arXiv:2611.30988v1 [cs.DM] 23 Nov 2026

# 双分裂图上的罗马型支配：困难性与不可近似性

M.S. Manjusha P. Renjith
卡利卡特国立理工学院 科泽科德，喀拉拉邦，印度
manjusha_p220226cs@nitc.ac.in,
renjith@nitc.ac.in
通讯作者：M. S. Manjusha

**摘要**

受分裂图的结构和名称启发，双分裂图具有三个独立集 $I$、$A$、$B$，其中 $A$中的每个顶点都与 $B$中的每个顶点相邻，而 $I$ 中的顶点在核心 $A \cup B$中可以具有任意邻域。因此，这类图由一个完全二分核心及其余顶点构成，为研究核心规模如何影响复杂性提供了一个结构化环境。Mann 和 Fernau 的构造已经推出，在具有单点核心侧 [14, 定理 20]的双分裂图上，完美罗马支配是 NP 完全的。受此结果启发，我们研究了所有四种罗马型支配问题在更多核心规模情形下的性质：我们证明，当一个核心侧的规模为一或二，以及当两侧的规模都至少为三时，问题均为 NP 完全。对于完美意大利支配，即使在二部双分裂图上判定总权重为二的指定核心标签能否扩展也是 NP 完全的。我们还研究了近似性：对于每个固定的 $0 < \varepsilon < 1$，除非 P $=$ NP，否则当一个核心侧的固定规模为 1、2 或 3 时，不存在 perfect Roman domination 的 $n^{1-\varepsilon}$-近似算法；对于两个核心侧均随输入增长的二部双分裂图上的 perfect Italian domination，也不存在 $n^{1-\varepsilon}$-近似算法。对于这两个参数，四个问题都是固定参数可解的。给定规模为 $k$的调制集，在忽略多项式因子的情况下，按罗马、完美罗马、意大利和完美意大利的顺序，簇顶点删除对应的运行时间底数为 4、11、 11、 18；双团簇顶点删除对应的运行时间底数为 6、11、 11、 18。罗马簇删除界 $4^k$ 是已知的；其他界则由我们的动态规划推出。据我们所知，后一个参数此前尚未针对支配变体进行明确研究。

**关键词：** 双分裂图；罗马支配；意大利支配；完美支配；计算复杂性；不可近似性。

**数学主题分类（2020）：** 主要分类 05C69；次要分类 05C85、68Q25。

## 1 引言

罗马型支配研究将图顶点标记为 0、1、2 的最小权重标记，其中约束仅施加于标记为 0 的顶点。罗马支配要求存在一个标记为 2 的邻点；意大利支配则允许存在这样的邻点，或存在两个标记为

1. 它们各自的完美变体分别要求恰有一个标记为 2 的邻居，或邻居标记值之和恰好为 2。这些区别很重要：增加一个正值标记可能违反精确条件，因此不同变体的结果并不能自动相互适用 [2, 5, 6, 11]。

对于普通罗马支配，奠基性研究确立了该问题及其基本界限；后续研究证明了其 NP 困难性，并针对结构化图类开发了多项式时间算法，包括基于标准表示的区间图和余图的线性时间算法 [6, 8, 13]。意大利支配也称为罗马 {2}-支配，其复杂性研究与顶点关联关系有关：已有研究使用 X3C 归约，声称该问题在双分图及其他二分图类上是 NP 完全的[15]。算法方面的成果包括链图和阈值图上的线性时间算法，以及给定树宽分解时的固定宽度树宽算法 [15]。正如我们下文所述，所引双分图证明中的逆向推论并未排除由两个值为 1 的邻居提供保护的情况；我们给出了一个反例，并独立证明了其困难性。

完美罗马支配在二部图上是 NP 完全的，但在块图、余图和串并图上具有线性时间算法 [2]。完美意大利支配在弦图和二部平面图上是 NP 完全的；在块图、串并图和余图上已知有线性时间算法 [3, 12, 17]。因此，即使仅限于两种完美变体，其复杂性也高度取决于图类。Pradhan 等人 [17] 还证明了一般图上完美意大利支配的一个 $n^{1-\varepsilon}$ 不可近似界。我们在二分双分裂图上确立了该界；但这个因子本身并非新结果。他们第 5.1 节中的构造使用了大团，其边对于断言 9(b) 中的强制论证至关重要。那些图既不是二部图，也不是双分裂图。我们的贡献在于受限图类以及预指定核心的扩展结果，而非间隙放大技术。

双分裂图为二部图类与类分裂图类之间提供了一种结构化框架。双分裂图可划分为稳定集 $I$，$A$，$B$，其中每条 $A$–$B$ 边都存在，而从 $I$ 到 $A \cup B$ [4] 的边则任意。我们将 $A \cup B$ 称为核心，将 $A$，$B$ 称为其两侧。Padamutham and Palagiri [15, 定理 3] 报告了在双分裂图上意大利（罗马 {2}）支配问题的 NP 完全性，其构造使用了单点核心侧。他们的逆向蕴含忽略了两个值为 1 的邻点同时存在的可能性。在第2.2节中，我们给出该归约的一个反例，并独立证明所声称的困难性。随后，我们考察核心规模变化时这些构造如何改变。

单点核心侧上的完美罗马支配困难性已隐含于 Mann 和 Fernau [14, 定理 20]中。按他们的记法，该构造的二分划分为$I = V'$, $A = \{x\}$, $B = V \cup Y \cup Z$。我们的精确覆盖构造为罗马支配和完美意大利支配提供了一种替代证明，但并非首次证明这一完美罗马子类的困难性。Banerjee 等人的早期二部图构造 [2, 定理 2] 以及 Padamutham and Palagiri 的星凸和梳凸构造[16, 定理 2.1–2.2]都不是双分裂图。事实上，它们各自都有两个不相邻的私有叶节点邻点，且这两个邻点的邻域不相交。它们必须都位于同一核心侧，这样另一侧便没有顶点，而另一侧必须非空。

本文的主要贡献是，针对二分裂核心大小的变化，系统绘制了这四种变体的复杂度图。当一侧核心的大小为一或二，以及两侧核心的大小都至少为三时，我们证明这些问题均为 NP 完全；对于任意固定的侧大小，这四种变体中有三种是困难的 $t \geq 2$。完美罗马支配的单例侧情形已隐含于先前的研究中；我们的结果补全了其他核心大小情形，纠正了所引用的意大利支配证明，并表明即使预先指定总权重为二的核心标签，完美意大利支配仍为 NP 完全。我们还证明了所述二分裂子类上的近似下界，并针对顶点覆盖、簇顶点删除和二部团簇顶点删除参数，为所有四个问题给出固定参数算法。以簇顶点删除为参数的罗马支配此前已在 [1] 中研究；根据树宽参数，完美罗马支配也是固定参数可解的 [14, 定理 15]。该

表 1：每个顶点都必须满足的条件 $v$ 及 $f(v) = 0$

| 规则（函数） | 条件 |
|---|---|
| 罗马（罗马支配函数） | $\lvert N(v) \cap f^{-1}(2)\rvert \geq 1$ |
| 完美罗马（完美罗马支配函数） | $\sum_{u \in N(v)} f(u) = 2$ |
| 意大利（IDF） | $\lvert N(v) \cap f^{-1}(2)\rvert = 1$ |
| 完美意大利（PIDF） | $\sum_{u \in N(v)} f(u) \geq 2$ |

$n^{1-\varepsilon}$ 完美罗马支配的下界适用于一侧核心大小固定为 1、2 或 3 的情形；对于完美意大利支配，我们证明了当两侧核心都随输入规模增长时该下界仍成立。

第 2–3 节按核心结构给出困难性结果：第 2 节讨论单点侧，第 3 节讨论大小为二的侧、较大的固定侧，以及完美意大利支配的指定核心标签。第 4 节介绍近似结果，第 5 节给出顶点覆盖、簇顶点删除和二部团簇顶点删除算法。

## 1.1 图论预备知识

所有图都是有限的、简单的无向图。用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 $G$ 的顶点集和边集，并令 $n = |V(G)|$；因此，$G$ 的阶为 $n$。$G$ 的大小（即其边数）为 $|E(G)|$。顶点 $v$ 的开邻域为 $N(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$，其度为 $|N(v)|$。度为一的顶点称为叶节点。若一个顶点集中的任意两个顶点都不相邻，则称该集合为稳定集或独立集。顶点覆盖是指至少包含每条边一个端点的集合。若图的顶点集可以划分为两个稳定集，则称该图为二部图；若一部分中的每个顶点都与另一部分中的每个顶点相邻，则称该图为完全二部图。

对于 $f\colon V(G) \to \{0,1,2\}$，令 $f(X) = \sum_{v \in X} f(v)$，且 $\mathrm{wt}(f) = f(V(G))$。四条规则列于表 1；正值顶点不受任何条件限制。它们的最小权重分别为 $\gamma_{\mathrm{R}}$、$\gamma_{\mathrm{PR}}$、$\gamma_{\mathrm{I}}$ 和 $\gamma_{\mathrm{PI}}$。这些判定问题询问上述权重是否不超过给定整数 $K$。对于每个判定问题，证明书是一个标记 $f\colon V(G) \to \{0,1,2\}$，需要 $O(n)$ 位。验证器将各标记求和，以检查 $\mathrm{wt}(f) \leq K$，并扫描各条边，检查每个标记为 0 的顶点是否满足相应条件：对于罗马支配或完美罗马支配，分别要求至少有一个或恰有一个邻居标记为 2；对于意大利支配或完美意大利支配，分别要求邻居标记之和至少为 2 或恰好为 2。这些检查耗时 $O(n + |E(G)|)$，因此这四个判定问题都属于 NP。

本文始终给定二分划分 $V(G) = I \dot\cup A \dot\cup B$，且核心两侧均非空。记 $\alpha = f(A)$ 和 $\beta = f(B)$。我们使用集合覆盖和 3-集合精确覆盖（X3C）：前者询问是否存在至多 $k$ 个集合覆盖全集 $U$；后者询问一个三元组族是否包含一个对大小为 $3q$ [9] 的全集进行划分的精确覆盖。受限X3C（RXC3）进一步要求每个元素恰好出现在三个集合中，并且是 NP 完全问题 [10]。

**共享判定框架。** 我们的判定归约使用一个 RXC3 实例 $(U, \mathcal{S})$，其中有 $U = \{e_1, \ldots, e_{3q}\}$ 和 $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_{3q}\}$。我们可以假设 $q \geq 2$，因为规模更小的实例可以直接判定。至多由 $q$ 个三元组构成的覆盖必然是精确覆盖。对于四条规则，我们反复使用以下强制观察：在权重至多为 $K$的任意标记中，一个包含超过$K$ 个顶点的集合都包含一个零顶点。特别地，超过 $K$ 个私有叶节点会强制其公共邻居取值为 2。复制的

元素顶点或测试顶点随后会在其共享邻域上施加相应规则。图中用于展示特定输入的共同具体 RXC3 示例见下文，其中 $q = 2$。带有通用索引或局部构件的图均为示意图，并非单独的源实例。归约和证明适用于任意 RXC3 实例：

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\},\\ \mathcal{S} &= \{S_1 = \{e_1, e_2, e_3\}, \quad S_2 = \{e_1, e_2, e_4\},\\ &\qquad S_3 = \{e_1, e_5, e_6\}, \quad S_4 = \{e_3, e_5, e_6\},\\ &\qquad S_5 = \{e_2, e_4, e_5\}, \quad S_6 = \{e_3, e_4, e_6\}\}.\end{aligned}$$

每个元素恰好出现在三个三元组中，并且 $\{S_2, S_4\}$ 是 $\mathcal{U}$的一个精确覆盖。我们首先利用这一框架证明，当一侧核心仅含一个顶点时，问题具有困难性。

# 2 核心侧为单顶点时的困难性

我们从 RXC3 归约。利用 $H_r$ 的一个共享构造，可以证明罗马支配、完美罗马支配和完美意大利支配的困难性。意大利支配的证明采用另一种构造，并加入额外的复制测试来控制值为 1 的标记。

**定理2.1**。 在附带满足$|A| = 1$ 和 $|B| \geq 3$的划分的双分图上，罗马支配、完美罗马支配、意大利支配和完美意大利支配的判定问题均为 *NP* 完全。

## 2.1 罗马支配与完美变体的共享构造

给定 RXC3 实例 $(U, \mathcal{S})$ 和复制参数 $r$ （该参数之后也用于近似困难性的证明），构造公共图 $H_r$，如图1所示，其中

$$\begin{aligned}A &= \{c\}, \qquad B = \{s_j : 1 \leq j \leq 3q\},\\ I &= \{d_\ell : 1 \leq \ell \leq r\} \,\dot\cup\, \{x_j : 1 \leq j \leq 3q\}\\ &\quad \,\dot\cup\, \{u_i^\ell : 1 \leq i \leq 3q,\ 1 \leq \ell \leq r\}.\end{aligned}$$

将 $c$ 连接到 $B$ 的所有顶点。其余边由下式指定

$$\begin{aligned}N(d_\ell) &= \{c\}, \qquad N(x_j) = \{c, s_j\},\\ N(u_i^\ell) &= \{s_j : e_i \in S_j\}.\end{aligned}$$

不存在其他边。这是一个具有 $1 + 6q + (3q + 1)r$ 个顶点的二分图。判定归约使用 $r = 3q + 3$ 和预算

$$K_{\mathrm{R}} = 2 + 2q, \qquad K_{\mathrm{PR}} = K_{\mathrm{PI}} = 2 + 3q.$$

三条规则的定理*2.1*。给定一个精确覆盖，将 2 分配给 $c$及其 $q$ 选定集合顶点。对于罗马支配，在其他位置分配 0。对于完美变体，将每个选定集合的私有测试赋值为 1，并将所有其余顶点赋值为 0。每个值为 0 的集合顶点、私有测试或叶节点都由 $c$ 支持；每个元素副本都由其唯一的选定集合支持。权重分别为 $K_{\mathrm{R}}$ 和 $K_{\mathrm{PR}} = K_{\mathrm{PI}}$，且所有要求的条件均成立。

反过来，任何在预算范围内的标记都包含 $f(c) = 2$，并且每个元素都有一个零副本，因为 $r$ 超过了所有三个预算。

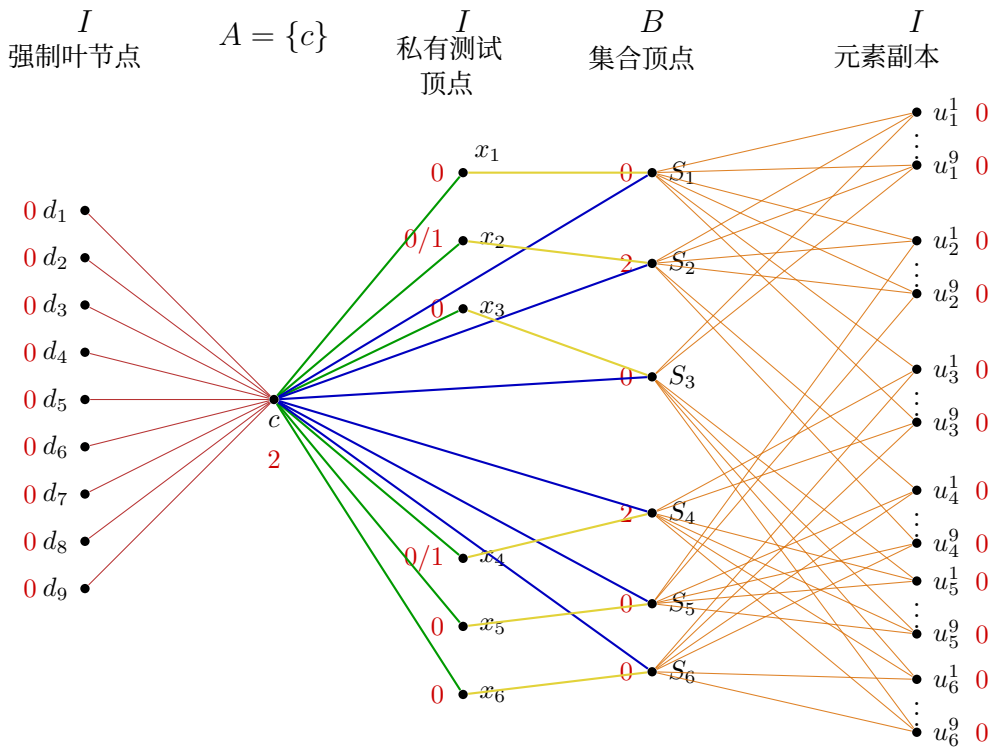



**图1** 用于罗马支配、完美罗马支配和完美意大利支配的公共图 $H_r$，使用第 1 节中的 RXC3 实例进行说明，其中包含 $q = 2$ 和精确覆盖 $\{S_2, S_4\}$。绿色边将 $c$ 连接到私有测试顶点 $x_j$，蓝色边将 $c$连接到集合顶点 $S_j$，黄色边将每个 $x_j$ 连接到 $S_j$。橙色边表示关联关系 $e_i \in S_j$，其中展示了每个元素的第一个和第 9 个副本；红色边将 $c$连接到强制叶节点。垂直省略号表示省略的中间元素副本。

罗马。 值为2的集合顶点覆盖了 $U$。它们至多有 $q$ 个，因为其权重至多为 $K_{\mathrm{R}} - 2 = 2q$。用至多 $q$ 个三元组覆盖 $3q$ 个元素，需要精确覆盖。

完美罗马。 每个零值元素副本恰好有一个值为 2 的集合邻点。因此，这些集合顶点构成一个精确覆盖，由 $q$ 个三元组组成。它们的私有测试顶点必须为正值，因为它们同时看到 $c$ 和选定的值为 2 的集合。这些顶点用完了整个预算 $2 + 3q$。

完美意大利。 每个元素的一个零副本给出

$$\sum_{j:e_i \in S_j} f(s_j) = 2. \tag{1}$$

对所有元素求和，并利用每个集合都是一个三元组这一事实，可得

$$\sum_{j=1}^{3} q f(s_j) = 2q. \tag{2}$$

令 $P = \{j : f(s_j) > 0\}$。对于每个 $j \in P$，私有测试 $x_j$必须为正值：零测试将得到 $2 + f(s_j) > 2$。因此，

$$K_{\mathrm{PI}} \geq \mathrm{wt}(f) \geq 2 + 2q + |P|, \qquad |P| \geq q.$$

等式成立。恰好有 $q$ 个集合顶点为正值，且其值均为 2，因此由 (1) 可得一个精确覆盖。全部三种构造均为多项式时间的，并且 NP 中的归属已在第 1 节中得到证明。

□

## 2.2 意大利支配

**早期的归约**。对于一个 X3C实例（$X$，$\mathcal{C}$），其中 $|X| = 3q$ 和 $\mathcal{C} =\{C_1, \ldots, C_t\}$，Padamutham and Palagiri [15, 定理 3] 中的构造用我们的记号表示为

$$I = X, \qquad A = \{a\}, \qquad B = \{c_1, \ldots, c_t, a_1, a_2, a_3\}.$$

顶点 $a$ 与所有 $B$相邻，并且 $x \in X$ 与 $c_j$ 相邻当且仅当 $x \in C_j$；除此之外没有其他边。因此，核心两侧的大小分别为 1 和 $t + 3$。目标预算为 $2q + 2$。反向证明假设，值为 0 的元素顶点必须有一个值为 2 的集合邻点，但两个值为 1 的邻点也满足意大利条件。

举一个反例，取 $X = \{1, \ldots, 6\}$ 和

$$C_1 = \{1, 2, 3\}, \quad C_2 = \{1, 4, 5\},$$
$$C_3 = \{2, 4, 6\}, \quad C_4 = \{3, 5, 6\}.$$

任意两个三元组都相交，因此不存在两个三元组构成精确覆盖。尽管如此，将 2 赋给$a$，将 1 赋给所有四个 $c_j$，并将 0 赋给其余每个顶点，可得到一个权重为 $6 = 2q + 2$ 的意大利支配函数。每个元素恰好出现在两个三元组中，并分别从每个三元组获得一个单位；每个 $a_i$ 从 $a$获得两个单位。因此，这个 X3C 的否实例映射为意大利支配的一个是实例。这推翻的是所述归约的等价性，而非 NP 完全性主张本身。

**一个独立归约**。

意大利支配的定理*2.1*。使用通用 RXC3 实例。放置 $K = 10q + 2$和 $R = K + 1$，并定义

$$A = \{c\},$$
$$B = \{s_j : 1 \le j \le 3q\} \dot\cup \{x_i, y_i, z_i : 1 \le i \le 3q\}.$$

添加每条 $A$–$B$ 边。稳定集 $I$ 由 $R$ 个私有叶节点 $d_\ell$ 组成，这些叶节点连接到 $c$；此外，对每个元素 $e_i$，有四类 $\{u^\ell_{i,h}:\ 1 \le \ell \le R\}$，由 $h \in \{1, 2, 3, 4\}$索引。它们的邻域为

$$\begin{aligned} &N(u^\ell_{i,1}) = \{x_i, y_i\}, && N(u^\ell_{i,2}) = \{x_i, z_i\}, \\ &N(u^\ell_{i,3}) = \{y_i, z_i\}, \\ &N(u^\ell_{i,4}) = \{x_i\} \cup \{s_j : e_i \in S_j\}. \end{aligned} \tag{3}$$

没有其他边。因此，($I$，$A$，$B$) 是一个二分划分，其中包含 $|A| = 1$和 $|B| =12q \ge 3$。该图有 $1+12q+R(1+12q)$ 个顶点和多项式数量的边。图2概述了该构造。图3展示了局部测试构件。

假设存在一个精确覆盖。给 $c$赋值 2，给每个 $x_i$，$y_i$，$z_i$赋值 1，并给 $q$个选定的集合顶点赋值 1。其余位置赋值为零。每个对测试顶点都收到两个单位。每个元素测试顶点从 $x_i$ 以及其唯一对应的选定集合各收到一个单位。强制叶节点和 $B$ 中的所有零值顶点都从 $c$收到两个单位。这是一个权重为$2 + 9q + q = K$的意大利支配函数。

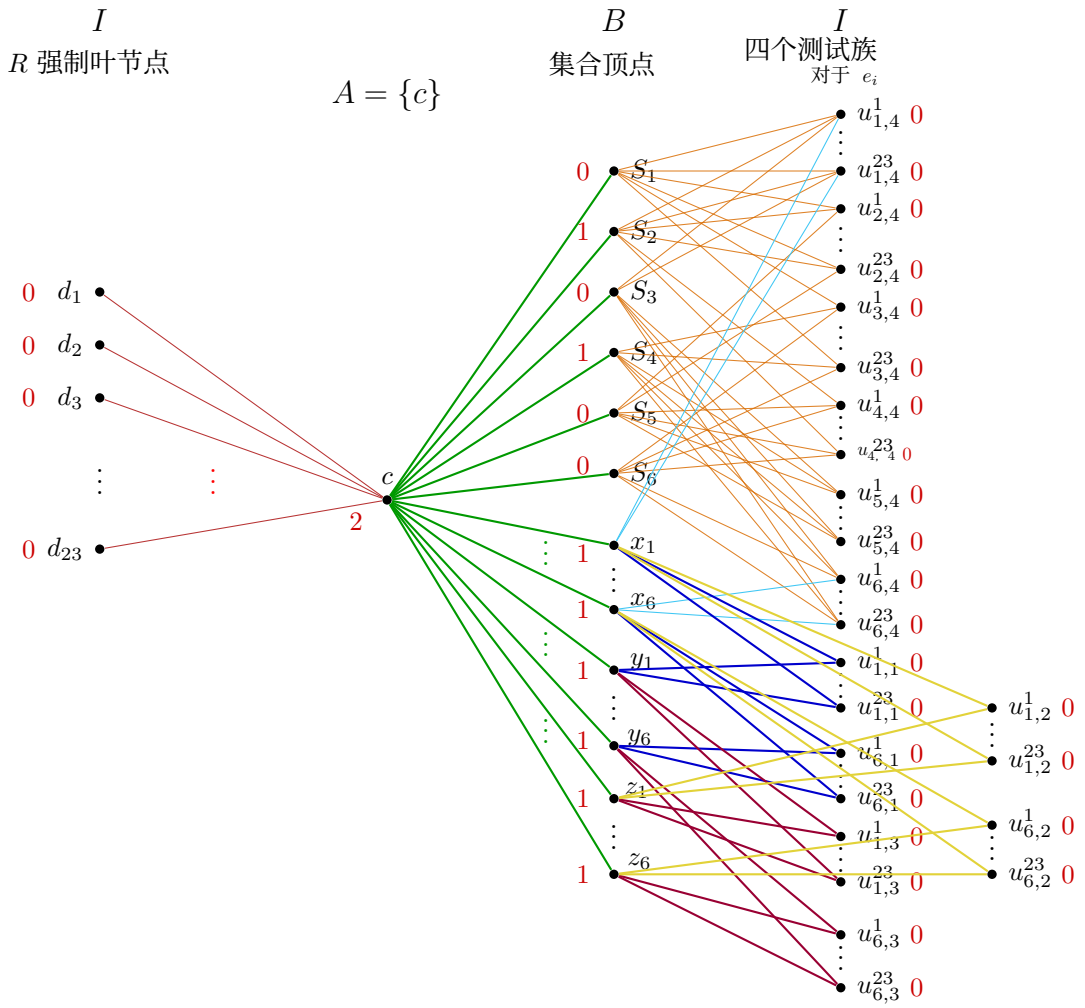



**图2** 单例侧意大利构造概览，以 $\{S_2, S_4\}$的精确覆盖为例，展示了 $q = 2$ 和 $R = 23$。蓝色边表示$A$ 与 $B$之间的完全二分核心。红色数值表示对应的意大利支配函数（IDF）： $c$的值为2，每个辅助顶点和每个选定集合顶点的值均为1，其余所有顶点的值均为0。图中仅展示了有代表性的顶点和边；虚线间隔表示省略的带索引顶点及副本。

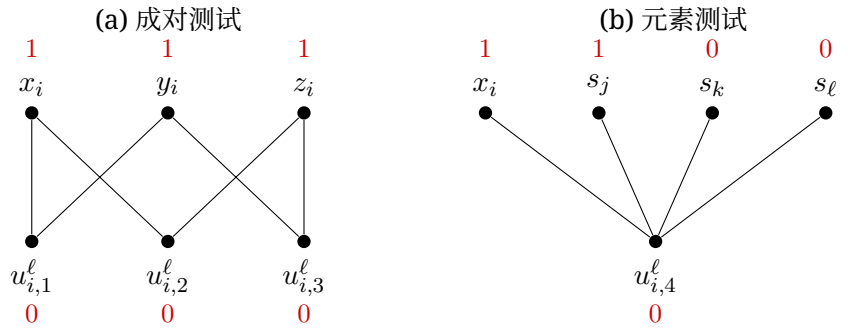



**图3** 意大利构造的局部IDF装置。每个测试表示 $R$ 个副本。在 (a) 中，上方的顶点位于 $B$ 中，而测试位于 $I$中。在 (b) 中，展示了包含 $e_i$ 的三个集合： $S_j$ 被选中，而 $S_k$ 和 $S_\ell$ 未被选中。

反过来，设 $f$ 是一个权重至多为 $K$ 的意大利支配函数。 $R > K$ 个私有叶节点迫使$f(c) = 2$。每个测试族都有 $R = K + 1$ 个副本，多于预算 $K$；因此每个测试族都至少有一个零副本，所以由 (3) 得

$$\begin{aligned} f(x_i) + f(y_i) &\geq 2, \\ f(x_i) + f(z_i) &\geq 2, \\ f(y_i) + f(z_i) &\geq 2, \\ f(x_i) + \sum_{j : e_i \in S_j} f(s_j) &\geq 2. \end{aligned} \tag{4}$$

设 $\mathcal{S}_f = \{S_j : f(s_j) > 0\}$，并设 $s$ 为未被 $\mathcal{S}_f$ 覆盖的元素数量。将前三个不等式相加得 $2(f(x_i) + f(y_i) + f(z_i)) \geq 6$，因此每个元素对应的三个辅助标签的总权重至少为 3。这就是它们的基准成本。若 $e_i$ 未被覆盖，则每个与之关联的集合顶点的标签均为 0，第四个不等式迫使 $f(x_i) \geq 2$。第三个不等式还给出 $f(y_i) + f(z_i) \geq 2$，因此 $e_i$ 的辅助标签总权重至少为 4，比基准成本高 1。

定义集合顶点权重 $W$ 和辅助标签超额权重 $D$ 为

$$\begin{aligned} W &= \sum_{j=1}^{3q} f(s_j), \\ D &= \sum_{i=1}^{3q} \big( f(x_i) + f(y_i) + f(z_i) - 3 \big) \geq 0. \end{aligned}$$

由于 $f(c) = 2$，总权重至少为 $2 + 9q + W + D$。因此，预算 $K = 10q + 2$至多还剩 $q$ 个单位，用于支付集合标签以及高于基线的辅助权重，从而得到 $W + D \leq q$。每个未覆盖元素至少为 $D$贡献一个单位，因此 $s \leq D$。此外$|\mathcal{S}_f| \leq W$，所以 $\mathcal{S}_f$中的三元组至多覆盖 $3W$个元素。因此

$$\begin{aligned} 3q &\leq 3W + s \leq 3W + D \\ &= 3(W + D) - 2D \leq 3q - 2D. \end{aligned}$$

由此可得， $D = 0$、 $W = q$和 $s = 0$。因此，至多有 $q$ 个三元组覆盖全部 $3q$ 个元素。它们必须恰好是 $q$ 个两两不相交的三元组，从而构成一个精确覆盖。该归约是多项式时间的，而意大利支配属于 NP。 □

因此，当一个核心侧为单例时，全部四个支配问题都是 NP 完全的。第 3 节讨论固定大小的核心侧和指定核心标签。

# 3 具有固定大小核心侧和指定核心标签的困难性

首先，我们将罗马、完美罗马和意大利归约扩展到一个核心侧的任意固定整数大小 $t \geq 2$ 。我们还证明了当该侧大小为二时，完美意大利问题具有困难性。最后一小节证明：即使核心两侧的大小都至少为三，判定指定的核心标签能否扩展为 PIDF 仍是 NP 完全的。

**定理 3.1.** 对于配有满足 $|A| = 2$ 和 $|B| \geq 3$ 的划分的双分裂图，罗马支配、完美罗马支配、意大利支配和完美意大利支配的判定问题均为 *NP* 完全。

### 3.1 罗马、完美罗马和意大利支配的困难性

**引理 3.2.** 对于每个固定整数 $t \geq 2$，配有满足 $|A| = t$ 和 $|B| \geq 3$ 的划分的双分裂图上的罗马支配、完美罗马支配和意大利支配判定问题均为 *NP* 完全。

证明。 在每个构造中，添加 $t-1$ 个顶点 $a_1$、……、$a_{t-1}$ 到 $A$，使其各自恰好与$B$相邻。因此 $A = \{c, a_1, \ldots, a_{t-1}\}$；所有其他边保持不变。图4展示了罗马、完美罗马和意大利核心扩展标记模式。

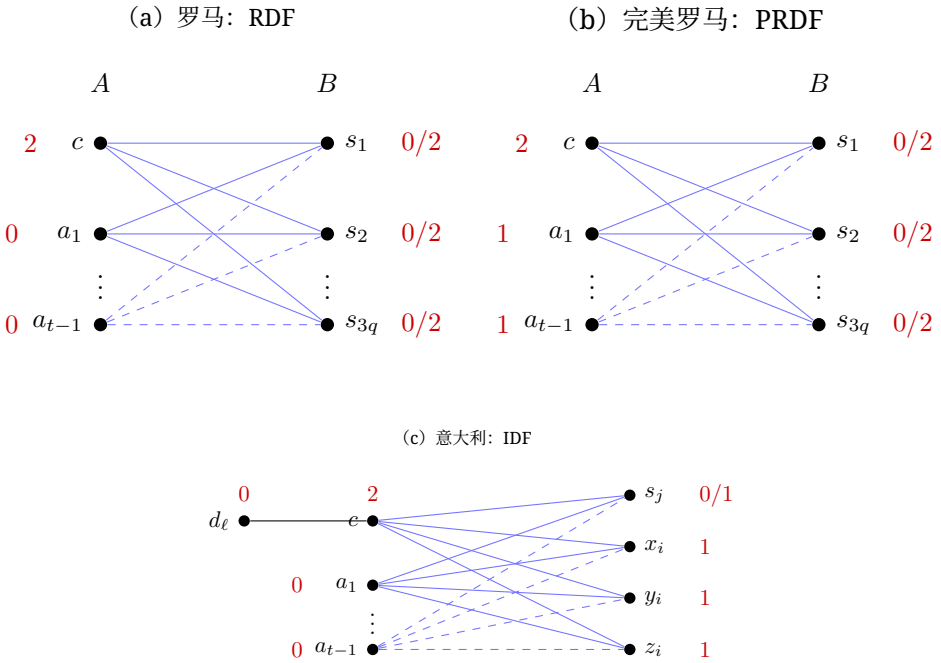



**图4** 核心扩展标记：（a）罗马、（b）完美罗马和（c）意大利支配。在面板（a、b）中，每个集合顶点 $s_1$、$s_2$、……、$s_{3q}$都可以标记为0或2（显示为 $0/2$）。面板（c）展示了 $s_j$、$x_i$、$y_i$、$z_i$，其中 $1 \leq i$、$j \leq 3q$：$s_j$ 为集合索引，而 $x_i$、$y_i$、$z_i$ 对应于$e_i$。$A$一侧展示了 $c$、$a_1$、……、$a_{t-1}$（仅当 $a_1$ 时为 $t = 2$）。红色数字表示标记。

对于罗马支配，使用第 2.1 节中的公共图 $H_r$，其中包含 $K = 2 + 2q$和 $r = K + 1$。精确覆盖给出权重为 $K$的标记：将 $c$ 和选定的集合顶点标记为 2，其余所有顶点（包括每个新增的 $a_i$）标记为 0。每个新增的 $a_i$ 都与所有标记为 2 的 $q$ 选定集合顶点相邻，因此受到支配。反之，由于 $r > K$，私有叶节点强制要求 $f(c) = 2$，而复制的元素副本强制每个元素都必须由标记为 2 的集合顶点覆盖。新增的 $a_i$ 顶点无法替代这些集合选择，因为它们不与元素副本相邻。预算至多允许选择 $q$ 个集合，因此这些集合构成一个精确覆盖。

对于完美罗马支配，使用第 2.1 节中的同一公共图 $H_r$，其中有$K = 2 + 3q + (t-1)$和 $r = K + 1$，并保留所有私有测试顶点。精确覆盖给出原有标记，其中每个 $a_i$ 标记为 1，权重为 $K$；这些新标记不会改变任何旧顶点的标记为 2 的邻居数量。反之，叶节点强制要求 $f(c) = 2$，而标记为 0 的元素副本则强制形成精确覆盖。其 $q$ 个选定集合迫使它们的私有测试顶点以及每个$a_i$ 都为正值，从而用尽全部预算 $2 + 3q + (t-1)$。

对于意大利支配，保留 $K = 10q + 2$ 和第2.2节中的图。精确覆盖可扩展为 $f(a_i) = 0$，因为 $f(B) = 10q \geq 2$。叶节点和测试邻域

保持不变，因此反向证明仍然得到 (4) 和 $W + D \le q$，从而得到一个精确覆盖。每种构造都可在多项式时间内完成，且这三个问题都属于 NP。 □

## 3.2 具有双顶点核心侧的完美意大利支配

新的核心顶点必须共同提供两个单位。我们将中心替换为两个具有相同邻域的顶点，并为每个顶点赋值 1。

**引理 3.3**。 在配有满足 $|A| = 2$ 和 $|B| \ge 3$ 的划分的双分裂图上，完美意大利支配的判定问题是 *NP* 完全的。

证明。 使用第 2.1 节中的通用 RXC3 实例和 $H_r$，其中 $K = 2 + 3q$ 和 $r = K + 1$。添加一个顶点 $c'$ 到 $A$，使其邻域与 $c$ 的完全相同，但在 $c$ 和 $c'$ 之间不添加边。因此

$$A = \{c, c'\}, \qquad B = \{s_1, \dots, s_{3q}\},$$

独立集邻域为

$$\begin{aligned} N(d_\ell) &= \{c, c'\}, \\ N(x_j) &= \{c, c', s_j\}, \\ N(u_i^\ell) &= \{s_j : e_i \in S_j\}. \end{aligned}$$

每条 $A$–$B$ 边都存在，且不存在其他边。顶点 $d_\ell$ 现在的度为 2，而不是度为 1。该构造是多项式时间的；其标记如图 5 所示。

给定一个精确覆盖，将 $c$、$c'$ 标记为 1，将选定集合顶点标记为 2，并将其私有测试顶点 $x_j$ 标记为 1。将所有其余顶点标记为零。每个零集合顶点、零私有测试顶点和 $d_\ell$ 都从每个核心顶点处获得一个单位。每个元素副本都从其唯一的选定集合顶点处获得两个单位。因此，这是一个权重为 $2 + 2q + q = K$ 的 PIDF。

反过来，设 $f$ 是一个权重至多为 $K$ 的 PIDF。 $r > K$ 顶点$d_\ell$ 中至少有一个为零，从而得到

$$f(c) + f(c') = 2.$$

每个元素都有一个零副本，因此对于每个 $i$，都有 $\sum_{j:\ e_i \in S_j} f(s_j) = 2$。对 $3q$个元素求和可得 $\sum_j f(s_j) = 2q$。令 $P = \{j : f(s_j) > 0\}$。对于 $j \in P$，顶点 $x_j$ 不可能为零，因为其邻居和将为 $2 + f(s_j) > 2$。因此

$$K \ge \mathrm{wt}(f) \ge 2 + 2q + |P|, \qquad |P| \ge q.$$

等式成立： $|P| = q$，并且每个正值集合顶点的标签均为 2。现在，元素方程表明，这些 $q$ 三元组构成一个精确覆盖。此外， $c$和 $c'$ 都不能为零：否则它们将至少从 $B$获得 $2q > 2$。因此，它们的标签确实是 (1，1)。属于 NP 完成证明。

□

定理 *3.1*。 引理 3.2 与 $t = 2$ 证明了罗马支配、完美罗马支配和意大利支配的 NP 困难性；引理 3.3 证明了完美意大利支配的 NP 困难性。这四个问题都属于 NP，因此每个问题都是 NP 完全。

□

## 3.3 完美意大利支配中指定核心标签的困难性

利用第 1 节中的 RXC3 框架，我们将集合选择编码到 $I$ 中的顶点，并将精确覆盖约束编码到零标记核心顶点的邻域中。这证明了指定核心扩展问题是 NP 完全的；构造所具有的低权刚性也给出了后文用于证明近似困难性的最优值间隙。

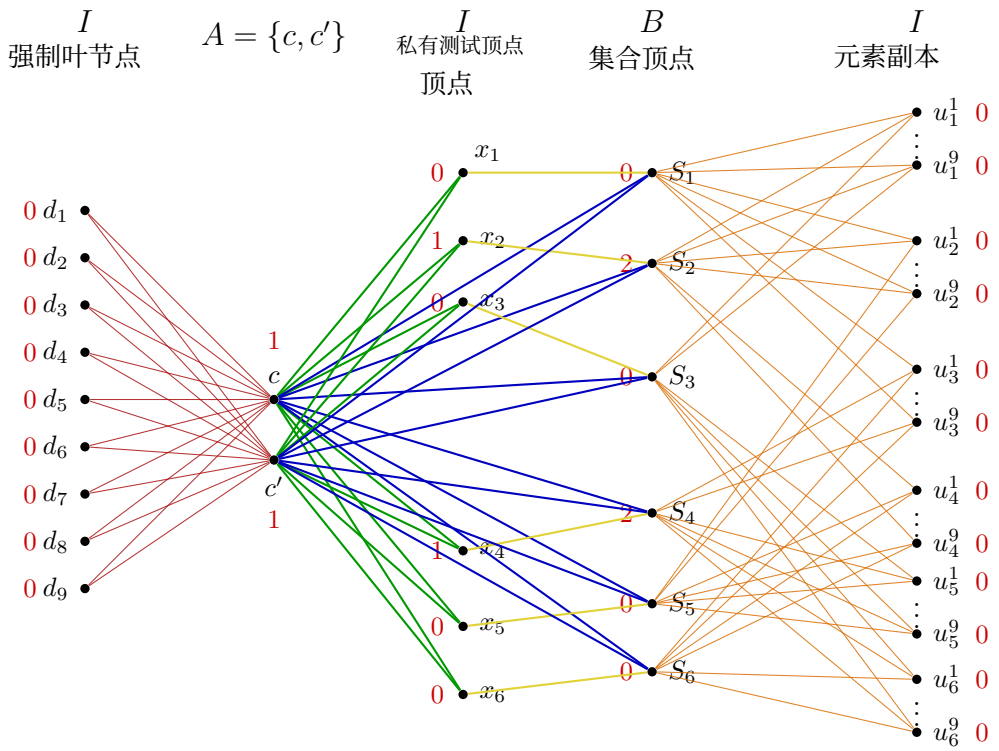



**图 5** 第 1 节中 $q = 2$ RXC3 实例的大小为二的完美意大利归约，其中包含精确覆盖 $\{S_2, S_4\}$ 和 $r = 9$。红色标签给出了一个 PIDF：$c$，$c'$ 的值为 1，$S_2$，$S_4$ 的值为 2，而 $x_2$，$x_4$ 的值为 1；所有其他显示的顶点的值均为 0。仅显示副本 $u_i^1$，$u_i^9$；竖直省略号省略了 $u_i^2$，…，$u_i^8$。橙色边表示集合-元素关联。$c$ 和 $c'$ 均与所有集合顶点、私有测试顶点和强制顶点相邻，但不与元素副本或彼此相邻。

**定理 3.4**。给定一个二部双分图、一个给定划分，以及对 $A \cup B$ 上顶点的指定标签，判断这些标签能否扩展为 *PIDF* 是 *NP* 完全的；即使 $|A|$、$|B| \geq 3$ 且指定标记将 *2* 赋给 $A$ 中的一个顶点、将 *0* 赋给其余所有核心顶点，该结论仍成立。带有附加权重界的同一问题也是 *NP* 完全的。

**构造**。对于整数 $r \geq 1$，构造带有划分的 $J_r = J_r(U, \mathcal{S})$

$$
\begin{aligned}
A &= \{p, z, h_{12}, h_{13}, h_{23}\} \dot\cup \{w_j : 1 \leq j \leq 3q\} \dot\cup \{e_i : 1 \leq i \leq 3q\},\\
B &= \{b_\ell : 1 \leq \ell \leq r\},\\
I &= \{t_1, t_2, t_3, y\} \dot\cup \{u_j, v_j : 1 \leq j \leq 3q\} \dot\cup \{d_\ell : 1 \leq \ell \leq r\}.
\end{aligned}
$$

三个部分都是稳定集。在 $A$ 和 $B$ 之间添加所有边，并将 $p$ 与 $I \setminus \{y\}$ 的每个顶点相连。其余边由以下独立集邻域指定，其中 $N_I(w) = N_{J_r}(w) \cap I$：

$$
\begin{aligned}
N_I(z) &= \{y\},\\
N_I(h_{12}) &= \{t_1, t_2\}, \quad N_I(h_{13}) = \{t_1, t_3\}, \quad N_I(h_{23}) = \{t_2, t_3\},\\
N_I(w_j) &= \{u_j, v_j, t_1\} \quad (1 \leq j \leq 3q),\\
N_I(e_i) &= \{t_1\} \cup \{u_j : e_i \in S_j\} \quad (1 \leq i \leq 3q).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

不存在其他边。特别地，$y$ 是 $z$ 的叶节点，每个 $d_\ell$ 都是 $p$ 的叶节点，并且 $I$ 与 $B$ 之间不存在边。因此，$(I, A, B)$ 是一个二分划分，而 $(A, B \cup I)$ 是一个

二分图划分。各部分的大小为

$$|A| = 6q + 5, \qquad |B| = r, \qquad |I| = 6q + r + 4.$$

$J_r$ 的阶和大小分别为 $|V(J_r)| = 12q + 9 + 2r$ 和 $|E(J_r)| = (6q + 6)\, r + 27q + 10$。当 $r$ 相对于源规模为多项式时，该构造也可在多项式时间内完成。令 $b = 3q + 7$。对于判定问题困难性，我们取 $r = b + 1$；此时核心两侧都会随实例规模增长。图6给出了完整概览；图7展示了局部方程。

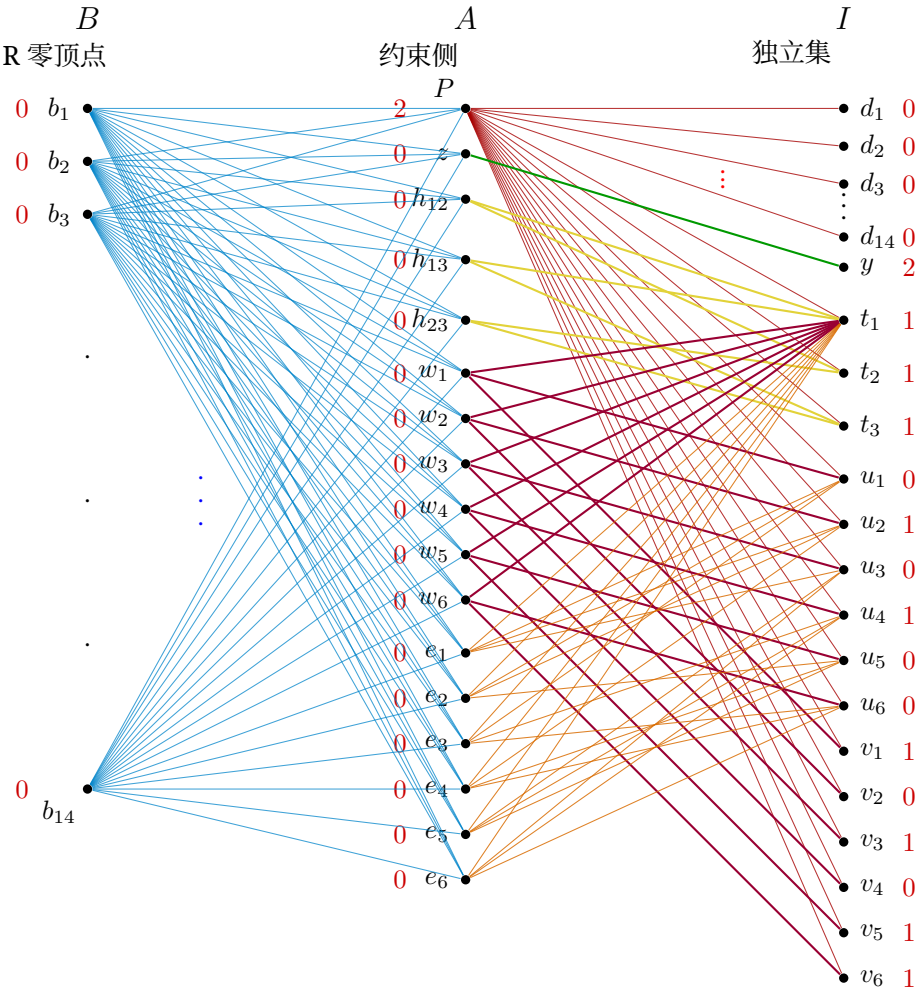



**图6** 针对 $q = 2$ 和 $r = 14$的大核心完美意大利归约示意图。红色数字给出了第1节中示例精确覆盖 $\{S_2, S_4\}$ 对应的 PIDF 标记。集合 $A$ 和 $B$ 诱导出一个完全二分图。 $b_3$ 和 $b_{14}$ 之间的黑点表示 $B$中省略的中间顶点； $A$ 和 $B$ 之间空隙中的蓝点表示它们到 $A$的、被省略的完全二分图边。 $I$ 列中的点表示带索引的中间顶点。不同颜色的边用于区分核心边以及构件所用的邻域。橙色边表示第1节中通用 RXC3 实例的关联关系。图7详述了局部约束。

**引理 3.5**。 对于任意 $r \geq 1$，一个精确覆盖给出一个权重为 $b = 3q + 7$ 的 $J_r$ 的 *PIDF*。反过来，任何权重小于 $r$ 的 *PIDF* 都强制满足 $f(p) = 2$, $f(A \backslash \{p\}) = 0$ 和 $f(B) = 0$，并确定一个精确覆盖。因此，对于 $r > b$，是实例的最优值为 $b$ ，而否实例的最优值至少为 $r$。

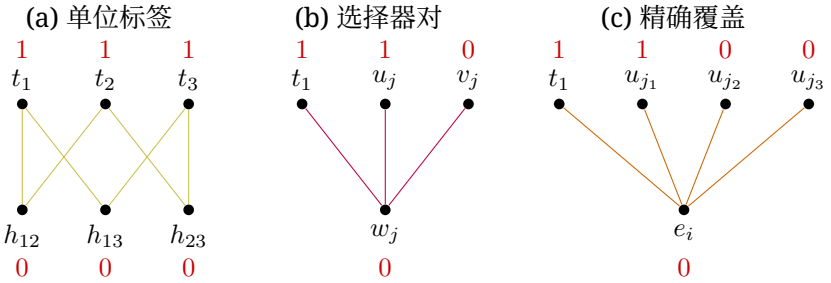



**图7** 图6中大核心完美意大利归约的局部方程构件。上方顶点属于 $I$，下方顶点属于 $A$；面板（a）展示了 $t_1$、$t_2$、$t_3$ 上的单位标签以及成对约束；（b）展示了选定集合 $S_j$，其中 $(f(u_j),\ f(v_j)) = (1,\ 0)$；（c）展示了包含 $e_i$ 的三个集合中恰有 $S_{j_1}$ 被选中。

证明。 首先，假设 $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ 是一个精确覆盖。设

$$f(p) = f(y) = 2, \qquad f(t_1) = f(t_2) = f(t_3) = 1,$$

并且，对每个 $j$，令

$$(f(u_j), f(v_j)) = \begin{cases} (1,0), & S_j \in \mathcal{S}', \\ (0,1), & S_j \notin \mathcal{S}'. \end{cases}$$

将零赋给其他每个顶点。 $B$ 中的每个零顶点从 $p$ 接收两个。 $I$ 中的每个零顶点也从 $p$ 接收两个，其其他邻点均为 $A$ 中的零约束顶点。零顶点 $z$ 从 $y$ 接收两个，而每个 $h_{ij}$ 分别从 $t_i$、$t_j$ 各接收一个。每个 $w_j$ 从 $t_1$ 接收一个，并从其配对顶点 $u_j$、$v_j$ 接收一个。最后，每个 $e_i$ 从 $t_1$ 接收一个，并从包含 $e_i$ 的唯一选定集合接收一个。因此这是一个 PIDF，其权重为

$$2 + 2 + 3 + 3q = 3q + 7 = b.$$

反之，设 $f$ 是一个权重小于 $r$ 的 PIDF，并记 $\alpha = f(A)$、$\beta = f(B)$。若 $f(p) \neq 2$，则所有 $r$ 私有叶节点 $d_\ell$ 都必须为正值，因此权重至少为 $r$。所以 $f(p) = 2$。由于 $|B| = r > \mathrm{wt}(f)$，$B$ 中至少有一个顶点为零。其邻域恰好为 $A$，因此其约束给出 $\alpha = 2$。于是，$A \setminus \{p\}$ 中的每个顶点都为零。

顶点 $y$ 只有一个值为零的邻居 $z$，因此 $f(y) > 0$。顶点 $z$ 处的约束为

$$\beta + f(y) = 2, \tag{6}$$

这意味着 $\beta \leq 1$。三个值为零的顶点 $h_{ij}$ 给出

$$f(t_1) + f(t_2) = f(t_1) + f(t_3) = f(t_2) + f(t_3) = 2 - \beta.$$

相减这些方程可知，三个标记都等于 $(2-\beta)/2$。由于标记为整数且 $\beta \in \{0,1\}$，我们得到

$$\beta = 0, \qquad f(t_1) = f(t_2) = f(t_3) = 1, \qquad f(y) = 2.$$

现在，每个值为零的顶点 $w_j$ 都给出

$$f(u_j) + f(v_j) + 1 = 2.$$

因此，$(f(u_j),\ f(v_j))$ 要么是 $(1,\ 0)$，要么是 $(0,\ 1)$。每个零元素顶点 $e_i$处的约束为

$$1 + \sum_{j : e_i \in S_j} f(u_j) = 2.$$

因此，每个元素恰好属于 $\{S_j$ 的一个成员： $f(u_j) = 1\}$。这些集合构成一个精确覆盖；由于每个集合的大小为三，因此恰好有 $q$ 个。被强制的标签总权重为 $b = 3q + 7$，这证明了刚性以及所声称的最优间隙。 □

定理 *3.4*。 取 $J_{b+1}$ ，并指定 $f(p) = 2$，其余所有核心值均为零。在任意扩展中，零顶点 $z$迫使 $f(y) = 2$； $h_{12}$、$h_{13}$、$h_{23}$处的三个成对方程迫使 $f(t_i) = 1$。于是，$w_j$ 处的方程给出 $f(u_j) + f(v_j) = 1$，而 $e_i$处的方程给出$\sum_{j:\ e_i \in S_j} f(u_j) = 1$。因此，无论总权重如何，取值为 1 的选择变量都确定一个精确覆盖。反过来，根据引理 3.5，任一精确覆盖都能给出权重为 $b$ 的扩展。这证明了无预算限制的结论以及带有上界 $b$的版本。两种情况下，完整标记都是可在多项式时间内检查的证明书。 □

因此，即使指定了这些核心标签，判定它们能否扩展为 PIDF 仍然是 NP 完全：这些标签将精确覆盖的选择编码在 $I$中。

**定理 3.6**。 对于给定满足$|A|$、$|B| \geq 3$的划分的双分图，罗马支配、完美罗马支配、意大利支配和完美意大利支配的判定问题均为 *NP* 完全问题。

证明。对于罗马、完美罗马和意大利支配，引理 3.2 表明，在具有 $|A|$、$|B| \geq 3$ 的子类上是 NP 困难的。对于完美意大利支配，引理 3.5 结合 $r = b+1$ 和预算 $b$ 表明其为 NP 困难；其构造具有 $|A| = 6q + 5$ 和 $|B| = 3q + 8$。根据第 1.1 节，四个问题都属于 NP，因此它们都是 NP 完全的。 □

接下来我们推导近似界，这需要的不仅仅是判定等价关系。

# 4 近似困难性

集合覆盖为非完美规则提供界；复制为完美规则创建精确覆盖间隙。

## 4.1 罗马支配与意大利支配：集合覆盖

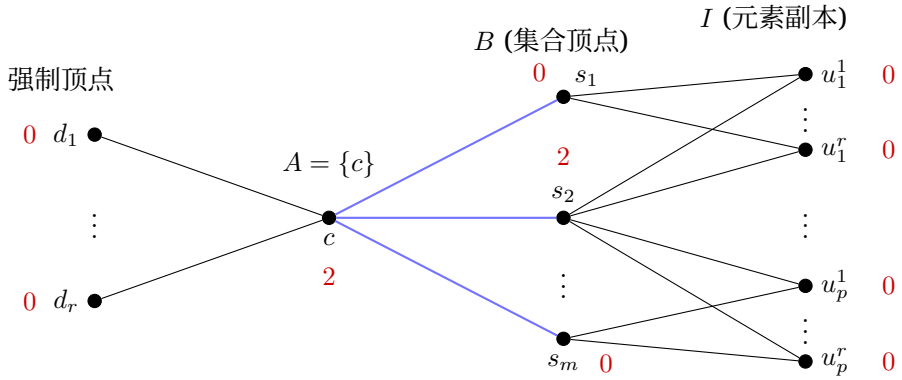
作为对比，一般图上的意大利支配有一个 2(1+ln(Δ+1))-近似，其中 Δ 是最大度 [15, 定理 15]。因此，即使施加双分裂限制，我们关于意大利支配的下界仍保留了对数级的图阶依赖，至多相差常数因子。

设 $U = \{e_1, \ldots, e_p\}$ 非空，且 $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ 覆盖 $U$。这里的集合大小任意，不像判定章节中的三元组。记 $\tau$ 为最小覆盖大小。固定 $t \in \{1, 2, 3\}$，并令 $r = (p + m + 1)^3$。构造 $G_t$，使得

$$A = \{c, a_1, \ldots, a_{t-1}\}, \qquad B = \{s_1, \ldots, s_m\},$$
$$I = \{d_\ell : 1 \leq \ell \leq r\} \,\dot\cup\, \{u_i^\ell : 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq \ell \leq r\}.$$

对于 $t = 1$， $A = \{c\}$。添加所有 $A$–$B$ 边，令 $d_\ell$ 为 $c$的一个私有叶节点，并且当且仅当 $e_i \in S_j$时连接 $u_i^\ell$ 与 $s_j$。除此之外没有其他边；特别地，该图没有私有集合测试 $x_j$。其阶为 $n = t + m + (p+1)r$。图 8 展示了 $G_1$。当$t = 2$，3 时，额外的核心顶点标记为零，且仅与 $B$相邻。

**定理 4.1**。 除非P =NP，罗马支配和意大利支配在配备满足 $|A| = t$ 和 $|B| \geq 3$ 的划分的双分裂图上，对于任意固定的 $t \in \{1, 2, 3\}$，都不允许存在多项式时间的 $o(\log n)$近似。




$s_j u_i^\ell \in E(G)$当且仅当 $e_i \in S_j$、 $1 \le i \le p$、 $1 \le j \le m$、 $1 \le \ell \le r$

**图 8** 用于罗马支配和意大利支配近似困难性的集合覆盖构造。蓝色边将 $c$ 连接到所有集合顶点。每个强制顶点仅与 $c$相邻，并且每个副本 $u_i^\ell$ 恰好与其所属集合包含 $e_i$的集合所对应的集合顶点相邻。图中仅显示具有代表性的关联边。红色数值表示一个同时为罗马支配函数和意大利支配函数的标记，该标记由一个集合覆盖得到，其中在所显示的集合顶点中， $s_2$ 被选定，而 $s_1$， $s_m$ 未被选定。中心顶点和选定集合顶点的值为 2；所有其他顶点的值为 0。允许元素副本存在其他被选定的邻居

证明。 大小为 $\tau$ 的覆盖同时给出一个 RDF 和一个 IDF：将 $c$ 以及选定集合顶点标记为 2，其余所有顶点标记为 0。其权重为 $2 + 2\tau$；任何添加的 $a_i$ 都能看到一个选定集合。选定所有集合的代价至多为 $2 + 2m < r$，因此两者的最优权重都小于 $r$。

任何权重为 $w < r$ 的罗马支配函数或意大利支配函数都具有 $f(c) = 2$ 以及每个元素的一个零副本。对于罗马支配，值为2的集合顶点因此构成一个大小至多为$(w-2)/2$的覆盖。对于意大利支配，正值集合顶点构成一个大小至多为 $w - 2$的覆盖。特别地，

$$\gamma_{\mathrm{R}}(G_t) = 2 + 2\tau, \qquad 2 + \tau \le \gamma_{\mathrm{I}}(G_t) \le 2 + 2\tau.$$

意大利提取允许有两个取值为 1 的邻居；它没有使用第 2.2 节讨论的无效推理。

假设任一问题的近似比为 $\rho(n) = o(\log n)$。对于足够大的输入，返回的权重至多为 $\rho(n)(2 + 2m) < r$。对于罗马支配，提取出的覆盖大小至多为 $2\rho(n)\tau$；对于意大利支配，至多为 $4\rho(n)\tau$，因为 $\tau \ge 1$。在构成对数下界基础的困难的集合覆盖实例族中， $m$ 在 $p$ [7] 中有多项式界。因此 $\log n = O(\log p)$，而任一算法都将给出集合覆盖的 $o(\log p)$-近似，这与下界矛盾。对于 $m < 3$ 或规模有界的实例，可以直接处理。

□

## 4.2 完美变体：精确覆盖间隙

下文的完美意大利因子已知适用于一般图 [17]。我们的证明表明，在附加二分双分限制下，该因子仍然成立。仅仅将一般图结果应用于一个子类，并不能推出这一结论。

**定理 4.2**。 固定 $0 < \varepsilon < 1$。除非 P $=$ NP，否则以下任一问题都不存在多项式时间 $n^{1-\varepsilon}$-近似算法：

*1.* 对于满足 $|A| = t$, $|B| \ge 3$ 的给定划分，求任意固定 $t \in \{1, 2, 3\}$ 下双分裂图上的完美罗马支配；

*2.* 求核心两侧随输入增长的二部双分图上的完美意大利支配。

证明。 使用通用 RXC3 实例。设 $N = 4q + 1$，选取整数 $d > 2/\varepsilon$，并令 $L = N^d$。

完美罗马。 在第 2.1 节的构造 $H_r$ 中，将复制参数设为 $r = L$ ，然后如引理 3.2 所示，添加恰好与 $B$ 相邻的 $t-1$ 个顶点。一个精确覆盖可给出权重为 $b_{\mathrm{PR}} = 2 + 3q + (t-1)$ 的完美罗马支配函数，其中 $f(c) = 2$ ，且所有新增核心标签均为 1。反之，任何权重低于 $L$ 的完美罗马支配函数都有 $f(c) = 2$ ，并且每个元素都有一个零副本。这些副本迫使值为2的集合顶点构成一个精确覆盖。因此，否实例的最优值至少为 $L$。图的阶为 $n = t + 6q + (3q + 1)L$。

完美意大利。 在第 3.3 节的构造 $J_r$ 中，将复制参数设为 $r = L$ 。引理 3.5 给出 YES 实例的最优值 $b_{\mathrm{PI}} = 3q + 7$，以及 NO 实例的最优值至少为 $L$。这里 $n = 12q + 9 + 2L$；该图是二部图，且核心两侧均会增大。

在这两种情况下，是实例的最优值至多为 $b = O(N)$，否实例的最优值至少为 $L = N^d$，并且 $n = O(N^{d+1})$。一个假定存在的近似算法在每个足够大的 是实例上都会返回一个权重为

$$n^{1-\varepsilon} b = O\big(N^{(d+1)(1-\varepsilon)+1}\big) < N^d = L,$$

其中，严格不等式由 $\varepsilon(d+1) > 2$ 得出。否实例上不存在这样的标记。因此，将返回的权重与 $L$进行比较，就可以在多项式时间内判定 RXC3；有界规模的实例可以直接求解。□

对于非完美规则，所得下界是对数级的；对于完美规则，下界为 $n^{1-\varepsilon}$ ；后一个意大利下界仅使用较大的核心。接下来，我们将界定核心总规模（该规模在上述每个困难族中都无界），并为接近小顶点覆盖、簇图或完全二部图并集的图给出固定参数可解算法。

# 5 参数化结果

## 5.1 按顶点覆盖数参数化

下面的基本动态规划适用于任意给定的顶点覆盖，无需核心内部包含完整的二部边。事实上，对于顶点覆盖 $C$，袋 $C \cup \{v\}$、 $v \notin C$给出一个宽度至多为 $|C|$ 的树分解（如果 $C = V(G)$，则使用一个袋 $C$ ）。这里的重点是明确的状态数量，而不是超越诸如 [14, 定理 15]等结果的新固定参数可处理性。

**定理 5.1**。 给定一个具有指定顶点覆盖 $C$ 且大小为 $k \geq 1$ 的图 $G$ ，最优罗马、完美罗马、意大利和完美意大利支配权重分别可以在 $O(4^k kn)$、 $O(5^k kn)$、 $O(5^k kn)$ 和 $O(6^k kn)$ 时间内计算得到。特别地，对于每个固定的数对 $(|A|, |B|) = (a, b)$，这四个问题在双分裂图上均可在多项式时间内求解。

证明。 令 $I = V(G) \setminus C$，其为稳定集。固定一条规则，并枚举 $3^k$ 标记$g\colon C \to \{0, 1, 2\}$。对于每个 $v \in I$，是否允许标记 0 完全由 $g$在 $N(v) \subseteq C$ 上决定。令 $L_g(v)$ 包含 1 和 2，并且仅当该条件成立时包含 0。因此，从这些列表中作出的任意选择都满足 $I$ 中的所有约束。

只有零核心顶点 $Z = g^{-1}(0)$ 仍然施加约束。对于罗马规则，将标记 $a$ 的贡献定义为 $\delta(a) = \mathbf{1}_{\{a=2\}}$；对于意大利规则，令 $\delta(a) = a$。设

罗马、完美罗马、意大利和完美意大利支配的饱和阈值 $h$分别为 1、2、2 和 3。状态记录每个核心零标记顶点在 $\{0,\dots,h\}$ 中累积的贡献，其中 $h$ 表示至少 $h$。将向量初始化为

$$s_z^0 = \min\left\{h,\ \sum_{u\in N(z)\cap C} \delta(g(u))\right\} \qquad (z\in Z).$$

按任意顺序处理顶点 $v_1,\dots,v_{|I|}$。表 $D_i(s)$ 存储前 $i$ 个顶点产生状态 $s$ 时的最小权重。初始时 $D_0(s^0)=0$，其余各项均为无穷大。将每个新表初始化为无穷大。对于每个有限表项和每个 $a\in L_g(v_{i+1})$，更新

$$s'_z = \min\{h, s_z + \delta(a)\mathbf{1}_{\{zv_{i+1}\in E(G)\}}\}, \qquad D_{i+1}(s') = \min\{D_{i+1}(s'), D_i(s)+a\}.$$

最后，对于罗马支配，每个坐标都必须至少为 1；对于完美罗马支配，必须恰好为 1；对于意大利支配，必须至少为 2；对于完美意大利支配，必须恰好为 2。所选的饱和方式保留了每项检验，包括完美规则中对贡献过大的情况予以拒绝。将 $g(C)$ 加到最小的可接受表项上，并对 $g$ 取最小值。

每个可行标记都遵循这些转移。反过来，每条接受路径都通过列表满足 $I$ 中的约束，并通过最终状态满足 $C$ 中的约束。因此，取最小权重即可得到最优值。对于固定的 $g$，状态数至多为 $(h+1)^{|Z|}$，每次转移有三种选择，每种选择需要 $O(k)$ 的计算量。对所有核心赋值的状态数上界求和，得到 $\sum_{g:C\to\{0,1,2\}}(h+1)^{|g^{-1}(0)|}=(h+3)^k$，因此总时间为 $O((h+3)^k kn)$。对于二分划分，取 $C=A\cup B$ 和 $k=a+b$。 □

T因此，每个固定的数对 $(a,b)$ 都是易解的，这与限制某一侧或指定核标记不同重新标记

## 5.2 按簇顶点删除参数化

簇顶点删除数记为 $\mathrm{cvd}(G)$，它是使得 $G-X$ 成为团的不交并的集合 $X\subseteq V(G)$ 的最小大小。已知罗马支配问题在该参数下是固定参数可解的 [1]。下面的统一动态规划适用于所有四种变体。

**定理 5.2.** 给定一个图 $G$ 和一个大小为 $k$ 的集合 $X$，使得 $G-X$ 是团的不交并，则罗马、完美罗马、意大利和完美意大利支配权重的最优值分别可以在 $O(4^k n^{O(1)})$、$O(11^k n^{O(1)})$、$O(11^k n^{O(1)})$ 和 $O(18^k n^{O(1)})$ 时间内计算出来。罗马支配的界限采用已知的 $O(4^k n^{O(1)})$ 算法 *[1]*；下面的动态规划给出了另外三种界限。因此，这四个问题在以 $\mathrm{cvd}(G)$ 为参数时都是固定参数可解的。

证明。固定四条规则中的一条以及一个标记 $g: X\to\{0,1,2\}$。对于罗马规则，令 $\delta(a)=\mathbf{1}_{\{a=2\}}$；对于意大利规则，令 $\delta(a)=a$。对于罗马、完美罗马、意大利和完美意大利支配，分别使用阈值 $h=1$，2、2、3；数值在 $h$处饱和。记 $Z=g^{-1}(0)$。对于 $G-X$的每个团分量 $Q$，枚举其截断总贡献 $t\in\{0,\dots,h\}$。如果顶点 $v\in Q$ 的标记为零，则 $\delta(0)=0$，因此它来自 $Q$ 中其他顶点的贡献恰好等于该总量。它来自$X$ 的贡献由 $g$确定。因此，对于 $t$的每一种选择，我们都知道 $Q$中的每个顶点是否允许标记为零。

对于每个 $t$，动态规划会处理 $Q$ 的顶点，从允许的标记中进行选择，并记录 $Q$ 上的截断总贡献、标记权重以及

对 $Z$ 中顶点的截断贡献向量。仅保留在 $Q$ 上的总量为 $t$ 的状态；这些状态给出了从 $Q$ 到 $Z$ 的每个贡献向量对应的最小代价。第二个动态规划会合并各团分量对应的这些表。它以来自 $g$ 的对 $Z$ 的贡献为初始值，加入每个分量的向量，并在 $h$ 处进行饱和处理；只接受满足 $Z$ 中每个顶点处规则的最终状态。将 $g(X)$ 相加，并在所有标记 $g$ 中取最小值，即得最优值。这些表编码了每一种可行标记，而每个被接受的状态都是可行的，因此该算法是精确的。

对于固定的 $g$，状态向量至多有 $(h+1)^{|Z|}$ 个条目；合并两张表需要 $(h+1)^{2|Z|}n^{O(1)}$ 的时间。对 $X$ 的所有标记求和可得

$$\sum_{g:X\to\{0,1,2\}} (h+1)^{2|g^{-1}(0)|} = \left(2+(h+1)^2\right)^k.$$

因此，对于罗马支配，该动态规划的运行时间为 $O(6^k n^{O(1)})$；对于完美罗马支配和意大利支配，运行时间为 $O(11^k n^{O(1)})$；对于完美意大利支配，运行时间为 $O(18^k n^{O(1)})$。对于罗马支配，我们采用定理中陈述的更强已知界。如果未提供调制集，可以通过对一个诱导 $P_3$进行分支来找到它：簇图恰好是 $P_3$-自由图，而每个删除集都必须命中每个这样的障碍。此分支过程的深度至多为 $k$，且每一步至多有三个分支，因此它也是固定参数可解的。

□

### 5.3 按双团簇顶点删除进行参数化

对于图 $G$，令 $\mathrm{bcvd}(G)$ 表示集合 $X \subseteq V(G)$ 的最小大小，使得 $G-X$ 的每个连通分量都是完全二分图；允许孤立顶点作为分量。对于四种支配规则，我们均给出关于该参数的固定参数可解算法。

**定理 5.3**。给定一个图 $G$和一个大小为 $k$ 的给定集合 $X$，且 $G-X$ 是完全二分图的不交并，则最优的罗马、完美罗马、意大利和完美意大利支配权重分别可在 $O(6^k n^{O(1)})$、$O(11^k n^{O(1)})$、$O(11^k n^{O(1)})$ 和 $O(18^k n^{O(1)})$ 时间内计算得到。因此，这四个问题关于 $\mathrm{bcvd}(G)$参数都是固定参数可解的。

证明。固定四种规则中的一种，并枚举 $3^k$ 标记 $g: X \to \{0,1,2\}$。对于罗马支配和完美罗马支配，令 $\delta(a) = \mathbf{1}_{\{a=2\}}$；对于意大利支配和完美意大利支配，令 $\delta(a) = a$。分别使用饱和阈值 $h=1$，2、2、3，其中值 $h$ 记录至少为 $h$的贡献。因此，该阈值既能区分下界规则中的满足与失败，也能检测精确规则中的过量。在处理完所有分量后，只需检查 $X$ 中标记为零的顶点 $Z = g^{-1}(0)$。

考虑一个非平凡的完全二部连通分量 $H$，其两侧为 $L$和 $R$。对于每一对截断总量 $(t_L, t_R) \in \{0,\dots,h\}^2$，规定两侧上的标记分别具有总$\delta$贡献 $t_L$ 或 $t_R$。对于一个标记为零的顶点 $v \in L$，它来自$R$ 的贡献是 $R$上 $\delta$值之和；由于所有 $L$–$R$ 边都存在，饱和后该贡献表示为 $t_R$；它来自 $X$ 的贡献则由 $g$固定。因此，对于这对总量，已知 $L$ 中的每个顶点是否允许取零。$R$也同样如此。在每一侧上，动态规划选择允许的标记，同时记录该侧的截断总量、代价，以及指向 $Z$中各顶点的截断贡献向量。由此配对两侧的表，即可针对每个指向 $Z$的贡献向量，求得一个标记方案的最小权重

$H$ ，该方案满足 $H$内部所有零顶点约束。孤立顶点则根据 $X$中其固定的邻居直接处理。

最后，第二个动态规划将这些连通分量表结合起来。它从标记 $g$ 在 $X$上对 $Z$ 的贡献开始，在 $h$处进行饱和，并加入每个连通分量的贡献向量；当最终向量在每个顶点处都满足适用的罗马、完美罗马、意大利或完美意大利条件时，恰好接受这些向量。加入$g(X)$并对 $g$ 取最小值即可得到最优值。每个可行标记都会出现在这些表中，而每个被接受的组合都满足所有约束，因此计算结果是精确的。

对于固定的 $g$，贡献向量至多有 $(h+1)^{|Z|}$ 个条目；合并两个这样的表至多需要 $(h+1)^{2|Z|}n^{O(1)}$ 的时间。对 $X$ 的所有标记求和可得

$$\sum_{g:X\to\{0,1,2\}} (h+1)^{2|g^{-1}(0)|} = \left(2+(h+1)^2\right)^k.$$

因为 $h \le 3$。代入 $h=1$， 2,2， 3，可分别得到罗马、完美罗马、意大利和完美意大利支配的运行时间底数 6,11， 11， 18。当给定调制集时，这就证明了所声称的运行时间。若要仅以 bcvd($G$) 为参数设计算法，可以通过对一个诱导 $P_4$ 或三角形进行分支来找到这样的调制集：一个图恰好是不相交完全二分图的并，当且仅当它既不含前者也不含后者；而每个有效删除集都必须命中每个这样的障碍。分支深度至多为 $k$，分支因子至多为四，因此这一预处理也是固定参数可解的。 □

最后，我们总结这些结果并探讨未来研究方向。 .

## 6 结论与后续研究

我们研究了双分裂图上的罗马支配、完美罗马支配、意大利支配和完美意大利支配。我们的归约证明，当一侧核心的规模为一或二，以及两侧核心的规模都至少为三时，这四个问题均为 NP 完全。我们还指出了先前一项意大利支配归约中的缺陷，并独立证明了其困难性结论。对于完美意大利支配，固定核心标签并不会使扩展问题变得简单：即使在二部双分图上，当指定的核心权重为二且总权重不受限制时，该问题仍为 NP 完全。对于上述图类，近似结果排除了罗马支配和意大利支配的多项式时间 $o(\log n)$-近似，以及完美变体的 $n^{1-\varepsilon}$-近似；对于任意固定的 $0<\varepsilon<1$，除非 P $=$ NP。相比之下，我们的顶点覆盖动态规划能够在 $O(c^k kn)$ 时间内计算出这四个问题的最优权重，其运行时间分别为 $c=4$，5，5，6。因此，限制核心总规模可使这四个问题都变得易解，而只限制一侧则不行。给定大小为 $k$ 的调制集时，按罗马支配、完美罗马支配、意大利支配和完美意大利支配的顺序，对于簇顶点删除，运行时间底数分别为 4，11，11，18；对于双团簇顶点删除，运行时间底数分别为 6，11，11，18，忽略多项式因子。罗马支配的 $4^k$簇删除界已知；其余界由我们的动态规划得出。对于这两种参数，这四个问题都是固定参数可解的。

本研究遗留的一个问题是：当某一核心侧的大小为一或二时，完美意大利支配是否也存在类似的近似下界。另一个方向是研究对核心外顶点邻域的限制，探讨即使核心较大时，哪些限制仍能支持高效算法。此外，研究能否改进固定参数可解算法的运行时间也将具有重要意义。

## 声明与宣告

**经费资助**。 本研究未获得来自公共、商业或非营利部门任何经费机构的专项资助。

**利益冲突声明**。 作者声明不存在需要披露的利益冲突。

**数据可用性**。 本研究未创建或分析新的实证数据。

## 关于在稿件准备过程中使用生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

在准备本研究的过程中，作者使用了 OpenAI Prism 来协助进行语言编辑、LaTeX 排版和一致性检查。使用该工具后，作者根据需要审阅并编辑了内容，核实了结果的正确性，并对已发表文章的内容承担全部责任。

## 参考文献

[1] P.Ashok, G. K.Das, A.Pandey, K.Paul 和 S.Paul，按到簇的距离参数化的（独立）罗马支配，载于 D. Du、L. Han 和 D. Xu（编），组合优化与应用，《计算机科学讲义》，第 15435 卷，Springer，新加坡，2025 年，157–169。https://doi.org/10.1007/978-9 81-96-4448-3_13

[2] S. Banerjee、J. M.Keil 和 D. Pradhan，图中的完美罗马支配，《理论计算机科学》，**796**（2019），1–21。https://doi.org/10.1016/j.tcs.2019.08.017

[3] S.Banerjee、M. A. Henning 和 D. Pradhan，余图中的完美意大利支配，《应用数学与计算》，**391**（2021），文章 125703。https://doi.org/10.1016/j.am c.2020.125703

[4] A. Brandstädt, P. L. Hammer, V. B. Le 和 V. V. Lozin，双分裂图，《离散数学》，**299**（2005），11–32。https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.08.046

[5]M. Chellali、T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 A. A. McRae，罗马 {2}支配，《离散应用数学》，**204**（2016），22–28。https://doi.org/10.101 6/j.dam.2015.11.013

[6] E. J. Cockayne、P. A. Dreyer, Jr.、S. M. Hedetniemi 和 S. T. Hedetniemi，图中的罗马支配，《离散数学》，**278**（2004），11–22。https://doi.org/10.101 6/j.disc.2003.06.004

[7] I. Dinur 和 D. Steurer，《平行重复的解析方法》，第 46 届 ACM 计算理论年会论文集，ACM，2014 年，624–633。https://doi.org/10.1145/2591796.2591884

[8] H. Fernau，罗马支配：参数化视角，《国际计算数学杂志》，**85**（2008），25–38。https://doi.org/10.1080/00207160701374376

[9] M. R. Garey 和 D. S. Johnson，《计算机与难解性：*NP* 完全性理论指南》，Freeman，旧金山，1979 年。[10] T. F. Gonzalez，使最大簇间距离最小化的聚类，《理论计算机科学》，**38**（1985），293–306。https://doi.org/10.1016/0304-3975(85)902 24-5[11] T. W. Haynes 和 M. A. Henning，树中的完美意大利支配，《离散应用数学》，**260**（2019），164–177。https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.01.038[12] J. Lauri 和 C. Mitillos，平面图和正则图上的完美意大利支配，《离散应用数学》，**285**（2020），676–687。https://doi.org/10.1016/j.dam.2020 .05.024[13] M. Liedloff、T. Kloks、J. Liu 和 S.-L. Peng，某些图类上的罗马支配高效算法，《离散应用数学》，**156**（2008），3400–3415。https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.01.011[14] K. Mann 和 H. Fernau，完美罗马支配：枚举与参数化问题，《算法》，**17**（2024），第 12 期，第576号文章。https://doi.org/10 .3390/a17120576[15] C. Padamutham 和 V. S. R. Palagiri，图上的罗马 {2}支配与双重罗马支配的复杂性，《《AKCE国际图论与组合学杂志》》，**17**（2020），1081–1086。https://doi.org/10.1016/j.akcej.2020.01.005[16] C. Padamutham 和 V. S. R. Palagiri，图上完美罗马支配的复杂性问题，《庆北数学杂志》，**61**（2021），第 3 期，661–669。https://doi.org/ 10.5666/KMJ.2021.61.3.661[17]D. Pradhan、S. Banerjee 和 J.-B. Liu，图上的完美意大利支配：复杂性与算法，《离散应用数学》，**319**（2022），271–295。https: //doi.org/10.1016/j.dam.2021.08.020