arXiv:2611.31004v1 [cs.CC] 23 Nov 2026

将 Kolmogorov–Loveland 随机性与 Martin-Löf 随机性区分开来

ChenghuaLiu,Boning
MengRenormalizationGroup · r13n.group
通讯作者： renormalization@r13n.group

摘要

Martin-Löf 随机性要求无限二进制序列通过针对公平抛硬币的每一种有效统计检验。Kolmogorov–Loveland 随机性则要求每一种可计算下注策略的资本都有界，即使该策略会根据先前的答案来选择下一个要下注的未读比特。我们证明，Martin-Löf 随机性严格更强。我们通过对无穷多个互不相交的有限块施加奇偶方程，构造一个概率测度。这些方程组相对于其秩具有简短描述，因此支撑集中的每个序列都会未通过某个固定的 Martin-Löf 检验。按照此测度，几乎每个序列都是 Kolmogorov–Loveland 随机的。为证明这一点，我们从一个列表中选取每个块；在该列表中，每个位置只出现在很小一部分候选项中。对于每一种下注策略，经过不影响其成功性的归一化后，这种稀疏性保证：该策略在由方程和先前答案所确定的比特上下注的比例之和几乎必然有限。

1 引言

对于相互独立的公平抛硬币，大数强律指出，1的频率以概率 1 收敛到 $1/2$ 。Martin-Löf 随机性为单个二进制序列提供了一个条件，保证它遵循这条定律以及许多其他定律。Martin-Löf 随机序列必须通过每一个有效统计检验 [1]。此类检验的第 k 层是一个公平抛硬币测度至多为 2^{-k} 的集合；当且仅当一个序列属于该检验的每一层时，它才未能通过该检验。Martin-Löf 随机性是算法随机性理论中的一个标准概念，既用于研究从随机序列中可以计算出什么 [2] ，也用于识别满足遍历定理的单个序列 [3]。

在 Kolmogorov–Loveland 随机性中，可计算投注策略会根据已看到的比特，选择一个未读位置，并决定对该位置的取值押下多少赌注 [4]。它可以查看较后的比特而不下注，并利用得到的信息对较早的比特下注。如果每种此类策略在某个序列上的资本都有界，那么该序列就是 Kolmogorov–Loveland随机。这个概念曾被用于研究下注策略通过选择读取比特的顺序，能够获得多大的优势 [5]。

每个此类策略都会产生一个 Martin-Löf 检验，能够检测出其资本无界的每个序列，因此每个 Martin-Löf 随机序列都是 Kolmogorov–Loveland随机。已知从左到右读取的策略会遗漏某些 Martin-Löf 随机性失效的情形 [6]。选择行动顺序的自由是否能让可计算投注策略在任何给定的、未通过 Martin-Löf 检验的序列上取得成功（参见 [7, 问题 6。2]和 [10]）？

Merkle 等人 [8] 证明，只要一个 Kolmogorov–Loveland 随机序列被可计算地拆分为两个无限子序列，至少其中一个就是 Martin-Löf 随机。Petrović [9] 找到了公平抛硬币测度任意小的有效开集，其中每个开集都包含一个序列，使得

每种策略都保持在一个仅取决于该策略的界限内。该序列可能因集合而异。与 Petrović 的证明一样，我们使用关于有限多个比特的同余条件，并将这些条件施加于无限多个互不相交的块上。由此得到的测度支撑在未通过某个固定 Martin-Löf 检验的序列上，而在该测度下，几乎每个序列都是 Kolmogorov–Loveland 随机。这就得到了下述定理中的严格包含关系。

定理 1。 *Martin-Löf* 随机序列构成 *Kolmogorov–Loveland*随机序列的真子集。更确切地说，存在一个定义在无限二进制序列上的概率测度 ρ 以及一个 *Martin-Löf* 检验$(U_m)_{m\geq 1}$，使得

$$\operatorname{supp}(\rho) \subseteq \bigcap_{m\geq 1} U_m,$$ 并且 ρ-几乎每个序列都是 *Kolmogorov–Loveland*随机的。

关于提取Martin-Löf随机子序列的研究使用 Kolmogorov– Loveland 随机性作为假设 [8], , 而有效遍历定理使用了 Martin-Löf随机性 [3]。定理 1 表明，这些结果所依据的是不同的随机性假设，其中 Kolmogorov– Loveland 随机性施加的条件较弱。

对于 X 支撑集中的每个序列 ρ，每个检验层级 U_k 中的成员关系都可以由 X的有限前缀见证。一个奇偶方程说明了寻找这种见证与下注之间的差异。取三个在 $x_a + x_b + x_c = 0$ 条件下、关于 $\mathbb{F}_2$均匀的公平比特。一旦三个值都可用，检验就能检查该方程。知道这三个比特的下注者可以读取其中任意两个比特而不下注。它们的值彼此独立且公平，但能确定第三个比特，下注者可以据此将其资本翻倍。要以这种方式利用该方程，下注者必须在其中一个比特尚未读取时识别出这三个比特。

为构造 ρ，我们在无穷多个两两不相交的有限区块上，各自选取一个独立奇偶方程组的均匀解，并在其余每个位置独立地取一个公平比特。检验可以包含许多候选方程组，而无须识别实际选定的是哪一个。秩为r 的方程组的解集，其公平抛硬币测度为 2^{-r}。描述方程及其位置需要 2^d 个长度为 d 的程序。在这些程序描述的方程组中，秩至少为 r 的那些方程组，其解集的合并测度至多为 2^{d-r}。在层级 k，检验为每个 d 设定一个秩阈值，使这些界的总和至多为 2^{-k}。第5 节证明，每个选定的方程组都达到其秩阈值。根据第1节的（3），因此， ρ 支撑集中的每个序列都属于每一个 U_k。

下注策略可以在各个区块之间交错进行查询，并利用一个区块的回答来决定在另一个区块上的赌注。在每个区块内，只有当从未读取列矩阵中删去该列会降低秩时，方程和先前的回答才会唯一确定下一个被查询的比特。我们称这种情况为秩下降。在其他每次查询中，回答都是条件公平的。我们对每种策略进行规范化，在保持其成功性的同时，使其所下注的资金比例的平方和有界。对于公平查询，带符号收益的总和几乎必然收敛，并从上方界定这些查询所导致的资金对数累计变化。如果 a_ℓ 是在第 ℓ次秩下降时下注的比例，那么即使赢下所有这些赌注，资本的增长倍数也至多为$\prod_\ell(1 + a_\ell) \leq \exp(\sum_\ell a_\ell)$。因此，只需使 $\sum_\ell a_\ell$ 几乎必然为有限值 ρ。

在阶段 k，我们选择一个由 G 个位置组成的有限集，即池，并从中选出块 S，用于层级 U_k。在公平抛硬币答案下，前 k 个策略中，每个策略要么很可能读完 G，要么会留下固定比例的未读部分。在后一种情况下，对大多数候选对 $(S,\ B)$，矩阵 B 的未读列在整个过程中都保持满秩。读完 G 的策略必然会遇到秩下降。由于每个池中位置只出现在少数候选支撑集中，下注比例平方的界保证，在所有候选对上取平均时，押在 S 上的总比例很小。第5 节利用第4 节的估计，为所有 k个策略选出同一个候选对。第6节对所选块在 ρ下的贡献求和。

2 预备知识

令 $\mathbb{N}=\{0,1,.....\}$。用 $2^{<\mathbb{N}}$ 表示有限二进制串的集合，用 $2^{\mathbb{N}}$ 表示无限二进制序列空间。令 λ 为 $2^{\mathbb{N}}$上的公平抛硬币测度。柱集 $[v]$ 由所有以 $v\in 2^{<\mathbb{N}}$为前缀的序列组成。一个*Martin-Löf* 检验 是一列 $(U_m)_{m\geq 1}$ 一致有效开集，满足$\lambda(U_m)\leq 2^{-m}$。给定 m，有一个算法枚举柱集，其并集为 U_m。如果一个序列属于每个 U_m，则称它未通过该检验；如果它未通过任何此类检验，则称其为*Martin-Löf* 随机。

一个<|style id='1'>扫描规则是一个全可计算映射 $\pi:2^{<\mathbb{N}}\to\mathbb{N}$，它沿着每条前缀链选择不同位置。输入 X后，从空记录 $v_0=\epsilon$开始。经过 t 次查询后，下一个位置是 $\pi(v_t)$，其位是 $b_t=X(\pi(v_t))$，新的记录是 $v_{t+1}=v_tb_t$。一个可计算非单调投注策略由一个扫描规则 π 和一个一致可计算的非负资本函数 d 组成，并满足

$$d(\epsilon)=1,\qquad 2d(v)=d(v0)+d(v1).$$

当 $d(v)>0$时，将 $h(v)$记作带符号下注比例，因此答案 b 会将资本从 $d(v)$变为

$$d(vb)=d(v)\big(1+(2b-1)h(v)\big).$$

策略下注其当前资本的 $|h(v)|$ 这一比例，若 $(v)>0$，则押注 **1**；若$h(v)<0$，则押注 *0*。策略在 X 上成功，如果 $\sup_t d(v_t)=\infty$。如果没有任何可计算策略在一个序列上成功，则该序列是 *Kolmogorov–Loveland*随机。全文中，我们使用以全可计算投注策略表述的 Kolmogorov–Loveland 随机性的等价定义，见 [7, 定义 6 后的讨论。1]。

固定一个扫描规则 π和一个有限记录 $v=b_0\cdots b_{n-1}$。记 v_t为 v的长度为 t的前缀。数对 $(\pi(v_t)\ b_t)$、$t<n$给出了查询位置上的值的有限赋值 。在转录空间中，$[v]$ 是由扩展 v的记录构成的柱集。它在输入空间中的原像为

$$C_\pi(v)=\{X:X(\pi(v_t))=b_t\text{ for all }t<n\}.$$

设 κ 为输入服从分布 λ时记录的分布。由于查询的 $|v|$ 个位置彼此不同，

$$\kappa([v])=\lambda(C_\pi(v))=2^{-|v|}.$$

特别地，每个扫描规则在记录上都诱导相同的公平抛硬币分布 κ 。对于固定策略，其资本曾超过 2^m 的输入构成一个有效开集，且关于 m一致。根据鞅最大不等式，该集合的测度至多为 2^{-m}。这些集合构成一个 Martin-Löf 检验，覆盖所有该策略成功的输入。因此，每个 Martin-Löf 随机序列都是 Kolmogorov–Loveland随机。

3 仿射约束与随机性检验

在有限的位置集 $S\subset\mathbb{N}$ 上，考虑一个关于 $\mathbb{F}_2$ 的由 r 个相互独立的奇偶方程组成的系统 $Bx=y$。其中，$x\in\mathbb{F}_2^S$ 是对 S 中各位置的比特赋值，而 x_U 表示其在 $U\subseteq S$ 上的限制。B 的每一行给出一个方程，列由 S 编号，右端项 $y\in\mathbb{F}_2^r$ 称为 综合征。输入满足这一仿射约束的事件为

$$E(S,B,y)=\{X\in 2^{\mathbb{N}}:B(X|_S)=y\}.$$

在 S 上有 $2^{|S|-r}$ 个解，因此 $\lambda(E(S,\ B,\ y))=2^{-r}$。

秩下降与被迫答案。在以 $E(S,\ B,\ y)$ 为条件的 λ 下，S 上的赋值在 $Bx = y$ 的解中均匀分布。令 $U \subseteq S$ 表示 S 中的未读位置。在 $S \setminus U$ 上给定相容答案后，U 上的赋值在 $B_U x_U = z$ 的解中均匀分布，其中 B_U 由以 U 和 z 为索引的列组成，而 z 是减去已观测比特的贡献后的综合征。考虑在 $q \in U$ 处进行查询。用 c_q 表示其列，并令 $D = B_{U\setminus\{q\}}$。给出答案 b 的补全对应于 $Dx_{U\setminus\{q\}} = z - bc_q$ 的解。如果 c_q 属于 D 的列空间，则 $b = 0,\ 1$ 对应的系统具有相同数量的解，因此答案是一个公平比特。否则，$z,\ z - c_q$ 中恰有一个属于该列空间，答案也就被确定了。因此，当删除其列导致秩下降时，也就是当秩 $B_{U\setminus\{q\}} <$ 秩 B_U 时，约束和先前的答案恰好会迫使下一个比特取值。对于给定系统，该判据只取决于 U 和 q。

固定一条关于 π 的记录 v，并令 U 表示 S 中仍未读取的位置。在 λ 下，对 $C_\pi(v)$ 进行条件化会固定已查询的比特，并使未读比特保持相互独立且等概率。若 B_U 的秩为 r，则所有 2^r 综合征仍然等概率。因此，$\lambda(E(S,\ B,\ y) \mid C_\pi(v)) = 2^{-r} = \lambda(E(S,\ B,\ y))$。根据贝叶斯法则，

$$\lambda\big(C_\pi(v) \mid E(S,B,y)\big) = \frac{\lambda\big(E(S,B,y) \mid C_\pi(v)\big)\,\lambda(C_\pi(v))}{\lambda\big(E(S,B,y)\big)} = \lambda(C_\pi(v)).$$

我们将在秩首次下降前的那条记录处使用这个恒等式；此时未读列仍然是满秩的。

一种针对短描述约束的检验。固定一个普通二进制程序的通用解释器。在层级 $m \geq 1$，并行运行所有程序。若 p 输出一个秩为 $r \geq 2|p| + m + 1$ 的有效系统 $(S,\ B,\ y)$，则将 $E(S,\ B,\ y)$ 枚举到 U_m 中。有效性和秩可根据输出判定，而满足这些方程的 S 上的赋值构成有限柱集并。因此，集合 U_m 是一致有效开的。每个长度为 d 的被接受程序对测度的贡献至多为 $2^{-2d-m-1}$。对程序长度求和可得

$$\lambda(U_m) \leq \sum_{d\geq 0} 2^d\, 2^{-2d-m-1} = 2^{-m}.$$

对于任意这样一组系统 $(S_j、\ B_j、\ y_j)$，记作 $E_j = E(S_j、\ B_j、\ y_j)$，并记 $r_j =$ 秩为 B_j。假设对于每个 j 程序 p_j 都输出 $(S_j、\ B_j、\ y_j)$。那么

$$\big(\forall j \geq 1,\ r_j \geq 2|p_j| + j + 1\big) \quad\Longrightarrow\quad \bigcap_{j\geq 1} E_j \subseteq \bigcap_{m\geq 1} U_m. \tag{1}$$

事实上，秩界确保对于每个 j，检验都包含 E_j in U_j。

4 构造准备

第 3 节中，块约束的简短描述将确保每个满足这些约束的序列都未通过 Martin-Löf 检验。对于 Kolmogorov–Loveland 随机性，我们必须界定一种策略的资本，该策略既能选择查询位置，也能选择下注金额。第 4.1 节在保持成功的同时界定其下注比例平方之和。第 4.2 节提供了一个适应策略所查询位置的池，第 4.3 节则在该池中提供候选支撑集和矩阵。第 5 节利用这三个引理来选择每个块上的约束。

4.1 平方可和的下注比例

引理 2. 对于任意一个资本函数为 d的全可计算策略，都存在一个具有相同扫描规则的全可计算策略，使其能在原始策略成功的每个输入上都成功。

其资本为正有理数，初始值为1。其带符号下注比例 h 是一个可计算的有理值函数。沿着每一条无限记录，这些比例满足

$$\sum_{t\ge 0} h(v_t)^2 \le \tfrac{1}{2}. \tag{2}$$

证明。首先，我们将 d 替换为一个正有理值资本函数，它在d 无界之处同样无界。将一半初始资本留作储备金，并用另一半跟随 d ，得到 $c_*(v) = (1 + d(v))/2 \ge 1/2$。为在保持公平性的同时逼近 c_* ，令 $c(\epsilon) = 1$ ，并在每个记录v处计算一个有理数 $a(v)$，使其与增量 $c_*(v1) - c_*(v) = (d(v1) - d(v0))/4$的差距在 $2^{-|v|-3}$ 以内。令$c(v1) = c(v) + a(v)$以及 $c(v0) = c(v) - a(v)$，从而 c是公平的。沿每条有限记录，累积误差小于 $1/4$。因此 $c > 1/4$ 处处成立，且 c 在 d 无界之处同样无界。带符号下注比例为 $f(v) = a(v)/c(v)$，且由于两个后继资本均为正，故 $|f(v)| < 1$。

接下来，我们缩放下注比例，使它们的平方和在每一份记录上都有界，同时不损失对任何输入的成功率。令 Q_t 为策略使用资本 c迄今押出的比例平方之和。我们用 Q_t 来选择下一个缩放因子。

$$Q_t = \sum_{s<t} f(v_s)^2, \qquad \alpha_t = \frac{1}{2(1+Q_t)}, \qquad h(v_t) = \alpha_t f(v_t).$$

记录 v_t 确定了可计算的有理数 $h(v_t)$。由于 $Q_{t+1} - Q_t = f(v_t)^2 < 1$,

$$h(v_t)^2 = \frac{Q_{t+1} - Q_t}{4(1+Q_t)^2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+Q_t} - \frac{1}{1+Q_{t+1}}\right).$$

对 t 求和可得（2），这是通过望远镜求和得到的，因为 $Q_0 = 0$。

剩下要证明的是，较小的赌注仍能保持成功。记 $x_t = (2b_t - 1)f(v_t)$为答案为 b_t时的带符号收益，并令 $M_n = \sum_{t<n} x_t$。由于 $c(v_{t+1}) = c(v_t)(1 + x_t)$，对 $-1 < x \le 1$，不等式 $\log(1 + x) \le x - x^2/4$ 给出

$$M_n \ge \log c(v_n) + Q_n/4 \ge -\log 4 + Q_n/4. \tag{3}$$

此处及下文中，log 表示自然对数。令 D_n 为归一化策略在经过n次查询后的资本。其初始值为 $D_0 = 1$，并按 $D_{t+1} = D_t(1 + \alpha_t x_t)$更新，因此它是正的、有理数且公平。令 $A_n = \sum_{t<n} \alpha_t x_t$。由于 $|\alpha_t x_t| \le 1/2$ 且$(\alpha_t x_t)^2 = h(v_t)^2$,，不等式$\log(1 + y) \ge y - 2y^2$对 $|y| \le 1/2$ 成立，并且由（2）可得

$$\log D_n = \sum_{t<n} \log(1 + \alpha_t x_t) \ge A_n - 2\sum_{t<n} h(v_t)^2 \ge A_n - 1.$$

固定一个 d 无界的记录。只需证明 A_n 在上方无界即可。根据分部求和可得

$$A_n = \alpha_{n-1} M_n + \sum_{t=1}^{n-1} (\alpha_{t-1} - \alpha_t) M_t \qquad (n \ge 1).$$

这些系数均为非负数，且总和为 $\alpha_0 = 1/2$。

如果 Q_n 有界，那么 α_{n-1} 就始终与零保持正距离。由于 $c(v_n)$ 无界，（3）使得M_n 在上方无界，因此 $\alpha_{n-1}M_n$也是如此。剩余的和至少为 $-(\log 4)/2$，因为$M_t \ge -\log 4$。因此 A_n 在上方无界。

如果 $Q_n \to \infty$，将 $M_t \ge -\log 4 + Q_t/4$ 代入同一恒等式，再次进行分部求和可得

$$A_n \ge -\tfrac{1}{2}\log 4 + \tfrac{1}{8}\sum_{t<n} \frac{Q_{t+1} - Q_t}{1 + Q_t} \ge -\tfrac{1}{2}\log 4 + \tfrac{1}{8}\log(1 + Q_n).$$

最后一个不等式可通过在每个区间 $[Q_t, Q_{t+1}]$ 上对 $1/(1 + u)$ 积分得到。其右侧趋于无穷大，因此 $A_n \to \infty$。在这两种情况下， D_n 都无界，符合要求。 □

4.2 查询位置池

固定一个答案序列 $Z \in 2^{\mathbb{N}}$，并将这个相同的 Z 的连续比特依次提供给每条扫描规则 π_i。这些规则可以查询不同的位置。令$g_{i,\,a}(Z)$ 表示 π_i 在这次运行中曾查询过 a 的示性函数。我们使用转录空间的博雷尔集，即包含柱集且对补集和可数并封闭的最小集合族。

对于每条规则，我们为所有阶段一次性选择转录空间的一个划分 $H_i,\ L_i$。在 H_i 上，该规则应读取整个池；而在 L_i 上，它应留下一定固定比例的内容未读。该引理界定了每个部分中例外情况的公平抛硬币测度。对于固定的阶段参数，一个程序会生成所有充分大的大小的池。

引理 3。对于每个全可计算扫描规则序列 $(\pi_i)_{i\ge 1}$，转录空间中存在博雷尔集 H_i，其补集 L_i 具有以下性质。固定 $\ell \ge 1$、一个有理数 $\eta > 0$和一个位置界 z。存在一个有理数 $0 < \tau < 1$ 以及一个以正整数M 为输入的程序。对于每个充分大的 M，该程序输出一个包含 M 个不同位置的集合 G，这些位置至少为 z，并且对每个 $i \le \ell$，

$$\kappa\{Z \in H_i : \pi_i \text{ misses a position of } G\} < \eta, \tag{4}$$

$$\kappa\{Z \in L_i : \pi_i \text{ misses fewer than } \tau M \text{ positions of } G\} < \eta. \tag{5}$$

证明。对于一个公平抛硬币答案序列 Z，

$$\int_{2^{\mathbb{N}}} g_{i,a}(Z)\, d\kappa(Z) = \mathbb{E}_{Z\sim\kappa}[g_{i,a}(Z)] = \Pr_{Z\sim\kappa}(\pi_i \text{ ever queries } a).$$

对于一个关于前 n 个答案的函数，积分以每个权重为 2^{-n}的 2^n 个前缀上的函数值平均值作为其值。赋予 π_i 权重 $w_i = 2^{-i}$，定义加权查询概率及其上极限为

$$p(a) = \sum_{i\ge 1} w_i \int g_{i,a}\, d\kappa, \qquad p_* = \limsup_{a\to\infty} p(a).$$

选择沿其趋于无穷的位置，使得 $p(a) \to p_*$。$g_{i,a}$ 在一个柱集上的每个积分都属于 $[0,1]$。这样的二元组 $(i,[v])$ 只有可数多个，因此存在一个对角子列 $a_1 < a_2 < \cdots$，使得对于每个 i 以及每个柱集 $[v]$，$\int_{[v]} g_{i,a_k}\, d\kappa$ 都收敛。我们利用这些极限，为每条规则构造一个函数 g_i。记 $L^2(\kappa)$ 为所有满足 $\|\varphi\|_2^2 = \mathbb{E}_{Z\sim\kappa}[|\varphi(Z)|^2] < \infty$ 的可测函数 φ 所构成的空间，并将几乎处处相等的函数视为同一个函数。

固定 i。对于具有长度为 d 的前缀 v 的 Z，令 $F_d(Z)$ 表示 $[v]$ 上的极限平均值，

$$F_d(Z) = \frac{1}{\kappa([v])} \lim_{k\to\infty} \int_{[v]} g_{i,a_k}(Z')\, d\kappa(Z').$$

每个 F_d 的取值都属于 $[0,1]$。它在 $[v]$ 上的值，是 F_{d+1} 在 $[v0]$ 和 $[v1]$ 上的取值的平均值。记作 $\Delta_d = F_{d+1} - F_d$。在深度为 d 的每个柱集上，Δ_d 的平均值为零，而 F_d 及所有更早的增量都是常数。因此，Δ_d 与 F_d 以及每个更早的增量都正交。对于 $m < n$，勾股恒等式给出

$$\|F_n - F_m\|_2^2 = \sum_{d=m}^{n-1} \|\Delta_d\|_2^2 = \|F_n\|_2^2 - \|F_m\|_2^2.$$

平方范数递增并收敛到一个至多为 1 的极限，因为 $0 \le F_d \le 1$。因此，(F_d) 在 $L^2(\kappa)$ 中是柯西序列，其极限为 g_i。某个子序列几乎处处收敛。其逐点极限在不存在的地方取零，

由此得到 g_i 的一个取值于 $[0,1]$ 的 Borel代表。固定一个柱集 $[v]$。对于$d \geq |v|$，对包含在 $[v]$ 中的深度为 d 的柱集求和，得到

$$\int_{[v]} F_d \, d\kappa = \lim_{k\to\infty} \int_{[v]} g_{i,a_k} \, d\kappa.$$

由于 $d \to \infty$，左侧根据 L^2 收敛趋于 $\int_{[v]} g_i \, d\kappa$。因此，$g_{i,\ a_k}$关于每个柱集示性函数的积分都收敛；由线性性可知，关于这些示性函数的每个有限线性组合的积分也收敛。此类组合在 $L^2(\kappa)$ 中稠密。由于 $\|g_{i,\ a_k}\|_2$，$\|g_i\|_2 \leq 1$，可知对于每个 $\varphi \in L^2(\kappa)$，都有 $\int \varphi g_{i,\ a_k} \, d\kappa \to \int \varphi g_i \, d\kappa$。这就是在 $L^2(\kappa)$ 中的弱收敛。

令 $H_i = \{Z \in 2^{\mathbb{N}} : g_i(Z) = 1\}$ 且 $L_i = 2^{\mathbb{N}} \setminus H_i$。取 $\varphi = \mathbf{1}_{H_i}$，即 H_i 的示性函数，得到

$$\kappa\{Z \in H_i : g_{i,a_k}(Z) = 0\} = \int_{H_i} (1 - g_{i,a_k}(Z)) \, d\kappa(Z) \longrightarrow \int_{H_i} (1 - g_i(Z)) \, d\kappa(Z) = 0.$$

因此，对于任意固定的 M，我们可以沿子序列选取足够靠后的 M 个位置，使得在 H_i 中规则至少漏掉其中一个位置的记录所构成的集合，其测度可以小到任意程度。

固定 ℓ, η, z。我们可以减小 η，使得 $0 < \eta < 1$。根据测度的连续性，选取一个有理数 $0 < \tau < 1/4$，使得

$$\kappa\{Z : 1 - 2\tau < g_i(Z) < 1\} < \eta/3 \qquad (i \leq \ell).$$

选取一个有理数 $\delta > 0$，使得 $4\delta < \eta$ 且 $8\delta/\tau < \eta/3$。对于每个 $i \leq \ell$，选取一个开闭集 H_i' 和一个二进有理数柱函数 ψ_i，使得

$$\kappa(H_i \triangle H_i') < \delta, \qquad \|\psi_i - g_i\|_1 < \delta.$$

这些近似之所以存在，是因为柱集代数生成博雷尔集。令 $s = w_\ell \delta$。选取 $z' \geq z$，使得对于所有 $a \geq z'$，$p(a) < p_* + s$；再选取一个有理数 $\gamma \in (p_* - 3s, p_* - 2s)$，以及一个整数$D \geq \ell$，使得 $\sum_{i>D} w_i < s/4$。有限数据 z', γ, D, δ、开闭集与柱集近似，以及前 D 条扫描规则的编码，足以指定该程序。

对于候选的 M 元素集合 $G \subseteq \{z',\ z'+1,\ \ldots\ldots\}$，令 $v_{i,\ V}(Z)$ 表示 G 在前 V 次查询中读取到答案为 Z 的比例。随着 $V \to \infty$，该比例增加到 $v_i(Z) = M^{-1} \sum_{a\in G} g_{i,\ a}(Z)$。在输入 M 上，程序枚举各对 $(G,\ V)$。对于第一对使得以下前两个不等式对每个 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ \ell$ 均成立，且第三个不等式对 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ D$上的加权和成立的情况，程序输出 G。

$$\begin{aligned} \kappa\{Z \in H_i' : v_{i,V}(Z) < 1\} &< 3\delta && (i \leq \ell), \\ \|v_{i,V} - \psi_i\|_1 &< 3\delta && (i \leq \ell), \\ \sum_{i\leq D} w_i \int v_{i,V} \, d\kappa &> \gamma. \end{aligned}$$

这三个比较都涉及可由有限条查询记录计算出的有理量。后续查询可能会改善在 H_i' 上的覆盖范围，却破坏对 ψ_i的近似。第三个检验限制了这种变化。最终的加权平均值至多为 $M^{-1} \sum_{a\in G} p(a) < p_* + s$，因此在时间 V之后，其增加量小于 $p_* + s - \gamma$。

要看出搜索会终止，请使用子序列 a_k。从该子序列中选择 M 个不同位置。在每次选择时，要求 $a \geq z'$，$p(a) > p_* - s/4$，并且 $\kappa\{Z \in H_i : g_{i,a}(Z) = 0\} < \delta/M$对所有 $i \leq \ell$都成立。对于每个已经选定的位置 a'，还要求

$$\left|\langle g_{i,a} - g_i, g_{i,a'} - g_i \rangle\right| < \delta^2/4 \qquad (i \leq \ell).$$

每一步都施加有限个条件，而这些条件在沿子序列足够远的位置上成立。对于所得集合 G，展开平方范数并使用$\|g_{i,a}-g_i\|_2\le 1$ 可得

$$\|v_i-g_i\|_2^2 \le 1/M+\delta^2/4.$$

因此，当 M 足够大时，$\|v_i-g_i\|_1<\delta$。由并集界可得$\{Z\in H_i:\ v_i(Z)<1\}<\delta$。对 G 上的 $p(a)$ 取平均，并去掉权重尾部，可得 $\sum_{i\le D} w_i\int v_i\,d\kappa > p_*-s/2$。对于这个 G，$v_{i,V}\uparrow v_i$ 也给出在 $L^1(\kappa)$ 中的收敛，并且 $\{v_{i,V}=1\}\uparrow\{v_i=1\}$，因为 G 是有限的。刚得到的严格界，连同对 H_i 和 g_i 的近似，在某个有限的 V 处给出了全部三个搜索不等式。

反过来，设 (G,V) 是程序接受的任意一对。永远未被查询的位置在时刻 V仍未读入。第一个检验和 $\kappa(H_i\triangle H_i')<\delta$ 因此给出 (4)。对于后续查询，第三个检验给出

$$\sum_{i\le D} w_i\int (v_i-v_{i,V})\,d\kappa \le \frac{1}{M}\sum_{a\in G}p(a)-\sum_{i\le D}w_i\int v_{i,V}\,d\kappa < p_*+s-\gamma<4s.$$

这些差值均非负，并且对于 $i\le \ell$有 $w_i\ge w_\ell$，所以$\|v_i-v_{i,V}\|_1<4\delta$。第二个检验以及对 g_i 的近似现在给出 $\|v_i-g_i\|_1<8\delta$。在 L_i上，除去测度小于 $\eta/3$的集合，我们有 $g_i\le 1-2\tau$。在 L_i的这部分中，读取超过 $1-\tau$的一个比例 G会迫使 $|v_i-g_i|>\tau$发生；根据马尔可夫不等式，该事件的测度至多为 $8\delta/\tau<\eta/3$。这就证明了 (5)。所有非有效选择都通过程序接收 M之前固定的有限数据体现出来。 □

4.3 稀疏支撑与秩保持

将池中的位置 G 按递增顺序从 1 编号至 M。我们需要一个由对（S，B）组成的列表，并满足两个性质。每个位置只出现在支撑集 S 中很小的一部分。此外，对于每个包含至少 τM 个未读位置的可能集合 D，由 $S\cap D$ 索引的列对大多数候选对都保持满行秩。例外的候选对可能取决于 D。

引理 4。 固定有理数 $0<\theta、\tau<1$。对于每个充分大的整数 r，令 $M=r^8$、$m=r^2$ 和 $J=M^3$。存在一个候选对（$(S^{(q)}、B^{(q)})_{q=1}^{J}$）列表。每个支撑集 $S^{(q)}\subseteq\{1、\ldots\ldots、M\}$ 的大小为 m，且 $B^{(q)}$ 是一个具有 r 行 m 列、列由 $S^{(q)}$ 索引的满行秩二进制矩阵。该列表满足以下两个界

$$\frac{1}{J}\#\{q: a\in S^{(q)}\}\le\frac{2m}{M} \qquad \textit{for every } a\in\{1,\ldots,M\},$$
$$\frac{1}{J}\#\{q:\operatorname{rank}(B^{(q)}_{S^{(q)}\cap D})<r\}\le\theta \qquad \textit{for every } D\subseteq\{1,\ldots,M\} \textit{ with } |D|\ge\tau M.$$

只要这样的列表存在，就可以通过有限搜索从 r、θ、τ 计算出该列表。

证明。 独立地对 J 个候选对进行抽样。对于每个候选对，从池中m元素的子集中均匀选择 S。按递增顺序用 S 为 B 的列编索引，并从满行秩的二进制 $r\times m$ 矩阵中均匀抽取矩阵。固定一个至少包含 τM 个未读位置的集合 D。对于一个随机对（S，B），令 $N=|S\cap D|$，并令 $p_D=\Pr(\operatorname{rank}(B_{S\cap D})<r)$。无放回抽样给出 $\mu=\mathbb{E}N=m|D|/M\ge\tau m$和 $\operatorname{Var}(N)\le\mu$，因为不同抽样的隶属指示变量具有非正协方差。当 r 较大时，我们有 $\mu\ge 4r$，因此切比雪夫不等式给出 $\Pr(N<2r)\le 4/\mu\le 4/(\tau m)$。

固定一个支撑集 S，其中有 $N\ge 2r$。首先，将矩阵的各项独立地抽取为公平比特。对于 $S\cap D$ 中的 N 列，任意非零行组合在这些列上取零的概率为 2^{-N}。对所有行组合应用并集界，可得这些列上的失败概率至多为 $(2^r-1)2^{-N}$。应用于

所有 m 列时，同样的界表明，对于足够大的 r，矩阵满行秩的概率至少为 $1-(2^r-1)2^{-m}>1/2$。条件化于矩阵满行秩后，得到所需的矩阵分布，失败界最多增加一倍，变为 $2(2^r-1)2^{-N}<2^{1-r}$。合并这两种情况可得

$$p_D \le \Pr(N<2r)+\Pr(N\ge 2r,\ \operatorname{rank}(B_{S\cap D})<r) \le \frac{4}{\tau m}+2^{1-r}<\frac{\theta}{4}$$

对于所有充分大的 r，一致地对 D 成立。

对于完整列表，令 Y_D 统计在 D 上秩降低的候选者数量。独立性给出 $\mathbb{E}2^{Y_D}=(1+p_D)^J\le \exp(p_D J)$，因此

$$\Pr(Y_D>\theta J)\le \exp\bigl[-(\log 2-1/4)\theta J\bigr].$$

对于固定位置 a，数量 $\nu(a)=\#\{q:\ a\in S^{(q)}\}$ 服从参数为 J 和 m/M 的二项分布。相同的矩界给出

$$\Pr(\nu(a)>2mJ/M)\le \exp\bigl[-(2\log 2-1)mJ/M\bigr].$$

至多有 2^M 个集合 D 和 M 个位置 a。由于 $J=M^3$ 和 $mJ/M=mM^2$，对这些选择求和两个失败界，所得数量趋于零。因此，当 r 足够大时，存在一个同时满足这两个要求的列表。这两个要求都可以在有限列表上判定，因此穷举搜索可以找到这样的列表。

□

5 选择仿射约束

在阶段 j，我们选择一个奇偶校验系统。其解集必须进入 Martin-Löf 检验的层级 U_j，并且其对前 j 个策略的资本估计的贡献必须足够小，以便对 j 求和。

对于这一选择，引理 3 提供了一个池，使得在给定公平抛硬币答案的情况下，每个策略很可能要么完整读取该池，要么留下固定比例未读。在后一种情况下，引理 4 保证，对于大多数候选对 $(S,\ B)$，未读列仍保持满秩。另一方面，读取整个池会导致每个候选块都发生秩下降。为了界定赌注，我们同时使用引理 2的平方和界，以及包含任意给定位置的候选支撑集比例很小这一事实（引理 4）。二者结合起来，可得对 S的总赌注（对候选对象取平均）很小。在选择一对候选对之前，我们将前 j 个策略的赌注和秩失败估计相加，因此同一选择可适用于所有这些策略。

固定一列包含所有全可计算策略的列表，并根据引理 2对每个策略进行归一化。该列表不必是有效的。对于其中的第 i个条目，将 π_i 记作扫描规则，将 h_i 记作该归一化策略的带符号下注比例。将引理 3 应用于这些扫描规则，得到 H_i，L_i。对于输入分布 P，当规则可由索引明确时，我们将 $P(F)$ 记作记录在 π_i 下属于 F的概率。特别地，记录柱集 $[w]$ 的概率为 $P(C_{\pi_i}(w))$。

对于每个足够大的试验秩 r，我们依次选择一个与先前的块不相交的支撑集 S_j、一个满行秩矩阵 B_j，其作用于 S_j 并具有 r 行，以及一个查询时限 V_j和一个综合征 $y_j\in\{0,\ 1\}^r$。因此，我们可以将最终的秩 r_j 取得足够大，以满足描述界（1），如下文所证。记

$$E_j=\{X: B_j(X|_{S_j})=y_j\},\qquad P_j=\lambda(\cdot\mid E_1\cap\cdots\cap E_j),\qquad P_0=\lambda.$$

对于扫描规则 π_i，令 $R_{ij}(t)$ 表示在进行 t 次查询后，块 j 上的剩余秩，即 B_j的未读列的秩。初始时，$R_{ij}(0)=r_j$。首次使该秩下降的查询的索引为

$$T_{ij}=\min\{t\ge 1: R_{ij}(t)<R_{ij}(t-1)\},\qquad \min\varnothing=\infty.$$

当 $0 < R_{ij}(t) < r_j$ 时，剩余秩是部分的。令 $W_{ij}(t)$ 表示在对块 j 进行查询 t之前，秩下降时下注的资金比例 $|h_i|$之和。每个比例都在答案揭晓前计算。

后续支撑集避开前 j 条规则在任意查询记录下前 V_j 步中可能查询的所有位置。因此，后续约束会保留这些查询记录在该时间范围内的分布。令 $e_j = 2^{-j}/100$。对于每个 $i \le j$，我们要求

$$\mathbb{E}_{P_j} W_{ij}(V_j) + P_j(0 < R_{ij}(V_j) < r_j) < 4e_j, \tag{6}$$

$$P_j(V_j < T_{ij} < \infty) \le 2e_j, \tag{7}$$

$$P_{j-1}(H_i \cap \{T_{ij} = \infty\}) < e_j, \tag{8}$$

$$P_a(L_i \cap \{T_{ij} < \infty\}) < e_j \qquad (0 \le a < j). \tag{9}$$

前两个界在 V_j处区分了三种可能性。秩为零时，块 j上不可能再出现下降。部分秩由（6）涵盖，并结合已在下降处下注的赌注。满秩时，任何后续下降都必定是首次下降，并由（7）涵盖。最后两个界涉及以下查询记录的概率：在 H_i 中，块 j 上没有下降的查询记录；以及在 L_i 中，该处出现下降的查询记录。对于每个较早的分布 P_a，我们都需要满足（9）。对于 $1 \le a < j$，在 V_a 之后，任意块 $k \ge a$ 上的首次下降可能出现在块 j上。

支集与矩阵。固定较早阶段的选择，并令 $K = \sum_{a<j} r_a$。支撑集互不相交，因此有 $\lambda(E_1 \cap \cdots \cap E_a) = 2^{-\sum_{k \le a} r_k}$。因此，对于每个 $0 \le a < j$，P_a相对于 λ的密度至多为 2^K。对于固定的扫描规则，取记录事件 F 的输入原像，得到$P_a(F) \le 2^K \kappa(F)$，因为公平硬币输入会诱导记录分布 κ。选择一个 z，使其位于所有较早支撑集之后；对于每个 $1 \le a < j$，再选择一个位置，使其位于前 a 条扫描规则截至 V_a所能查询的所有位置之后。被排除的位置只有有限个，因为每个有限时间范围内只有有限条查询记录。

应用引理 3，并取 $\ell = j$、此界 z 以及 $\eta = e_j/(100j2^K)$。固定所得的池程序和遗漏比例 τ。对于每个充分大的试验秩 r，该程序返回一个包含 G 个$M = r^8$位置的池。按递增顺序，将列索引 1、…、M 与 G 的位置对应起来，并计算带有 $\theta = \eta$ 的引理 4 列表。将所得列表写为 $(S^{(q)}, B^{(q)})_{q=1}^{J}$，其中 $J = M^3$，且每个支撑集的大小为 $m = r^2$。

固定 $i \le j$。每个候选支集 S 都包含于 G 中，因此，在 H_i 中使该规则遗漏 S 的一部分的记录，其 κ-测度根据（4）小于 η。在 L_i 上，除去一个 κ-测度小于 η 的集合后，该规则根据（5）会留下一个至少包含 τM 个池位置的集合 D 未被读取。对于固定记录而言，这对每个候选支集都是相同的 D。至多 θJ 对的秩不是 r，而对于其余各对，剩余秩在整个运行过程中始终保持满秩。对该列表取平均可知，在 L_i 中记录发生秩下降的 κ-概率至多为 $\eta + \theta$。

对于任意位置 S 有限集，令 $A_i(S)$ 为满足 $|h_i(v_t)|$ 的那些查询对应的下注比例 $\pi_i(v_t) \in S$之和。每个池位置至多被查询一次。由柯西–施瓦茨不等式和（2），$A_i(G) \le \sqrt{M/2}$ 对每份记录都成立。每个位置至多属于一定比例 $2m/M$ 的支撑集中，因此列表上 $\mathbb{E}_{P_{j-1}} A_i(S)$的平均值至多为

$$\frac{2m}{M}\sqrt{M/2} = \sqrt{2}\, r^{-2}.$$

对于每个候选对（S，B），令 $T_i(S,\ B)$ 为 π_i 首次降低 B 未读列秩的查询；若没有发生此类查询，则 $T_i(S,\ B) = \infty$。对于每个 $i \le j$，上述两个界都是对同一候选列表取平均值所得。将秩下降界乘以 2^K，再加上

赌注界，并对 $i \le j$ 求和，得到

$$\frac{1}{J}\sum_{q=1}^{J}\sum_{i\le j}\Big(\mathbb{E}_{P_{j-1}}A_i(S^{(q)}) + 2^K\kappa(L_i\cap\{T_i(S^{(q)},B^{(q)})<\infty\})\Big) \le \sqrt{2}\,jr^{-2} + 2^K j(\eta+\theta).$$

对所有充分大的 r，右侧都小于e_j。选择一个指标 q，使得内层求和小于 e_j，并将这次试验中的 $(S_j, B_j) = (S^{(q)}, B^{(q)})$ 和 $r_j = r$ 记作这样。对于这一选择，$T_{ij} = T_i(S_j, B_j)$。根据密度界，对于每个 $a < j$，式 (9) 中左侧的概率在 $i \le j$ 上的总和小于 e_j。同样，$i \le j$ 上某个记录属于 H_i且缺少 S_j 的 P_{j-1}-概率之和小于 $2^K j\eta < e_j$。如果 π_i 读取了 S_j的全部内容，剩余秩就会从 r_j 降至零，因此至少下降一次。这证明了 (8)。

时限与综合征。对于 $t \ge 0$，令

$$u(t) = \sum_{i\le j} P_{j-1}(0 < R_{ij}(t) < r_j), \qquad v(t) = \sum_{i\le j} P_{j-1}(T_{ij} \le t).$$

在 P_{j-1} 下，$u(t)$ 表示前 j 个策略中，在此块上具有部分秩的策略的期望数量；$v(t)$ 表示截至时间 t已导致秩下降的策略的期望数量。二者都是可计算的有理数。对于固定的 t，我们枚举长度为 t 的记录，并通过统计查询位置和先前的块上相容赋值的数量，计算 $P_{j-1}(C_{\pi_i}(w))$。由于 S_j 是有限的，其剩余秩会在每条记录上稳定下来。在 H_i上，部分极限秩要求 π_i 遗漏 S_j中的一个位置。在 L_i 上，这要求发生秩下降，因此 $T_{ij} < \infty$。对于所选的数对 $(S_j,\ B_j)$，我们证明了

$$\sum_{i\le j} P_{j-1}\{Z \in H_i : \pi_i \text{ misses a position of } S_j\} < e_j, \qquad \sum_{i\le j} P_{j-1}(L_i\cap\{T_{ij}<\infty\}) < e_j.$$

因此，由有界收敛可得 $\lim_t u(t) < 2e_j$。此外，$v(t)$ 递增并收敛于极限 $v_\infty \le j$。

为了从一个短程序中恢复适当的时间范围，我们需要针对 $v(t)$的停止规则。将整数 $b_j = \lfloor v_\infty/e_j \rfloor$ 作为辅助信息提供给该程序。它取第一个满足 V_j，且 $u(V_j) < 3e_j$ 并且$v(V_j) > (b_j - 1)e_j$的时刻。根据上述两个极限，这样的时刻确实存在。由于 $b_j e_j \le v_\infty < (b_j + 1)e_j$,

$$\sum_{i\le j} P_{j-1}(V_j < T_{ij} < \infty) = v_\infty - v(V_j) < 2e_j.$$

在对阶段 j的任意综合征进行条件化之后，该估计仍然成立。对于规则 π_i，输入事件 $V_j < T_{ij} < \infty$ 是集合 $C_{\pi_i}(w)$ 的不交并，其中 w 表示首次下降之前紧接着的查询记录，并且满足 $|w| \ge V_j$。下一个位置，从而下降，都由 w决定。在每个这样的输入事件 $C = C_{\pi_i}(w)$上，B_j 的未读列仍具有秩 r_j。如果 $P_{j-1}(C) > 0$，则 S_j 中的未读比特在给定 C的条件下是独立公平比特，因为 S_j 与先前的块不相交。因此，对于每个综合征 y,

$$P_{j-1}(C\cap\{B_j(X|_{S_j}) = y\}) = 2^{-r_j}P_{j-1}(C).$$

当 $P_{j-1}(C) = 0$时，该等式同样成立。对互不相交的输入事件求和，并除以2^{-r_j}，即可证明对于任意y_j的选择，式7都成立。

对于每个综合征 y，将（6）左侧在 $i \le j$ 下、以 P_{j-1} 为条件的 $B_j\ (X|_{S_j}) = y$求和。由于下注比例和条件柱集概率都是有理数，因此可以通过枚举长度为 V_j 的查询记录来计算此和。对 y 取平均，可得到在 P_{j-1}下的相同和，此时所有综合征等可能。由于 $W_{ij}\ (V_j) \le A_i\ (S_j)$ 在每条查询记录上都成立，因此选定候选项的下注估计给出

$$\sum_{i\le j}\mathbb{E}_{P_{j-1}}W_{ij}(V_j) \le \sum_{i\le j}\mathbb{E}_{P_{j-1}}A_i(S_j) < e_j.$$

部分秩贡献为 $u(V_j) < 3e_j$。因此，平均值小于 $4e_j$。令 y_j 为字典序最先的最小化综合征。其和小于 $4e_j$，从而对每个 $i \le j$得到（6）。

描述长度。 对于第 3 节中固定的解释器，将先前的仿射约束、计算 π_i和 h_i的 $i \le j$的程序、池程序以及 j、z、η、τ、e_j编码到一个有限的头部中。该头部与试验秩无关 r。给定 r后，该程序会重构候选列表。为了指定所选的二元组，它只需要 q 平均论证提供的索引。借助 b_j，它还可以恢复 V_j 并计算第一个使综合征最小的值。若直接编码 y_j，则需要 r 比特。

该列表有 $J = r^{24}$ 个条目，因此索引和 r 总共需要 $O(\log(r+2))$ 个比特。尽管b_j 可能取决于试验秩，但 $0 \le b_j \le j/e_j$是预先固定的界。因而，将数据编码到自定界字段中，就得到一个普通程序p_j，其长度为

$$|p_j| \le C_j + O(\log(r+2)),$$

其中 C_j 与 r无关。对于每个充分大的 r，都存在合适的选择，因此我们可以将r_j 取到足够大，使得 $r_j \ge 2|p_j| + j + 1$。即使约束序列不一定可计算，每个仿射约束仍具有这一描述界。

6 有界资本与分离证明

设 ρ 为如下乘积概率律：在每个块上抽取一个均匀解，并在其余每个位置上抽取一个公平比特。其支撑集为 $\bigcap_j E_j$。事实上，该集合是闭集且测度为 1，并且任何与其相交的柱集都指定了有限个块和自由位置上的相容取值，因此对应的事件具有正测度。根据（1）以及第 5 节给出的描述长度界，支撑集中的每个序列都未通过检验 $(U_m)_{m\ge 1}$。

固定一个策略 i。第 5 节的界是在有限阶段概率律 P_j下证明的。为了将其用于 ρ，对于每个 $j \ge i$，我们比较记录概率，考察范围截至 V_j，以及任意块上首次后续秩下降发生之前的时刻 $k \ge j$。

比较记录概率。 固定一个记录 w，其属于 π_i。其有限赋值仅涉及有限个块。对于任何 k 未读列仍保持满秩的块，在给定该赋值的条件下，公平抛硬币抽样得到的综合征仍服从均匀分布。对该综合征进行条件化，不会改变该赋值的概率（第 3 节）。因此，块间独立性给出$\rho(C_{\pi_i}(w)) = P_j(C_{\pi_i}(w))$ 只要每个块 $k > j$ 在 w之后仍保持满秩即可。特别地，对于$j \ge i$，两种概率律在 V_j之前一致，因为到那时 π_i 不可能已经查询任何更晚的块。

我们还比较了由 P_j 和 P_{j-1} 在事件 $T_{ij} = \infty$ 上诱导的记录分布。对于记录柱集 $[w]$ 和 $n \ge |w|$，集合 $[w] \cap \{T_{ij} > n\}$ 是有限个长度为 n 的记录柱集的并。由于块 j 上的剩余秩仍然是满的，这两个分布赋予它们的概率相同。取递减极限可得，在 $[w] \cap \{T_{ij} = \infty\}$ 上也相等。由于这些柱集生成博雷尔集，对于每个博雷尔记录事件 F，我们得到

$$P_j(F \cap \{T_{ij} = \infty\}) = P_{j-1}(F \cap \{T_{ij} = \infty\}). \tag{10}$$

秩下降时的总赌注。固定 $j \ge i$。如果 $R_{ij}(V_j) = 0$，则之后的查询都无法导致块 j发生秩下降。块 V_j 的部分秩具有 ρ-概率，至多为 $4e_j$ 由（6）可知，因为 ρ 和 P_j 在前V_j 个答案上相同。接下来需要考虑满秩的情况。如果我们等待块 j上首次下降的发生，某个块$k > j$ 可能已经发生过下降，此时这两条规律可能会为该记录赋予不同的概率。因此，我们考虑 V_j 之后在 任意 块 $k \ge j$上发生的首次下降。

令 $\mathcal{A}_{ij}$ 表示这样的事件：块 j 在 V_j 处具有满秩，随后某个块$k \geq j$发生下降。取紧接在首次此类下降之前的记录 w 。它已经确定了下一个位置，以及该位置的查询是否会降低秩，因此集合 $C_{\pi_i}(w)$构成 $\mathcal{A}_{ij}$的不交覆盖。没有块 $k > j$ 被 V_j查询，并且在 w结束时没有任何块丢失秩。因此，对于每条此类记录，都有 $\rho(C_{\pi_i}(w)) = P_j(C_{\pi_i}(w))$。对这些不交事件求和，得到 $\rho(\mathcal{A}_{ij}) = P_j(\mathcal{A}_{ij})$。

在 $\mathsf{A}_{ij} \cap \{T_{ij} < \infty\}$ 上，块 j 上的首次下降晚于 V_j，根据 (7)，这是一个 P_j-概率至多为 $2e_j$ 的事件。在 $\mathsf{A}_{ij} \cap \{T_{ij} = \infty\}$ 上，记录位于 H_i 中的输入，其 P_j-概率根据带有 $F = H_i$ 的 (10) 以及 (8) 小于 e_j 。A_{ij} 中剩余的每个输入，其记录位于 L_i中，并且在某个更晚的块 $k > j$上发生秩下降。对于每个 k，阶段-k 估计 (9) 适用于 P_j。由并集界可得

$$\rho(\mathcal{A}_{ij}) \leq 3e_j + \sum_{k>j} e_k.$$

在 V_j 处从满秩开始、发生在块 j 上的晚期下降包含在$\mathcal{A}_{ij}$中。加上部分秩界并使用 $e_j = 2^{-j}/100$ 可得

$$\rho(\text{a rank drop on block } j \text{ after } V_j) \leq 7e_j + \sum_{k>j} e_k = 8e_j.$$

根据第一个 Borel–Cantelli 引理，几乎必然只有有限多个块 $j \geq i$ 在 V_j之后发生下降。这些块以及有限多个块 $j < i$中的每一个，至多贡献 r_j 次下降。对于块 $j \geq i$上截至 V_j 的下降，我们改为将赌注求和。与 P_j 在 V_j之前的一致性，以及 (6)，给出

$$\mathbb{E}_\rho \sum_{j \geq i} W_{ij}(V_j) \leq 4 \sum_{j \geq i} e_j < \infty.$$

将各个时间范围内的赌注与有限个剩余秩下降处的赌注合并，得到

$$\sum_{\substack{t \geq 0 \\ \text{query } t+1 \text{ causes a rank drop}}} |h_i(v_t)| < \infty \qquad \rho\text{-almost surely.} \tag{11}$$

归一化策略的资本。在每个没有秩下降的查询处，要么该比特位于所有块之外，要么删除其所在列后，该块中未读列的张成空间保持不变。根据块间独立性以及第3节中的计算，给定记录后的条件分布在这两种情况下都是公平的。

令 I_t 表示查询 $t+1$ 不会导致秩下降。记录 v_t 确定了 I_t 和 $h_i(v_t)$。当 $I_t = 1$时， b_t 是条件公平的，因此

$$\mathbb{E}_\rho[I_t(2b_t - 1)h_i(v_t) \mid v_t] = 0.$$

因此

$$M_n^{\text{fair}} = \sum_{t<n} I_t(2b_t - 1)h_i(v_t)$$

是一个 ρ鞅。其增量的正交性以及引理2给出

$$\mathbb{E}_\rho(M_n^{\text{fair}})^2 = \mathbb{E}_\rho \sum_{t<n} I_t h_i(v_t)^2 \leq \tfrac{1}{2}.$$

该 L^2 鞅收敛定理意味着 M_n^{fair}几乎处处收敛。令 D_n 表示归一化策略在进行 n 次查询后的资本，如引理2所述。对每次资本更新应用$\log(1+x) \leq x$ 可得

$$\log D_n \leq M_n^{\text{fair}} + \sum_{t<n} (1 - I_t)|h_i(v_t)|.$$

第一项几乎处处收敛。第二项是（11）中的非负级数的部分和，因此关于 n几乎处处一致有界。因此 D_n 是有界的 ρ-几乎处处成立。根据引理2，原始策略只能在归一化策略成功的地方成功。对可数多个可计算策略的这些零成功集取并集，得到 Kolmogorov–Loveland 随机性 ρ-几乎处处成立。结合上述支撑集包含关系，即可证明定理1。

备注。 还可以指定一个分离序列。对于每个原始策略 i，选取一个整数 c_i，使得在 ρ 下，资本 c_i 曾经超过 c_i 的概率小于 2^{-i-1}。根据几乎处处有界性，这样的界存在。超过 c_i 可由一份有限记录见证，因此所有界均成立的集合是闭集。它与闭集 $\bigcap_j E_j$ 的交集的 ρ-测度至少为 $1-\sum_{i\geq 1} 2^{-i-1} = 1/2$。作为康托空间的一个非空闭子集，它有一个字典序最小成员，该成员就是一个分离序列。

生成式人工智能的使用

我们使用 OpenAI 的 GPT-6.2 Astra 协助构造概率测度，并推进定理 1 的证明。我们还使用它起草和修改了稿件。作者对稿件内容承担责任。

参考文献

[1] P. Martin-Löf, 《随机序列的定义》, Inform. Control 9, 602–619 (1966)。[2] N. Greenberg、J. S. Miller 和 A. Nies, 《从随机点的投影进行计算》, J. Math. Log. 20, 1950014 (2020)。[3] L. Bienvenu、A. R. Day、M. Hoyrup、I. Mezhirov 和 A. Shen, 《Martin-Löf 随机点的 Birkhoff 遍历定理的构造性版本》, Inform. and Comput. 210, 21–30 (2012)。[4] A. A. Muchnik、A. L. Semenov 和 V. A. Uspensky, 《随机性的数学形而上学》, Theoret. Comput. Sci. 207, 263–317 (1998)。[5] B. Kastermans 和 S. Lempp, 《比较随机性的概念》, Theoret. Comput. Sci. 411, 602–616 (2010)。[6] C.-P. Schnorr, 《随机性与概率》, Lecture Notes in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag (1971)。[7] J. S. Miller 和 A. Nies, 《随机性与可计算性：未解问题》, Bull. Symbolic Logic 12, 390–410 (2006)。[8] W. Merkle、J. S. Miller、A. Nies、J. Reimann 和 F. Stephan, 《Kolmogorov–Loveland 随机性与随机过程》, Ann. Pure Appl. Logic 138, 183–210 (2006)。[9] T. Petrović, 《Kolmogorov–Loveland 下注策略在开集上的下注博弈中失利》, Theoret. Comput. Sci. 1037, 115177 (2025)。[10] T. Petrović, 《Kolmogorov–Loveland 随机性与 Martin-Löf 随机性相距多远？》 arXiv:2610.13585 (2026)。