。比较首个非零项可得 $\mu^{r+1} = 1$，矛盾。因此 $q = 0$。对与 η轴相切的曲线，同样的论证也成立。因此，坐标轴是唯一的这类不变曲线。

现在假设 S 是全纯线性化的。取满足 $\Phi^{-1}S\Phi = S^*$的局部双全纯映射 Φ。由于 $DS(0) = DS^*(0)$，在原点处求导可得 $D\Phi(0)$

与 $DS^*(0)$交换。由于 $DS^*(0)$具有互异的特征值， $D\Phi(0)$是对角的。因此， Φ 下 S 的任一不变轴的原像，都是 S^* 的一条光滑不变曲线，并与同一坐标轴相切。根据上文证明的唯一性， Φ保持两个坐标轴不变。

特别地，对于某个单变量双全纯芽 g，有 $\Phi(\xi,0) = (g(\xi), 0)$。将共轭恒等式限制在这条轴上，可得 $g^{-1} \circ (S|_{\eta=0}) \circ g(\xi) = \mu\xi$。因此， S 在 $\eta = 0$上的限制是全纯线性化的。另一条轴也可用同样的方法处理。 □

现在我们选取参数并应用 Gong 的构造。由此得到的对合三元组将与线性三元组形式等价，而引理将排除全纯等价的可能性。

定理 *1.1* 的证明。 固定定理中给定的 μ 。取 μ 的一个平方根 λ ，使 $\operatorname{Re}\lambda > 0$。这是可行的，因为 $\mu \neq -1$。由于 μ 不是单位根，我们有 $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$。令$\gamma = 1/(2\operatorname{Re}\lambda)$，于是 $\gamma > 1/2$。由于 $|\lambda| = 1$，我们有 $\lambda + \lambda^{-1} = 1/\gamma$。因此 $\gamma\lambda^2 - \lambda + \gamma = 0$ 且$\mu + \mu^{-1} = \gamma^{-2} - 2$。所以， γ 是与给定乘子 μ相对应的双曲 Bishop 不变量。

根据定理 3.3，我们可以选取一个实参数 $t \notin E_\mu$。令 $u(z) = 1 + (1 + it)z/2$，并令v 由 (3) 确定。按照 (4) 和 (5) 定义 ψ， τ_1， τ_2和 $\sigma = \tau_1\tau_2$。

我们首先证明形式等价。由于 ψ 与恒等映射相切，对合的线性部分为

$$\tau_1^*(\xi,\eta) = (\lambda\eta, \overline{\lambda}\,\xi), \qquad \tau_2^*(\xi,\eta) = (\overline{\lambda}\,\eta, \lambda\xi).$$

这两个映射都是全纯对合，且 $\tau_2 = \rho\tau_1\rho$。它们的复合映射的线性部分为$\sigma^*(\xi, \eta) = (\mu\xi, \mu^{-1}\eta)$。

考虑亚纯函数 $m(\xi, \eta) = \xi/\eta$。映射 ψ 和 ψ^{-1} 保持这个商。如第 2 节所示，我们有 $m \circ \tau_1 = \mu/m$ 和 $m \circ \tau_2 = \mu^{-1}/m$。因此， $m \circ \sigma = \mu^2 m$。

m 的分子和分母分别为 ξ 和 η。由于 $\mu = \lambda^2$ 不是单位根， λ也不是。因此，Gong 的命题 3.1 [6, （第 87–88] 页）适用，且 σ 与 σ^*形式共轭。

我们还需要证明完整对合三元组的形式等价。根据 [8, 定理 2.3], 中所述的 Moser–Webster 形式正规形 [15], , 存在唯一的规范化形式坐标变换 Φ，它与恒等映射相切且与 ρ交换；在该变换下，两个对合的标量因子分别为 Λ（$\xi\eta$）和 Λ（$\xi\eta$）$^{-1}$，其中 $\Lambda(0) = \lambda$。它们的复合具有如下形式:

$$\widehat{\sigma}(\xi,\eta) = \big(\Lambda(\xi\eta)^2\xi, \Lambda(\xi\eta)^{-2}\eta\big).$$

Φ 的规范化将其第一分量中 $\xi^{j+1}\eta^j$ 的系数以及第二分量中 $\xi^j\eta^{j+1}$ 的系数对每个 $j \geq 1$都设为零。这与 Gong 的命题 3.1 [6, （第 87–88] 页）所用的条件相同。在该命题的证明中，Gong 证明了当亚纯特征函数存在时， σ的唯一规范化形式是线性的。因此， $\widehat{\sigma} = \sigma^*$ 和 Λ（$\xi\eta$）$^2 = \mu$。由于 $\Lambda(0) = \lambda$，我们有 $\Lambda = \lambda$。因此，归一化对合是线性对 τ_1^*， τ_2^*。由于 Φ与 ρ交换，整个三元组（τ_1， τ_2， ρ）与（τ_1^*， τ_2^*， ρ）形式等价。

接下来我们证明 σ 不是全纯线性化的。映射 ρ 保持两条坐标轴不变，而 τ_1 根据 (6) 交换这两条坐标轴。因此， σ 保持每条坐标轴不变。

为了计算其在 $\eta = 0$ 上的限制，回忆 $p(\xi, 0) = u(\xi)$，且 $p(0, \eta) = v(\lambda\eta)$。由 τ_1 和 $\tau_2 = \rho\tau_1\rho$ 的公式可得 $\tau_2(\xi, 0) = (0, \lambda\xi u(\xi))$。再次应用 τ_1 ，得到

$$\sigma(\xi, 0) = \big(\mu\xi\overline{u}(\xi)v(\mu\xi\overline{u}(\xi)), 0\big) = (f_t(\xi), 0).$$

这就是实切片公式 (15)。由于 $t \notin E_\mu$，芽 f_t 不可全纯线性化。

如果 σ 能够全纯线性化，那么引理 4.1 将推出其在不变轴 $\eta = 0$ 上的限制 f_t 能够全纯线性化。这与已知条件矛盾。因此， σ 不能全纯线性化。

现在我们回到曲面。对合 τ_1、 τ_2 具有上文所示的线性部分，并满足 $\tau_2 = \rho\tau_1\rho$。由于 $\gamma > 1/2$ 且 μ 不是单位根，Moser–Webster 实现定理 [8, 定理 2.2] 给出了一个实解析曲面芽 $M \subset \mathbb{C}^2$ ，其 Bishop 不变量为 γ，相应的对合三元组为 (τ_1、 τ_2、 ρ)。

由于 σ 的线性部分具有特征值 μ 和 μ^{-1}，该曲面具有指定的 Moser–Webster 不变量。对合三元组的形式等价给出了 M 与 Q_γ之间的形式等价。

如果 M 与 Q_γ全纯等价，那么 Moser–Webster 对应将给出它们的对合三元组之间的全纯共轭。特别地， σ 将能够全纯线性化。我们已经排除了这种可能。因此， M 与 Q_γ形式等价，但并非全纯等价。

□

命题 4.2. *在定理 1.1 的证明中构造的曲面 M 不包含于任何光滑 Levi 平坦实解析超曲面中。*

证明. 我们有 $\gamma > 1/2$，且 λ 不是单位根。此外， $\sigma = \tau_1\tau_2$ 具有非恒定的亚纯特征函数 $m(\xi, \eta) = \xi/\eta$，其中 $m \circ \sigma = \mu^2 m$。其分子和分母分别是全纯函数 ξ 和 η。因此，Gong 定理 [6, 定理 1.2，第 84] 页的假设均已满足。

如果 M 包含于某个光滑 Levi 平坦实解析超曲面中，那么该定理将推出 M 与 Q_γ全纯等价，这与我们已经证明的结论矛盾。因此，M 不包含于任何光滑 Levi 平坦实解析超曲面中。

□

推论 4.3. *设 γ_1 是定理 1.1 中的 Bishop 不变量，并设 $\gamma_2 > 1/2$。存在一个实解析子流形 $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^4$ 的芽，其实维数为 4 ，它与 $Q_{\gamma_1} \times Q_{\gamma_2}$形式等价但不全纯等价。*

证明。 设 $M \subset \mathbb{C}^2$ 为定理 1.1 中构造的曲面，并令 $\mathcal{M} = M \times Q_{\gamma_2}$。将形式等价 $M \sim Q_{\gamma_1}$ 在第二因子上延拓为恒等映射，得到形式等价 $\mathcal{M} \sim Q_{\gamma_1} \times Q_{\gamma_2}$。

假设局部双全纯映射 $H = (F, G)$ 将 $\mathcal{M}$ 映到 $Q_{\gamma_1} \times Q_{\gamma_2}$。将 $\mathbb{C}^4$ 的坐标写为 $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$。 M 与 Q_{γ_1} 之间的形式等价的二阶截断定义了一个具有可逆导数的多项式映射。该映射是局部双全纯映射，并将 M 的二次部分变为 Q_{γ_1} 的二次部分。我们在第一因子中使用这些坐标，因此

$$M: \quad w_1 = z_1\overline{z}_1 + \gamma_1(z_1^2 + \overline{z}_1^2) + O(|z_1|^3).$$

由于 b 两个曲面在原点处的切空间为 $\{w = 0\}$， H 的导数具有如下形式

$$DH(0) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \qquad A, D \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

比较 比较两个定义方程中双次数为 (1，1) 的项可得，对于 $j = 1$，2 ，

$$\sum_{k=1}^{2} D_{jk} z_k \overline{z}_k = \left| \sum_{k=1}^{2} A_{jk} z_k \right|^2 .$$

因此 $D_{jk} = |A_{jk}|^2$ 且 $A_{j1}\overline{A_{j2}} = 0$。由于 A 可逆，每一行和每一列都恰有一个非零项。选择 $j_0 \in \{1, 2\}$，使得 $a := A_{j_0 1} \neq 0$。于是 $D_{j_0 1} = |a|^2$。

比较 j_0 个定义方程中 z_1^2 的系数，得到 $D_{j_0 1}\gamma_1 = \gamma_{j_0} a^2$。由于$D_{j_0 1} = |a|^2$ 且 $\gamma_1,\ \gamma_{j_0} > 0$, 取绝对值可得 $\gamma_{j_0} = \gamma_1$。

令 $\iota : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4$ 将一点插入第一因子，并令 $\pi_{j_0} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ 投影到第 j_0 个因子。设 $h = \pi_{j_0} \circ H \circ \iota$。于是 $\det Dh(0) = aD_{j_0 1} = a|a|^2 \neq 0$，因此 h 是一个局部双全纯映射。由于 $H(\mathcal{M}) \subset Q_{\gamma_1} \times Q_{\gamma_2}$，我们有 $h(M) \subset Q_{\gamma_{j_0}} = Q_{\gamma_1}$。两者都是二维实曲面芽，因此这个包含关系是芽意义下的等式。故 h 是M 与 Q_{γ_1}之间的全纯等价，这与定理 1.1 矛盾。 □

我们的最优结果对于 $\mathbb{C}^2$ 中的实曲面是尖锐的。然而，我们不知道 Brjuno 条件对于高维是否也是尖锐的。

致谢

我衷心感谢 Xianghong Gong 教授在整个项目过程中给予我的慷慨而持续的指导。我们频繁的讨论对这项工作的开展起到了至关重要的作用，许多重要想法也由此产生。没有他的指导与支持，这篇论文便不可能完成。

声明与陈述

作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。**数据可用性**。本研究期间未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] L. Baribeau and T. Ransford，解析多值函数理论中的一些开放问题，多洛米蒂逼近研究札记 **11**(2018)，第 4 期，116–121 页。[2] E. Bishop，复欧几里得空间中的可微流形，杜克数学杂志**32** (1965)，第 1 期，1–21 页。[3] A. D. Brjuno，微分方程的解析形式 [微分方程的解析形式], 莫斯科数学学会论文集**25**(1971)，119–262 页（俄文）。[4] F. Forstneriˇc and E. L. Stout，一类新的多项式凸集，Ark. Mat. **29** (1991)，第 1 期，51–62 页。[5] X. Gong，双曲复切向附近实解析曲面规范化的收敛性，《Commentarii Mathematici Helvetici》**69**(1994)，第 4 期，549–574 页。[6] X. Gong，存在具有双曲复切向、形式等价但不全纯等价于二次曲面的实解析曲面，印第安纳大学数学杂志**53** (2004)，第 1 期，83–96 页。[7] X. Gong and L. Stolovitch，*CR* 奇点处具有最大复切空间的实子流形，*I*，数学发明 **206**(2016)，第 2 期，293–377 页。

[8] *X. Gong* 和 *L. Stolovitch*，具有 *CR* 奇点的实子流形正规形综述，*arXiv:2605.13157*，*2026*。[9] *X. Huang*，椭圆复切向附近的一个 n 流形，$\mathbb{C}^n$，《美国数学会杂志》*11*（*1998*），第 *3* 期，*669–692* 页。[10] *X. Huang and S. G. Krantz*，关于 *Moser* 的一个问题，《杜克数学杂志》*78*（*1995*），第 *1* 期，*213–228* 页。[11] *Yu. S. Ilyashenko*，将解析微分方程化为奇点处线性正规形的级数发散，《函数分析及其应用》*13*（*1979*），第 *3* 期，*227–229* 页。[12] *B. J¨oricke*，孤立抛物点附近圆盘的局部多项式凸包，《印第安纳大学数学杂志》*46*（*1997*），第 *3* 期，*789–826* 页。[13] *C. E. Kenig and S. M. Webster*，两个复变量空间中曲面的局部全纯凸包，《数学发明》*67*（*1982*），第 *1* 期，*1–21* 页。[14] *C. E. Kenig and S. M. Webster*，C^n 中一个 n 流形的全纯凸包，《比萨高等师范学校科学类年刊》（第 *4* 辑），*11*（*1984*），第 *2* 期，*261–280* 页。[15] *J. K. Moser and S. M. Webster*，复切向附近复数域 $\mathbb{C}^2$ 中的实曲面正规形与双曲曲面变换，《数学学报》*150*（*1983*），*255–296* 页。[16] *R. P´erez-Marco*，小除数问题中的完全收敛或一般发散，《数学物理通讯》*223*（*2001*），*451–464* 页。[17] *M. Ponce*，纤维化全纯变换下不变曲线的持久性，《数学物理通讯》*289*（*2009*），第 *1* 期，*1–44* 页。[18] *T. Ransford*，《复平面上的势理论》，伦敦数学会学生教材，第 *28* 卷，剑桥大学出版社，剑桥，*1995*。[19] *E. B. Saff*，应用于逼近论的对数势理论，《逼近理论综述》*5*（*2010*），*165–200* 页。[20] *C. L. Siegel*，解析函数迭代，《数学年刊》（第 *2* 辑）*43*（*1942*），*607–612* 页。[21] *J.-C. Yoccoz*，*Siegel* 定理、*Bruno* 数与二次多项式，载于《一维小除数》，*Ast´erisque 231*（*1995*），*1–88* 页。