# 具有左不变内禀计时函数的连通李群

Ramazan G. Beden*

arXiv:2611.30995v1 [math.OC] 23 Nov 2026

**摘要**

本文研究连通有限维李群上的左不变内禀计时函数（时间函数）。我们提出并证明了 V. N. Berestovskii 经典正向与逆向定理的子洛伦兹类比。我们建立了满足所提出公理体系（包括上半连续性，以及时序菱形的内部构成拓扑基这一条件）的计时函数与光滑左不变子洛伦兹结构之间的一一对应关系。我们证明，公理化的计时函数唯一确定李代数中的一个闭尖凸锥，其线性张成满足 Chow–Rashevskii条件，并且在该锥上定义一个上半连续的凹正齐次反范数。反过来，我们证明，满足局部时序性条件的任意此类代数结构，都会诱导出具有所需性质的内禀计时函数。证明依赖于指数坐标中的局部估计、Hahn–Banach分离定理，以及最优控制问题中弱极限的性质。

## 1 引言

度量空间的公理化几何与光滑微分几何之间的联系，是现代数学的基础课题之一。该领域的一项经典成就是希尔伯特第五问题的解决（Gleason、Montgomery、Zippin），这一成果表明，每个作为拓扑流形的局部紧拓扑群都具有唯一的解析李群结构。在这一基础上，1988年，V. N. Berestovskii在其开创性工作 [1] 中证明了一个卓越的逆定理：每个连通李群上的左不变内禀度量 $G$，只要诱导出流形拓扑，就必定由某种左不变子黎曼（Carnot–Carath´eodory–Finsler）结构生成。换言之，该度量完全决定了生成分布（满足Chow–Rashevskii条件）及其上的范数。近几十年来，子洛伦兹几何得到了蓬勃发展（参见M. Grochowski [4],、E. Minguzzi [9],、V. N. Berestovskii和I. A. Zubareva[3],、L. V. Lokutsievskiy和A. V. Podobryaev [10]等人的研究）。与子黎曼情形不同，这里给定的不是范数分布，而是一个凸锥场 $C^+$ 以及凹反

范数 $\nu$ （计时函数），它们定义了因果结构和固有时。与此同时，2018年，M. Kunzinger和C. S¨amann [6] 奠定了综合洛伦兹几何（洛伦兹长度空间）的基础，通过时间函数（计时函数）$\tau(p,\ q)$将因果结构公理化，这与Alexandrov空间对度量空间进行公理化的方式类似。尽管人们积极研究直接问题（针对给定子洛伦兹结构考察可达性、测地线和整体双曲性），但次洛伦兹李群的逆问题

*俄罗斯莫斯科119991，莫斯科国立罗蒙诺索夫大学力学与数学系一般控制问题系；电子邮箱：ramazan.gediev@math.msu.ru

仍未解决。其难点在于光锥不紧、对于有界集合不存在类似Hopf–Rinow定理的结果，以及Lorentz时间函数 $\tau$ 是上半连续而非连续的。在拓扑背景下，V. N. Berestovskii和V. M. Gichev研究了左不变序与半群之间的联系 [2],，但尚未实现向光滑次Lorentz结构的过渡，也未证明Chow–Rashevskii条件。本文旨在弥补这一空白，并确立公理化左不变Lorentz空间与李群上的光滑子洛伦兹结构之间的严格等价关系。文章为内在左不变计时函数 $\tau$提出了一组公理。在主要的（逆向）定理4.1中，证明了这样的计时函数唯一确定一个非平凡的闭尖锥$C_0^+ \subset L = T_eG$及其上的反范数 $\nu_0$ ，其中该锥的线性张成 $C_0^+$ 生成整个李代数 $L$。在直接定理5.1中，证明了逆命题：任何满足所提出的时序性条件的光滑左不变子洛伦兹结构$(C_0^+, \nu_0)$ 都会生成一个满足所述公理体系的内在计时函数。

**证明的几何思路**。局部而言，时间序菱形表现得像一个凸锥。我们不考虑一列不断缩小但边界可能不规则的时间序菱形，而是将时间未来与一列不断缩小的球相交，并在切空间（李代数）中进行膨胀。取极限后，我们得到一个切锥。这个锥的尖性使可容许曲线无法无限盘绕，也无法在计时函数没有正增量的情况下累积无限的次黎曼长度。从几何上说，这就得到了Chow–Rashevskii条件。在所得的锥上定义反范数后，剩下的就是证明计时函数 $\tau$ 与该反范数的积分一致。

# 2 李群中的局部坐标与估计（V.N.Berestovskii 的引理 1–6）

本节介绍指数坐标中的局部估计。这些估计基于 V. N. Berestovskii [1] 的经典引理；不过，为满足后续证明的需要，我们以加强的形式给出这些引理，并明确控制常数和定义域。设 $G$ 是一个单位元为 $e$ 、李代数为 $L = T_eG$ 的连通李群。考虑李群 $G$ 的坐标图 $(U, \varphi)$，其中 $U$ 是 $G$ 中包含单位元 $e$ 的开邻域，并且$\varphi =$(指数映射 $|_V)^{-1}$ : $U \to V \subset L$ 是到开球 $V = U(0, \lambda) = \{x \in L : |x| < \lambda\}$ 上的微分同胚；该开球是相对于 $L$ 上某个欧几里得范数 $|\cdot|$ 而定义的。对于满足 $\exp x \cdot \exp y \in U$ 的元素 $x, y \in V$，我们定义

$$x * y := \varphi(\exp x \cdot \exp y) = x + y + z(x, y), \tag{1}$$

其中，$z(x, y)$ 是在 $V \times V$ 中定义域上的解析向量函数，并且 $z(x, 0) = z(0, y) = 0$。

**引理 2.1**。对于李代数 $L$ 上欧几里得范数 $|\cdot|$ 的适当选取以及数值 $\lambda$，$0 < \lambda < 1$，对所有满足 指数映射 $x \cdot$指数映射 $y \in U$ 的 $x, y \in V = U(0, \lambda)$，下列估计成立：

$$|z(x, y)| \le |x| \cdot |y| \qquad (where\ |z(x, y)| < |x| \cdot |y|\ for\ x \neq 0,\ y \neq 0). \tag{2}$$

证明。由于 $x * 0 = x$ 和 $0 * y = y$，映射 $z(x, y)$ 在 $x = 0$ 以及 $y = 0$ 时均为零。因此，映射 $z(x, y)$ 的坐标函数在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内的泰勒展开不含仅依赖于 $x$ 或仅依赖于 $y$ 的项。根据泰勒

公式，在零点的某个邻域内 $U(0,\ \lambda_0) \times U(0,\ \lambda_0)$，估计式 $|z(x,\ y)| \le C|x| \cdot |y|$ 对某个常数 $C > 0$ 成立。对 $c > C$ 采用新的欧几里得范数 $|x|_{\text{new}} := c|x|$ 后，我们得到

$$|z(x,y)|_{\text{new}} = c|z(x,y)| \le cC|x| \cdot |y| = \frac{C}{c}|x|_{\text{new}} \cdot |y|_{\text{new}} \le |x|_{\text{new}} \cdot |y|_{\text{new}},$$

其中，当 $x \neq 0$ 和 $y \neq 0$时，不等式为严格不等式。必要时缩小 $\lambda \in (0,1)$，即可得到所需结论。 □

**引理 2.2.** 在引理 *2.1*的条件下，对任意 $x,\ y \in V$满足 指数映射 $x\cdot$指数映射 $y \in U$，下列不等式成立：

$$|x * y| \le |x| + |y| + |x| \cdot |y| \qquad (< |x| + |y| + |x| \cdot |y| \ \textit{for}\ x, y \neq 0).$$

证明。 结论直接由表示式（1）、估计（2）和三角不等式得出：

$$|x * y| = |x + y + z(x,y)| \le |x| + |y| + |z(x,y)| \le |x| + |y| + |x| \cdot |y|.$$ □

**引理 2.3.** 若 $x, y, x + y \in V$, $(-x) * (x + y) \in V$, 且 $|x| < 1/2$，则

$$x + y = x * y',$$

其中，向量 $y' \in V$满足估计

$$|y - y'| < 2|x| \cdot |y|.$$

证明。 令 $y' := (-x) * (x + y)$。于是 $x * y' = x * ((-x) *(x + y)) = x + y$。由公式（1），可得

$$x + y = x * y' = x + y' + z(x, y'),$$

whence $y - y' = z(x, y')$。应用引理 2.1 和三角不等式，可得

$$|y - y'| = |z(x, y')| \le |x| \cdot |y'| \le |x|\big(|y| + |y - y'|\big).$$

将项 $|x|\cdot|y-y'|$ 移至等式左边，并考虑到条件 $|x| < 1/2$（即 $1 - |x| > 1/2$），可得

$$|y - y'| \le \frac{|x| \cdot |y|}{1 - |x|} < 2|x| \cdot |y|.$$ □

**Lemma 2.4.** 若元素 $x, y, y * x, (-x) * y * x$ 属于 $V$和 $|x| < 1/2$，则

$$y * x = x * y',$$

其中向量 $y' \in V$满足估计

$$|y - y'| < 4|x| \cdot |y|.$$

证明。 令 $y' := (-x) * y * x$，则 $y * x = x * y'$。利用公式（1），展开等式 $y * x = x * y'$两边，可得

$$y + x + z(y, x) = x + y' + z(x, y'),$$

由此可得

$$y - y' = z(x, y') - z(y, x).$$

估计 右端，利用引理2.1和三角不等式，可得

$$|y - y'| \le |z(x, y')| + |z(y, x)| \le |x| \cdot |y'| + |y| \cdot |x| \le |x|\big(2|y| + |y - y'|\big).$$

因此，$(1 - |x|)|y - y'| \le 2|x| \cdot |y|$。由于 $|x| < 1/2$，我们有 $1 - |x| > 1/2$，从而

$$|y - y'| \le \frac{2|x| \cdot |y|}{1 - |x|} < 4|x| \cdot |y|.$$ □

**引理 2.5**。 设 $x_1$、……、$x_j \in V$、 $|x_i| \le \eta/j (i = 1$、……、 $j)$ 且 $(1+\eta/j)^j - 1 < \lambda$。则乘积 $x_1 * \cdots * x_j$ 在 $V$ 中有定义，并满足估计

$$|x_1 * \cdots * x_j| < \left(1 + \frac{\eta}{j}\right)^j - 1 < e^\eta - 1.$$

证明。 我们对 $m = 1, \ldots, j$ 进行归纳，证明该不等式

$$|x_1 * \cdots * x_m| \le \left(1 + \frac{\eta}{j}\right)^m - 1.$$

对于 $m = 1$，我们有 $|x_1| \le \eta/j = (1+\eta/j)^1 - 1$。假设该估计对于 $m - 1 < j$成立。根据引理 2.2，对于乘积 $(x_1 * \cdots * x_{m-1}) * x_m$ 我们得到：

$$\begin{aligned} |x_1 * \cdots * x_m| &\le |x_1 * \cdots * x_{m-1}| + |x_m| + |x_1 * \cdots * x_{m-1}| \cdot |x_m| \\ &\le \left(\left(1 + \frac{\eta}{j}\right)^{m-1} - 1\right) + \frac{\eta}{j} + \left(\left(1 + \frac{\eta}{j}\right)^{m-1} - 1\right)\frac{\eta}{j} \\ &= \left(1 + \frac{\eta}{j}\right)^{m-1}\left(1 + \frac{\eta}{j}\right) - 1 = \left(1 + \frac{\eta}{j}\right)^m - 1. \end{aligned}$$

对于 $m = j$，我们得到 $|x_1 * \cdots * x_j| \le (1+\eta/j)^j - 1 < e^\eta - 1$（当 $x_i$ 中存在非零向量时，不等式为严格不等式）。 □

**引理 2.6**。 设 $x_i, y_i \in V$, $|x_i| \le \eta/j$, $|y_i| \le \varepsilon\eta/j$ $(i = 1, \ldots, j)$，其中 $0 < \varepsilon \le \min\left(1, \frac{1}{8\eta e^\eta}\right)$，且条件 $\left(1 + (1+\varepsilon)\eta/j\right)^j - 1 < \lambda < 1/2$ 得到满足。则

$$\prod_{i=1}^{j}(x_i + y_i) = \left(\prod_{i=1}^{j} x_i\right) * y,$$

其中，乘积表示关于运算 $*$ 的乘法，而残差向量$y \in V$ 满足估计

$$|y| < 14\varepsilon\eta e^\eta.$$

证明。 1. 首先注意，对于每个 $i = 1, \ldots, j$向量 $(-x_i) * (x_i + y_i)$ 都有明确的定义，且属于 $V$。事实上，当 $j = 1$ 时，这是显然的；而当 $j \ge 2$ 时，由引理 2.2 可得：

$$|(-x_i)*(x_i+y_i)| \le |-x_i|+|x_i+y_i|+|-x_i||x_i+y_i| \le \frac{\eta}{j}+\frac{(1+\varepsilon)\eta}{j}+\frac{(1+\varepsilon)\eta^2}{j^2} \le \left(1+\frac{(1+\varepsilon)\eta}{j}\right)^2-1.$$

由于 $j \ge 2$，右端不超过 $\left(1+(1+\varepsilon)\eta/j\right)^j - 1$，根据条件，该值小于 $\lambda$。由于 $|x_i| \le \eta/j \le \left(1+\eta/j\right)^j - 1 < \lambda < 1/2$，由引理 2.3 我们可以将和 $x_i + y_i$ 表示为

$$x_i + y_i = x_i * y_i', \qquad \text{where } |y_i - y_i'| < 2|x_i| \cdot |y_i|.$$

由此，考虑到 $|x_i| < 1/2$，我们得到向量 $y_i'$ 的范数估计：

$$|y_i'| \le |y_i| + |y_i - y_i'| < (1 + 2|x_i|)|y_i| < 2|y_i| \le \frac{2\varepsilon\eta}{j}.$$

2. 利用运算 $*$ 的结合律，我们将所有因子 $y_i'$ 移到乘积 $\prod_{i=1}^{j}(x_i * y_i')$ 的右侧。为此，设 $y_j''$:$= y_j'$，并对每个 $i = 1$，……，$j - 1$ 根据关系式定义向量$y_i''$

$$y_i' * X_i = X_i * y_i'', \qquad \text{where } X_i := x_{i+1} * \cdots * x_j.$$

由于范数 $\left(1+(1+\varepsilon)\eta/j\right)^j - 1 < \lambda$受到约束，所有中间乘积均保证位于球 $V$ 中，因此应用引理 2.4 是有效的。依次重新排列可得

$$\prod_{i=1}^{j}(x_i+y_i) = (x_1 * y_1') * (x_2 * y_2') * \cdots * (x_j * y_j') = \left(\prod_{i=1}^{j} x_i\right) * (y_1'' * y_2'' * \cdots * y_j'').$$

3. 现在估计向量 $y_i''$的范数。根据引理 2.5，有

$$|X_i| = |x_{i+1} * \cdots * x_j| < \left(1+\frac{\eta}{j}\right)^{j-i} - 1 < \left(1+\frac{\eta}{j}\right)^{j} - 1 < e^{\eta} - 1,$$

根据条件 $|X_i| < \lambda < 1/2$。将引理 2.4 应用于等式 $y_i' * X_i = X_i * y_i''$，得到

$$|y_i' - y_i''| < 4|X_i| \cdot |y_i'|,$$

从而

$$|y_i''| \le (1+4|X_i|)|y_i'| < \big(1+4(e^{\eta}-1)\big)|y_i'| = (4e^{\eta}-3)|y_i'| < 4e^{\eta}|y_i'| < \frac{8\varepsilon\eta e^{\eta}}{j}.$$

4. 记 $y := y_1'' * y_2'' * \cdots * y_j''$并令 $\tilde{\eta} := 8\varepsilon\eta e^{\eta}$。由于对于所有 $|y_i''| \le \tilde{\eta}/j$， $i = 1$，…，$j$，将引理 2.5应用于乘积 $y$ 可得

$$|y| < \left(1+\frac{\tilde{\eta}}{j}\right)^{j} - 1 < e^{\tilde{\eta}} - 1.$$

根据引理的条件， $\varepsilon \le \frac{1}{8\eta e^{\eta}}$，因此 $\tilde{\eta} \le 1$。利用对 $x \in [0,1]$ 有效的初等不等式 $e^x - 1 \le (e-1)x$，最终得到

$$|y| < e^{\tilde{\eta}} - 1 \le (e-1)\tilde{\eta} = 8(e-1)\varepsilon\eta e^{\eta} < 14\varepsilon\eta e^{\eta}.$$ □

# 3 基本定义

设（$G$， $\tau$）为一个单位元为 $e$ 的连通有限维李群，并配备一个计时函数$\tau$： $G \times G \to [0; +\infty] \cup \{-\infty\}$ 满足以下性质：

1. **左不变性：**对于任意 $a$， $g$， $h \in G$，等式

$$\tau(ag, ah) = \tau(g, h)$$

成立。

2. **自反性和反对称性：**对于任意 $g \in G$、 $\tau(g, g) = 0$成立；若 $g \neq h$ 且$\tau(g, h) \ge 0$，则 $\tau(h, g) = -\infty$。

3. **反三角不等式：**对于任意 $g_1$， $g_2$， $g_3 \in G$，使得 $\tau(g_1, g_2) \ge 0$ 且$\tau(g_2, g_3) \ge 0$，不等式

$$\tau(g_1, g_3) \ge \tau(g_1, g_2) + \tau(g_2, g_3)$$

成立。

4. **局部上半连续性：** 存在单位元$e \in G$ 的一个开邻域 $U_0$ ，使得对于任意 $c \geq 0$ ，集合

$$\{(g,h) \in U_0 \times U_0 : \tau(g,h) \geq c\}$$

在 $U_0 \times U_0$ 中是闭集。

5. **与流形拓扑的一致性：** 对于任意 $p$， $q \in G$，定义

$$I^+(p) := \{x \in G : \tau(p,x) > 0\}, \qquad I^-(q) := \{x \in G : \tau(x,q) > 0\},$$

$$I(p,q) := I^+(p) \cap I^-(q) = \{x \in G : \tau(p,x) > 0,\ \tau(x,q) > 0\}.$$

时序菱形内部的族 $\{\operatorname{int} I(p,\ q)\}_{p,\ q \in G}$ 构成群 $G$ 的拓扑的一组基；对于任意点 $x \in G$ 及其任意邻域 $U \subset G$ ，都存在点 $p$， $q \in U$ 使得

$$x \in \operatorname{int} I(p,q) \subset I(p,q) \subset U.$$

6. **内禀计时函数：** 连续曲线 $\gamma$：$[a,b] \to G$ 称为 $\tau$-可容许的，如果对于任意 $s_1$，$s_2 \in [a,b]$，$s_1 < s_2$ 都有 $\tau(\gamma(s_1)\ \gamma(s_2)) \geq 0$。此类曲线的 $\tau$-长度 定义为以下量

$$L_\tau(\gamma) := \inf \sum_{i=1}^{m} \tau\big(\gamma(s_{i-1}), \gamma(s_i)\big),$$

其中，下确界取遍区间 $[a,b]$ 的所有有限分割 $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$。对于满足 $\tau(g,\ h) \geq 0$ 的任意两个不同点 $g$， $h \in G$，连接 $g$ 与 $h$ 的所有连续 $\tau$-可容许曲线构成的集合 $\Omega_\tau(g,\ h)$ 非空，并且等式

$$\tau(g,h) = \sup_{\gamma \in \Omega_\tau(g,h)} L_\tau(\gamma)$$

成立。

注记 *1*。这些集合 $J^+(p) := \{x \in G\colon\ \tau(p,x) \geq 0\}$ 和 $J^-(q) := \{x \in G\colon\ \tau(x,q) \geq 0\}$ 分别称为点 $p$ 的闭未来和点 $q$的闭过去。集合$J(p,q) := J^+(p) \cap J^-(q) = \{x \in G\colon\ \tau(p,x) \geq 0,\ \tau(x,q) \geq 0\}$ 称为点 $p$和 $q$的闭时序菱形。

**注记 2**。 注意，由于计时函数的反三角不等式及其反对称性，不存在非平凡的闭 $\tau$-可容许路径。

**定义 1**。 李群 $G$ 上的左不变子洛伦兹结构（其李代数为$L = T_eG$ ）是一个三元组 $\big(G$、$C_0^+$、$\nu_0\big)$，其中 $C_0^+ \subset L$ 是一个凸的非平凡（$C_0^+ \neq \{0\}$）闭尖（$C_0^+ \cap (-C_0^+) = \{0\}$）锥，其线性张成 $L_0 := C_0^+ - C_0^+$生成整个李代数 $L$，并且 $\nu_0\colon\ L \to [0;+\infty) \cup \{-\infty\}$ 是一个具有以下性质的上半连续函数（反范数）：

*1.* 非负性定义域与非平凡性： $\nu_0\ (u) \geq 0$ 对所有 $u \in C_0^+$、 $\nu_0\ (u) = -\infty$ 对所有 $u \in L \setminus C_0^+$，以及 $\nu_0\ (u) > 0$ 在相对内部 内$_{L_0}$（$C_0^+$）上（等价地，$\nu_0|_{C_0^+} \neq 0$）；

*2.* 正齐次性：对于任意 $u \in L$ 和 $\lambda > 0$，等式

$$\nu_0(\lambda u) = \lambda \nu_0(u)$$

成立；

*3.* 凹性：对于任意 $u$、$v \in L$，不等式

$$\nu_0(u+v) \geq \nu_0(u) + \nu_0(v)$$

成立。

用 $l_g : G \to G, l_g(h) := gh$ 表示由元素 $g \in G$ 定义的左平移算子，并用 $(dl_g)_e : L \to T_gG$ 表示其在单位元 $e$ 处的微分。对锥 $C_0^+$ 和反范数 $\nu_0$ 作左平移，在李群 $G$ 上分别定义左不变锥场 $C_g^+ := (dl_g)_e(C_0^+) \subset T_gG$ 和左不变反范数场 $\nu_g(\xi) := \nu_0\big((dl_{g^{-1}})_g(\xi)\big)$, $\xi \in T_gG$。若绝对连续曲线 $\gamma : [0;1] \to G$ 的切向量 $\dot{\gamma}(s)$ 对几乎所有 $s \in [0;1]$ 都属于锥 $C^+_{\gamma\, s()}$，则称该曲线为 $C^+$-可容许（或 $C_0^+$-可容许）；也就是说，其左平移到单位元处的速度向量

$$\theta\big(\dot{\gamma}(s)\big) := \big(dl_{\gamma(s)^{-1}}\big)_{\gamma(s)}\big(\dot{\gamma}(s)\big) \in L$$

几乎处处属于锥 $C_0^+$，位于 $[0$ 上；$1]$。一条 $C^+$-可容许曲线 $\gamma : [0;1] \to G$ 的次洛伦兹长度定义为以下量

$$\ell(\gamma) := \int_0^1 \nu_{\gamma(s)}\big(\dot{\gamma}(s)\big)\, ds = \int_0^1 \nu_0\big(\theta(\dot{\gamma}(s))\big)\, ds.$$

由于反范数 $\nu_0$ 具有正齐次性，次洛伦兹长度 $\ell(\gamma)$ 不依赖于曲线 $\gamma$ 的单调绝对连续参数化的选择。对于任意点 $g$、$h \in G$，记 $\Omega_{C^+}(g$、$h)$ 为所有连接 $g$ 与 $h$ $(\gamma(0) = g, \gamma(1) = h)$的 $C^+$- 可容许曲线 $\gamma : [0;\, 1] \to G$ 组成的集合。由结构 $\big(G$、$C_0^+$、$\nu_0\big)$ 生成的次洛伦兹计时函数是函数 $\tau_c : G \times G \to [0;+\infty] \cup \{-\infty\}$，由等式定义

$$\tau_c(g,h) := \begin{cases} \sup\limits_{\gamma \in \Omega_{C^+}(g,h)} \ell(\gamma), & \text{if } \Omega_{C^+}(g,h) \neq \varnothing, \\ -\infty, & \text{if } \Omega_{C^+}(g,h) = \varnothing. \end{cases}$$

# 4 主定理

我们阐述本文的主要结果。

**定理4.1**。 设$(G, \tau)$ 是一个连通有限维李群，带有满足条件1–6的计时函数 $\tau$。则存在唯一的闭尖凸锥 $C_0^+$和定义在该锥 $C_0^+$上的唯一反范数 $\nu_0$，使得三元组 $\big(G$、$C_0^+$、$\nu_0\big)$ 在李群 $G$ 上构成一个生成计时函数 $\tau$的左不变子洛伦兹结构：

$$\tau(g,h) = \tau_c(g,h) \qquad \textit{for all } g,h \in G.$$

此外，锥 $C_0^+$及定义在 $C_0^+$上的反范数 $\nu_0$ 由以下等式唯一确定：

$$C_0^+ = \big\{u \in L : \tau\big(e, \exp(tu)\big) \geq 0 \textit{ for all sufficiently small } t \geq 0\big\},$$

$$\nu_0(u) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\tau\big(e,\exp(tu)\big)}{t} = \inf_{t>0} \frac{\tau\big(e,\exp(tu)\big)}{t} \qquad (u \in C_0^+).$$

证明。 在 $L$ 上取欧几里得范数 $|\cdot|$，并取一个数 $\lambda \in$，使其属于 (0;1)，从而指数映射是从开球 $V = U($ 0; $\lambda) = \{x \in L : |x| < \lambda\}$ 到单位元 $U \subset U_0 \subset G$ 的一个开邻域的微分同胚；计时函数 $\tau$ 在 $U \times U$ 上上半连续且有限（对所有 $g,h \in U$，均有 $\tau(g,h) < 1$，这可通过减小 $\lambda$ 来实现，因为 $\tau(e,e) = 0$，并且

集合 $\{\tau \geq 1\}$ 在 $U_0 \times U_0$中是闭的），且群运算 $x * y =$指数映射$^{-1}$(指数映射 $(x)$ 指数映射 $(y)$) $=x+y+z(x,y)$ 满足 Berestovskii 引理 2.1 的估计：

$$|z(x,y)| \leq |x||y|$$

对所有满足 $x * y \in V$ 的 $x,\ y \in V$。对于每个 $\rho \in (0;\lambda)$，记 $B_\rho(0) = \{x \in L\colon |x| \leq \rho\}$ 为 $L$ 中的闭球，其在指数映射下的像记为 $B_\rho^G(e) =\exp(B_\rho(0))$。我们证明以下引理。

**引理 4.1**。存在点 $p_0, q_0 \in U$ 和单位元 $e$ 的一个紧邻域 $K \subset U$，使得

$$e \in \operatorname{int} I(p_0,q_0) \subset I(p_0,q_0) \subset K,$$

并且对于任意点 $p, q \in I(p_0, q_0)$，集合 $J(p,q)$ 是 $I(p_0, q_0) \subset K$ 的一个紧子集。更一般地，对于任意非空紧集 $K_1, K_2 \subset I(p_0, q_0)$，集合

$$J(K_1,K_2) := \bigcup_{p\in K_1,\, q\in K_2} J(p,q)$$

是紧的，且包含于 $I(p_0, q_0) \subset K$ 中。

引理证明*4.1*。任取一个紧邻域 $K \subset U$，它是单位元 $e$的邻域（例如，$K = B_\rho^G(e)$，其中 $\rho \in (0;\lambda)$）。根据点 $e$ 及其开邻域 内$K$的性质 5，存在点 $p_0$，$q_0 \in$内 $K \subset U$，使得

$$e \in \operatorname{int} I(p_0,q_0) \subset I(p_0,q_0) \subset \operatorname{int} K \subset K \subset U.$$

令 $p$，$q \in I(p_0,\ q_0)$，则 $\tau(p_0,\ p) > 0$且 $\tau(q,\ q_0) > 0$。对于任意点 $x \in J(p,\ q)$，我们有$\tau(p,\ x) \geq 0$且 $\tau(x,\ q) \geq 0$，因此由反三角不等式（性质3）可得：

$$\tau(p_0,x) \geq \tau(p_0,p) + \tau(p,x) \geq \tau(p_0,p) > 0, \qquad \tau(x,q_0) \geq \tau(x,q) + \tau(q,q_0) \geq \tau(q,q_0) > 0.$$

因此，$x \in I(p_0,q_0)$，即 $J(p,q) \subset I(p_0,q_0) \subset K \subset U$。现在设 $K_1$、$K_2 \subset I(p_0,q_0)$ 为非空紧集。由已证明的结果，$J(K_1,K_2) \subset I(p_0,q_0) \subset K$。我们来证明集合 $J(K_1,K_2)$ 在紧集 $K$ 中是闭的。设序列 $\{x_n\} \subset J(K_1,K_2)$ 收敛到点 $x \in K$。对于每个 $n$，存在点 $p_n \in K_1$ 和 $q_n \in K_2$，使得 $\tau(p_n,x_n) \geq 0$且 $\tau(x_n,q_n) \geq 0$。由于 $K_1$和 $K_2$的紧性，取一个子序列后，不妨设 $p_n \to p \in K_1$ 和 $q_n \to q \in K_2$ as $n \to \infty$。由于$K_1$、$K_2$、$K \subset U \subset U_0$，并且根据性质4，集合 $\{(g,h) \in U \times U\colon \tau(g,h) \geq 0\}$ 在 $U \times U$ 中是闭的，对 $n \to \infty$ 取极限可得 $\tau(p,x) \geq 0$且 $\tau(x,q) \geq 0$。这意味着 $x \in J(p,q) \subset J(K_1,K_2)$，因此 $J(K_1,K_2)$（特别地，对于 $K_1 = \{p\}$、$K_2 = \{q\}$，$J(p,q)$）是紧的。 □

我们证明，$\tau$-长度泛函 $L_\tau$ 作为区间的函数具有可加性。

**引理4.2**。对于任意连续的 $\tau$-可容许曲线 $\gamma\colon [a,b] \to G$ 以及任意点 $c \in (a,b)$，下列等式成立：

$$L_\tau\big(\gamma|_{[a,b]}\big) = L_\tau\big(\gamma|_{[a,c]}\big) + L_\tau\big(\gamma|_{[c,b]}\big).$$

引理 *4.2*的证明。区间 $[a,c]$ 的任意划分与区间 $[c,b]$的任意划分合在一起构成区间 $[a,b]$ 的一个包含点 $c$的划分。因此，根据下确界的定义，有 $L_\tau(\gamma|_{[a,b]}) \leq L_\tau(\gamma|_{[a,c]}) + L_\tau(\gamma|_{[c,b]})$。反之，若 $P = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b\}$ 是区间 $[a,b]$的任意划分，则加入点

$c \in [s_{k-1}, s_k]$ 后，根据反三角不等式（性质 3），我们得到 $\tau(\gamma(s_{k-1})\ \gamma(s_k)) \geq \tau(\gamma(s_{k-1})\ \gamma(c)) + \tau(\gamma(c)\ \gamma(s_k))$，由此，关于划分 $P$的和不小于关于细化划分 $P \cup \{c\}$的和，而后者又不小于 $L_\tau(\gamma|_{[a,c]}) + L_\tau(\gamma|_{[c,b]})$。对所有划分 $P$取下确界，得到反向不等式 $L_\tau(\gamma|_{[a,b]}) \geq L_\tau(\gamma|_{[a,c]}) + L_\tau(\gamma|_{[c,b]})$。 □

根据关于点 $e$ 及其开邻域 $\operatorname{int} I(p_0, q_0)$ 的性质 5，我们选取点 $p, q \in I(p_0, q_0)$，使得

$$e \in \operatorname{int} I(p,q) \subset I(p,q) \subset I(p_0, q_0).$$

然后 $\tau(e, q) > 0$，由性质 2 以及 引理 4.1 可知，集合 $J(e, q)$ 是紧集。由于 $\operatorname{int} I(p, q)$ 是单位元 $e$ 的一个开邻域，并且 $q \neq e$，我们选取 $r > 0$ 足够小，使得满足以下条件:

$$e^{2r} - 1 < \min\left(\lambda, \frac{1}{2}\right), \qquad B_r^G(e) = \exp(B_r(0)) \subset \operatorname{int} I(p,q) \subset I(p,q), \qquad q \notin B_r^G(e).$$

特别地，对于所有 $g \in B_r^G(e)$，不等式 $\tau(g, q) > 0$ 成立。接下来我们构造锥。考虑集合

$$M_{\frac{r}{2^k}} := J(e,q) \cap B^G_{\frac{r}{2^k}}(e) = \left\{ g \in B^G_{\frac{r}{2^k}}(e) : \tau(e,g) \geq 0 \right\}, \qquad k \geq 1.$$

记集合 $A_{\frac{r}{2^k}}$ 为 $\exp^{-1}\left(M_{\frac{r}{2^k}}\right)$，并令

$$C_k := 2^k A_{\frac{r}{2^k}} = \left\{ a \in B_r(0) : \tau\left(e, \exp\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) \geq 0 \right\}.$$

由于 $J(e, q)$ 和 $B^G_{\frac{r}{2^k}}(e)$ 是紧集，且 $\exp|_{B_r(0)}$ 是到 $B_r^G(e)$ 上的同胚，因此集合 $M_{\frac{r}{2^k}}$、$A_{\frac{r}{2^k}}$ 和 $C_k$ 都是非空紧集（由于 $\tau(e, e) = 0$，向量 0 属于所有 $C_k$）。

让我们证明，对于所有 $k \geq 1$，$C_{k+1} \subset C_k$。令 $x \in C_{k+1}$，则 $|x| \leq r$ 且 $\tau\left(e, \exp\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right) \geq 0$。根据左不变性（性质 1）和反三角不等式（性质 3），我们得到:

$$\tau\left(e, \exp\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) \geq \tau\left(e, \exp\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right) + \tau\left(\exp\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right), \exp\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = 2\tau\left(e, \exp\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right) \geq 0,$$

由此可得 $x \in C_k$。令

$$C_\infty := \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

$C_\infty$ 是 $B_r(0)$ 中包含 0 的非空紧集。

我们来证明 $C_\infty \neq \{0\}$。由于 $\tau(e, q) > 0$ 且 $q \neq e$，根据性质6，存在一条连续的 $\tau$-可容许曲线 $\gamma\colon [0;\ 1] \to G$ 使得 $\gamma(0) = e$ 且 $\gamma(1) = q$。由于 $\gamma(0) = e \in B^G_{\frac{r}{2^k}}(e)$ 且 $\gamma(1) = q \notin B_r^G(e)$ 而 $B^G_{\frac{r}{2^k}}(e) \subset B_r^G(e)$，对于每个 $k \geq 1$，由区间 $[0, 1]$ 的连通性，存在一个时刻 $s_k \in (0; 1)$，使得 $g_k := \gamma(s_k) \in \partial B^G_{\frac{r}{2^k}}(e)$。由于 $\gamma$ 是 $\tau$-可容许的，我们有 $\tau(e, g_k) = \tau(\gamma(0)\ \gamma(s_k)) \geq 0$，因此 $g_k \in M_{\frac{r}{2^k}}$，且向量 $a_k := 2^k$ 指数映射$^{-1}(g_k)$ 属于 $C_k$ 并满足等式 $|a_k| = r$。由于球面 $\partial B_r(0)$ 的紧性，我们可以从序列 $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ 中提取一个收敛子列 $a_{k_j} \to a_*$，当 $j \to \infty$ 时收敛，其极限满足 $|a_*| = r > 0$。固定任意指标 $m \geq 1$。那么对于所有充分大的 $j$，不等式 $k_j \geq m$ 成立，并且由集合 $C_k$ 的嵌套性，我们有 $a_{k_j} \in C_{k_j} \subset C_m$。由于集合 $C_m$ 是闭的，令 $j \to \infty$ 趋于极限可得 $a_* \in C_m$。由 $m \geq 1$ 的任意性，我们得到 $a_* \in \bigcap_{m=1}^\infty C_m = C_\infty$，从而 $C_\infty \neq \{0\}$。

我们证明紧集 $C_\infty$的凸性。由于 $C_\infty$的闭性，只需验证对于任意 $a,b\in C_\infty$，它们的半和 $\frac{a+b}{2}$属于 $C_\infty$。固定任意指标$m\geq 1$。对于所有 $k>m$，对于元素$g_k:=$指数映射 $\left(\frac{a}{2^k}\right)$和 $h_k:=$指数映射 $\left(\frac{b}{2^k}\right)$，我们有 $\tau(e,g_k)\geq 0$且 $\tau(g_k,g_kh_k)=\tau(e,h_k)\geq 0$，因此 $\tau(e,g_kh_k)\geq 0$。我们将乘积 $g_kh_k$写成如下形式

$$g_kh_k=\exp\left(\frac{a}{2^k}*\frac{b}{2^k}\right)=\exp\left(\frac{w_k}{2^{k-1}}\right),\qquad \text{where } w_k:=2^{k-1}\left(\frac{a}{2^k}*\frac{b}{2^k}\right)=\frac{a+b}{2}+2^{k-1}z\left(\frac{a}{2^k},\frac{b}{2^k}\right).$$

由估计 $|z(x,y)|\leq|x||y|$，可得 $\left|w_k-\frac{a+b}{2}\right|\leq\frac{r^2}{2^{k+1}}\to 0$ 当 $k\to\infty$时，即 $w_k\to\frac{a+b}{2}$。此外，对所有$k>m$，由反三角不等式可得

$$\tau\left(e,\exp\left(\frac{w_k}{2^m}\right)\right)\geq 2^{k-1-m}\tau\left(e,\exp\left(\frac{w_k}{2^{k-1}}\right)\right)=2^{k-1-m}\tau(e,g_kh_k)\geq 0. \tag{3}$$

令 $k\to\infty$ 趋于上极限，并利用 $\tau$ 在 $U\times U$ 上的上半连续性（性质4），得到 $\tau\left(e,\text{ 指数映射 }\left(\frac{a+b}{2\cdot 2^m}\right)\right)\geq 0$。由于$\left|\frac{a+b}{2}\right|\leq r$，可知对每个 $m\geq 1$ 都有 $\frac{a+b}{2}\in C_m$，即 $\frac{a+b}{2}\in C_\infty$。因此，$C_\infty$ 是凸的。

我们定义锥

$$C_0^+:=\bigcup_{\mu>0}\mu C_\infty.$$

我们证明锥 $C_0^+$ 的闭性。设序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset C_0^+$ 收敛到向量 $x\in L$。若 $x=0$，则 $x\in C_\infty\subset C_0^+$。令 $x\neq 0$。必要时，将序列中的所有项及其极限都乘以正数 $\frac{r}{2|x|}$，于是可假设 $|x|=\frac{r}{2}$，且对所有 $n$ 都有 $|x_n|\leq r$。对于每个 $n$，都有 $x_n=\mu_na_n$，其中 $a_n\in C_\infty$ 且 $\mu_n>0$。选取自然数 $j_n$，使得 $\mu_n\leq 2^{j_n}$。于是，缩放后的向量 $\frac{x_n}{2^{j_n}}=\frac{\mu_n}{2^{j_n}}a_n$ 属于凸集 $C_\infty$，因此对任意 $m\geq 1$，由反三角不等式可得

$$\tau\left(e,\exp\left(\frac{x_n}{2^m}\right)\right)\geq 2^{j_n}\tau\left(e,\exp\left(\frac{x_n}{2^{m+j_n}}\right)\right)\geq 0.$$

由于 $|x_n|\leq r$，这意味着对所有 $m\geq 1$ 都有 $x_n\in C_m$，也就是说，$x_n\in C_\infty$（特别是，$C_0^+\cap B_r(0)=C_\infty$）。由紧集 $C_\infty$ 的闭性，令 $n\to\infty$ 趋于极限可得 $x\in C_\infty\subset C_0^+$。因此，锥 $C_0^+$ 是闭的。

我们证明锥 $C_0^+$ 的凸性。设 $x,\ y\in C_0^+$，则根据定义，$x=\mu_1a$ 和$y=\mu_2b$分别对某个 $a,\ b\in C_\infty$以及 $\mu_1,\ \mu_2>0$成立。令 $\mu:=\max(\mu_1,\ \mu_2)>0$。由于 $0\in C_\infty$且集合$C_\infty$ 是凸的，缩放后的向量 $\frac{x}{\mu}=\frac{\mu_1}{\mu}a$ 和 $\frac{y}{\mu}=\frac{\mu_2}{\mu}b$ 属于 $C_\infty$，这意味着它们的半和 $\frac{x+y}{2\mu}$属于 $C_\infty$。将其按因子 $\mu$ 拉伸回去，我们得到 $\frac{x+y}{2}=\mu\left(\frac{x+y}{2\mu}\right)\in C_0^+$。因此，锥$C_0^+$是凸的。

我们来验证该锥的尖性：$C_0^+\cap(-C_0^+)=\{0\}$。如果存在非零向量 $w\in C_0^+\cap(-C_0^+)$，那么对于归一化向量 $a:=\frac{r}{|w|}w$，两个向量 $a,\ -a$ 都将属于 $C_0^+\cap B_r(0)=C_\infty\subset C_1$。于是，对于元素 $g:=$指数映射 $\left(\frac{a}{2}\right)\neq e$，不等式 $\tau(e,\ g)\geq 0$ 和 $\tau(g,\ e)=\tau\left(e,\text{ 指数映射 }\left(-\frac{a}{2}\right)\right)\geq 0$ 将同时成立，这与性质 2 矛盾。

现在我们证明，线性张成 $L_0=C_0^+-C_0^+$通过交换子运算生成整个李代数 $L$。将包含 $L_0$的最小李子代数 $L_0\subset L$ 记为 $L$。我们需要以下引理。

**引理 4.3.** 存在一个单位向量 $\xi\in L(|\xi|=1)$、一个常数 $c_0\in\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$、一个半径 $\rho:=\frac{c_0r}{4}\in\left(0;\ \frac{r}{8}\right)$，以及一个指标 $k_1\geq 1$，使得：

*1.* 对所有 $u\in C_0^+$，不等式 $\langle\xi,u\rangle\geq 2c_0|u|$ 成立；

*2.* 对所有 $k\geq k_1$，以及任意范数为 $|\tilde{x}|=\frac{r}{2^k}$ 的向量 $\tilde{x}\in A_{\frac{r}{2^k}}$，以下估计成立：

$$\langle\xi,\tilde{x}\rangle\geq c_0|\tilde{x}|=c_0\frac{r}{2^k}; \tag{4}$$

*3.* 对于任何可通过连续的 $\tau$-可容许曲线 $\gamma\colon [0;\,1] \to B_\rho^G(e)$ $(\gamma(0) = e,\ \gamma(1) = g)$ 与单位元 $e$ 相连的元素 $g \in B_\rho^G(e)$，对每个 $k \geq k_1$，以下表示成立：

$$g = h_1 h_2 \dots h_{N_k}, \qquad where\ h_i \in M_{\frac{r}{2^k}} \quad (N_k \leq 2^k).$$

引理 4.3 的证明。由于 $C_0^+$是一个非平凡凸闭尖锥（$C_0^+ \cap (-C_0^+) = \{0\}$），交集 $S := C_0^+ \cap \partial B_1$ (0) 是一个非空紧集，其凸包 conv($S$) 是紧的，并且不包含零向量（否则，0 将被表示为来自 $C_0^+$ 的非零向量的凸组合，这与该锥的尖性相矛盾）。根据针对凸紧集 conv($S$) 和点 $\{0\}$ 的 Hahn–Banach分离定理，存在一个单位向量 $\xi \in L$ （$|\xi| = 1$）和一个数 $c_0 \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ 使得对于所有 $u \in S$，$\langle \xi, u\rangle \geq 2c_0$。根据正齐次性，这意味着对于所有 $u \in C_0^+$，$\langle \xi, u\rangle \geq 2c_0|u|$。

对于每个 $k \geq 1$，考虑紧球面 $\partial B_r$(0) 的闭子集：

$$D_k := \{a \in C_k \cap \partial B_r(0) : \langle \xi, a\rangle \leq c_0 r\}.$$

由于 $C_{k+1} \subset C_k$，集合序列 $\{D_k\}$ 是嵌套的：$D_{k+1} \subset D_k$。我们用反证法证明，存在一个指标 $k_1 \geq 1$，使得 $D_{k_1} = \varnothing$ （进而根据嵌套性，对于所有 $k \geq k_1$，都有 $D_k = \varnothing$ ）。假设相反：对于所有 $k \geq 1$，都有 $D_k \neq \varnothing$。那么，对于每个 $k \geq 1$，我们选取一个元素 $a_k \in D_k$。由于球面 $\partial B_r$(0) 在有限维空间 $L$ 中是紧的，我们可以从序列 $\{a_k\}$ 中提取一个收敛子列 $a_{k_j} \to a_* \in \partial B_r$(0)。固定任意指标 $m \geq 1$。由于 $k_j \to \infty$，存在一个指标 $j_0$，使得对于所有 $j \geq j_0$，都有 $k_j \geq m$。根据嵌套性 $D_{k_j} \subset D_m$，对于所有 $j \geq j_0$，都有 $a_{k_j} \in D_m$。由于集合 $D_m$ 是闭的，令 $j \to \infty$ 趋于极限可得 $a_* \in D_m$。由于 $m \geq 1$ 的选取是任意的，我们得到 $a_* \in \bigcap_{m=1}^\infty D_m$。一方面，这意味着 $\langle \xi,\ a_*\rangle \leq c_0 r$。另一方面，$a_* \in \bigcap_{m=1}^\infty C_m = C_\infty \subset C_0^+$ 且 $|a_*| = r$，因此根据向量 $\xi$ 的性质，我们有 $\langle \xi,\ a_*\rangle \geq 2c_0|a_*| = 2c_0 r > c_0 r$。由此得到的矛盾证明，存在一个指标 $k_1 \geq 1$，使得对于所有 $k \geq k_1$，都有 $D_k = \varnothing$。

这意味着，对于任意 $a \in C_k$ 满足 $|a| = r$ 且 $k \geq k_1$的情况，条件 $\langle \xi,\ a\rangle > c_0 r$ 成立。代入 $a = 2^k \tilde{x}$，其中 $\tilde{x} \in A_{\frac{r}{2^k}}$ 且 $|\tilde{x}| = \frac{r}{2^k}$ （使得 $a \in C_k$ 且 $|a| = r$），并将不等式 $\langle \xi,\ 2^k \tilde{x}\rangle > c_0 r$ 两边除以 $2^k$，即可得到估计（4）。

令 $\rho := \frac{c_0 r}{4} \in (0;\ r/8)$。注意，对于任意点 $a, b \in B_\rho^G(e)$，向量 $z_a =$ 指数映射$^{-1}(a)$ 和 $z_b =$ 指数映射$^{-1}(b)$ 的范数为 $\leq \rho$，因此，根据引理 2.2，增量向量 $\tilde{x} = (-z_a) * z_b =$ 指数映射$^{-1}(a^{-1}b)$ 定义正确，并满足估计 $|\tilde{x}| \leq 2\rho + \rho^2 < 3\rho < r < \lambda$。

现在令 $\gamma\colon [0;\,1] \to B_\rho^G(e)$ 为一条连续的 $\tau$-可容许曲线，满足 $\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = g$，并令 $k \geq k_1$。我们归纳地构造时刻 $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{N_k} = 1$：

- 如果时刻 $s_{i-1} < 1$ 已经构造出来，且对所有 $s \in [s_{i-1}; 1]$，条件 $\gamma(s_{i-1})^{-1}\gamma(s) \in B_{\frac{r}{2^k}}^G(e)$ 都成立，那么令 $N_k := i$，并令 $s_{N_k} := 1$;
- 否则，令

$$s_i := \min\left\{s \in [s_{i-1}; 1] : \gamma(s_{i-1})^{-1}\gamma(s) \in \partial B_{\frac{r}{2^k}}^G(e)\right\}.$$

由 $\gamma$ 的一致连续性可知，该过程将在有限步内终止 $N_k$。此时，元素 $h_i := \gamma(s_{i-1})^{-1}\gamma(s_i)$ 满足以下条件：$\tau(e,\ h_i) = \tau(\gamma(s_{i-1})\ \gamma(s_i)) \geq 0$且 $h_i \in B_{\frac{r}{2^k}}^G(e)$，也就是说，$h_i \in M_{\frac{r}{2^k}}$ 对于所有 $i = 1,$ ....., $N_k$，前 $N_k - 1$ 步的向量 $\tilde{x}_i := $ 指数映射$^{-1}(h_i) \in A_{\frac{r}{2^k}}$ 的范数为 $|\tilde{x}_i| = \frac{r}{2^k}$。

我们来估计数值 $N_k$ 的上界。记 $z_i :=$ 指数映射$^{-1}(\gamma(s_i)) \in B_\rho(0)$。于是 $z_i = z_{i-1} * \tilde{x}_i = z_{i-1} + \tilde{x}_i + z(z_{i-1},\ \tilde{x}_i)$，根据引理 2.1 可得 $|z(z_{i-1},\ \tilde{x}_i)| \leq |z_{i-1}| \cdot |\tilde{x}_i| \leq$

$\rho|\tilde{x}_i|$。对于每个完整步骤 $i \in \{1, \ldots, N_k - 1\}$，考虑到（4）和不等式$\rho = \frac{c_0 r}{4} < \frac{c_0}{2}$，我们有：

$$\langle \xi, z_i \rangle - \langle \xi, z_{i-1} \rangle = \langle \xi, \tilde{x}_i \rangle + \big\langle \xi, z(z_{i-1}, \tilde{x}_i) \big\rangle \geq c_0 |\tilde{x}_i| - \rho |\tilde{x}_i| \geq \frac{c_0}{2} |\tilde{x}_i| = \frac{c_0 r}{2 \cdot 2^k}.$$

将这些不等式对 $i = 1$、.....、$N_k - 1$ 求和，并考虑到 $z_0 = 0$ 和 $|z_{N_k - 1}| \leq \rho$，可得：

$$(N_k - 1) \frac{c_0 r}{2 \cdot 2^k} \leq \langle \xi, z_{N_k - 1} \rangle - \langle \xi, z_0 \rangle \leq |z_{N_k - 1}| \leq \rho = \frac{c_0 r}{4}.$$

将两边除以 $\frac{c_0 r}{2 \cdot 2^k} > 0$，得到 $N_k - 1 \leq 2^{k-1}$，从而有 $N_k \leq 2^{k-1} + 1 \leq 2^k$。 □

我们还需要另一个引理。

引理 *4.4.* 对于引理 *4.3* 中的半径 $\rho > 0$，存在点 $q' \in B_\rho^G(e)$，满足 $\tau(e, q') > 0$，使得集合 $W_G := \operatorname{int} I(e, q')$ 非空、在 $G$ 中为开集，且其闭包包含于闭时序菱形 $J(e, q') \subset B_\rho^G(e)$ 中。

引理 4.4 的证明。1. 将引理 4.1 应用于单位元的开邻域 $\operatorname{int} B_\rho^G(e)$，可得到点 $p_1$、$q_1 \in \operatorname{int} B_\rho^G(e)$，使得 $e \in \operatorname{int} I(p_1, q_1) \subset I(p_1, q_1) \subset B_\rho^G(e)$；其中，对于任意 $p$、$q' \in I(p_1, q_1)$，闭时序菱形 $J(p, q')$ 是紧的，并且完全包含于 $I(p_1, q_1) \subset B_\rho^G(e)$ 中。

2. 注意，对于任意点 $q \in G$，条件 $e \in \operatorname{int} I^-(q)$ 蕴含 $q \in \operatorname{int} I^+(e)$。事实上，若 $e \in \operatorname{int} I^-(q)$，则存在单位元 $e$ 的一个开邻域 $V_e \subset G$，使得 $V_e \subset I^-(q)$，也就是说，对所有 $y \in V_e$，都有 $\tau(y, q) > 0$。由于映射 $y \mapsto y^{-1} q$ 是群 $G$ 到其自身的一个同胚，将 $e$ 平移到 $q$ 后，集合 $U_q := \{y^{-1} q : y \in V_e\}$ 是点 $q$ 的一个开邻域。此外，对每个点 $z = y^{-1} q \in U_q$ $(y \in V_e)$，由 $\tau$ 的左不变性（性质 1），我们有

$$\tau(e, z) = \tau(e, y^{-1} q) = \tau(ye, y(y^{-1} q)) = \tau(y, q) > 0,$$

也就是说，$U_q \subset I^+(e)$，由此可得 $q \in \operatorname{int} I^+(e)$。

3. 将性质 5 应用于点 $e$ 及其开邻域 $\operatorname{int} I(p_1, q_1)$，可得点 $p', q' \in \operatorname{int} I(p_1, q_1)$，使得

$$e \in \operatorname{int} I(p', q') \subset I(p', q') \subset \operatorname{int} I(p_1, q_1).$$

特别地，$q' \in I(p_1, q_1) \subset B_\rho^G(e)$ 且 $\tau(e, q') > 0$。再次将性质 5 应用于点 $e$ 及其开邻域 $\operatorname{int} I(p', q')$，可得点 $p'', q'' \in \operatorname{int} I(p', q')$，使得

$$e \in \operatorname{int} I(p'', q'') \subset I(p'', q'') \subset \operatorname{int} I(p', q').$$

由于 $e \in \operatorname{int} I(p'', q'') = \operatorname{int} I^+(p'') \cap \operatorname{int} I^-(q'') \subset \operatorname{int} I^-(q'')$，由步骤 2 可得 $q'' \in \operatorname{int} I^+(e)$。另一方面，根据点 $q''$的选取，我们有 $q'' \in \operatorname{int} I(p', q') \subset \operatorname{int} I^-(q')$。因此，

$$q'' \in \operatorname{int} I^+(e) \cap \operatorname{int} I^-(q') = \operatorname{int} I(e, q').$$

因此，开集 $W_G := \operatorname{int} I(e, q')$ 包含点 $q''$，因而非空。最后，由于 $e$，$q' \in I(p_1, q_1)$，根据步骤 1，闭时序菱形 $J(e, q')$ 是紧的（因此在 $G$ 中是闭的），从而 $W_G \subset J(e, q') \subset B_\rho^G(e)$。 □

根据引理 4.4，集合 $W_G = \operatorname{int} I(e, q') \subset J(e, q') \subset B_\rho^G(e)$ 在 $G$ 中非空且开，因此其原像 $W := $指数映射$^{-1}(W_G) \subset B_\rho(0)$ 是李~代数 $L$ 中的一个非空开子集。只需证明 $W \subset L_0$：由于李子代数 $L_0$ 是一个向量子空间~，且在 $L$ 中包含非空开集 $W$，而该开集位于 $L$中，因此可得 $L_0 = L$。

设 $x \in W$，则 $g :=$ 指数映射$(x) \in W_G \subset I(e, q')$；特别地，$\tau(e, g) > 0$。根据性质6，存在一条连续的 $\tau$-可容许曲线 $\gamma\colon [0;\ 1] \to G$，连接 $e$ 与 $g$。对于任意 $s \in [0;\ 1]$，我们有 $\tau(e, \gamma(s)) \geq 0$，并且 $\tau(\gamma(s)\ q') \geq \tau(\gamma(s)\ g) + \tau(g, q')\ > 0$，因此整个像集 $\gamma([0;\ 1])$ 位于 $J(e, q') \subset B_\rho^G(e)$ 中。

任取 $\varepsilon \in \big(0;$ 最小值 $\big(1,\ \frac{1}{8re^r}\big)\big)$。由于 $C_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ 是 $B_r(0)$ 中一个递减紧集序列的交集，对于所有充分大的 $k \geq 1$，都有 $C_k \subset C_\infty + U(0,\ \varepsilon r)$。除以 $2^k$，得到：

$$A_{\frac{r}{2^k}} = \frac{1}{2^k} C_k \subset \frac{1}{2^k}\big(C_\infty + U(0, \varepsilon r)\big). \tag{5}$$

根据引理 4.3，元素 $g =$ 指数映射$(x)$ 可表示为 $g = h_1 h_2 \ldots h_{N_k}$，其中 $h_i \in M_{\frac{r}{2^k}}$。令 $\tilde{x}_i :=$ 指数映射$^{-1}(h_i) \in A_{\frac{r}{2^k}}$，在指数坐标中，我们有：

$$x = \tilde{x}_1 * \tilde{x}_2 * \cdots * \tilde{x}_{N_k}.$$

根据包含关系（5），每个向量 $\tilde{x}_i$ 都可以表示为

$$\tilde{x}_i = x_i + y_i, \qquad \text{where } x_i \in \frac{1}{2^k} C_\infty \subset B_{\frac{r}{2^k}}(0), \quad |y_i| < \frac{\varepsilon r}{2^k}.$$

应用引理 2.6，取 $\eta = r$ 和 $j = N_k$ (注意，引理 $\varepsilon$ 中对 2.6 的约束满足我们的选择)，可得：

$$x = (x_1 + y_1) * \cdots * (x_{N_k} + y_{N_k}) = (x_1 * x_2 * \cdots * x_{N_k}) * y, \qquad \text{where } |y| < 14\varepsilon r e^r. \tag{6}$$

由于 $x_i \in \frac{1}{2^k} C_\infty \subset C_0^+ \subset L_0 \subset \widetilde{L}_0$，且李子代数 $\widetilde{L}_0$ 对李括号运算封闭，~向量 $w_k :$
$= x_1 * x_2 * \cdots * x_{N_k}$ 属于李子代数 $L_0$，其中 $|w_k| < e^r - 1 < 1$ 根据引理2.5。根据引理2.1，由（6）可得估计：

$$|x - w_k| = |w_k * y - w_k| \leq |y| + |w_k| \cdot |y| < 2 \cdot 14\varepsilon r e^r = 28\varepsilon r e^r.$$

~由于 $\varepsilon \in (0; 1)$ 是任意的，且有限维子空间 $L_0 \subset L$ 是闭的，令 $\varepsilon \to 0$ 趋于
~ ~ ~的极限，得到 $x \in L_0$。因此，$W \subset L_0$，从而 $L_0 = L$。
Be在给出反范数的定义之前，我们再证明一个引理。

**引理 4.5**。以下断言成立：

*1.* 向量 $u \in L$ 属于锥 $C_0^+$ 当且仅当存在 $\delta > 0$ 使得$\tau(e,$ 指数映射$(tu)) \geq 0$对所有 $t \in [0;$ $\delta]$均成立。此外，对于任意 $u \in C_0^+$，不等式 $\tau(e,$ 指数映射$(tu)) \geq 0$ 对所有 $t \geq 0$均成立。

*2.* 对于每个向量 $u \in C_0^+$，函数 $f_u(t) := \tau(e,$ 指数映射$(tu))$ 在半轴 $[0;\ +\infty)$ 上非负，满足反三角不等式（$f_u(t + s) \geq f_u(t) + f_u(s)$ 对所有$t$、$s \geq 0$均成立），且为非递减函数，并且存在有限极限

$$\nu_0(u) := \lim_{k \to \infty} 2^k \tau\Big(e, \exp\Big(\frac{u}{2^k}\Big)\Big) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\tau(e, \exp(tu))}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\tau(e, \exp(tu))}{t}, \tag{7}$$

满足该估计

$$0 \leq \nu_0(u) \leq \frac{\tau(e, q)}{r} |u|. \tag{8}$$

引理 4.5 的证明。1. 对于 $u=0$，我们有 $0\in C_0^+$and $\tau(e,$指数映射$(0))=\tau(e,e)=0\geq 0$ 对所有$t\geq 0$成立。令 $u\in C_0^+\setminus\{0\}$ and $t>0$。设 $u_0:=\frac{r}{|u|}u$。由于 $|u_0|=r$ and $C_0^+\cap B_r(0)=C_\infty$，对于任意 $\alpha\in(0;1]$，向量 $\alpha u_0$ 属于 $C_\infty\subset C_1$。选取一个足够大的指标 $k\geq 1$，使得数值 $\alpha:=\frac{t|u|}{2^{k-1}r}$属于半开区间 $(0;1]$。于是 $\alpha u_0\in C_1$，由集合 $C_1$ 的定义可得

$$\tau\Big(e,\exp\Big(\frac{tu}{2^k}\Big)\Big)=\tau\Big(e,\exp\Big(\frac{\alpha u_0}{2}\Big)\Big)\geq 0.$$

由于 $\exp(tu)=\big(\exp\big(\frac{tu}{2^k}\big)\big)^{2^k}$，根据反三角不等式以及 $\tau$ 的左不变性，我们有

$$\tau(e,\exp(tu))\geq 2^k\tau\Big(e,\exp\Big(\frac{tu}{2^k}\Big)\Big)\geq 0.$$

反之，设 $u\in L\setminus\{0\}$和 $\tau(e,\ \exp(tu))\geq 0$对所有 $t\in[0;\ \delta]$，其中 $\delta>0$。令 $u_0:=\frac{r}{|u|}u\in\partial B_r(0)$。对于所有充分大的指标 $k\geq 1$，满足 $t_k:=\frac{r}{2^k|u|}\leq\delta$，我们有

$$\tau\Big(e,\exp\Big(\frac{u_0}{2^k}\Big)\Big)=\tau(e,\exp(t_k u))\geq 0,$$

也就是说，$u_0\in C_k$。由于 $C_{k+1}\subset C_k$的嵌套性，可推出对所有 $k\geq 1$都有 $u_0\in C_k$。因此，$u_0\in\bigcap_{k=1}^\infty C_k=C_\infty\subset C_0^+$，从而 $u=\frac{|u|}{r}u_0\in C_0^+$也成立。

2. 令 $u\in C_0^+$。根据步骤 1，对于所有$t\geq 0$，函数 $f_u(t)=\tau(e,$指数映射$(tu))$ 均为非负。对于任意 $t,\ s\geq 0$，由单位元 $\exp((t+s)u)=$指数映射$(tu)$ 指数映射$(su)$ 的恒等式、$\tau$ 的左不变性以及 $\tau$ 的反三角不等式，我们得到函数 $f_u$ 的反三角不等式：

$$f_u(t+s)=\tau(e,\exp(tu)\exp(su))\geq\tau(e,\exp(tu))+\tau(\exp(tu),\exp(tu)\exp(su))=f_u(t)+f_u(s).$$

由于 $f_u(s)\geq 0$，这意味着 $f_u(t+s)\geq f_u(t)$，也就是说，函数 $f_u$ 在$[0;+\infty)$ 上是非递减的。对于 $u=0$，我们有 $f_0(t)\equiv 0$，且关系式 (7)、(8) 成立。令 $u\in C_0^+\setminus\{0\}$。对于任意 $t>0$和 $s\in(0;\ t)$，令 $m:=\lfloor t/s\rfloor\geq 1$和 $r_s:=t-ms\in[0;s)$。根据反三角不等式以及 $f_u$ 的非负性，我们有

$$f_u(t)=f_u(ms+r_s)\geq mf_u(s)+f_u(r_s)\geq mf_u(s),$$

因此，两边除以 $ms>0$ 后可得

$$\frac{f_u(s)}{s}\leq\frac{t}{ms}\cdot\frac{f_u(t)}{t}=\frac{t/s}{\lfloor t/s\rfloor}\cdot\frac{f_u(t)}{t}.$$

令 $s\to 0^+$ 趋于上极限，并考虑到 $\lim_{s\to 0^+}\frac{t/s}{\lfloor t/s\rfloor}=1$，可得 ——

$$\overline{\lim_{s\to 0^+}}\frac{f_u(s)}{s}\leq\frac{f_u(t)}{t}\qquad\forall t>0.$$

对右侧所有 $t>0$ 取下确界，得到不等式

$$\overline{\lim_{s\to 0^+}}\frac{f_u(s)}{s}\leq\inf_{t>0}\frac{f_u(t)}{t}.$$

另一方面，由于对于任意的 $\delta>0$，我们有

$$\inf_{t>0}\frac{f_u(t)}{t}\leq\inf_{s\in(0;\delta)}\frac{f_u(s)}{s},$$

对 $\delta > 0$ 取上确界，得到

$$\inf_{t>0} \frac{f_u(t)}{t} \le \sup_{\delta>0} \inf_{s\in(0;\delta)} \frac{f_u(s)}{s} = \varliminf_{s\to 0^+} \frac{f_u(s)}{s}.$$

因此，我们得到一个不等式链

$$\varlimsup_{s\to 0^+} \frac{f_u(s)}{s} \le \inf_{t>0} \frac{f_u(t)}{t} \le \varliminf_{s\to 0^+} \frac{f_u(s)}{s},$$

由此证明了极限 $\lim_{t\to 0^+} \frac{f_u(t)}{t}$ 的存在性，特别是通过代入 $t = 2^{-k}$ 得到等式 (7)。最后，令 $t_0 := \frac{r}{|u|} > 0$，注意到 $|t_0 u| = r$，因此 $\exp(t_0 u) \in B_r^G(e) \subset I(p, q)$。根据反三角不等式，$\tau(e, q) \ge \tau(e, \exp(t_0 u)) + \tau(\exp(t_0 u)\ q) > f_u(t_0)$，于是

$$0 \le \nu_0(u) = \inf_{t>0} \frac{f_u(t)}{t} \le \frac{f_u(t_0)}{t_0} \le \frac{\tau(e, q)}{r}|u|.$$

□

我们通过以下公式定义反范数 $\nu_0 : L \to [0; +\infty) \cup \{-\infty\}$

$$\nu_0(u) := \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\tau(e, \exp(tu))}{t} = \inf\limits_{t>0} \dfrac{\tau(e, \exp(tu))}{t}, & \text{if } u \in C_0^+, \\ -\infty, & \text{if } u \in L \setminus C_0^+. \end{cases}$$

下面验证，函数 $\nu_0$ 满足子洛伦兹结构定义中反范数的所有性质。

**1. 正齐次性**。对于任意 $u \in C_0^+$以及任意 $\mu > 0$，有 $\mu u \in C_0^+$，因此在公式 (7) 中作变量代换 $s = \mu t$，可得:

$$\nu_0(\mu u) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\tau(e, \exp(t\mu u))}{t} = \mu \lim_{s\to 0^+} \frac{\tau(e, \exp(su))}{s} = \mu\nu_0(u).$$

对于 $\mu = 0$ 和 $u \in C_0^+$，等式 $\nu_0(0 \cdot u) = \nu_0(0) = 0 = 0 \cdot \nu_0(u)$ 也成立；对于$u \in L \setminus C_0^+$和 $\mu > 0$，我们有 $\mu u \in L \setminus C_0^+$以及 $\nu_0(\mu u) = -\infty = \mu\nu_0(u)$。

**2. 上的凹性** $C_0^+$。我们证明，对于任意 $u,\ v \in L$，以下不等式成立:

$$\nu_0(u + v) \ge \nu_0(u) + \nu_0(v).$$

如果向量 $u$、$v$ 中至少有一个不属于 $C_0^+$，那么右侧为 $-\infty$，不等式成立；如果 $u = 0$ 或 $v = 0$，同样成立。令 $u,\ v \in C_0^+ \setminus \{0\}$。根据 $\nu_0$的正齐次性，将 $u$ 和 $v$ 同时乘以适当的公共正因子，不失一般性地设 $u,\ v \in C_0^+ \cap B_r(0) = C_{\infty}$。于是，对于每个 $k \ge 1$，向量 $\frac{u}{2^k}$ 和 $\frac{v}{2^k}$属于 $A_{\frac{r}{2^k}} \subset B_{\frac{r}{2^k}}(0)$，因此根据引理 2.2，元素

$$\tilde{w}_k := \left(\frac{u}{2^k}\right) * \left(\frac{v}{2^k}\right) = \exp^{-1}\left(\exp\left(\frac{u}{2^k}\right)\exp\left(\frac{v}{2^k}\right)\right) \in V$$

定义正确。令集合 $w_k := 2^{k-1}\tilde{w}_k$。根据引理 2.1，我们有

$$\left|w_k - \frac{u+v}{2}\right| = 2^{k-1}\left|z\left(\frac{u}{2^k}, \frac{v}{2^k}\right)\right| \le 2^{k-1}\frac{|u|}{2^k}\frac{|v|}{2^k} = \frac{|u|\cdot|v|}{2^{k+1}} \le \frac{r^2}{2^{k+1}} \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

也就是说，当 $k \to \infty$ （其中 $|w_k| \le r + \frac{r^2}{4} < 2r < \lambda$）时， $w_k \to \frac{u+v}{2}$。固定任意指标 $m \ge 1$。对于所有 $k \ge m+1$，依次应用反三角不等式和 $\tau$ 的左不变性，我们得到：

$$\begin{aligned} 2^m \tau\left(e, \exp\left(\frac{w_k}{2^m}\right)\right) &\ge 2^m \cdot 2^{k-1-m} \tau\left(e, \exp\left(\frac{w_k}{2^{k-1}}\right)\right) = 2^{k-1}\tau(e, \exp(\tilde{w}_k)) = \\ &= 2^{k-1}\tau\left(e, \exp\left(\frac{u}{2^k}\right)\exp\left(\frac{v}{2^k}\right)\right) \ge \\ &\ge \frac{1}{2}\left(2^k \tau\left(e, \exp\left(\frac{u}{2^k}\right)\right) + 2^k \tau\left(e, \exp\left(\frac{v}{2^k}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

在 $k \to \infty$ 处取上极限，由于 $\tau$在 $U_0 \times U_0$ 上的上半连续性（性质4）以及左侧的不等式和右侧的关系式（7），我们得到：

$$2^m \tau\left(e, \exp\left(\frac{u+v}{2^{m+1}}\right)\right) \ge \overline{\lim_{k\to\infty}} 2^m \tau\left(e, \exp\left(\frac{w_k}{2^m}\right)\right) \ge \frac{\nu_0(u) + \nu_0(v)}{2}.$$

现在令 $m \to \infty$，根据向量 $\frac{u+v}{2} \in C_0^+$的公式（7），我们得到

$$\nu_0\left(\frac{u+v}{2}\right) \ge \frac{\nu_0(u) + \nu_0(v)}{2},$$

因此，乘以 2 后，由于正齐次性，可得 $\nu_0(u+v) \ge \nu_0(u) + \nu_0(v)$。结合正齐次性，这意味着函数 $\nu_0$ 在凸锥 $C_0^+$上是凹函数。

3. 在 $L$ 上的上半连续性以及在 $\operatorname{int}_{L_0}(C_0^+)$上的连续性。固定任意的$R > 0$并令 $\delta := \lambda/R$。对于每个 $t \in (0;\ \delta)$ 以及任意 $u \in U(0, R)$，有 $|tu| < \lambda$，因此 $\exp(tu) \in U \subset U_0$。由于函数 $\tau(e, \cdot)$ 在 $U_0$上是上半连续的，对于每个固定的$t \in (0;\ \delta)$，映射 $u \mapsto \tau(e, \exp(tu))$ 在开球 $U(0, R)$ 上是上半连续的。根据等式（7），对于所有 $u \in C_0^+ \cap U(0, R)$，表示式

$$\nu_0(u) = \inf_{t \in (0;\delta)} \frac{\tau(e, \exp(tu))}{t}$$

是有效的。由于任意一族上半连续函数的下确界仍是上半连续的，且 $R > 0$ 是任意的，因此函数 $\nu_0$ 在锥 $C_0^+$上是上半连续的。将其在闭锥 $C_0^+$之外取值延拓为 $-\infty$ 后，它在整个李代数 $L$上同样是上半连续的。此外，由于有限维空间中的凸集上的每个有限凹函数在其相对内部上都是连续的，限制 $\nu_0|_{\operatorname{int}_{L_0}(C_0^+)}$ 是连续的。

4. 在 $\operatorname{int}_{L_0}(C_0^+)$ 上的严格正性。我们首先证明存在一个向量 $u_* \in C_\infty \subset C_0^+$，使得 $\nu_0(u_*) > 0$。根据引理 4.4，存在一个点 $q' \in B_\rho^G(e)$，满足 $\tau(e, q') > 0$且 $J(e, q') \subset B_\rho^G(e)$。根据性质6，存在一条连续的 $\tau$-可容许曲线 $\gamma\colon [0;\ 1] \to G$，满足 $\gamma(0) = e$、 $\gamma(1) = q'$，以及一个正的 $\tau$-长度 $c := L_\tau(\gamma) > 0$。由于 $\gamma$是 $\tau$-可容许的，其像包含于 $J(e, q') \subset B_\rho^G(e)$ 中。根据引理 4.3 的步骤 3 证明中的构造，对每个 $k \ge k_1$，存在一个划分 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{N_k} = 1$，其步数为 $N_k \le 2^k$，使得元素 $h_i := \gamma(s_{i-1})^{-1}\gamma(s_i)$ 属于 $M_{\frac{r}{2^k}}\ (i = 1, \ldots, N_k)$。根据 $\tau$-长度 $L_\tau(\gamma)$ 的定义以及 $\tau$ 的左不变性，我们有：

$$c = L_\tau(\gamma) \le \sum_{i=1}^{N_k} \tau(\gamma(s_{i-1}), \gamma(s_i)) = \sum_{i=1}^{N_k} \tau(e, h_i).$$

由于有 $N_k \le 2^k$ 项，根据鸽巢原理，在指标 $i \in \{1, \ldots, N_k\}$ 中存在一个指标 $i_k$，使得

$$\tau(e, h_{i_k}) \ge \frac{c}{N_k} \ge \frac{c}{2^k}.$$

令 $u_k := 2^k$ 指数映射$^{-1}$（$h_{i_k}$）。由于 $h_{i_k} \in M_{\frac{r}{2^k}}$，向量 $u_k$ 属于紧集 $C_k \subset B_r$（0），并满足不等式

$$2^k \tau\left(e, \exp\left(\frac{u_k}{2^k}\right)\right) = 2^k \tau(e, h_{i_k}) \geq c > 0.$$

由于球 $B_r(0)$ 的紧性，我们从序列 $\{u_k\}_{k \geq k_1}$ 中提取一个收敛子列 $u_{k_j} \to u_* \in B_r(0)$，记为 $j \to \infty$。与上文一样，由闭集$C_k$ 的嵌套性可知 $u_* \in \bigcap_{m=1}^{\infty} C_m = C_\infty \subset C_0^+$。固定任意指标 $m \geq 1$。对于所有 $k_j \geq m$，由反三角不等式可得

$$2^m \tau\left(e, \exp\left(\frac{u_{k_j}}{2^m}\right)\right) \geq 2^{k_j} \tau\left(e, \exp\left(\frac{u_{k_j}}{2^{k_j}}\right)\right) \geq c.$$

令 $j \to \infty$ 趋于上极限，并利用 $\tau$ 在 $U_0 \times U_0$ 上的上半连续性，我们得到 $2^m \tau\left(e, \exp\left(\frac{u_*}{2^m}\right)\right) \geq c$，对每个 $m \geq 1$ 均成立。令 $m \to \infty$，可得 $\nu_0(u_*) \geq c > 0$。

现在令 $u \in \text{int}_{L_0}(C_0^+)$ 为锥 $C_0^+$ 在子空间$L_0 = C_0^+ - C_0^+$中的任意一个内部向量。由于 $u_* \in C_0^+ \subset L_0$，根据相对内部的定义，存在一个充分小的数 $\varepsilon > 0$，使得向量 $v := u - \varepsilon u_*$ 属于 $C_0^+$。于是$u = v + \varepsilon u_*$，并根据反三角不等式、正齐次性以及 $\nu_0$ 在 $C_0^+$ 上的非负性，可得：

$$\nu_0(u) = \nu_0(v + \varepsilon u_*) \geq \nu_0(v) + \varepsilon \nu_0(u_*) \geq \varepsilon c > 0.$$

因此，三元组（$G$、$C_0^+$、$\nu_0$）是李群$G$上的左不变子洛伦兹结构。现在，利用该反范数 $\nu_0$ 和锥$C_0^+$，我们构造一个子洛伦兹计时函数$\tau_c$：$G \times G \to [0; +\infty] \cup \{-\infty\}$ 并证明对于所有 $g$、$h \in G$，$\tau(g, h) = \tau_c(g, h)$。我们证明以下引理。

**引理4.6**。存在一个指标 $k_2 \geq k_1$，使得对于满足条件 $\tau$（$e$、指数映射（$x$））$\geq 0$的任意向量 $x \in B_{\frac{r}{2^{k_2}}}$（0），以下不等式成立：

$$\langle \xi, x \rangle \geq c_0 |x|, \qquad 0 \leq \tau(e, \exp(x)) \leq \frac{2\tau(e, q)}{r} |x|, \tag{9}$$

其中 $\xi$ 和 $c_0$ 取自引理*4.3*。

引理*4.6*的证明。对于 $x = 0$，不等式（9）均变为等式 $0 = 0$。对于每个$k \geq 1$，考虑紧球层 $\{a \in L$ 中的闭子集：$\frac{r}{2} \leq |a| \leq r\}$：

$$\widetilde{D}_k := \left\{ a \in C_k : \frac{r}{2} \leq |a| \leq r,\ \langle \xi, a \rangle \leq c_0 |a| \right\}.$$

由于 $C_{k+1} \subset C_k$，集合序列 $\{D_k\}$ 是嵌套的：$D_{k+1} \subset D_k$。我们用反证法证明存在一个指标 $k_2 \geq k_1$，使得对所有 $k \geq k_2$，都有 $D_k = \varnothing$。如果对所有 $k \geq 1$，都有 $D_k \neq \varnothing$，那么通过选取一个元素 $a_k \in D_k$ 并提取一个收敛子列 $a_{k_j} \to a_*$，由于集合 $D_m$ 的闭性和嵌套性，我们得到 $a_* \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$。于是 $\frac{r}{2} \leq |a_*| \leq r$，$\langle \xi, a_* \rangle \leq c_0 |a_*|$，同时 $a_* \in \bigcap_{m=1}^{\infty} C_m = C_\infty \subset C_0^+$。然而，根据引理 4.3 第 1 步，对向量 $a_* \in C_0^+ \setminus \{0\}$，不等式 $\langle \xi, a_* \rangle \geq 2c_0 |a_*| > c_0 |a_*|$ 成立——这就产生了矛盾。因此，存在一个指标 $k_2 \geq k_1$，使得对所有 $k \geq k_2$，都有 $D_k = \varnothing$。

现在令 $x \in B_{\frac{r}{2^{k_2}}}(0) \setminus \{0\}$ 和 $\tau(e,$ 指数映射$(x)) \geq 0$。选择满足双重不等式的唯一整数 $m \geq k_2$：

$$\frac{r}{2^{m+1}} < |x| \leq \frac{r}{2^m},$$

并令 $a := 2^m x$。于是 $\frac{r}{2} < |a| \le r$ 且 $\tau\big(e, \text{指数映射}\big(\frac{a}{2^m}\big)\big) = \tau(e, \text{指数映射}(x)) \ge 0$，即 $a \in C_m$。由于 $m \ge k_2$ 且 $D_m = \varnothing$，我们有 $\langle \xi, a\rangle > c_0|a|$。将此不等式两边同时除以$2^m$，得到（9）中的第一个不等式：$\langle \xi, x\rangle \ge c_0|x|$。

为证明（9）中的第二个不等式，注意到由于 $\exp(a) = (\exp(x))^{2^m}$ 且 $\tau(e, \exp(x)) \ge 0$，由反三角不等式及 $\tau$ 的左不变性可得

$$0 \le 2^m \tau(e, \exp(x)) \le \tau(e, \exp(a)).$$

同时，$|a| \le r$，因此点 $\exp(a)$ 属于球 $B_r^G(e) \subset I(p, q)$，其中$\tau(\exp(a)\ q) > 0$。因此，由反三角不等式，$\tau(e, \exp(a)) \le \tau(e, q) - \tau(\exp(a)\ q) < \tau(e, q)$。考虑到 $|x| > \frac{r}{2^{m+1}}$ 意味着 $\frac{1}{2^m} < \frac{2|x|}{r}$，最终得到：

$$0 \le \tau(e, \exp(x)) \le \frac{1}{2^m}\tau(e, \exp(a)) \le \frac{\tau(e, q)}{2^m} \le \frac{2\tau(e, q)}{r}|x|.$$

□

首先，我们证明对于所有 $g, h \in G$，都有 $\tau(g, h) \le \tau_c(g, h)$。若 $g = h$，则由性质 2 可得 $\tau(g, g) = 0$，且常值曲线 $\gamma_0(t) \equiv g (t \in [0; 1])$ 是 $C^+$-可容许的，其子洛伦兹长度为 $\ell(\gamma_0) = \int_0^1 \nu_0(0)\, dt = 0$，因此 $\tau_c(g, g) \ge \ell(\gamma_0) = 0 = \tau(g, g)$。

现在令 $g \ne h$。如果 $\tau(g, h) = -\infty$，那么不等式 $\tau(g, h) \le \tau_c(g, h)$ 成立。令$\tau(g, h) \ge 0$。根据性质6，集合 $\Omega_\tau(g, h)$ 非空，且 $\tau(g, h) = \sup_{\gamma \in \Omega_\tau(g,h)} L_\tau(\gamma)$。任取一条连续的 $\tau$-可容许曲线 $\gamma \in \Omega_\tau(g, h)\ (\gamma(0) = g, \gamma(1) = h)$，并证明$L_\tau(\gamma) \le \tau_c(g, h)$。令

$$\rho_0 := \min\left\{\rho, \frac{r}{4 \cdot 2^{k_2}}\right\} = \min\left\{\frac{c_0 r}{4}, \frac{r}{4 \cdot 2^{k_2}}\right\} > 0.$$

由于曲线 $\gamma$ 在区间 $[0; 1]$ 上一致连续，我们选取一个足够精细的划分$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = 1$，使得对每个 $j = 1, \ldots, N$及所有 $s \in [a_{j-1}; a_j]$，包含关系 $\gamma(a_{j-1})^{-1}\gamma(s) \in B_{\rho_0}^G(e)$ 成立（在这种情况下，如果在某个线段上 $\gamma(a_{j-1}) = \gamma(a_j)$，那么根据 $\tau$-可容许性和性质 2，曲线 $\gamma$在 $[a_{j-1}; a_j]$上为常数，且在该段上的 $\tau$-长度为零）。由引理4.2可得 $L_\tau(\gamma) = \sum_{j=1}^N L_\tau(\gamma|_{[a_{j-1};a_j]})$。若能证明每条非恒定弧段$\gamma_j(s) := \gamma(a_{j-1})^{-1}\gamma(s)$ ($s \in [a_{j-1}; a_j]$)经过适当的单调重参数化后，成为一条 Lipschitz $C^+$-可容许曲线 $\tilde{\gamma}_j$，且满足 $L_\tau(\gamma_j) \le \ell(\tilde{\gamma}_j)$，那么拼接这些曲线$\gamma(a_{j-1})\tilde{\gamma}_j$（随后将定义域线性压缩到区间 $[0; 1]$）便得到一条 Lipschitz $C^+$-可容许曲线 $\tilde{\gamma} \in \Omega_{L_\tau}(\gamma)$，其长度为 $\ell(\tilde{\gamma}) = \sum_{j=1}^N \ell(\tilde{\gamma}_j) \ge \sum_{j=1}^N L_\tau(\ ,\ )$。因此，根据 $(\ ,\ )$ 的定义可知 $(\ ) \le (\ ,\ )$；又因 $\gamma \in \Omega_\tau(g, h)$ 的任意性，所需的不等式 $\tau(g, h) \le \tau_c(g, h)$ 即得证。

因此，不失一般性，我们可以假设 $g = e \ne h$，且整条曲线$\gamma\colon [0;1] \to B_{\rho_0}^G(e)$ 连接 $\gamma(0) = e$ 到 $\gamma(1) = h \ne e$，并完全位于球 $B_{\rho_0}^G(e)$ 内。记 $z(s) := \text{指数映射}^{-1}(\gamma(s)) \in B_{\rho_0}(0)\ (s \in [0; 1], z(0) = 0, z(1) \ne 0)$。对于任意 $s_1, s_2 \in [0; 1]$满足 $s_1 < s_2$ 的情形，令 $\tilde{x}(s_1, s_2) := \text{指数映射}^{-1}(\gamma(s_1)^{-1}\gamma(s_2)) = (-z(s_1)) * z(s_2)$。由引理 2.2，得到$|\tilde{x}(s_1, s_2)| \le 2\rho_0 + \rho_0^2 < 3\rho_0 < \frac{r}{2^{k_2}}$，其中 $\tau(e, \exp(\tilde{x}(s_1, s_2))) = \tau(\gamma(s_1)\ \gamma(s_2)) \ge 0$。将引理4.6应用于向量 $\tilde{x} := \tilde{x}(s_1, s_2)$，并将引理 2.1应用于等式 $z(s_2) = z(s_1) * \tilde{x} = z(s_1) + \tilde{x} + z(z(s_1)\ \tilde{x})$，同时考虑到 $\rho_0 \le \frac{c_0 r}{4} < \frac{c_0}{2}$，我们得到：

$$\langle \xi, z(s_2) - z(s_1)\rangle = \langle \xi, \tilde{x}\rangle + \langle \xi, z(z(s_1), \tilde{x})\rangle \ge c_0|\tilde{x}| - \rho_0|\tilde{x}| \ge \frac{c_0}{2}|\tilde{x}|. \tag{10}$$

另一方面，$|z(s_2) - z(s_1)| \le |\tilde{x}| + |z(z(s_1)\ \tilde{x})| \le (1 + \rho_0)|\tilde{x}| < 2|\tilde{x}|$。将其与（10）比较可得：

$$|z(s_2) - z(s_1)| \le 2|\tilde{x}(s_1, s_2)| \le \frac{4}{c_0}\langle \xi, z(s_2) - z(s_1)\rangle \qquad (0 \le s_1 < s_2 \le 1). \tag{11}$$

引入连续非递减函数 $\sigma(s) := \langle \xi, z(s)\rangle$ $(s \in [0;1])$。由于 $z(0) = 0$且 $z(1) \neq 0$，由（11）可得 $\sigma(0) = 0$ 且 $T := \sigma(1) \geq \frac{c_0}{4}|z(1)| > 0$。此外，根据估计（11），由等式 $\sigma(s_1) = \sigma(s_2)$ 可推出 $z(s_1) = z(s_2)$。因此，对于 $t = \sigma(s) \in [0,$ 公式 $\tilde{z}(t) := z(s)$；$T]$ 正确定义了一个映射$\tilde{z}$：$[0;\ T] \to B_{\rho_0}(0)$，该映射由于（11）满足 Lipschitz条件，其常数为 $\frac{4}{c_0}$：

$$|\tilde{z}(t_2) - \tilde{z}(t_1)| \leq 2\left|\exp^{-1}\left(\tilde{\gamma}(t_1)^{-1}\tilde{\gamma}(t_2)\right)\right| \leq \frac{4}{c_0}(t_2 - t_1) \qquad (0 \leq t_1 < t_2 \leq T),$$

其中 $\tilde{\gamma}(t) := \exp(\tilde{z}(t))$ 是曲线 $\gamma$ 的 Lipschitz重参数化，并保持其 $\tau$-长度：$L_\tau(\tilde{\gamma}) = L_\tau(\gamma)$。

在区间 $[0;\ T]$ 上，考虑非递减函数 $F(t) := L_\tau(\tilde{\gamma}|_{[0;t]})$。由引理4.2 以及引理9中的第二个不等式（引理4.6），对于任意 $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$，有：

$$0 \leq F(t_2) - F(t_1) = L_\tau(\tilde{\gamma}|_{[t_1;t_2]}) \leq \tau(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\gamma}(t_2)) \leq \frac{2\tau(e,q)}{r}\left|\exp^{-1}\left(\tilde{\gamma}(t_1)^{-1}\tilde{\gamma}(t_2)\right)\right| \leq \frac{4\tau(e,q)}{c_0 r}(t_2 - t_1).$$

这意味着函数 $F$ 在 $[0$ 上是 Lipschitz 的；$T]$ 因而绝对连续：$L_\tau(\gamma) = F(T) = \int_0^T F'(t)\, dt$。根据 Rademacher定理，映射 $\tilde{z}$（以及曲线 $\tilde{\gamma}$）和函数 $F$ 几乎处处可微；$T]$。固定一个导数 $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ 和 $F'(t)$ 存在的点 $t \in (0;\ T)$，并记 $u(t) := (dl_{\tilde{\gamma}(t)})_e^{-1}\left(\dot{\tilde{\gamma}}(t)\right) \in L$。根据导数的定义，有：

$$v_k := 2^k \exp^{-1}\left(\tilde{\gamma}(t)^{-1}\tilde{\gamma}(t + 2^{-k})\right) \to u(t) \qquad \text{as } k \to \infty.$$

由于曲线 $\tilde{\gamma}$ 是 $\tau$-可容许的，对于所有充分大的 $k$，条件 $\tau(e,$ 指数映射$(2^{-k}v_k)) = \tau(\tilde{\gamma}(t)\ \tilde{\gamma}(t + 2^{-k})) \geq 0$ 均得到满足。固定任意充分大的指标 $m \geq 1$（使得$|u(t)| < \lambda^{2m}$），从而 $\frac{v_k}{2^m} \in V$ 对所有足够大的 $k$ 都成立）；于是对于 $k \geq m$，由反三角不等式可得

$$2^m \tau\left(e, \exp\left(\frac{v_k}{2^m}\right)\right) \geq 2^k \tau\left(e, \exp\left(\frac{v_k}{2^k}\right)\right) = 2^k \tau(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}(t + 2^{-k})) \geq \frac{F(t + 2^{-k}) - F(t)}{2^{-k}} \geq 0.$$

将这个不等式链取 $k \to \infty$ 时的上极限，并利用 $\tau$ 在 $U \times U \subset U_0 \times U_0$ 上的上半连续性，我们得到

$$2^m \tau\left(e, \exp\left(\frac{u(t)}{2^m}\right)\right) \geq F'(t) \geq 0$$

对所有充分大的 $m \geq 1$。由引理 4.5，这意味着 $u(t) \in C_0^+$，并令 $m \to \infty$ 趋于极限，得到 $\nu_0(u(t)) \geq F'(t)$。因此，曲线 $\tilde{\gamma}$（经过参数的线性变换$t = Ts,\ s \in [0;\ 1]$）属于 $\Omega_{C^+}(e,\ h)$，并且

$$L_\tau(\gamma) = F(T) = \int_0^T F'(t)\, dt \leq \int_0^T \nu_0(u(t))\, dt = \ell(\tilde{\gamma}).$$

因此，对所有 $g, h \in G$，$\tau(g,h) \leq \tau_c(g,h)$。

现在我们证明对所有 $g, h \in G$，反向不等式 $\tau_c(g,h) \leq \tau(g,h)$。若 $\Omega_{C^+}(g,h) = \varnothing$，则根据定义，$\tau_c(g,h) = -\infty \leq \tau(g,h)$。令 $\Omega_{C^+}(g,h) \neq \varnothing$。注意，对于任意具有可积左不变速度 $v(s)$ 的绝对连续曲线 $\gamma \in \Omega_{C^+}(g,h) := (dl_{\gamma(s)})_e^{-1}(\dot{\gamma}(s)) \in L^1([0;\ 1];\ L)$，单调绝对连续参数变换

$$t(s) := \frac{1}{S}\int_0^s \left(1 + |v(\zeta)|\right) d\zeta, \qquad \text{where } S := \int_0^1 \left(1 + |v(\zeta)|\right) d\zeta \geq 1,$$

将 $\gamma$ 变为 Lipschitz曲线 $X(t) := \gamma(s(t)) \in \Omega_{C^+}(g,h)$，其具有有界的左不变速度 $|u(t)| = \frac{S|v(s(t))(\dot{s}(t))|}{1+|v(s(t))|} \leq S$，几乎处处满足 $t \in [0;\ 1]$ 并且具有相同的子洛伦兹长度 $\ell(X) = \ell(\gamma)$。因此，只需考虑任意连接 $X(0) = g$ 与 $X(1) = h$ 的 Lipschitz $C^+$-可容许曲线 $X \in \Omega_{C^+}(g,h)$，并证明该曲线 $X$ 是 $\tau$-可容许的，且满足不等式 $\ell(X) \leq L_\tau(X) \leq \tau(g,h)$。

由于曲线 $X$ 在区间 $[0;1]$，上具有连续性；$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = 1$ 我们选取一个足够细的划分，使得对于每个 $j = 1$，……，$N$ 以及所有 $t \in [a_{j-1};\ a_j]$ 包含关系 $X(a_{j-1})^{-1}X(t) \in B^G_{\rho_0}(e) \subset B^G_{\frac{r}{2}}(e)$ 成立。如果我们证明每个弧段 $X_j(t) := X(a_{j-1})^{-1}X(t)\ (t \in [a_{j-1};\ a_j])$ 都是 $\tau$- 可容许的，并满足估计 $\ell(X_j) \leq L_\tau(X_j)$，那么由于 $\tau$ 的左不变性和反三角不等式，整条曲线 $X$ 也将是 $\tau$-可容许的（即，$X \in \Omega_\tau(g,h)$ 且 $\tau(g,h) \geq 0$），并且根据泛函 $\ell$ 和 $L_\tau$ 的可加性（引理4.2），以下关系将成立：

$$\ell(X) = \sum_{j=1}^{N} \ell(X_j) \leq \sum_{j=1}^{N} L_\tau(X_j) = L_\tau(X) \leq \tau(g,h),$$

因此，在对所有 $X \in \Omega_{C^+}(g,h)$ 取上确界后，所需的不等式 $\tau_c(g,h) \leq \tau(g,h)$ 即可得到。

因此，如有必要，在区间 $[0;1]$，上进行参数的线性变换；我们可以不失一般性地假设 $g = e$，且整个 Lipschitz $C^+$-可容许曲线 $X: [0;1] \to B^G_{\frac{r}{2}}(e)$ 从 $X(0) = e$ 出发，并完全位于球 $B^G_{\frac{r}{2}}(e)$ 内。记 $u(t) := (dl_{X(t)})_e^{-1}\big(\dot{X}(t)\big) \in C_0^+\ (t \in [0;1])$ 为曲线 $X$ 的可测本质有界控制：存在一个常数 $K > 0$，使得对几乎所有 $t \in [0;1]$ 都有 $|u(t)| \leq K$。令 $z(t) :=$ 指数映射$^{-1}(X(t)) \in B_{\frac{r}{2}}(0)\ (z(0) = 0)$。在指数坐标中，曲线 $z(t)$ 满足微分方程

$$\dot{z}(t) = \Psi(z(t))u(t) \qquad \text{for a.e. } t \in [0;1], \tag{12}$$

其中，$\Psi(z) := (d\exp_z)^{-1} \circ (dl_{\exp(z)})_e : L \to L$ 是关于$z \in B_r(0)$的线性算子的光滑族，且 $\Psi(0) = \mathrm{id}_L$。由球 $B_r(0)$的紧性可知，存在常数 $M_1$，$M_2 > 0$，使得对所有 $z$，$w \in B_r(0)$，以下算子范数估计成立：

$$\|\Psi(z)\| \leq M_1, \qquad \|\Psi(z) - \Psi(w)\| \leq M_2|z - w|. \tag{13}$$

为证明对任意 $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ 都有 $\tau(X(t_1)\ X(t_2)) \geq \int_{t_1}^{t_2} \nu_0(u(s))\, ds \geq 0$（这立即意味着曲线 $X$ 的 $\tau$-可容许性，以及在小弧段上成立的估计 $L_\tau(X) \geq \tau(e,\ X(1)) \geq \ell(X)$），只需考虑整个区间 $[0;\ 1]$（任意子区间 $[t_1;\ t_2]$ 的情形可通过左移 $X(t_1)^{-1}$化归为 $[0;\ 1]$。）

对于每个自然数 $m \geq 1$，我们将区间 $[0;\ 1]$ 按点 $t_i := \frac{i}{m}$（$i = 0$，1，……，$m$）划分为 $m$ 个长度为 $\Delta t := \frac{1}{m}$ 的等分区间，并定义控制在每个线段上的平均值：

$$u_{m,i} := \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{i-1}}^{t_i} u(s)\, ds \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

由于锥 $C_0^+$是凸且闭的，并且 $|u(s)| \leq K$ 几乎处处成立，我们有 $u_{m,\ i} \in C_0^+$以及 $|u_{m,\ i}| \leq K$。下面证明，对于每个区间 $[t_{i-1}$上的函数 $\nu_0$；$t_i]$ 积分詹森不等式成立：

$$\Delta t\, \nu_0(u_{m,i}) \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \nu_0(u(s))\, ds. \tag{14}$$

取一个向量 $u_0 \in \mathrm{int}_{L_0}(C_0^+)$。对于任意充分小的 $\delta > 0$ 和任意 $w \in C_0^+$，向量 $w + \delta u_0$ 属于子空间 $L_0 = C_0^+ - C_0^+$ 中锥 $C_0^+$ 的相对内部 $\mathrm{int}_{L_0}(C_0^+)$。在

特别地，点 $v_\delta := u_{m,i} + \delta u_0$ 属于 $\mathrm{int}_{L_0}(C_0^+)$。由于函数 $\nu_0$ 在 $C_0^+$ 上是凹且有限的，在点 $v_\delta \in \mathrm{int}_{L_0}(C_0^+)$ 处它有一个支撑线性泛函（[12] 定理 23.4） $\phi_\delta$： $L_0 \to \mathbb{R}$，满足

$$\nu_0(y) \le \nu_0(v_\delta) + \langle \phi_\delta, y - v_\delta \rangle \qquad \forall y \in C_0^+.$$

将 $y = u(s) + \delta u_0 \in C_0^+$代入其中，并注意到 $\nu_0(u(s) + \delta u_0) \ge \nu_0(u(s)) + \delta\nu_0(u_0) \ge \nu_0(u(s))$，我们得到

$$\nu_0(u(s)) \le \nu_0(u_{m,i} + \delta u_0) + \langle \phi_\delta, u(s) - u_{m,i} \rangle \qquad \text{for a.e. } s \in [t_{i-1}; t_i].$$

在 $s \in [t_{i-1}; t_i]$ 上对该不等式积分，并注意到 $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle \phi_\delta, u(s) - u_{m,i} \rangle \, ds = 0$ 根据均值的定义 $u_{m,i}$，可得

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \nu_0(u(s))\, ds \le \Delta t\, \nu_0(u_{m,i} + \delta u_0).$$

令 $\delta \to 0^+$ 趋于上极限，并利用函数 $\nu_0$在 $C_0^+$上的上半连续性，我们得到不等式（14）。

现在构造一条分段指数折线 $X_m$： $[0; 1] \to G$，令 $X_m(0) := e$ 并且

$$X_m(t) := X_m(t_{i-1}) \exp\big((t - t_{i-1}) u_{m,i}\big) \qquad \text{for } t \in [t_{i-1}; t_i], \quad i = 1, \dots, m.$$

我们来证明，对于所有充分大的 $m$，曲线 $X_m([0; 1])$ 完全包含在球 $B_r^G(e)$ 内，并且其端点 $X_m(1)$ 在 $m \to \infty$趋于 $X(1)$。令 $[0; t_m^*] \subset [0; 1]$ 为 $X_m(t) \in B_r^G(e)$ 所在的最大区间，并令 $z_m(t) := $ 指数映射$^{-1}(X_m(t)) \in B_r(0)$，其中$t \in [0; t_m^*]$。在每个线段 $t \in [t_{i-1}; t_i] \cap [0; t_m^*]$ 上，曲线 $X_m(t)$ 的左不变速度为$u_m(t) := u_{m,i}$，因此 $z_m(t)$ 满足方程 $\dot z_m(t) = \Psi(z_m(t))u_m(t)$。将此式与（12）相减，并从 0 积分到 $t \in [t_{k-1}; t_k] \cap [0; t_m^*]$，得到：

$$\begin{aligned} z(t) - z_m(t) &= \int_0^t \big(\Psi(z(s)) - \Psi(z_m(s))\big)u(s)\, ds + \int_0^t \Psi(z_m(s))\big(u(s) - u_m(s)\big)\, ds = \\ &= \int_0^t \big(\Psi(z(s)) - \Psi(z_m(s))\big)u(s)\, ds + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(\Psi(z_m(s)) - \Psi(z_m(t_{i-1}))\big)\big(u(s) - u_{m,i}\big)\, ds + \\ &\quad + \int_{t_{k-1}}^t \Psi(z_m(s))\big(u(s) - u_{m,k}\big)\, ds, \end{aligned}$$

因为 $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Psi(z_m(t_{i-1}))(u(s) - u_{m,i})\, ds = 0$。根据估计 (13) 和 $|\dot z_m(s)| \le M_1 K$，对 $s \in [t_{i-1}; t_i] \cap [0; t_m^*]$，我们有 $|z_m(s) - z_m(t_{i-1})| \le M_1 K \Delta t = \frac{M_1 K}{m}$，由此得到 $\|\Psi(z_m(s)) - \Psi(z_m(t_{i-1}))\| \le \frac{M_1 M_2 K}{m}$。因此，

$$|z(t) - z_m(t)| \le M_2 K \int_0^t |z(s) - z_m(s)|\, ds + \frac{2M_1 M_2 K^2}{m} + \frac{2M_1 K}{m}.$$

根据 Gronwall 引理，对所有 $t \in [0; t_m^*]$，该估计成立

$$|z(t) - z_m(t)| \le \frac{2M_1 K(M_2 K + 1)}{m} e^{M_2 K} \to 0 \qquad \text{as } m \to \infty.$$

由于 $|z\ t\ | \le \frac{r}{2}$ $m$ $\frac{r}{4}$ $|z_m\ t\ | \le$ ( ) , $|z\ t\ | + |z\ t\ - z_m\ t\ | \le \frac{3}{4} r < r$ $[0\ t_m^*]$ $[0\ t_m^*]$ 当足够大时，右侧小于 ，因此在 ; 上有 ( ) ( ) ( ) ( ) 。由区间 ; 的极大性可知 $t_m^* = 1$，即对于所有 $t \in [0; 1]$, , $|z_m(t)| < r$ ，并且 $X_m(1) = \exp(z_m(1)) \to \exp(z(1)) = X(1)$ 当 $m \to \infty$ 时。

最后，我们从下方估计 $\tau(e, X_m(1))$。根据引理 4.5，对于每个向量 $u_{m,\,i} \in C_0^+$我们有 $\tau(e,\ \exp(\Delta t\, u_{m,\,i})) \ \geq\ \Delta t\, \nu_0(u_{m,\,i})$。应用反三角不等式、 $\tau$的左不变性以及 Jensen不等式（14），我们得到:

$$\begin{aligned}\tau(e, X_m(1)) &\geq \sum_{i=1}^{m} \tau\big(X_m(t_{i-1}), X_m(t_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \tau\big(e, \exp(\Delta t\, u_{m,i})\big) \\ &\geq \sum_{i=1}^{m} \Delta t\, \nu_0(u_{m,i}) \\ &\geq \int_0^1 \nu_0(u(s))\, ds = \ell(X).\end{aligned}$$

在不等式 $\tau(e, X_m(1)) \geq \ell(X)$ 中令 $m \to \infty$ 趋于上极限，并利用 $\tau$ 在 $U \times U \subset U_0 \times U_0$ 上的上半连续性，可得 $\tau(e, X(1)) \geq \ell(X) \geq 0$。对曲线 $X$ 在任意子区间 $[t_1;\ t_2] \subset [0;\, 1]$, 上的限制应用同样的论证，我们便可确保 $\tau(X(t_1)\ X(t_2)) \geq \ell(X|_{[t_1;t_2]}) \geq 0$，也就是说， $X$ 是一条 $\tau$-可容许曲线，并且对于任意划分$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_p = 1$，我们有

$$\sum_{k=1}^{p} \tau\big(X(s_{k-1}), X(s_k)\big) \geq \sum_{k=1}^{p} \ell\big(X|_{[s_{k-1};s_k]}\big) = \ell(X).$$

对区间 $[0;\ 1]$, 的所有划分取下确界，可得 $L_\tau(X) \geq \ell(X)$，从而$\tau(g, h) \geq \tau_c(g, h)$。因此，对于所有 $g, h \in G$，都有 $\tau(g, h) = \tau_c(g, h)$。

现在证明这一对（$C_0^+$，$\nu_0$）的唯一性。设（$C_0^+$，$\widetilde{\nu}_0$）是定义在 $G$ 上的另一个左不变子洛伦兹结构对，其生成的计时函数 $\widetilde{\tau}_c$ 与$\widetilde{\ }$一致 $\tau$。对于任意 $u \in C_0^+$ 和任意 $t > 0$，曲线 $\gamma_t$ (s)：＝指数映射(stu) ($s \in [0;\ \ 1]$) 属于 Ω$\tilde{c}$+(e，指数映射(tu))，因此

$$\tau(e, \exp(tu)) = \widetilde{\tau}_c(e, \exp(tu)) \geq \int_0^1 \widetilde{\nu}_0(tu)\, ds = t\, \widetilde{\nu}_0(u) \geq 0.$$

根据引理 4.5，这意味着 $u \in C_0^+$和 $\nu_0(u)$ ＝极限$_{t\to 0^+}$ $^{\tau}$ (e, ~~指数映射(tu)~~ $_t$ $\geq \widetilde{\nu}_0(u)$。因此，$\widetilde{C}_0^+ \subset C_0^{+\widetilde{\ }}$以及 $\widetilde{\nu}_0 \leq \nu_0$ 在 $C_0^+$ 上。

反之，设 $u \in C_0^+ \setminus \{0\}$。由引理 4.1，对于所有充分大的自然数$m$，对点 $g_m$:＝指数映射$\left(\frac{u}{m}\right)$ 包含关系 $J(e, g_m) \subset B_{\rho_0}^G(e)$ 成立；由引理 4.5，我们有 $\widetilde{\tau}_c(e, g_m) = \tau(e, g_m) \geq \frac{1}{m}\nu_0(u) \geq 0$。我们选择一条曲线 $X_m \in \Omega\,\tilde{c}$+(e, $g_m$)，其速度为 $\tilde{u}_m(s)$ :=(d$l_{X_m}$( $^{-}$ −)) $^{s}$ $\frac{1}{m^2}\big(\dot{X}_m(s)\big) \in C_0^+ \subset \overline{C_0^+}$，满足 $\int_0^1 \widetilde{\nu}_0(\tilde{u}_m(s))\, ds \geq \frac{1}{m}\nu_0(u)$。由于 ( )，该曲线是 -可容许的，并且根据上文已证明的结论，它是 -可容许的，因此 $X_m([0;\ 1]) \subset J(e, g_m) \subset B_{\rho_0}^G(e)$。令 $z_m(s)$ :＝指数映射$^{-1}(X_m(s))$ ($z_m(0) = 0$, $z_m(1) = \frac{u}{m}$)，由估计式 (11) 和 (13) 可得 $|z_m(s)| \leq \frac{4}{c_0}\langle \xi, z_m(1)\rangle \leq \frac{4|u|}{c_0 m}$ 以及$\|\Psi(z_m(s)) - \mathrm{id}_L\| \leq \frac{4M_2|u|}{c_0 m} \leq c_0$（对于较大的 $m$）。然后根据引理 4.3 的第 1 步，由方程 $\dot{z}_m(s) = \Psi(z_m(s))\tilde{u}_m(s)$ 可知 $\langle \xi, \dot{z}_m(s)\rangle \geq 2c_0|\tilde{u}_m(s)| - c_0|\tilde{u}_m(s)| = c_0|\tilde{u}_m(s)|$，并且在 $s \in [0$ 上积分；$1]$ 得到 $\int_0^1 |\tilde{u}_m(s)|\, ds \leq \frac{1}{c_0}\langle \xi, z_m(1)\rangle \leq \frac{|u|}{c_0 m}$。因此，对于向量 $v_m := m\int_0^1 \tilde{u}_m(s)\, ds \in \widetilde{C}_0^+$，我们有

$$|u - v_m| = m\left|\int_0^1 \big(\Psi(z_m(s)) - \mathrm{id}_L\big)\tilde{u}_m(s)\, ds\right| \leq m \cdot \frac{4M_2|u|}{c_0 m} \cdot \frac{|u|}{c_0 m} = \frac{4M_2|u|^2}{c_0^2 m} \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

~ ~由于锥 $C_0^+$的闭性，我们得到 $u = 极限_{m\to\infty} v_m \in C_0^+$，并且由 Jensen不等式（14）以及 $\widetilde{\nu}_0$ 的上半连续性，我们得到

$$\widetilde{\nu}_0(u) \geq \varlimsup_{m\to\infty} \widetilde{\nu}_0(v_m) \geq \varlimsup_{m\to\infty} m \int_0^1 \widetilde{\nu}_0(\tilde{u}_m(s))\, ds \geq \nu_0(u).$$

~因此， $C_0^+ = C_0^+$和 $\widetilde{\nu}_0 = \nu_0$。定理得证。 □

# 5 直接定理

**定义 2**（时序性条件）。 我们称锥 $C_0^+ \subset L$ 满足时序性条件，是指对于单位元 $e \in G$ 的任意邻域 $U$，都存在单位元 $e$ 的一个邻域$V \subset U$，使得每条 $C^+$-可容许曲线 $\gamma:\ [0;\ 1] \to G$ 其端点为$\gamma(0)$ $\gamma(1)$ $\in V$，都完全包含于 $U$中：

$$\gamma(0), \gamma(1) \in V \implies \gamma([0;1]) \subset U$$

（换言之， $J_{C^+}(V, V)$ $\subset U$），其中

$$J_{C^+}(A,B) := \big\{x \in G : \exists p \in A,\, q \in B \ such\ that\ \Omega_{C^+}(p,x) \neq \varnothing,\ \Omega_{C^+}(x,q) \neq \varnothing\big\}.$$

**定理5.1**。 设 $(G, C_0^+, \nu_0)$ 是连通有限维李群 $G$ 上的左不变子洛伦兹结构，其李代数为 $L$，即，$C_0^+ \subset L$ 是一个非平凡的凸闭~尖锥，其线性张成 $L_0 = C_0^+ - C_0^+$ 生成整个李代数 $L$ ( $L_0 = L$)，且 $\nu_0:\ L \to [0;\ +\infty)\ \cup \{-\infty\}$ 是锥 $C_0^+$($\nu_0|_{C_0^+} \not\equiv 0$)上的反范数。假设锥$C_0^+$满足时序性条件。则由该结构生成的子洛伦兹计时函数

$$\tau_c(g,h) := \sup_{\gamma \in \Omega_{C^+}(g,h)} \int_0^1 \nu_0\big(\theta(\dot{\gamma}(s))\big)\, ds \qquad (\sup \varnothing := -\infty)$$

满足性质1–6。

定理 *5.1*的证明。 **初步局部估计**。 由于 $C_0^+ \subset L$ 是一个非平凡凸闭尖锥，完全如引理4.3的步骤 1 所示，根据 Hahn–Banach分离定理，存在一个单位向量 $\xi \in L$ ($|\xi| = 1$) 和一个常数 $c_0 \in \big(0;\ \frac{1}{2}\big)$ 使得

$$\langle \xi, u\rangle \geq 2c_0|u| \qquad \forall u \in C_0^+. \tag{15}$$

此外，由于函数 $\nu_0$ 在紧集 $C_0^+ \cap \partial B_1$(0) 上上半连续且有限，因此它在该集合上达到其上确界 $M_\nu$:= max $_{u\in C_0^+,\ |u|=1}$ $\nu_0$($u$) $\in$(0; $+\infty$)。根据

由 $\nu_0$ 在 $C_0^+$ 上的正齐次性和非负性，可得估计

$$0 \leq \nu_0(u) \leq M_\nu|u| \qquad \forall u \in C_0^+. \tag{16}$$

选取一个足够小的半径 $r_0 \in$ (0; $r$] ，使得在指数坐标 $z$ = exp$^{-1}$($x$) $\in B_{r_0}$(0) 中，对于由方程 (12) 定义、常数为 $M_1, M_2 > 0$ （见 (13)）的算子 $\Psi(z)$ = ($d$exp$_z$)$^{-1}$ $\circ$ ($dl_{\exp(z)}$)$_e$ ，不等式 $\|\Psi(z) - \mathrm{id}_L\| \leq M_2 r_0 \leq c_0$ 对所有 $z \in B_{r_0}$(0) 均成立。于是，对于任意 $C^+$-可容许曲线 $\gamma$: [0; 1] $\to B_{r_0}^G(e)$，其控制为 $u(s) := \theta(\dot{\gamma}(s)) \in C_0^+$，其坐标表示 $z(s) :=$ exp$^{-1}$($\gamma(s)$) $\in B_{r_0}$(0) 满足方程 $\dot{z}(s) = \Psi(z(s))u(s)$。因此，由 (15) 可知，对几乎所有 $s \in [0;1]$ ，有：

$$\langle \xi, \dot{z}(s)\rangle = \langle \xi, u(s)\rangle + \big\langle \xi, \big(\Psi(z(s)) - \mathrm{id}_L\big)u(s)\big\rangle \geq 2c_0|u(s)| - c_0|u(s)| = c_0|u(s)|.$$

对该不等式在区间 $[0,1]$ 上积分，并考虑到 (16)，我们得到先验估计：

$$\int_0^1 |u(s)|\,ds \le \frac{1}{c_0}\langle \xi, z(1)-z(0)\rangle \le \frac{1}{c_0}|z(1)-z(0)|, \qquad \ell(\gamma) \le \frac{M_\nu}{c_0}|z(1)-z(0)|. \tag{17}$$

根据单位元 $e$ 的邻域 $B^G_{r_0}(e)$ 所满足的时序性条件，存在单位元 $e$ 的开邻域 $V_* \subset B^G_{r_0}(e)$，使得任何端点位于 $V_*$ 中的 $C^+$-可容许曲线都完全包含在 $B^G_{r_0}(e)$ 中。选取单位元 $e$ 的一个开邻域 $U_0 \subset V_*$，使得 $U_0^{-1}U_0 \subset V_*$。

L让我们依次验证函数 $\tau_c$满足性质 1–6。

**性质 1 和 3（左不变性和反三角不等式）**。对于任意$a,\ g,\ h \in G$，左平移 $\gamma \mapsto l_a \circ \gamma$ 在集合 $\Omega_{C^+}(g,\ h)$ 和 $\Omega_{C^+}(ag,\ ah)$ 之间建立了一个双射，并保持左不变速度 $\theta(\dot\gamma(s))$ 不变，因此也保持长度泛函 $\ell(\gamma)$ 不变。取上确界可得 $\tau_c(ag,\ ah) = \tau_c(g,\ h)$（性质 1）。

设 $\tau_c(g_1,g_2) \ge 0$ 且 $\tau_c(g_2,g_3) \ge 0$，则集合 $\Omega_{C^+}(g_1,g_2)$ 和 $\Omega_{C^+}(g_2,g_3)$ 非空。对于任意曲线 $\gamma_1 \in \Omega_{C^+}(g_1,g_2)$ 和 $\gamma_2 \in \Omega_{C^+}(g_2,g_3)$，其拼接 $\gamma(s)$，当 $s \in [0$ 时等于 $\gamma_1(2s)$；当 $s \in [1/2$ 时等于 $1/2]$ 且 $\gamma_2(2s-1)$；$1]$, 属于 $\Omega_{C^+}(g_1,g_3)$，并满足等式 $\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) \le \tau_c(g_1,$ $g_3)$。对所有 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 取上确界，可得 $\tau_c(g_1,g_3) \ge \tau_c(g_1,g_2) + \tau_c(g_2,g_3)$（性质 3）。

性质 2（自反性和反对称性）。常值曲线 $\gamma_0(s) \equiv e$ 属于 $\Omega_{C^+}(e,e)$，且长度为 $\ell(\gamma_0) = 0$，因此 $\tau_c(e,e)$ $\ge 0$。反过来，对于任意曲线 $\gamma \in \Omega_{C^+}(e,e)$，我们有 $\gamma(0) = \gamma(1) = e \in V_*$；由时序性条件可知，整个像集 $\gamma([0;1])$ 包含于 $B^G_{r_0}(e)$。接着，由关于 $z(0) = z(1) = 0$ 的估计（17）可得 $\int_0^1 |u(s)|\,ds = 0$，也就是说，$u(s)$ $= 0$ 几乎处处成立，$\gamma(s) \equiv e$ 且 $\ell(\gamma) = 0$。这意味着对于所有 $g \in G$，都有 $\tau_c(g,g) = \tau_c(e,e) = 0$。

若 $g \ne h$, $\tau_c(g,h) \ge 0$ 且（反证）$\tau_c(h,g) \ge 0$，则存在曲线$\gamma_1 \in \Omega_{C^+}(e,g^{-1}h)$ 和 $\gamma_2 \in \Omega_{C^+}(g^{-1}h,e)$。它们的拼接 $\gamma$属于 $\Omega_{C^+}(e,e)$，但经过点 $\gamma(1/2) = g^{-1}h \ne e$，这与前面证明的对所有 $\gamma \in \Omega_{C^+}(e,e)$ 都成立的恒等式 $\gamma(s) \equiv e$ 相矛盾。因此，$\tau_c(h,g) = -\infty$。

**性质4（局部上半连续性）**。我们来证明，对于所选的邻域 $U_0$和任意 $c \ge 0$，集合 $E_c := \{(g,\ h) \in U_0 \times U_0 :\ \tau_c(g,\ h) \ge c\}$ 在 $U_0 \times U_0$中是闭的。设序列 $(g_n,\ h_n) \in E_c$ 收敛到 $(g,\ h)$ $\in U_0 \times U_0$。令 $x_n := g_n^{-1}h_n \in V_*$ 且 $x := g^{-1}h \in V_*$；则 $x_n \to x$ 且 $\tau_c(e,\ x_n) = \tau_c(g_n,\ h_n) \ge c$。

对于每个 $n \ge 1$，我们选择一条曲线 $\gamma_n \in \Omega_{C^+}(e,x_n)$，使得 $\ell(\gamma_n) \ge c - \frac{1}{n}$（注意，根据 (17)，$\tau_c(e,x_n) \le \frac{M_\nu r_0}{c_0} < +\infty$）。由于 $\gamma_n(0) = e \in V_*$ 且 $\gamma_n(1) = x_n \in V_*$，根据 $V_*$ 的选择，我们有 $\gamma_n([0;\ 1]) \subset B^G_{r_0}(e)$；由控制 $u_n(s) := \theta(\dot\gamma_n(s))$ 的估计 (17) 可得 $L_n := \int_0^1 |u_n(s)|\,ds \le \frac{r_0}{c_0}$。对 $[0;\ 1]$, 上的 $t(s) := \frac{1}{1+L_n}\int_0^s (1+|u_n(\zeta)|)\,d\zeta$ 进行单调参数变换后，我们得到一条曲线 $\tilde\gamma_n \in \Omega_{C^+}(e,$ $x_n)$, 其长度$\ell(\tilde\gamma_n) = \ell(\gamma_n) \ge c - \frac{1}{n}$保持不变，且其控制 $\tilde u_n(t) \in C_0^+$一致有界：

$$|\tilde u_n(t)| \le 1 + L_n \le 1 + \frac{r_0}{c_0} =: K_0 \qquad \text{for a.e. } t \in [0;1].$$

于是，坐标曲线 $\tilde z_n(t) :=$ 指数映射$^{-1}(\tilde\gamma_n(t)) \in B_{r_0}(0)$ 是等度连续的（$|\dot{\tilde z}_n(t)| \le M_1 K_0$几乎处处）。根据 Arzel`a–Ascoli 定理以及希尔伯特空间 $L^2([0;\ 1];L)$ 中球的弱紧性，取一个子序列后，我们可以假设 $\tilde z_n \to \tilde z$在 $[0$上一致收敛；$1]$,并且 $\tilde u_n \rightharpoonup \tilde u$ 在 $L^2([0;\ 1];L)$ 中弱收敛。当 $n \to \infty$趋于无穷时，在积分恒等式 $\tilde z_n(t) = \int_0^t \Psi(\tilde z_n(s))\tilde u_n(s)\,ds$中取极限，可得 $\tilde z(t) = \int_0^t \Psi$ $(\tilde z(s))\tilde u(s)\,ds$，其中 $\tilde z(0) = 0$，且 $\tilde z(1) =$$\lim_{n\to\infty} \tilde z_n(1) =$ 指数映射$^{-1}(x)$。

根据 Mazur引理，对于每个 $m \ge 1$，存在凸组合 $w_m = \sum_{k=m}^{N_m} \alpha_{m,\,k}\tilde u_k (\alpha_{m,\,k} \ge 0,$ $\sum_{k=m}^{N_m} \alpha_{m,\,k} = 1)$，它们在 $L^2([0;\ 1];L)$ 中强收敛于 $\tilde u$，并且经过抽取子列

后，在 $[0;1]$ 上逐点几乎处处成立。由于 $C_0^+$ 的凸性和闭性，我们有 $\tilde{u}(t) \in C_0^+$ 几乎处处成立，因此曲线 $\tilde{\gamma}(t) :=$ 指数映射$(\tilde{z}(t))$ 属于 $\Omega_{C^+}(e,\ x)$。由于函数 $\nu_0$ 在 $C_0^+$ 上是凹的且上半连续，并且 $\nu_0(w_m(t)) \le M_\nu K_0$，根据 Fatou引理可得：

$$\tau_c(g,h) = \tau_c(e,x) \ge \int_0^1 \nu_0(\tilde{u}(t))\,dt \ge \int_0^1 \overline{\lim_{m\to\infty}}\, \nu_0(w_m(t))\,dt \ge \overline{\lim_{m\to\infty}} \sum_{k=m}^{N_m} \alpha_{m,k}\ell(\tilde{\gamma}_k) \ge c.$$

因此，$(g,\ h) \in E_c$，这证明了性质4。

性质 5（与流形拓扑的一致性）。由左不变性，只需在点 $x = e$ 处验证性质 5。由于锥 $C_0^+$在其线性张成 $L_0 = C_0^+ - C_0^+$ 中具有非空的相对内部$\widetilde{\text{int}}_{L_0}(C_0^+)$，且由 $L_0$ 生成的李子代数 $L_0$ 与整个李代数 $L$重合，根据 Sussmann–Jurdjevic–Krener可达性定理，对于单位元 $e$ 的任意邻域 $W$，形如 $y = \exp(t_1v_1)\dots\exp(t_kv_k) \in W$ 的点集，其中 $v_i \in \text{int}_{L_0}(C_0^+),\ \ t_i > 0$，包含一个非空开子集 $W_0 \subset W$。由于对于$v_i \in \text{int}_{L_0}(C_0^+),\ \ \nu_0(v_i) > 0$，对每个点 $y \in W_0$，从 $e$到 $y$的分段指数曲线给出估计 $\tau_c(e,y) \ge \sum_{i=1}^k t_i\nu_0(v_i) > 0$。这意味着 $W_0 \subset \underline{\text{int } I^+(e)} \cap W$，因此 $e \in \text{int } I^+(e)$。由于映射 $y \mapsto y^{-1}$ 是微分同胚，且等式 $\tau_c(y^{-1},e) = \tau_c(e,y)$成立，类似地有 $e \in \text{int}\, I^-(e)$。

现在令 $U \subset G$ 为单位元 $e$的任意邻域。根据时序性条件，我们选取单位元 $e$ 的一个开邻域 $V \subset U$，使得 $J_{C^+}(V,V) \subset \underline{U}$。由于 $e \in \text{int } I^-(e)$ 且 $e \in \text{int } I^+(e)$，存在点 $p \in V \cap \text{int } I^-(e)$ 和 $q \in V \cap \text{int } I^+(e)$。由于映射 $y \mapsto y^{-1}p$ 和 $y \mapsto y^{-1}q$ 是将群 $G$ 映射到自身的同胚，分别将单位元 $e$ 平移到 $p$和 $q$，根据左不变性 $\tau_c(p,y) = \tau_c(y^{-1}p,e)$ 以及 $\tau_c(y,q) = \tau_c(e,y^{-1}q)$ 可知，条件 $p \in \text{int}\, I^-(e)$ 和 $q \in \text{int}\, I^+(e)$ 等价于包含关系 $e \in \text{int } I^+(p)$ 和 $e \in \text{int } I^-(q)$。因此

$$e \in \text{int}\, I^+(p) \cap \text{int}\, I^-(q) = \text{int}\, I(p,q) \subset I(p,q).$$

此外，对于任意点 $y \in I(p,q)$，我们有 $\tau_c(p,y) > 0$ 以及 $\tau_c(y,q) > 0$，即 $\Omega_{C^+}(p,y) \ne \varnothing$以及 $\Omega_{C^+}(y,q) \ne \varnothing$，由此得到 $y \in J_{C^+}(V,V) \subset U$。因此，$p$、$q \in V \subset U$以及 $e \in \text{int } I(p,q) \subset I(p,q) \subset U$。

性质6（内禀计时函数）。设 $g \ne h$ 以及 $\tau_c(g,h) \ge 0$，则 $\Omega_{C^+}(g,h) \ne \varnothing$。对于任意曲线 $\gamma \in \Omega_{C^+}(g,h)$ 以及任意 $0 \le s_1 < s_2 \le 1$，限制 $\gamma|_{[s_1}$；经过参数的线性变换后属于 $\Omega_{C^+}(\gamma(s_1)\ \gamma(s_2))$，因此 $\tau_c(\gamma(s_1)\ \gamma(s_2)) \ge \ell(\gamma|_{[s_1;s_2]}) \ge 0$。因此，$\gamma \in \Omega_{\tau_c}(g,h)$，即 $\Omega_{C^+}(g,h) \subset \Omega_{\tau_c}(g,h)$，且集合 $\Omega_{\tau_c}(g,h)$ 非空。此外，对于任意划分 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$，以下结论成立

$$\sum_{i=1}^m \tau_c\big(\gamma(s_{i-1}),\gamma(s_i)\big) \ge \sum_{i=1}^m \ell\big(\gamma|_{[s_{i-1};s_i]}\big) = \ell(\gamma),$$

因此，对所有划分取下确界后，我们得到 $L_{\tau_c}(\gamma) \ge \ell(\gamma)$，对所有 $\gamma \in \Omega_{C^+}(g,\ h)$均成立。同时，对于任意连续的 $\tau_c$-可容许曲线 $\tilde{\gamma} \in \Omega_{\tau_c}(g,\ h)$，将单步划分 $0 = s_0 < s_1 = 1$代入 $L_{\tau_c}(\tilde{\gamma})$的定义，可得 $L_{\tau_c}(\tilde{\gamma}) \le \tau_c(\tilde{\gamma}(0)\ \tilde{\gamma}(1)) = \tau_c(g,\ h)$。综合这两个估计，我们得到：

$$\tau_c(g,h) = \sup_{\gamma\in\Omega_{C^+}(g,h)} \ell(\gamma) \le \sup_{\gamma\in\Omega_{C^+}(g,h)} L_{\tau_c}(\gamma) \le \sup_{\tilde{\gamma}\in\Omega_{\tau_c}(g,h)} L_{\tau_c}(\tilde{\gamma}) \le \tau_c(g,h),$$

由此 $\tau_c(g,\ h) =$ 上确界 $L_{\tau_c}(\tilde{\gamma})$。$\tilde{\gamma}\in\Omega_{\tau_c}(g,\ h)$ □

# 6 结论

本文对连通有限维李群上的左不变内禀计时函数给出了完整刻画，这是 V. N. Berestovskii 关于左不变内禀 Carnot–Carath´eodory–Finsler 度量定理的子洛伦兹类比。本文建立了公理化给定的局部上半连续左不变内禀计时函数 $\tau$ 与由非平凡凸闭尖锥 $C_0^+ \subset L$ 及其上的凹上半连续反范数 $\nu_0$ 所定义的左不变子洛伦兹结构 $(G,\ C_0^+,\ \nu_0)$ 之间的一一对应关系。特别地，本文证明，计时函数与李群拓扑相容这一拓扑条件——根据该条件，时序菱形的内部 $\operatorname{int} I(p,\ q)$ 构成流形拓扑的基——蕴含 Chow–Rashevskii 条件（H¨ormander 条件）的成立：可容许方向锥的线性张成 $L_0 = C_0^+ - C_0^+$生成整个李代数 $L$ ($L_0 = L$)。此外，本文证明，引入的锥 $C_0^+$的时序性条件，是由左不变子洛伦兹结构 $(G,\ C_0^+,\ \nu_0)$ 生成的子洛伦兹距离泛函 $\tau_c$ 满足左不变内禀计时函数全部公理的充要条件。

# 致谢

作者对其科学导师 Lev Lokutsievskiy 致以深切感谢，感谢他提出这一问题、始终关注本项工作，并通过富有成效的讨论帮助改进了本文。本文中其余所有错误和不准确之处均由作者本人承担全部责任。

# 参考文献

[1] Berestovskii V. N. 具有内禀度量的齐性流形。I // 西伯利亚数学杂志. — 1988年. — 第29卷，第6期. — 第887–897页（俄文原版：*Sibirsk. Mat.Zh.*, 1988年, 第29卷，第6期, 第17–29页）。[2] Berestovskii V. N., Gichev V. M. 拓扑群上的度量化左不变序 //圣彼得堡数学杂志. — 2000. — 第11卷，第4期. — 第543–565页。[3] Berestovskii V. N., Zubareva I. A. 一般李群的子黎曼几何 // 俄罗斯数学综述. — 2020年. — 第75卷，第4期. — 第565–629页。[4] Grochowski M. 子洛伦兹几何中可达集的性质 // 几何与物理学杂志. — 2004. — 第 49 卷，第 3–4 期 . — 第 285–300 页。[5] Hilgert J., Hofmann K. H., Lawson J. D. 李群、凸锥与半群. — 牛津：克拉伦登出版社，1989年。[6] Kunzinger M., S¨amann C. 洛伦兹长度空间 // 全球分析与几何年刊. — 2018年. — 第54卷，第3期. — 第399–447页。[7] Sussmann H. J., Jurdjevic V. 非线性系统的可控性 // 微分方程杂志. — 1972年. — 第12卷，第1期. — 第95–116页。[8] Filippov A. F. 不连续右端的微分方程. — 多德雷赫特–波士顿–伦敦：克鲁维尔学术出版社，1988年。

[9]Minguzzi E. 闭锥结构的因果性理论及其应用 // 数学物理评论. — 2019年. — 第31卷, 第5期. — 1930001. — doi:10.1142/S0129055X19300012.[10] Lokutsievskiy L. V., Podobryaev A. V. 次洛伦兹问题的存在性定理 // 《动力学与控制系统杂志》. — 2024年. — 第30卷. — 第13页. — doi:10.1007/s10883-024-09694-0.[11] Burago D. Yu., Burago Yu.D., Ivanov S. V. 《度量几何学教程》. — 罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会，2001年. — （《数学研究生教材》；第33卷）。[12] Rockafellar R.T. 《凸分析》. — 新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1970年. — （《普林斯顿数学丛书》；第28卷）。[13] Berestovskii V. N., Zubareva I. A. $(2,\mathbb{C})$ 上以李代数中的厄米矩阵为生成空间的次洛伦兹测地线 $\mathfrak{gl}^{+}(2,\mathbb{C})$ // 《纯粹与应用泛函分析》 . — 2025 年 . — 第 10 卷，第 2 期 . — 第 211–238 页。[14] Sachkov Yu. L., Sachkova E. F. 海森堡群上的次洛伦兹距离与球面 // 《动力学与控制系统杂志》. — 2023年. — 第29卷. — 第1129–1159页。