arXiv:2611.31008v1 [cs.CG] 23 Nov 2026

单位圆盘图着色的 2.05-近似算法

Guilherme D. da Fonseca 蒙克斯-马赛大学和 LIS，法国
Kunal Dutta 华沙大学信息学研究所，波兰

摘要

自 20 世纪 90 年代初以来，单位圆盘图着色已知的最佳近似比一直是 3。该近似比来自从左到右扫描：每个顶点的较早邻点都可以由三个团覆盖。我们给出一种随机多项式时间算法，该算法在给定点集后，能以至多 $2.05\,\chi(G)$ 种颜色为每个单位圆盘图着色 G。算法首先近似求解分数色数 χ_f对应的线性规划。如果 χ_f 较大，则在粗网格的每个单元中，独立地从线性规划解中抽取颜色类，并通过扫描为剩余顶点着色；只要某个邻点没有使用抽取到的颜色，就重复使用该颜色。这改进了 Bansal、Caprara 和 Sviridenko 提出的 Round-and-Approx 方案；其关键新要素是局部性：将有界差分不等式与构造性洛瓦兹局部引理相结合，可同时控制所有剩余团。如果 χ_f 较小，那么团数也较小，动态规划便能提供良好的近似。我们的技术还将凸多边形平移副本的交图已知最佳近似比从 3 改进至 2.05，并将单位正方形图的近似比从 2 改进至 1.68。

2012年 ACM 学科分类计算理论 →计算几何；计算理论 → 舍入技术；计算数学 → 图着色

关键词与短语单位圆盘图、单位正方形图、图着色、近似算法、分数色数、随机舍入、Lovász 局部引理

资助*Kunal Dutta*：获波兰国家科学中心 Opus 资助，项目编号 2023/51/B/ST6/02989

1 引言

单位圆盘图中的每个顶点对应有限集中的一个点，且当两点间的欧几里得距离不超过 1 时，两点之间有一条边；等价地，它是直径为 1 的闭圆盘的交图。单位正方形图以相同的距离条件定义，是闭轴平行单位正方形的交图。

我们回顾一下所需的几个图论概念。（正常）着色为每个顶点分配一种颜色，使相邻顶点获得不同颜色；也就是说，相交的圆盘或正方形获得不同颜色。色数 $\chi(G)$是所需颜色的最少数量。团是两两相邻的顶点（两两相交的对象）构成的集合，而

团数$\omega(G)$ 是最大团的大小。独立集 是两两不相邻的顶点（两两不相交的对象）构成的集合，而 $\alpha(G)$ 是最大独立集的大小。团中的顶点必须使用不同颜色，且每个颜色类都是独立集，因此 $\chi(G) \geq \omega(G)$ 且$\chi(G) \geq n/\alpha(G)$。如果某个算法始终使用不超过 $\rho\,\chi(G)$ 种颜色，则称它是一个 ρ-近似 算法。我们使用实数 RAM 计算模型。

对这些图进行着色可用于模拟频率分配，至少从1990 [5]起就一直受到研究。对于单位圆盘图，判定是否可以用 k 种颜色着色是 NP完全问题，对任意固定的 $k \geq 3$ [5, 12]，都成立；单位正方形图也同样如此 [4]。因此，除非 P = NP，否则这两个类都不存在 $(4/3-\varepsilon)$-近似算法。

因素 3 和 2。 按 x-坐标对点进行排序，并按该顺序采用贪心法（首次适配）着色。当顶点 v 被着色时，其已着色的邻点位于以 v为中心的单位圆盘的左半部分。该半圆盘是三个闭 60° 扇区的并集，每个扇区的直径均为 1，因此

每个扇区与 v 一起诱导出一个团。因此，至多存在 3($\omega-1$) 个较早邻点，扫描最多使用 $3\omega-2$ 种颜色。由于 $\chi\geq\omega$，这是一个 3-近似，该结果可追溯至 Peeters [29]（另见 [23, 12]）。对于单位正方形，邻域的左半部分是一个 1×2 矩形，即两个单位正方形的并集，这给出了 Perepelitsa [30]的界 $\chi\leq2\omega-1$ 以及一个 2-近似。

这两个因子也可以通过条带分解得到。Gräf、Stumpf 和 Weißenfels 的 STRIPE 算法 [12] 将点划分为宽度至多为 $\sqrt{3}/2$ 的垂直条带。一个条带中的圆盘构成一个余比较图，即一个具有传递定向的图的补图；这类图可以在多项式时间内实现最优着色。随后，通过匹配技术合并各条带的着色，其性能比为 3。以水平条带为中心、高度为 1 的正方形相交，当且仅当它们的x坐标之差至多为 1，因此它们构成一个单位区间图，即直线上的单位区间的交图。这类图是完美图： $\chi=\omega$ 对它们及其所有诱导子图都成立，并且可以通过排序实现最优着色。相隔两个条带的条带中不含相邻点对，因此，对奇数和偶数编号条带使用交替调色板，至多使用 2χ种颜色，就像和着色算法 [3]一样。这两种方法的性能都无法低于扫描方法的因子。自 1991 年以来，我们未发现性能比 3 有任何改进，而改进 $\chi\leq3\omega-2$ 中的常数一直是一个长期存在的开放问题 [12, 10]。关于单位正方形图的文献较为匮乏 [7, 4], ，我们也未发现任何性能比低于 2 的算法。

任何将颜色数与 ω 进行比较的分析，都会遇到一个尚未解决的问题： χ/ω 究竟能有多大。对于单位圆盘图，目前只知道 $\limsup_{\omega\to\infty}\chi/\omega\in[3/2,3]$ [22, 29]。此外，退化度（最大的 d ，使得某个子图中的所有顶点度数至少为 d；按合适顺序进行贪心着色，至多使用 $d+1$ 种颜色）可以达到 $3\omega-3$ [19]。对于单位正方形图， $\chi/\omega<2$ 总是 [30], ，而已发表的关于较大 ω 的下界为 $5/4$ [7, 4]；我们将在第 6 节把它提高到 $4/3$ 。若以 ω 为分析基准的算法能将因子 3 降低，就能改进 $\chi\leq3\omega-2$ 中的常数；因此，我们转而与一个强于 ω 且可在多项式时间内计算的 χ 下界进行比较：分数色数。

分数色数 χ_f(*G*)是着色的线性规划松弛的最优值：为每个独立集赋予一个非负权重，使包含每个顶点的集合的权重总和至少为 1，并使总权重最小。着色就是权重为 0 或 1 的这种赋权；而一个团与每个独立集至多相交一次，因此 $\omega\leq\chi_f\leq\chi$，且对于单位圆盘图 [11]， $\chi_f\leq2.155\,\omega$ 。单位圆盘图上 χ_f 的加权版本是 NP难的，因为根据椭球法，它与最大权独立集一样难 [13, 16]。已知单位圆盘图 χ_f 的一个 2-近似 [24], ；Jansen [16] 证明，只要最大权独立集存在多项式时间近似方案，加权版本也存在多项式时间近似方案；Erlebach、Jansen 和 Seidel [9] 为圆盘和正方形给出了这样的多项式时间近似方案。（引理 9 给出了一个简短的直接算法，适用于非加权情形。）

我们的结果。 我们的主要结果将圆盘的因子 3 改进了。

▶**定理 1**。 存在一种随机化算法，其期望多项式运行时间为：给定一个由点 G 表示的单位圆盘图，输出该图 G 的合法着色，使用至多$2.0483\,\chi(G)$ 种颜色。

我们还证明了一个关于 χ_f的界，但需要付出一个加性常数。

▶**定理 2.** 存在一个常数 K 以及一种随机化算法，其期望运行时间为多项式级。该算法以点集给出的单位圆盘图 G 为输入，输出 G的一个合法着色，使用至多 $2.0483\,\chi_f(G)+K$种颜色。

证明分为三部分：对近似最优的分数着色进行舍入、重用其颜色，以及对团数有界的图进行着色。第一部分从分数着色中抽取颜色类，并用扫描法为未被这些颜色类覆盖的顶点着色，使用新颜色。对于每个 $\varepsilon \in$，这会得到 $(1+\ln\ 3+\varepsilon)\chi_f + K_\varepsilon$ 种颜色（$(0,1]$（引理 17）。第二部分让剩余顶点在可能时使用舍入所得的一种颜色，且其邻居均未获得该颜色。此类颜色的数量由同一个局部引理论证加以控制；该论证利用了顶点的邻域中至多包含 5 个两两不相邻的顶点这一事实。这将常数从 $1+\ln 3 > 2.0986$ 降至 2.04822，并证明了定理 2（第 5 节）。第三部分去掉加性常数 K；当 χ_f 足够大时，它相对于χ_f 只是一个很小的比例，因此只有在 χ_f，进而 $\omega \le \chi_f$ 小于某个常数时才有影响。此时，在按 y 排序、宽度为 1 的垂直条带内，每个点只与位置相距不超过某个有界距离的点相邻，因此可以用动态规划对每个条带进行最优着色；使用两个交替调色板，最多需要 2χ 种颜色（引理 19）。由于 $2 < 2.0483$，在每种情况下运行相应的算法，即可证明定理 1（第 5 节）。若不重用颜色，同样的论证可为每个单位圆盘图着色，且至多使用 $(1+\ln 3+\varepsilon)\chi$ 种颜色（引理 20）；这已经是一个 2.1-近似，因为 $1+\ln 3 < 2.0987$。这些阈值很大：根据我们的界，只有当 χ_f 大约高于 100 时，舍入对圆盘才优于扫描；而只有当 10^7, 大约高于某个值时，重用颜色才优于 $1+\ln 3$。低于这些阈值时，保证来自引理 19，而其运行时间关于阈值呈指数级。采用定理 1 中的常数时，引理 9 的线性规划最多包含大约 $n^{10^{16}}$ 个变量；对于不超过约 $3\cdot 10^{18}$ 的χ_f，则使用引理 19。我们没有尝试改进多项式的次数。

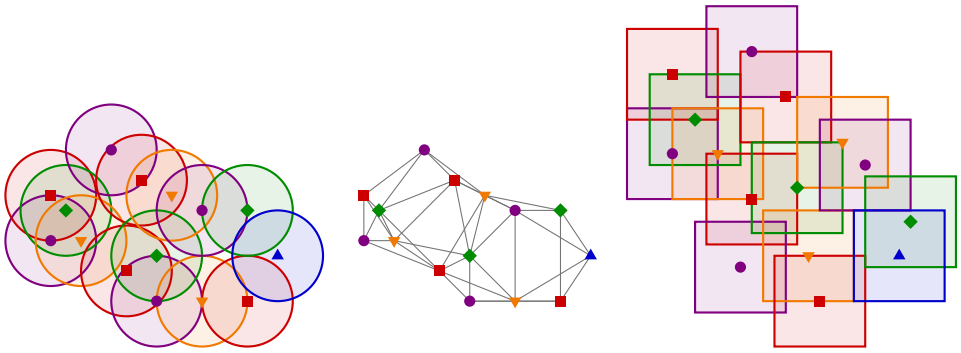
其他类。 舍入和条带适用于每一种 c-可扫描 类（定义 5、引理 17 和 20，以及定理 26），它恰好概括了扫描所用的几何性质：若不重复使用，常数为 $1+\ln\ c$，而不是 $1+\ln 3$；当 $c \ge 3$ 时，上界 $(1+\ln\ c+\varepsilon)\chi$ 成立。单位圆盘图是 3- 可扫描的。凸多边形平移副本的交图同样是 3-可扫描的，且每个顶点至多有 5 个两两不相邻的邻点（第 4.1 节和第 5 节），由此得到定理 3。对于这些图，Kim、Kostochka 和 Nakprasit [19] 通过扫描 $\chi \le 3\omega - 2$ 证明了这一点。

▶**定理 3**。 存在一种随机化算法，其运行时间的期望为多项式时间；给定一个凸多边形及其平移副本交图的平移向量 G，该算法输出一个合法着色 G，使用至多 $2.0483\,\chi(G)$ 种颜色。另有一种这样的算法，使用至多 $2.0483\,\chi_f(G) + K$种颜色，其中 K是一个常数。

单位正方形图是 2-可扫描的，但对它们而言，条带数量的界 2χ 并不优于扫描。第 6 节允许相邻条带重叠，并将一个条带的着色转换为下一个条带的着色：从重叠部分开始，每次处理一个宽度为 1 的带状区域；当 ω 有界时，所使用的颜色数至多为 $\lceil 3\chi/2 \rceil$。

▶**定理 4**。 存在一种期望多项式运行时间的随机化算法：给定一个由其点 G 表示的单位正方形图，输出一个对 G的合法着色，所用颜色数至多为$1.6796\,\chi(G)$。此外，还存在这样一种算法，所用颜色数至多为 $1.6796\,\chi_f(G) + K$，其中 K 为常数。

分数色数与整数色数。 定理2–4表明，对于单位圆盘图和凸多边形的平移副本，χ/χ_f 渐近地至多为2.0483；对于单位正方形图，则至多为1.6796。我们不知道 χ/χ_f 渐近上是否大于1。对于较小的 χ，答案是肯定的：每个奇圈 C_{2k+1} 既是单位圆盘图，也是单位正方形图，并且$\chi(C_{2k+1}) = 3$ 以及 $\chi_f(C_{2k+1}) = 2 + 1/k$。比值 $3/(2+1/k)$ 对于 C_5 为 $6/5$，并趋于



(a) 单位圆盘 (b) 图 (c) 单位正方形

图1 含有 $\omega = \chi_f = 4$ 和 $\chi = 5$ 的图：(a) 直径为 1 的圆盘，(b) 以圆盘中心为顶点的图，(c) 单位正方形；颜色表示一种 5着色，且一些相邻圆盘和正方形仅相互接触。如下所示，将顶点编号为 0，...，14，集合 {2, 9, 10}、{0, 4, 8, 14}、{1, 5, 6, 12}、{2, 8, 13}、{3, 4, 7, 11}、{1, 5, 11, 12}、{0, 6, 10, 13}、{3, 7, 9, 14} 彼此独立，并且每个顶点都被覆盖两次。圆盘中心 $\times 6$：(0, 7)、(0, 10)、(1, 9)、(2, 7)、(4, 13)、(5, 5)、(6, 11)、(7, 3)、(7, 6)、(8, 10)、(10, 3)、(10, 9)、(13, 3)、(13, 9)、(15, 6)。正方形中心 $\times 8$：(0, 13)、(0, 20)、(2, 16)、(4, 13)、(7, 22)、(7, 9)、(10, 18)、(6, 3)、(11, 10)、(15, 14)、(12, 4)、(17, 12)、(13, 0)、(21, 7)、(20, 4)。

$3/2$ 当 $k \to \infty$时。因此，对于满足 $\rho < 3/2$ 的 $\chi \le \rho\,\chi_f$ 界需要一个加性常数。图1中的图同时是单位圆盘图和单位正方形图，表明加性差距 $\chi - \chi_f$ 可以达到1。我们不知道在这些类中 $\chi - \chi_f$ 是否能超过1；这样的图需要 $\chi \ge \omega + 2$。如果在这些类中 $\chi - \chi_f = o(\chi_f)$，那么 χ/χ_f 趋于1，定理2和4中的因子是舍入的限制，而不是分数着色本身的限制。此时，自然会问是否存在一种算法，使用 $(1+\varepsilon)\chi_f + K_\varepsilon$ 种颜色。

技术与相关工作。 从线性规划解中进行采样，并用c-近似算法完成其余部分，这是 Bansal、Caprara 和 Sviridenko [2],提出的舍入与近似框架，他们将其应用于二维向量装箱。在该问题中，只需对少数全局量使用并集界即可。对于着色，必须同时控制所有 n 局部团，而对它们使用并集界则要求 $\chi = \Omega(\log n)$，这正是圆弧图着色 [20]算法所处的情形。我们通过在网格的每个单元中独立采样来避免这一点，从而使洛瓦兹局部引理 [8], 以 Moser 和 Tardos [28], 的算法形式得以应用，并且依赖度与 n无关。由局部引理控制的舍入对于列稀疏整数规划 [21, 31] 以及多重图的边着色 [17, 27]而言是经典方法；在这里，稀疏性由几何结构提供。将舍入过程中使用的颜色重新用于剩余顶点可以降低常数，因为一个顶点的邻域中两两不相邻的顶点很少。具有较小 χ_f 的图使用条带进行着色，这与 [12, 3], 中的条带分解类似；不同之处在于，有界团数使得动态规划能够对每个条带进行最优着色；对于单位正方形，则用重叠条带替代两种交替调色板。

随机几何图的分数着色已通过局部方法取整 [26], ：在网格块上求解着色线性规划，这与引理 9 的证明类似；但该界比较的是 χ 与 χ_f，后者来自距离阈值更大的图。局部化的随机独立集也为单位圆盘图分布式着色的去随机化论证提供了动机 [10]。

组织结构。 第 2 节定义 c-可扫描类，说明单位圆盘图和单位正方形图分别是 3-可扫描和 2-可扫描的，并汇集本文使用的工具：扫描、平移铺砌、分数着色线性规划、有界差分以及 Moser–Tardos 算法。第 3 节对分数着色进行取整，并证明界 $(1+\ln c+\varepsilon)\chi_f + K_\varepsilon$ （引理 17）。第 4 节讨论有界团数的情形，并给出单位圆盘图以及凸多边形的平移副本的 2.1-近似（引理 20）；第 4.1 节证明这两类图都是 3-可扫描的。第 5 节重复利用颜色，改进主导常数，并证明定理 1 和定理 2。第 6 节讨论单位正方形图：当 ω 有界时，使用重叠条带为其着色（引理 28），证明定理 4，并给出 $\limsup \chi/\omega$上的下界 $4/3$。

2 预备知识

所有图都是有限简单图。 P 中的点可以重合，因此 P 是一个多重集，字典序中的并列情况任意打破。对于图 G， $\omega(G)$、 $\chi(G)$ 和 $\mathcal{I}(G)$分别表示团数、色数和独立集族。 G 的分数着色 是一个向量 $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{I}(G)}$，满足对于每个顶点 v都有 $\sum_{I \ni v} y_I \geq 1$。其值 为 $\sum_I y_I$，而 $\chi_f(G)$是最小值。每个团与每个独立集至多相交于一个顶点，因此 $\omega \leq \chi_f \leq \chi$。对于 $A \subseteq \mathbb{R}^2$，我们记 $\operatorname{diam}_\infty(A) = \sup_{a,\ b\in A}\|a-b\|_\infty$。

▶ **定义 5** (c-可扫描)。 设 $c \geq 2$ 为一个整数。顶点是 $\mathbb{R}^2$ 中点的图类 $\mathcal{G}$ 称为 c-可扫描，如果每个 $G=(P,E) \in \mathcal{G}$ 都满足：
(S1) 若 $uv \in E$ 则 $\|u-v\|_\infty \leq 1$；*(S2)* 每个满足 $\operatorname{diam}_\infty(A) \leq 1/2$ 的 $A \subseteq P$ 都是 G的一个团；*(S3)* 存在 P上的一个线性序 $\prec$，并且对每个 $v \in P$，存在集合 $Q_1(v)$.....、$Q_c(v) \subseteq \mathbb{R}^2$，使得 $v \in Q_j(v)$，$\operatorname{diam}_\infty(Q_j(v)) \leq 1$，$P \cap Q_j(v)$ 是 G的一个团，并且 v 的每个邻点$u \prec v$ 都属于 $\bigcup_j Q_j(v)$。该序以及 $Q_j(v)$ 中的隶属关系可以在多项式时间内计算出来。

这些条件可由诱导子图继承：对于 $R \subseteq P$，图 $G[R]$ 在受限序以及相同的集合 $Q_j(v)$ 下满足 (S1)–(S3)。仅条件 (S3) 就意味着 G 是 c-单纯的 [18, 33]，这已经使得按序 $\prec$ 进行的首次适配最多使用 $c(\omega-1)+1$种颜色；(S1)、(S2) 以及集合 $Q_j(v)$ 则增加了舍入所需的局部性。

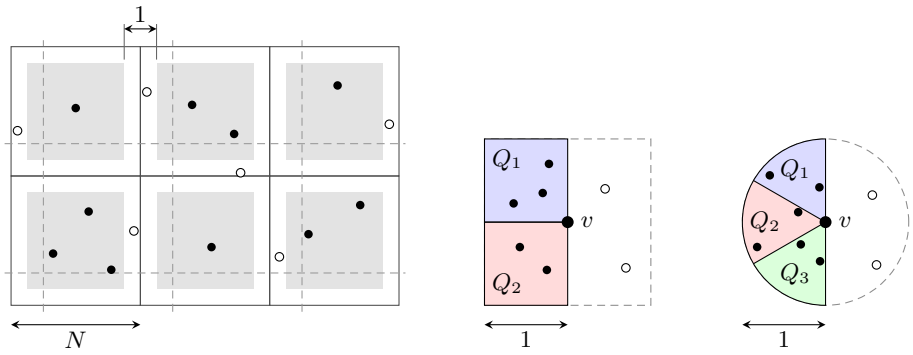
▶**引理 6**。 单位圆盘图是3-可扫描的，单位正方形图是2-可扫描的。

证明。 设 $\prec$ 是 $(x,\ y)$上的字典序。（S1）：在这两个类中，相邻点的欧几里得或 L_∞ 距离至多为 1，因此它们的 L_∞ 距离至多为 1。（S2）：一个集合中的两个点的 L_∞-直径至多为 $1/2$ 时，它们的欧几里得距离至多为 $\sqrt{2}/2 < 1$，因此在这两个类中它们均相邻。

（S3）对于正方形：每个邻点 $u \prec v$ 都有 $x_u \leq x_v$ 和 $|y_u - y_v| \leq 1$，因此它位于$Q_1(v) = [x_v-1, x_v] \times [y_v, y_v+1]$ 或 $Q_2(v) = [x_v-1, x_v] \times [y_v-1, y_v]$中。二者都是包含 v 的闭单位正方形（图2(b)），而闭单位正方形中的点两两的 L_∞距离至多为 1，因此它们构成一个团。

（S3）对于圆盘：每个邻点 $u \prec v$ 都位于闭左半圆盘 $\{p: \|p-v\|_2 \leq 1,\ x_p \leq x_v\}$ 内。若 $x_u = x_v$，则 $y_u \leq y_v$，所以 u 位于向下射线上。令 $Q_1(v)$ $Q_2(v)$ $Q_3(v)$ 为以 v 为顶点、半径为 1，分别跨越方向 $[90^\circ, 150^\circ]$、$[150^\circ, 210^\circ]$ 和 $[210^\circ, 270^\circ]$ 的闭扇形。它们覆盖整个闭左半圆盘，包括两条边界射线（图 2(c)）。半径为 1 的闭 60° 扇形的欧几里得直径恰好为 1，因此其中的点构成一个团，且其 L_∞直径不超过其欧几里得直径。无需使用平方根即可判定隶属关系，因为对于 $u-v=(a,\ b)$，若 $a \leq 0$，则位于 150° 和 210° 处的射线就是 $a^2 = 3b^2$。

◀



(a) 一轮　(b) 正方形，$c = 2$　(c) 圆盘，$c = 3$

图2 (a) 一轮的瓦片（实线）和下一轮的瓦片（虚线）；内部周围带状区域内的点（阴影部分）为空心。(b)、(c) 集合 $Q_j(v)$ 覆盖了 v（实心）的较早邻点；较晚的邻点（空心）位于右半部分。

▶ **引理 7**（扫描）。设 $G = (P, E)$ 属于一个可由 c 扫描的类，且 $R \subseteq P$。按照顺序 $\prec$ 对 $G[R]$ 进行首次适配，得到一个合法着色，所用颜色不超过

$$1 + \max_{v \in R} \sum_{j=1}^{c} |(Q_j(v) \cap R) \setminus \{v\}| \;\le\; c\,(\omega(G[R]) - 1) + 1$$

颜色。特别是 $\chi(G) \le c\,\omega(G) - c + 1$。

证明。 当 v 被着色时，其在 R 中的较早邻点所使用的颜色数至多等于此类邻点的数量，而这些邻点位于 $\bigcup_j (Q_j(v) \cap R) \setminus \{v\}$ 中，这是由（S3）得到的。每个 $Q_j(v) \cap R$ 都是包含 v的团，因此至多还有 $\omega(G[R]) - 1$ 个其他点。◀

铺砌。 对于整数 $L \ge 2$ 和 o，铺砌 $\mathcal{T}(L, o)$ 由以下瓦片组成

$$T = [o + aL,\ o + (a+1)L) \times [o + bL,\ o + (b+1)L), \qquad a, b \in \mathbb{Z},$$

其内部 $T^\circ = [o + aL + \frac{1}{2},\ o + (a+1)L - \frac{1}{2}) \times [o + bL + \frac{1}{2},\ o + (b+1)L - \frac{1}{2})$（图2(a)）。偏移量 o 沿对角线平移该铺砌，其理念源于平移技术 [15]。

▶ **引理 8。** 设 $L \ge 2$ 为一个整数。

(i) 位于不同瓦片的内部的两个点 $\mathcal{T}(L, o)$ 之间的 L_∞ 距离大于1。**(ii)** 在任意 L 个连续整数 o中，对于给定的点，至多有两个整数使得该点 p不位于$\mathcal{T}(L, o)$的任何内部。

证明。(i) 由于内部是半开的，两个点的某一个坐标相差超过 $(o + a'L + \frac{1}{2}) - (o + a'L - \frac{1}{2}) = 1$（其中 a' 为某个整数）。(ii) 点 p 只有在 $(x_p - o) \bmod L$ 或 $(y_p - o) \bmod L$ 位于 $[L - \frac{1}{2}, L) \cup [0, \frac{1}{2})$ 中时，才不位于任何内部；后者是长度为 1、圆周长为 L的圆上的一个半开弧。当 o 遍历 L 个连续整数时，$(x_p - o) \bmod L$的各个值彼此相距 1，因此恰有一个值位于该弧内。 y_p的情形相同。◀

计算模型。 我们使用不含取整函数的实数 RAM。输入坐标仅通过邻接关系、次序 $\prec$、集合 $Q_j(v)$ 中的隶属关系，以及点在瓦片和条带中的放置方式发挥作用；其他所有内容，包括线性规划，

都是对多项式位长有理数进行的精确算术，因此对于有理数输入，这些算法也能在图灵机上于多项式时间内运行。我们的所有算法都使用相同的颜色分别为 G 的每个连通分量着色；这已足够，因为 ω、χ_f 和 χ of G 是各分量上的最大值。将所有点和所有集合 Q_j (v) 平移同一个向量会保持 (S1)–(S3) 不变，因此我们可以平移一个连通分量，使其最小的 x- 和y-坐标为 0。根据 (S1)，其坐标随后落在 $[0, n-1]$ 中，并通过在 $\{0, \ldots, n-1\}$ 上进行二分搜索，找出每个坐标的整数部分；这样只需 $O(\log n)$ 次比较，即可确定每个点所属的瓦片或条带。

▶ **引理 9**（分数着色）。对于每个 c-可扫描类以及每个固定的 $\delta > 0$，存在一个多项式时间算法；给定该类中的图 G，即可计算一个分数着色 y，其值至多为 $(1+\delta)\chi_f(G)$，且其条目均为有理数，非零条目数量为多项式级。

证明。 设 $D = 2 + \lceil 2/\delta \rceil$，使得 $D/(D-2) \leq 1+\delta$。固定一个偏移量 $o \in \{0, \ldots, D-1\}$ 以及一个瓦片 T，它属于 $\mathcal{T}(D, o)$，且满足 $P_T := P \cap T^\circ \neq \emptyset$。内部 T° 被 $(2D-2)^2$ 个边长为 $1/2$ 的半开单元覆盖；根据 (S2)，每个单元至多包含独立集中的一个顶点。因此，$G[P_T]$ 至多有 $(n+1)^{4D^2}$ 个独立集，其分数着色线性规划的规模为多项式级。无论坐标如何，其约束矩阵的条目均为 0 或 1，右端项均为 1，因此可以在多项式时间内精确计算一个最优基本解 y^T。该解为有理数，至多有 $|P_T|$ 个非零条目，且其值为$f_T = \chi_f(G[P_T]) \leq \chi_f(G)$。

接下来，我们将解 y^T在 $\mathcal{T}(D, o)$ 的各瓦片上合并。对于每个 T，将 $[0, f_T)$ 分割为连续的半开区间；对于每个满足 $y^T_I > 0$ 的集合 I，分配一个长度为 y^T_I 的区间。对于 $x \geq 0$，令$S(x)$ 为所有满足 $x < f_T$ 的瓦片 T 上的集合 I 的并集，其中该集合在 $[0, f_T)$ 中的区间包含 x。根据引理 8(i) 和 (S1)，$S(x)$ 是 G的独立集。函数 S 仅在至多 $\sum_T |P_T| \leq n$ 个区间端点处发生变化。令 $y^{(o)}$ 为每个非空集合 I 赋予 $\{x : S(x) = I\}$ 的总长度。则 $y^{(o)}$ 至多有 n 个非零项，且其值至多为 $\max_T f_T \leq \chi_f(G)$；包含顶点 $v \in P_T$ 的集合的总权重为 $\sum_{I \ni v} y^T_I \geq 1$。

根据引理8(ii)，每个顶点至少位于 $D-2$ 个 D 偏移量的内部。因此，$y = \frac{1}{D-2}\sum_o y^{(o)}$ 是 G的一个分数着色，其值至多为 $\frac{D}{D-2}\chi_f(G) \leq (1+\delta)\chi_f(G)$，且非零项不超过 Dn 个。◀

对于单位圆盘图和单位正方形图，引理 9 也可由 [16, 定理 52] 和 [9,定理 2.10 及第 4] 节推出。

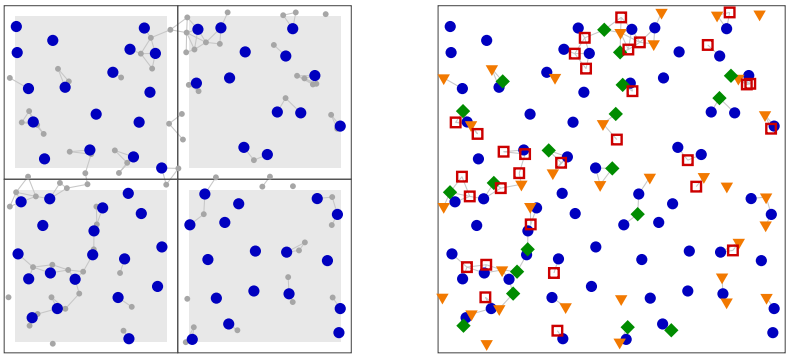
▶ **引理 10** (有界差分 [25])。设 Z_1、…、Z_N 为相互独立的随机变量，且 $X = f(Z_1$、…、$Z_N)$，其中改变任意一个参数至多使 f改变1。则对于每个 $t \geq 0$，有$\Pr[X \geq \mathbb{E}X + t] \leq \exp(-2t^2/N)$。

▶ **引理 11** ([28]；对称形式)。设 Z 是一个有限的相互独立随机变量集，A 是一个有限的事件集，其中每个事件由 Z 的一个子集决定。假设每个事件的概率至多为 p，并且与至多 $d \geq 1$ 个其他事件共享变量，且 $ep(d+1) \leq 1$。那么，重抽样算法能够找到 Z 的一个赋值，使得 A 中没有事件发生，且期望重抽样步骤数至多为 $|A|/d$。

每一步重新采样只需能够对变量进行采样，并检查给定事件是否成立；在我们的设定中，这两项操作都可在多项式时间内完成。

3 通过线性规划舍入实现渐近近似

本节证明引理 17。第 3.1 节介绍该算法：它在 N 平移铺砌的各个瓦片中，独立地从分数着色中抽取颜色类，并为



(a) 第 1 轮：类 C_1　　(b) 三轮之后

图 3 边长为 8 的瓦片、由 150 个随机点构成的单位圆盘图（边以阴影标示），以及用随机极大独立集代替线性规划抽样的示意图。(a) 第 1 轮：每个瓦片内部（阴影部分）选取一个独立集（大圆点）。(b) 三轮之后，每个已覆盖顶点的颜色取自其所属的第一个类（蓝色圆圈、橙色三角形、绿色菱形）；剩余图（红色正方形）通过扫描着色。

其余顶点进行扫描着色；第 3.2 节对该算法进行分析。

从启发式角度看，每轮以至少 $1/F$ 的概率覆盖一个顶点，其中 F 是分数着色的值，因此经过 sF 轮后，一个顶点仍未被覆盖的概率约为e^{-s}，而每个团 $Q_j(v)\cap P$大约保留 $e^{-s}\omega \le e^{-s}F$ 个顶点。随后扫描需要约 $ce^{-s}F$种颜色（引理 7），总计为 $(s+ce^{-s})F$，在 $s=\ln c$ 处达到最小值。每个瓦片独立抽样，可让局部引理一次性将所有偏差限制在 $O(\sqrt{F}\log F)$ 以内。

3.1 算法

固定一个可进行 c-扫描的类、一个输入 $G=(P,E)$（其中 $n=|P|$），以及一个值为 F、具有有理数条目和多项式支撑集的分数着色 y，如引理 9 所述。该算法有一个整数参数，即轮次数 $N\ge 3$，它同时也是瓦片的边长。

轮次。 第 $k\in\{1,\dots,N\}$ 轮使用铺砌 $\mathcal{T}(N,k)$，因此铺砌在每一轮之间偏移一个单位，并且每个模 N 的偏移量恰好使用一次。图 3 展示了一个小型示例中的整个过程。对于每一轮 k，以及 $\mathcal{T}(N,k)$ 中内部包含 P 中某一点的每个瓦片 T（每轮至多有 n 个瓦片），独立地随机抽取一个随机独立集 $Z_{k,T}\in\mathcal{I}(G)$，使得 $\Pr[Z_{k,T}=I]=y_I/F$。

颜色类。 对于轮次 k 令

$$C_k=\bigcup_{T}\bigl(Z_{k,T}\cap T^{\circ}\bigr).$$

将属于某个 C_k 的每个顶点赋予其中最小的 k 作为其颜色。令 R 为剩余顶点的集合（剩余图），并用上述颜色 N 通过扫描为 $G[R]$ 着色。

局部引理。 对于 $v\in P$ 和 $j\in[c]$，令 $X_{v,j}=|Q_j(v)\cap P\cap R|$，并令 $A_{v,j}$ 为事件 $X_{v,j}\ge \mathbb{E}X_{v,j}+t$，其中期望是对独立抽样取的，且 t 在第 3.2 节中固定。使用 Moser–Tardos 算法对抽样 $Z_{k,T}$ 进行重新抽样，直至没有事件 $A_{v,j}$ 成立。然后，算法输出上述着色。

▶**引理 12.** 每个 C_k 都是一个独立集，因此输出是一个合法着色。

证明。 C_k 中同一瓦片内部的两个顶点属于同一个独立集 $Z_{k,\,T}$。不同内部中的两个顶点之间的距离大于 1（由引理 8 可知），因此根据 (S1)，它们不相邻。第一阶段着色的顶点获得颜色 1、.....、N，每轮对应一个类。剩余图通过合法的首次适配着色获得大于 N 的颜色。◀

3.2 分析

我们证明该算法在期望多项式时间内运行，并根据线性规划值 F界定其使用的颜色数。对于 $v \in P$令 $\Gamma_v \subseteq [N]$ 表示满足以下条件的轮次集合： k其中 v 位于其瓦片的内部。这些 N轮次使用 N个连续的偏移量，因此根据引理8(ii)可得 $|\Gamma_v| \geq N-2$。

▶ **引理 13**（期望）。 令 $N \geq sF+2$ 对某个 $s>0$成立。则对于每个 v都有 $\Pr[v \in R] \leq e^{-s}$，且 $\mathbb{E}X_{v,\,j} \leq \omega\, e^{-s}$。

证明。 在轮次 $k \in \Gamma_v$中，当 $v \in Z_{k,\,T}$时，顶点 v 被覆盖；对于其瓦片 T，该事件以概率 $\sum_{I \ni v} y_I/F \geq 1/F$发生。这些事件关于 k相互独立。因此

$$\Pr[v \in R] \leq (1-1/F)^{|\Gamma_v|} \leq \exp(-|\Gamma_v|/F) \leq \exp(-(N-2)/F) \leq e^{-s}.$$

对于第二个断言，根据 (S3)， $P \cap Q_j(v)$ 是一个团，因此至多有 ω 个顶点。 ◀

▶ **引理 14**（集中性）。 概率$[A_{v,j}] \leq$ 指数$(-2t^2/N)$。此外，$A_{v,\,j}$ 由抽取 $Z_{k,\,T}$ 决定，其中 $T^\circ \cap Q_j$（v） $\cap P \neq \emptyset$，每轮 k 至多有一次这样的抽取。

证明。 令 $Q = Q_j(v) \cap P$。由于 $\mathrm{diam}_\infty(Q_j(v)) \leq 1$，且同一轮中不同瓦片的内部之间的距离大于 1（引理 8(i)），集合 Q 每轮至多与一个内部 T_k°相交。当且仅当对于某一轮 k 且满足 $u \in T_k^\circ$ 时，一个顶点 $u \in Q$ 被覆盖，即 $u \in Z_{k,\,T_k}$。因此，$X_{v,\,j} = |Q \cap R|$ 是至多 N 个独立变量 $Z_{k,\,T_k}$的函数。改变其中一个变量，例如从 I 改为 I'，只会改变第 k 轮中 $I \cap Q \cap T_k^\circ$和 $I' \cap Q \cap T_k^\circ$的顶点的覆盖情况。这两个集合中的每一个至多包含一个顶点，因为 Q 是一个团，而 I，I' 是独立的。第一个顶点可能变为未覆盖，第二个顶点可能变为被覆盖，因此 $X_{v,\,j}$ 的变化至多为 1。引理 10 适用。◀

▶ **引理 15**（依赖关系）。 每个事件 $A_{v,\,j}$ 与少于 $c(4N+5)^2\omega$个其他事件共享变量。

证明。 如果 $A_{v,\,j}$和 $A_{v',\,j'}$共享一个变量 $Z_{k,\,T}$，那么存在 $q \in Q_j(v) \cap T^\circ$ 和 $q' \in Q_{j'}(v') \cap T^\circ$。由于 $\mathrm{diam}_\infty(T^\circ) \leq N-1$（图 4），且每个 Q-集合都包含其顶点，直径至多为 1，因此我们得到 $\|v-v'\|_\infty \leq \|v-q\|_\infty + \|q-q'\|_\infty + \|q'-v'\|_\infty \leq 1+(N-1)+1 = N+1$。该正方形 $[x_v-N-1, x_v+N+1] \times [y_v-N-1, y_v+N+1]$ 由 $(4N+5)^2$个边长为 $1/2$的半开单元覆盖。每个单元的 L_∞-直径至多为 $1/2$，因此根据（S2），其中至多包含 ω 个 P的点。每个这样的 v' 携带 c 个事件，而此计数包括 $A_{v,\,j}$ 本身。◀

现在我们固定参数，选择 t，使得每个事件的概率至多为 e^{-m}，其中 $m \approx \ln d_0$，正如引理 11 所需。令 $s>0$ 为一个有理数，并设

$$N = \lceil sF \rceil + 2, \qquad d_0 = c(4N+5)^2 F, \qquad m = 1 + \left\lceil \tfrac{7}{10} \log_2 d_0 \right\rceil, \qquad t = \sqrt{\tfrac{mN}{2}}.$$

所有这些量都可以由有理数 s 和 F 精确计算得到： m 是满足 $2^{10(m-1)} \geq d_0^7$ 的最小整数。由于 $\frac{7}{10} > \ln 2$，我们有 $\frac{7}{10}\log_2 d_0 \geq \ln d_0$，因此

$$1 + \ln d_0 \;\leq\; m \;\leq\; 2 + \tfrac{7}{10}\log_2 d_0.$$

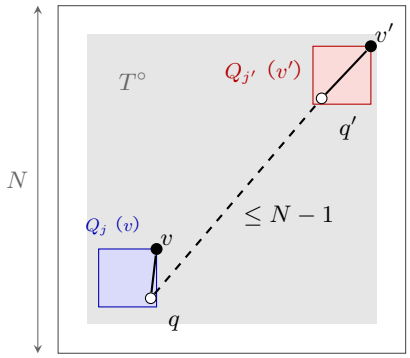


图 4 引理 15 的证明：如果 $Q_j(v)$ 和 $Q_{j'}(v')$ 与同一个 T° 相交，那么 $\|v-v'\|_\infty \le N+1$.

▶ **引理 16。** 对于每个有理数 $s>0$，具有这些参数的算法都将在期望多项式时间内终止，并且至多使用

$$(s + c\,e^{-s})\,F + c\sqrt{mN/2} + 4 - c$$

种颜色。

证明。 根据引理 14 和引理 15，每个事件的概率至多为 $p = \exp(-2t^2/N) = e^{-m} \le 1/(e\,d_0)$；而且，由于整数 $c(4N+5)^2\omega$ 至多为 d_0，每个事件至多与 $d := \lfloor d_0 \rfloor - 1$ 个其他事件共享变量，其中 $d \ge 1$，因为 $d_0 \ge 2\cdot 17^2,$，所以 $e\,p(d+1) \le 1$。共有 cn 个事件和至多 nN 个变量，每个变量都从一个具有多项式支撑集的显式分布中采样。每个事件都可以精确求值：$\mathbb{E}X_{v,\,j} = \sum_{u\in Q_j(v)\cap P}(1 - \sum_{I\ni u} y_I/F)^{|\Gamma_u|}$ 是一个大小为多项式的有理数；而且，由于 $t^2 = mN/2$ 是有理数，与 t 的比较在平方后可以精确进行。根据引理 11，经过期望多项式步数的重新采样后，所有事件 $A_{v,\,j}$ 均不成立。

那么，对于所有 v 和 j，$X_{v,j} < \mathbb{E}X_{v,j} + t$。对于所有 j，每个 $v\in R$ 都属于 $Q_j(v)\cap R$，因此根据引理 7，在最坏的 $v\in R$ 情况下，剩余图使用的颜色至多为 $1 + \sum_j (X_{v,j} - 1)$。引理 13 适用，因为 $N \ge sF + 2$，所以颜色总数至多为

$$N + 1 - c + c\big(\omega\,e^{-s} + t\big) \;\le\; sF + 4 - c + c\,e^{-s}F + c\,t,$$

其中我们用到了 $N \le sF + 3$ 和 $\omega \le F$。 ◀

▶ **引理 17.** 设 G 是一个 c-可扫描类。对于每个 $\varepsilon\in(0,1]$，存在一种随机化算法，其期望多项式运行时间可为每个 $G\in G$ 着色，且至多使用 $(1+\ln c+\varepsilon)\chi_f(G) + K_\varepsilon$ 种颜色，其中 K_ε 仅取决于 c 和 ε。

证明。固定有理数 s，使得 $\ln c \le s \le \ln c + \varepsilon/4$，从而 $s + c\,e^{-s} \le s+1 \le 1 + \ln c + \varepsilon/4$。根据引理 9，利用 $F \le (1+\delta)\chi_f$ 计算 y，其中 $\delta = \varepsilon/(2(2+\ln c))$，并运行第 3.1 节的算法。在引理 16 的界中，我们有 $N \le sF+3 \le (s+3)F$ and $d_0 \le c(4s+17)^2F^3$，因此 $m \le \gamma + 2.1\log_2 F \le \gamma + 3.1\ln F$，其中 $\gamma = 2 + \frac{7}{10}\log_2(c(4s+17)^2)$。结合 $\lambda = c^2(s+3)/2$、算术—几何平均不等式以及对于 $\theta = 49.6\lambda/\varepsilon^2$ 有 $\ln F \le F/\theta + \ln\theta - 1$，

$$c\sqrt{mN/2} \;\le\; \sqrt{\lambda F(\gamma + 3.1\ln F)} \;\le\; \frac{\varepsilon F}{8} + \frac{2\lambda(\gamma + 3.1\ln F)}{\varepsilon} \;\le\; \frac{\varepsilon F}{4} + K',$$
$$K' \;=\; \frac{2\lambda}{\varepsilon}\Big(\gamma + 3.1\ln\frac{50\lambda}{\varepsilon^2}\Big),$$

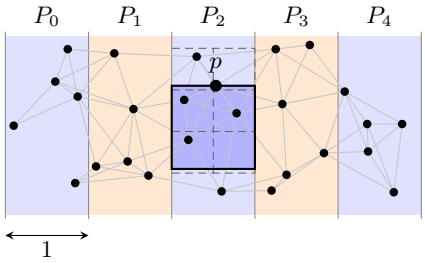


图5 引理18和引理19：条带交替使用颜色集； p 的较早邻点位于六个单元中。

a一个仅取决于 c 和 ε 的显式常数。由于 $4-c\leq 2$，算法至多使用

$$(1+\ln c+\varepsilon/2)F+K'+2 \;\leq\; (1+\ln c+\varepsilon/2)(1+\delta)\chi_f+K'+2 \;\leq\; (1+\ln c+\varepsilon)\chi_f+K'+2$$

颜色，因为 $(1+\ln\, c+\varepsilon/2)\delta\leq(2+\ln c)\delta=\varepsilon/2$。 ◀

引理 16 的界对每个 F 都成立，因此无需单独处理较小的 F。随着 s 趋于 $\ln\, c$，它变为 $(1+\ln\, c)F+O(\sqrt{F}\log\, F)$；引理 17 的 ε 只需考虑线性规划、有理数 s 以及这个低阶项。对于单位圆盘图，引理 17 给出的常数为 $1+\ln 3$，而第 5 节将其降低至定理2中的常数。

4 一种 2.1-近似算法

本节针对具有 $c\geq 3$ 的类消除引理 17 中的加性常数（引理 20），从而为单位圆盘图和凸多边形的平移副本给出一种 2.1-近似算法。引理 17 中的加性常数 K_ε 至多为 $\varepsilon\chi_f$，只要 $\chi_f\geq K_\varepsilon/\varepsilon$。因此，只有当 χ_f 时它才会起作用，进而 $\omega\leq\chi_f$ 小于某个常数，此时只需为有界团数的图着色。在一个宽度有界的垂直条带内，按 y 排序后，这样的图具有有界带宽，因此可以在多项式时间内 [1]求得最优着色。

▶ **引理18**（条带着色）。 设 G 是一个 c-可扫描类，且 $W\geq 1$ 为整数。存在一种算法，给定整数 $C\geq 1$ 和一个由 n 个点构成、满足$\omega(G)\leq C$均位于垂直条带 $a\leq x<a+W$ 内的图 $G\in G$，可在$O(n\log\, n)+2^{O(WC\log(WC))}n$时间内计算出 G 的最优着色。

证明。 按点的 y坐标排序，平局时任意处理。若 q 先于 p，且 qp 是一条边，则由 (S1) 可知，点 q、p及它们之间的所有点都位于 $[a,a+W)\times[y_p-1,y_p]$中；该区域由 $6W$ 个边长为 $1/2$ 的半开单元覆盖（图5），因此根据 (S2)，其中至多包含$b=6WC$个点；所以，p的每个较早邻点都在它之前的 $b-1$ 个点之中。因此，按此顺序进行首次适配至多使用 b 种颜色；对于每个 $k\leq b$，沿此顺序进行动态规划，保留最后 $b-1$ 个点的、能够扩展到所有较早点的 k-着色，从而判断 G 是否可以用 k种颜色着色；其中最小的 k 便给出最优着色。排序耗时 $O(n\log\, n)$，对于每个 k，动态规划至多保留 k^{b-1}种着色，并在每个点处尝试 k 种颜色；每种颜色都通过该点的邻接表与 $b-1$ 个前驱点进行检查。根据 (S1) 和 (S2)，邻接表长度小于 $25C$，因此所有 $k\leq b$步骤总共耗时 $2^{O(WC\log(WC))}n$。◀

宽度为 1 的条带上使用两个交替调色板，损失的因子便只有 2。

▶**引理 19**（条带）。 设 G 是一个 c-可扫描类。存在一种算法，给定整数 $C\geq 1$ 和一个含有 n 个点、具有 $\omega(G)\leq C$的图 $G\in G$，可在 n 时间内用至多 $2\chi(G)$ 种颜色对 G 进行着色，其中 $O(n\log\, n)+2^{O(C\log C)}$。

证明。 根据 (S1)，条带 $P_i = \{p \in P\colon i \le x_p < i+1\}$ 与 $P_{i'}$ 若 $|i-i'| \ge 2$，则它们之间没有边相连。因此，根据引理18，以 $G[P_i]$ 对每个 $W=1$进行最优着色：若 i 为偶数，则使用一个颜色集；若 i 为奇数，则使用另一个颜色集。这样至多需要 $2\max_i \chi(G[P_i]) \le 2\chi(G)$ 种颜色。◀

▶ **引理 20.** 设 G 是一个满足 $c \ge 3$ 的 c-可扫描类。对于每个 $\varepsilon \in (0,1]$，都存在一种随机化算法，其期望运行时间为多项式，并能为每个 $G \in G$ 着色，且所用颜色数至多为 $(1+\ln c+\varepsilon)\chi(G)$。

证明。设 $K = K_{\varepsilon/2} = K' + 2$ 为引理 17 的显式常数，并令 $C \ge 4K/\varepsilon$ 为一个整数。根据引理 9，计算值为 $F \le 2\chi_f$ 的分数着色。若 $F \ge C$，则 $\chi_f \ge 2K/\varepsilon$，而引理 17 的算法至多使用 $(1+\ln c+\varepsilon/2)\chi_f + K \le (1+\ln c+\varepsilon)\chi_f \le (1+\ln c+\varepsilon)\chi$ 种颜色。否则 $\omega \le \chi_f \le F < C$，而引理 19 给出的颜色数至多为 $2\chi \le (1+\ln c)\chi$，因为 $\ln c \ge \ln 3 > 1$。◀

根据引理 6，引理 20 使用 $c=3$ 和 $\varepsilon = 1/1000$ 种颜色为每个单位圆盘图着色，所需颜色数至多为 $(1+\ln 3 + 1/1000)\chi < 2.0997\chi$。

4.1 凸多边形的平移副本

本小节表明，经过线性坐标变换后，凸多边形的平移副本的交图是 3-可扫描的；这将引理 17、引理 20 和定理 26 扩展到 $c=3$，并证明定理 3。设 $M \subset \mathbb{R}^2$ 是一个内部非空的凸多边形，且令 $P \subset \mathbb{R}^2$ 为有限集。平移副本 $M+p$、$p \in P$ 的交图有一条边 pq，当且仅当 $p-q$ 位于 B 中：$= M - M = \{x-y\colon x,y \in M\}$。集合 B 是一个关于原点对称的凸多边形；以圆盘或正方形作为 B 时，也以相同方式定义单位圆盘图和单位正方形图。扫描为这些图给出 $\chi \le 3\omega - 2$ [19]，这是一种 3-近似；据我们所知，还没有更小的比率。如果 M 是平行四边形，则线性映射可将这些图变为单位正方形图。

▶ **引理 21**（隐含于 [19,定理 8]）。经过仅依赖于 M 的线性坐标变换后，M 的平移副本所构成的交图形成一个可进行3次扫描的类。

证明。令 e_1, e_2 为 B 的顶点，使 $|\det(e_1,e_2)|$ 最大；$x,y \in B$ 上的 $|\det(x,y)|$ 最大值在顶点处取得。应用将 e_1, e_2 分别映射到 (1, 0)、(0, 1) 的线性映射。在新坐标中，每个 $w \in B$ 都满足 $|x_w| = |\det(w,e_2)|/|\det(e_1,e_2)| \le 1$，反向亦然 $|y_w| \le 1$，因此 $B \subseteq [-1,1]^2$，即 (S1)。此外，B 包含 $\pm e_1, \pm e_2$ 的凸包，因而也包含正方形 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^2$，即 (S2)。

对于（S3），令 $\prec$ 为（x，y）上的字典序，如引理 6 所示。令 $H = \{w \in B\colon x_w \le 0\}$，使得 v 的每个邻点 $u \prec v$ 都属于 $v+H$，并定义

$$Q_1(v) = v + \{w \in H : w - e_2 \in B\}, \qquad Q_3(v) = v + \{w \in H : w + e_2 \in B\},$$
$$Q_2(v) = v + \big(\{0\} \cup \{w \in H : w + e_2 \notin B,\ w - e_2 \notin B\}\big).$$

这些集合包含 v 并覆盖 $v+H$（图 6），且隶属关系由线性不等式决定。令 H_1，H_2，$H_3 \subseteq H$ 为满足 $Q_j(v) = v + H_j$ 的集合。由于 $B \subseteq [-1,1]^2$，只需证明：当对于某个 j 有 w，$w' \in H_j$ 时，$w - w' \in B$；此时 $P \cap Q_j(v)$ 是一个团，且 $\mathrm{diam}_\infty(Q_j(v)) \le 1$。这正是定理 [19, Theorem 8] 的证明中断言 3.1–3.3 的内容；我们给出一个自包含的证明。

设 $\|x\| = \min\{\lambda \ge 0\colon x \in \lambda B\}$ 为单位球为 B 的范数，使得 $w - w' \in B$ 当且仅当 $\|w-w'\| \le 1$，且对于每个 q，$x \mapsto \|x-q\|$ 都是凸集。B的顶点 $\pm e_1$ 和 $\pm e_2$

的范数为 1，且 0 是 B的内点。我们将用到一个不等式：若两条线段 $[p,p']$和 $[q,q']$ 交于一点 z，则在 z 处应用三角不等式可得

$$\begin{aligned}\|p-p'\|+\|q-q'\| &= \|p-z\|+\|z-p'\|+\|q-z\|+\|z-q'\| \\ &\geq \max\{\|p-q\|+\|p'-q'\|,\ \|p-q'\|+\|q-p'\|\}. \qquad (*)\end{aligned}$$

集合 H_1。令 $w,w'\in H_1$。若 w 或 w' 为 0 或 e_2，则结论显然成立，因此不妨设它们都不是。由于 $w-e_2\in B\subseteq[-1,1]^2$，我们有 $y_w\geq 0$；同理，$y_{w'}\geq 0$，因此四个点 0、e_2、w、w' 都位于带状区域 $\{x\leq 0,\ 0\leq y\leq 1\}$ 内，其中 0 和 e_2 是角点。带状区域的角点只有在本身就是其中一个点时，才会位于该区域内其他点的凸包中，因此 0 和 e_2 都不在其余三个点的凸包中。若 w 位于 0、e_2、w'的凸包中，则由凸性可知 $\|w-w'\|\leq\max\{\|0-w'\|,\|e_2-w'\|,0\}\leq 1$；同理，若 w'位于 0、e_2、w的凸包中，也有相应结论。否则，这四个点就是一个凸四边形的顶点。其对角线相交，因此 0 和 e_2 不是相对顶点，因为若是如此，w 和 w' 就会严格位于 y轴的两侧。因此，对角线是 $[0,r]$ 和 $[e_2,r']$，且 $\{r,r'\}=\{w,w'\}$，由 $(*)$ 得 $2\geq\|r\|+\|e_2-r'\|\geq\|e_2\|+\|r-r'\|=1+\|w-w'\|$。用 $-e_2$ 替换 e_2，并考虑带状区域 $\{x\leq 0,\ -1\leq y\leq 0\}$，对 H_3应用同样的论证即可。

集合 H_2。集合 $B\cap(B-e_2)$ 包含 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$；令 b_0 为其中 x 坐标最小的点，因此 $x_{b_0}\leq-\frac{1}{2}$，并令 $b_1=b_0+e_2$。我们首先证明 b_0 和 b_1 位于 B 的边界上。对于 $x\in[-1,1]$，令 $\ell(x)$ 表示 B 中垂直弦 $\{y:(x,y)\in B\}$ 的长度；由 B 的凸性可知它是凹函数，并且根据 b_0 的选取，对于 $x<x_{b_0}$，有 $\ell(x)<1$。位于 x_{b_0} 处的弦包含 b_0 和 b_1，二者的垂直距离为 1。若 $x_{b_0}=-1$，则 b_0 和 b_1 位于 $B\subseteq[-1,1]^2$ 的边界上。否则，ℓ 在内点 x_{b_0} 处连续，因此 $\ell(x_{b_0})\leq 1$；位于 x_{b_0} 处的弦就是线段 $[b_0,b_1]$，其端点位于 B 的边界上。因此 $\|b_0\|=\|b_1\|=\|b_1-b_0\|=1$。

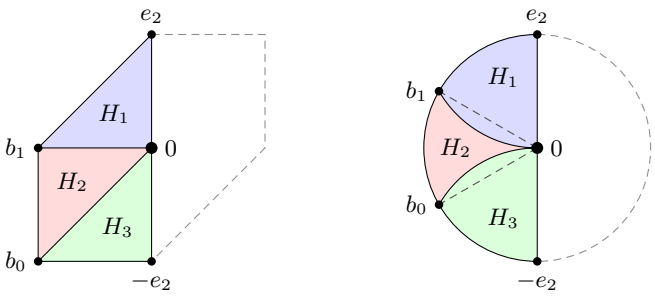
对于 $p,q\in\mathbb{R}^2$，令 $\angle(p,q)=\{\lambda p+\mu q:\ \lambda,\mu\geq 0\}$。由于 $x_{b_1}=x_{b_0}<0$和 $y_{b_1}>y_{b_0}$，半平面 $\{x\leq 0\}$ 是 $\angle(e_2,b_1)$、$\angle(b_1,b_0)$ 和 $\angle(b_0,-e_2)$ 的并集。我们证明$B\cap\angle(e_2,b_1)\subseteq H_1$。令 $w\in B\cap\angle(e_2,b_1)$。如果 w位于顶点为 0、e_2、b_1 的三角形内，那么根据凸性，$\|w-e_2\|\leq\max\{\|e_2\|,0,\|b_1-e_2\|\}=1$。否则，线段 $[0,w]$ 与$[e_2,b_1]$相交，而 $(*)$ 给出 $\|w\|+\|e_2-b_1\|\geq\|b_1\|+\|e_2-w\|$，因此 $\|w-e_2\|\leq 1$。同理，利用 $\|b_0\|=\|-e_2-b_0\|=1$，我们得到 $B\cap\angle(b_0,-e_2)\subseteq H_3$。因此 $H_2\subseteq B\cap\angle(b_1,b_0)$。

仍需证明，对于 u，$u'\in B\cap\angle(b_1,b_0)$，$\|u-u'\|\leq 1$。该集合是凸的，并且 $\|u-u'\|$在 u 和 u' 中都是凸的，因此我们可以假设 u 和 u' 是该集合的极点。由于对于每个 $u\in B$，都有$\|u\|\leq 1$，我们还可以假设 $u,u'\neq 0$，因此 u 和 u' 位于 B的边界上；交换二者后，$u\in\angle(b_1,b_0)$ 且 $u'\in\angle(u,b_0)$。令 $p\in B\cap\angle(b_1,b_0)$，并令 $q\in\angle(p,b_0)$ 位于 B的边界上。从 0 出发经过 q 的射线与线段$[p,b_0]\subseteq B$相交；由于 0 是 B的内点，B 中位于这条射线上的点构成线段$[0,q]$。因此，$[0,q]$ 与 $[p,b_0]$相交，而由 $(*)$ 得到 $\|q\|+\|p-b_0\|\geq\max\{\|p\|+\|q-b_0\|,\|b_0\|+\|p-q\|\}$。结合 $(p,q)=(b_1,u)$，可得 $\|u-b_0\|\leq\|b_1-b_0\|=1$；结合 $(p,q)=(u,u')$，可得$\|u-u'\|\leq\|u-b_0\|\leq 1$。◀

根据引理 21，利用引理 20，使用 $c=3$ 和 $\varepsilon=1/1000$ 颜色即可为凸多边形的平移副本的每个交图着色，所需颜色数至多为 $(1+\ln 3+1/1000)\chi<2.0997\chi$。

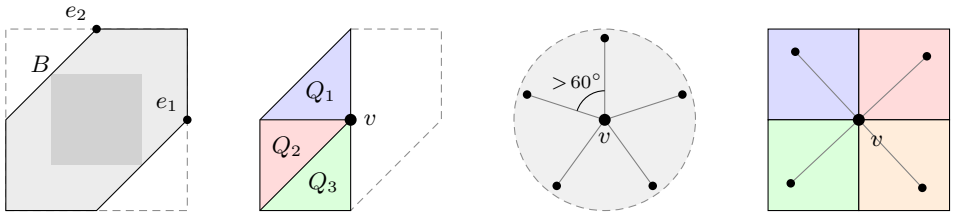
5 一种 2.05-近似算法

本节降低了引理 17 中的首项常数 $1+\ln c$。第 3.1 节的算法使用高于 N 的颜色为剩余图着色。现在，我们改为按照定义 5 中 (S3) 的顺序$\prec$ 对 $G[R]$ 采用首次适配着色（对于单位圆盘，即 (x,y) 上的字典序），为每个 $v\in R$



(a) 三角形 (b) 圆盘

图 6 引理 21 的集合 H_j，其中 $Q_j(v) = v + H_j$，以及点 b_0、b_1。（a）对于顶点为 (0，0)、(1，0)、(1，1) 的三角形 M，六边形 B 如图 7(a) 所示，圆锥 $\angle(e_2, b_1)$、$\angle(b_1, b_0)$、$\angle(b_0, -e_2)$ 是三个三角形。（b）对于圆盘，集合 H_j 是弯曲的，不同于图 2(c) 中的扇区，并且 H_2 严格位于圆锥 $\angle(b_1, b_0)$ 内部（虚线射线）。



(a) (b) (c) $a = 5$ (d) $a = 4$

图 7 (a) $B = M - M$对于一个三角形 M，介于 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$和 $[-1, 1]^2$之间。(b) 团 $Q_j(v)$。v的独立邻点：(c) 圆盘，彼此相距 $> 60°$；(d) 正方形，每个象限一个。

赋予一个未被任何已着色邻点使用的最小正整数颜色，其中包括第一阶段着色的邻居。因此，某个残余顶点可能会获得一个 $k \le N$ 其任何邻居都未使用过的颜色。除此之外，算法保持不变，只是局部引理步骤还会控制此类颜色的数量。

邻域独立数。 如果一个图类中的每个图 G 以及其中的每个顶点 v，其邻域 $N_G(v)$中包含的每个独立集 G至多含有 a 个顶点，那么该图类的邻域独立数 至多为 a。单位圆盘图的邻域独立数至多为 5（图 7(c)）。事实上，与 v 位于同一点的邻点与 v的其他所有邻点都相邻；而 v 的两个邻点 u, w 若位于其他点，且它们在 v 处形成的角不超过 $60°$，则满足 $\|u - w\|_2 \le \max\{\|u - v\|_2, \|w - v\|_2\} \le 1$。因此， $N_G(v)$ 中的独立集若至少包含两个顶点，则这些顶点在 v处两两形成的角都大于 $60°$，故其顶点数至多为 5。凸多边形平移副本的交图，其邻域独立数也至多为 5，证明见本节末尾。

自由颜色。 固定一个可进行 c 次扫描且邻域独立数至多为 a 的类。对于 $v \in P$，令 $U(v)$ 表示在第一阶段中 v 的任何邻点都未获得的颜色数量，我们称这些颜色对 v 是自由的。

▶ **引理 22.** 该着色是合法的，且使用的颜色至多为 $N + \max\{0, \max_{v \in R}(1 + \sum_{j=1}^{c}(X_{v,j} - 1 - U(v)))\}$ 种。

证明。 根据引理 12，第一阶段的着色是合法的，而首次适配会保持着色的合法性。当$v \in R$被着色时，它在第一阶段着色的邻点具有 $[N]$的 $N - U(v)$ 种颜色，这些颜色对 v而言不可用。它在 R 中已先于它着色的邻点，根据 (S3)，都位于 $\bigcup_j (Q_j(v) \cap R) \setminus \{v\}$ 中，因此这样的邻点至多有 $\sum_j (X_{v,j} - 1)$ 个。因此， v可用的颜色至多有 $N - U(v) + \sum_j (X_{v,j} - 1)$ 种，而 v 获得的颜色至多比这个数多一种。◀

当且仅当 v 在 C_k 中至多 a 个邻居（这些邻居仅取决于轮次 k）均在较早的轮次中被覆盖时，颜色 $k \geq 4$ 才对 v 空闲。它们每个在轮次 k 之前被覆盖的概率至少为 $1 - e^{-(k-3)/F}$；再结合泊松耦合（其代价对应下方最后一项）和 Harris不等式，即可得到乘积界。

▶ **引理 23.** 对于每个 $v \in P$,

$$\mathbb{E}U(v) \;\geq\; \sum_{k=4}^{N} \left(1 - e^{-(k-3)/F}\right)^{a} - \frac{a^2 N^2}{2F^2}.$$

证明。固定一个轮次 $k \geq 4$，令 $S = N_G(v) \cap C_k$。当且仅当 v 的一个邻点属于 C_k 且不属于任何更早的 C_j 时，它才会获得颜色 k；因此，当且仅当 S 中的每个顶点都属于 $C_1 \cup \cdots \cup C_{k-1}$ 时， k 才对 v 空闲。集合 S 是独立集，因此至多含有 a 个顶点；它仅取决于轮次 k 的抽取结果，而这些抽取结果与较早轮次的抽取结果相互独立。因此，只需证明：对于每个固定的、含有 $h \leq a$ 个顶点的独立集 $S \subseteq N_G(v)$， $S \subseteq C_1 \cup \cdots \cup C_{k-1}$ 以至少 $(1 - e^{-(k-3)/F})^h - (k-1)h^2/F^2$ 的概率成立。该概率至少为 $(1 - e^{-(k-3)/F})^a - (k-1)a^2/F^2$；对满足 $\sum_k (k-1) \leq N^2/2$ 的 k 求和，即得引理。

与引理 13 的证明类似，顶点 u 以概率 p_u属于 C_j，对每个$j \in \Gamma_u$，$j \geq 1/F$。对于 $j < k$，令 D_j 以概率$1/(Fp_u,j)$独立地包含每个 $u \in S \cap C_j$，其中 $j \in \Gamma_u$。于是 D_1，……，D_{k-1}相互独立；当 $j \in \Gamma_u$时，$\Pr[u \in D_j] = 1/F$，否则为 0，q_j：$\Pr[D_j \neq \emptyset] \leq h/F$，因此只需界定 $S \subseteq D_1 \cup \cdots \cup D_{k-1}$发生的概率。对于 $\emptyset \neq J \subseteq S$，令 r_j，J =$\Pr[D_j = J]$，并令 Y_j，J 为均值分别为 r_j、J的独立泊松变量。对于每个 j，和 $\sum_J Y_j$，J 服从均值为 q_j的泊松分布；给定其值为 1 时，唯一的 J 满足 Y_j，$J = 1$，其分布律与在给定 $D_j \neq \emptyset$条件下的 D_j 相同。伯努利分布与均值为 q的泊松分布之间的全变差距离为 $q(1 - e^{-q}) \leq q^2$。因此，可以对 D_j和 $(Y_j,\ J)_J$进行关于 j相互独立的耦合，使得以至少 $1 - h^2/F^2$ 的概率，要么$D_j = \emptyset$ 且所有 Y_j，J 均消失，要么 $D_j = J$， Y_j，$J = 1$，且所有其他 Y_j，J' 均消失。

因此，除概率至多为 $(k-1)h^2/F^2$ 的一个事件外， $S \subseteq D_1 \cup \cdots \cup D_{k-1}$成立，当且仅当对每个 $u \in S$，都存在某个 $Y_{j,J}$，使得 $j < k$ 且 $J \ni u$ 为正。这些 h 事件关于独立指示变量 $[Y_{j,J} \geq 1]$是递增的，因此根据 Harris不等式 [14]，它们的交集的概率至少为各自概率的乘积。u 对应的事件以 $\prod_{j<k} \prod_{J \ni u} e^{-r_{j,J}} = \exp\left(-\sum_{j<k} \Pr[u \in D_j]\right) = \exp(-|\Gamma_u \cap [k-1]|/F)$ 的概率失败；根据引理8(ii)，该值至多为 $e^{-(k-3)/F}$，因为 $|\Gamma_u \cap [k-1]| \geq k - 3$。◀

▶**引理24。** $U(v)$ 由抽样结果 $Z_{k,T}$决定，其中 $T \circ \cap N_G(v) \neq \emptyset$，每轮次 k至多有四个，并且对每个 $t' \geq 0$，$\Pr[U(v) \leq \mathbb{E}U(v) - t'] \leq \exp\left(-t'^2/(2(2a+1)^2 N)\right)$。

证明。 根据 (S1)， $N_G(v)$ 位于 $v + [-1,1]^2$ 中。对于每个坐标，铺砌 $\mathcal{T}(N,\ k)$ 的内部是长度为 $N - 1 \geq 2$、间隔为 1 的区间，因此长度为 2 的区间至多与其中两个相交，而 $v + [-1,1]^2$ 至多与四个内部相交。邻点 u 的第一阶段颜色仅取决于其内部包含 u 的瓦片所对应的抽取结果。将一个抽取结果 $Z_{k,\ T}$ 从 I 改为 I'，只会改变以下顶点的第一阶段颜色：

16 单位圆盘图着色的 2.05-近似

$(I \cup I') \cap T^{\circ}$，其中至多有 $2a$ 个是 v 的邻点，因为 $I \cap N_G(v)$ 和 $I' \cap N_G(v)$ 相互独立。这些顶点的颜色都从 k 改变或变为 k，因此，具有某种给定颜色的 v 的邻点集合至多对 $2a+1$ 种颜色发生变化，而 $U(v)$ 至多变化 $2a+1$。将引理 10 应用于 $-U(v)/(2a+1)$，后者是至多 $4N$ 个独立变量的函数，即可得到该界。◀

参数。 采用第 3.2 节中的 s、N、m 和 t，但令 $d_0 = (c+1)(4N+5)^2 F$，则

$$\beta = \sum_{k=4}^{N} \bigl(1 - (1+1/F)^{3-k}\bigr)^{a} - \frac{a^2 N^2}{2F^2}, \qquad t' = (2a+1)\sqrt{2mN}.$$

由于 $(1+1/F)^{k-3} \le e^{(k-3)/F}$，根据引理 23，我们有 $\beta \le \mathbb{E}U(v)$。对每个 $v \in P$，令 E_v 为事件 $U(v) \le \beta - t'$；根据引理24，其概率至多为 e^{-m}。现在，Moser– Tardos 算法会不断重新抽取，直到事件 $A_{v,\,j}$ 和 E_v 均不成立。对于 $\Phi_a(s) = \int_0^s (1-e^{-x})^a \, dx$，令

$$\kappa_{c,a}(s) = s + \max\bigl\{0,\; c\,e^{-s} - \Phi_a(s)\bigr\}.$$

▶ **引理 25。** 对于任意有理数 $s \in (0,2]$ 和 $F \ge 3$，采用这些参数的算法都能在期望多项式时间内终止，并且至多使用

$$\kappa_{c,a}(s)\, F + c\sqrt{mN/2} + (2a+1)\sqrt{2mN} + 4 + \tfrac{1}{2}(a+a^2)(s+3/F)^2$$

颜色。

证明。 事件 E_v 由那些内部与 $N_G(v)$ 相交的瓦片的抽取得出，而 $N_G(v)$ 中的每个点到 v 的距离都不超过 L_∞ 1，因此引理 15 的证明表明，每个事件与少于 $(c+1)(4N+5)^2\omega \le d_0$ 个其他事件共享变量。与引理 16 的证明中一样，$e\,p(d+1) \le 1$ 满足 $p = e^{-m}$，且每个事件 E_v 都能被精确判定，因为 β和 t'^2 都是有理数。因此，重新采样会在期望的多项式步数后停止，并且 $X_{v,\,j} < \mathbb{E}X_{v,\,j} + t \le \omega e^{-s} + t$ 且 $U(v) > \beta - t'$ 对所有 v 和 j 均成立。由引理 22 和$N \le sF + 3$, $\omega \le F$，颜色数至多为

$$sF + 3 + \max\bigl\{0,\; c\,e^{-s}F - \beta\bigr\} + c\,t + t'.$$

剩下要从下方界定 β。由 $\ln(1+u) \ge u - u^2/2$ 和 $e^{y} \le 1 + 2y$（针对 $y \in [0,1]$），可得 $(1+1/F)^{-x} \le e^{-x/F} + x/F^2$（针对 $0 \le x \le 2F^2$），这覆盖了 $x \le N \le sF + 3$。由于 $z \mapsto z^a$ 在 $[0,1]$ 上是 a-Lipschitz，β 的每一项都至少为 $(1-e^{-(k-3)/F})^a - a(k-3)/F^2$，且这些修正项之和至多为 $aN^2/(2F^2)$。函数 $x \mapsto (1-e^{-x})^a$ 是非递减的且至多为 1，并且 $N - 3 \ge sF - 1$，因此

$$\beta \;\ge\; F\,\Phi_a\Bigl(\frac{N-3}{F}\Bigr) - \frac{(a+a^2)N^2}{2F^2} \;\ge\; F\,\Phi_a(s) - 1 - \tfrac{1}{2}(a+a^2)(s+3/F)^2.$$

因此，$\max\{0, c\,e^{-s}F - \beta\} \le \max\{0, c\,e^{-s} - \Phi_a(s)\}F + 1 + \tfrac{1}{2}(a+a^2)(s+3/F)^2$，由此得出该界限。◀

▶**定理 26。** 设 G 是一个可进行 c扫描的类，其邻域独立数至多为 a，且 $s \in (0,2]$ 为有理数。对于每个 $\varepsilon \in (0,1]$，存在一种随机化算法，其具有期望多项式运行时间，并可为每个 $G \in G$ 着色，所用颜色数至多为 $(\kappa_{c,\,a}(s) + \varepsilon)\chi_f(G) + K$，其中 K 仅取决于 c、a 和 ε。

证明。根据引理 9 计算 y，其中 $F \le (1+\delta)\chi_f$，且 $\delta = \varepsilon/(2(c+3))$。若 $F < 3$，则 $\omega \le 2$，扫描至多使用 $c+1$ 种颜色。否则运行引理 25 中的算法。与引理 17 的证明一样，由于 $s \le 2$、$N \le sF+3 \le 5F$ 和 $d_0 = (c+1)(4N+5)^2 F \le 625(c+1)F^3$，因此 $m \le \gamma + 3.1 \ln F$，其中 $\gamma = 2 + \frac{7}{10}\log_2(625(c+1))$。引理 25 中的两个平方根项之和为 $\big(c/\sqrt{2} + \sqrt{2}(2a+1)\big)\sqrt{mN} \le \sqrt{\lambda F m}$，其中 $\lambda = 5(c+4a+2)^2/2$。采用引理 17 证明中的算术—几何平均步骤和切线界，并取此 λ 和 γ，可得 $\sqrt{\lambda F m} \le \varepsilon F/4 + K'$，其中 $K' = \frac{2\lambda}{\varepsilon}\big(\gamma + 3.1 \ln \frac{50\lambda}{\varepsilon^2}\big)$。由于 $s \le 2$ 和 $F \ge 3$，其余各项至多为 $4 + \frac{9}{2}(a + a^2)$。因此，该算法使用的颜色数至多为 $(\kappa_{c,a}(s) + \varepsilon/4)F + K'' \le (\kappa_{c,a}(s) + \varepsilon)\chi_f + K''$，其中 $K'' = K' + 4 + \frac{9}{2}(a + a^2)$，因为 $\kappa_{c,a}(s) + 1 \le s + c + 1 \le c + 3$ 给出 $(\kappa_{c,a}(s) + \varepsilon/4)\delta \le \varepsilon/2$。取 $K = \max\{K'', c+1\}$，定理得证。 ◀

如果 $c e^{-s} \ge \Phi_a(s)$，代入 $y = e^{-x}$ 可得，其中 $x_0 = e^{-s}$ 且调和数为 H_a，

$$\kappa_{c,a}(s) = c\,x_0 + \int_{x_0}^{1} \frac{1-(1-y)^a}{y}\,dy = c\,x_0 + H_a - \sum_{i=1}^{a} \frac{(-1)^{i+1}}{i}\binom{a}{i} x_0^i.$$

不重复使用时，被积函数为 $1/y$，界为 $c\,x_0 + s$，如引理 17 所示；重复使用可节省 $\int_{x_0}^{1}(1-y)^a/y\,dy$。对于单位圆盘图（$c = 3$、$a = 5$）和 $s = 27/20$，我们得到 $c e^{-s} \ge \Phi_5(s)$ 和 $\kappa_{3,5}(s) < 2.04822$，而 $1 + \ln 3 > 2.0986$。此值与 s 上的最小值相差不超过 10^{-4}。因此，结合 $\varepsilon = 10^{-6}$，定理 26 给出定理2。

定理 1 的证明。参照引理 20 的证明，使用定理 26 代替引理 17，并将 $c = 3$、$a = 5$、$s = 27/20$ 和 $\varepsilon = 10^{-6}$ 代入。如果 $F \ge C$，则最多使用 $(\kappa_{3,5}(27/20) + 10^{-6})\chi < 2.0483\,\chi$ 种颜色。否则，引理 19 最多使用 2χ 种颜色，且 $2 < \kappa_{3,5}(27/20)$。 ◀

凸多边形的平移副本。 定理 1 和定理 2 的证明仅使用了以下性质：该类是 3-可扫描的，且邻域独立数至多为 5。凸多边形的平移副本的交图根据引理 21 是 3-可扫描的，而下一个引理给出了第二个性质。直观地说，在单位球为 $M - M$ 的范数中，将 $N_G(v)$ 中独立集的点沿远离 v 的方向移动到距离恰好为 1 的位置，会使它们之间的距离仍大于 1，因此它们的 M 平移副本彼此接触 $M + v$ 且内部两两不相交，并且这样的平移副本至多有 5 个 [6]。

▶**引理 27**。 凸多边形的平移副本的交图的邻域独立数至多为 5。

证明。令 $\|x\| = \min\{\lambda \ge 0 : x \in \lambda B\}$ 为单位球为 $B = M - M$ 的范数，于是 pq 是一条边当且仅当 $\|p - q\| \le 1$；平移副本 $M + p$ 和 $M + q$ 不相交当且仅当 $\|p - q\| > 1$，而它们接触，即内部不相交地相交，当且仅当 $\|p - q\| = 1$。设 S 是顶点 v 的邻域中的一个独立集，其中 $|S| \ge 2$。没有任何 $u \in S$ 位于点 v，因为这样的 u 会与 v 的每个其他邻点相邻。因此，每个 $u \in S$ 都可以写成 $u = v + \sigma_u \xi_u$，其中 $0 < \sigma_u \le 1$ 且 $\|\xi_u\| = 1$。对于 u、$w \in S$，函数 $g(\sigma,\tau) = \|\sigma\xi_u - \tau\xi_w\|$ 在 $[0,1]^2$ 上是凸函数，因此它在某个角点处取得最大值，并且

$$1 < \|u - w\| = g(\sigma_u, \sigma_w) \le \max\{g(0,0),\, g(1,0),\, g(0,1),\, g(1,1)\} = \max\{0,\, 1,\, 1,\, \|\xi_u - \xi_w\|\}.$$

因此，$\|\xi_u - \xi_w\| > 1$ 以及平移副本 $M + v + \xi_u$、$u \in S$ 两两不相交，且都与 $M + v$ 相切。于是它们彼此不同，平移 $-v$ 后便构成一个严格 Hadwiger

族，由 M组成，也就是说，这些是两两不相交且都与 M相切的 M的平移副本。相同的向量也构成中心对称体 $\frac{1}{2}B$的严格 Hadwiger族，因为 $p+\frac{1}{2}B$与$q+\frac{1}{2}B$不相交或相切，当且仅当 $M+p$ 与 $M+q$ 不相交或相切。因此，如果 M 不是平行四边形，该族至多有 5 个成员 [6] （另见 [32]）。如果 M 是平行四边形，则线性映射可将B 变为 $[-1,1]^2$，并且 $|S|\le 4$，因为 $v+[-1,1]^2$ 是四个闭单位正方形的并集，每个正方形至多包含 S中的一个点。◀

定理 3 的证明。 根据引理 21 和引理 27，经过不改变这些图的线性坐标变换后，这些图构成一个 3-可扫描类，且邻域独立数至多为 5。因此，定理 26 在 $c=3$, $a=5$, $s=27/20$ 和 $\varepsilon=10^{-6}$ 的条件下，像定理 2 一样给出第二个结论；而定理 1 的证明只用到这些性质，因此给出第一个结论。◀

6 单位正方形图的 1.68-近似算法

本节证明定理 4 以及单位正方形图的上极限 $4/3$ 的下界 χ/ω。单位正方形图相对于 (x,y) 上的字典序和引理 6 中的两个闭单位正方形 $Q_1(v)$ $Q_2(v)$ 是 2-可扫描的。对于这些图，引理 19 的界 2χ 并不优于扫描所得的界，因此我们用以下结果替代它。

▶ **引理 28** (重叠条带)。 给定整数 $C\ge 2$ 、一个具有 n 个点且满足 $\omega(G)\le C$ 的单位正方形图 G，并且该图至少有一条边，存在一种算法，可在 $O(n\log n)+2^{O(C\log^2 C)}n$ 时间内，使用至多 $\lceil 3\chi(G)/2\rceil$ 种颜色为 G 着色。

我们首先概述证明。宽度为 $2\lceil\log_2 C\rceil+2$ 的重叠垂直条带根据引理18进行最优着色；令 $k\le\chi$ 为所使用颜色数的最大值，并使用 $h=\lceil 3k/2\rceil$种颜色。在切口 $z,z+1,\ldots$处，将一个条带的着色转换为下一个条带的着色，其中z是下一个条带的左端点（图 8）。在 z、 $z+2$、..... 处，下一个着色中的整个颜色类获得切口附近未使用的颜色。在 $z+1$、 $z+3$、.....处，切口右侧剩余的点按照 $\prec$的顺序通过首次适配重新着色。它们使用尚未重新着色的 ℓ 类进行着色，因此其团数至多为 ℓ；无论切口左侧使用何种颜色，首次适配只需 $2\ell-1$ 种颜色。第一个切口找到 $\lceil k/2\rceil$ 种未使用的颜色，此后未使用的颜色数在每隔一个切口处翻倍，因此在其后的条带开始之前，下一个着色会在距离 z不超过 $2\lceil\log_2 C\rceil$ 的范围内完成。

证明。 如果按 x坐标排序后相邻的两个点相差超过1 个 x，则两侧的点可以分别着色，因此我们假设这种情况不会发生。我们还假设 G有边，否则一种颜色就够了。令$D=2\lceil\log_2 C\rceil+1$，令 $x_0=\min_{p\in P}x_p$，并对于 $i=0$，1，.....，$\lfloor n/D\rfloor$ 令条带 S_i为满足 p 的点 $x_0+iD\le x_p<x_0+(i+1)D+1$的集合。相邻条带在宽度为1的带状区域内重叠，每个点都属于某个条带，且每条边的两个端点都在某个条带内。

为一个条带着色。 S_i 中的点位于宽度为 $D+1$的垂直条带内，因此利用引理18和 $W=D+1$ 可以计算出 $G[S_i]$的最优着色 σ_i。令 $k=\max_i\chi(G[S_i])$，则$2\le k\le\chi(G)$，并且根据引理 7， $k\le 2C-1$；再令 $h=\lceil 3k/2\rceil$，使得 $k<h<2k$。所有颜色均取自 $[h]$。

拼接。 我们按条带定义着色 d，从 $d=\sigma_0$ 在 S_0开始。在处理条带$i\ge 1$ 之前，满足 $z=x_0+iD$ 时，以下进入条件成立： d 是对满足 $x<z+1$ 的点的合法着色，在其他点上未定义，并且满足$x\ge z-1$ 的点只使用集合 $A\subseteq[h]$ 中的 k种颜色。令 $B_1,\ldots,B_k$为 σ_i 的颜色类，其中某些可能为空。我们将为其中一些类（称为已完成类）分配不同颜色

$\varphi(B)$；其他类及其点尚未完成，而 f 表示已完成类的数量。对于 $j=0$，1，2，...，我们在切口 $z_j = z + j$处执行一步；如果 j为偶数，则执行**F** 步，如果 j 为奇数，则执行**C** 步（图 8）：

F 步。令 $r = h - f - |A|$。令 $\min\{r, k-f\}$ 未完成类 B不同颜色$\varphi(B) \in [h] \setminus (A \cup \varphi($已完成类$))$，将它们标记为已完成，并令 $d(v) = \varphi(B)$ 对于每个$v \in B$ 满足 $x_v \geq z_j$的。如果所有类都已完成，则停止。

C 步。令 $\ell = k - f$。将 A替换为由 $2\ell - 1$ 个颜色组成的集合，取自 $[h] \setminus \varphi($已完成类$)$。用 $x_u \geq z_j$ 对未完成的点 u 按 $\prec$的顺序进行首次适配重新着色：u 取 A 中第一个没有被任何较早邻点占用的颜色。

我们对 j 进行归纳法证明：在 z_j处执行步骤后，且在第一步之前 $z_{-1} = z - 1$ 的情况下：(a) d 是合法的，并且 A 与 φ（已完成类）不相交；(b) 对于每个满足 $x_v \geq z_j$ 且 d 有定义的点 v，若 v 属于某个已完成类 B，则有 $d(v) = \varphi(B)$；否则有 $d(v) \in A$；(c)d 在满足 $x < z + 1$ 的点以及已完成的点上有定义；第一次 C 步之后，在所有 S_i 上都有定义，其他地方均无定义。第一步之前，这就是进入条件。在 z_j 处执行的步骤只会改变满足 $x_v \geq z_j$ 的点 $v \in S_i$，而它们的邻点 w 满足 $x_w \geq z_j - 1 = z_{j-1}$，因此前一步的 (b) 适用于这些点；这样的 w 只有在 $x_w < z$ 时才会位于 S_i 之外，这需要 $j = 0$；或者在 $x_w \geq z + D + 1$ 时，此时根据 (c)，d 未定义。

考虑一个 F 步和一个重新着色的点 $v \in B$。其邻点具有 A 的颜色、较早完成的类的 colors$\varphi(B')$，或者，如果它们在同一步中被重新着色，则具有其他新类 $B' \neq B$ 的颜色 $\varphi(B')$，因为 B 是独立的；这些颜色中没有一个是 $\varphi(B)$。因此，(a) 得以保持，而 (b) 和 (c) 按构造成立。

考虑一个 C 步；此时 j 是奇数且 $z_j \geq z + 1$。设 u 是一个满足$x_u \geq z_j$的未完成点；其邻点具有 $x \geq z$，而 d 有定义的那些点属于 S_i。在 u 被重新着色时，u 的每个较早邻点 w 都已有颜色：如果 $x_w < z_j$，则根据 (c)，因为 $x_w < z + 1$ 或一个 C 步已经执行；如果 $x_w \geq z_j$，则因为 w 已完成或在 u之前被重新着色。每个较晚邻点都有 $x \geq x_u \geq z_j$，因此它已经完成，或将在 u之后被重新着色。根据前一步的 (b)，已完成邻点所持有的颜色不属于新的 A。S_i中的未完成点诱导出的子图可用 ℓ 种颜色进行 σ_i 着色，因此其团数至多为 ℓ；u 的较早邻点位于 $Q_1(u) \cup Q_2(u)$ 中，这两个团包含 u，所以其中至多有 $2(\ell - 1)$ 个未完成点。因此，首次适配能在 A中找到一种颜色，并且重新着色点处的每条边都是适当的：对于已完成点，这是因为 A 避开了 φ；对于较早的未完成点，这是因为 u 避开了其颜色；对于较晚的点，这是因为该点避开了 $d(u)$。同样，(a)–(c) 成立。

还需说明这些颜色足够，并且各步能在有限时间内结束。在第一次 F 步$r = h - k = \lceil k/2 \rceil$时，因此它完成 $\lceil k/2 \rceil$ 类并留下 $\ell_1 = \lfloor k/2 \rfloor \geq 1$。在之后每次 F 步之前，$|A| = 2\ell - 1$与 $\ell = k - f$，因此 $r = E(f) := h - 2k + f + 1$，而其之前的 C 步需要 $E(f) \geq 0$。现在 $E(\lceil k/2 \rceil) = 2h - 3k + 1 \geq 1$，且 E 在 f中递增，所以每次 C 步都能找到其颜色，而之后的每次 F 步都有 $r \geq 1$。如果一次 F 步完成 $r = E(f) < \ell$ 个类，那么下一次将找到 $E(f + r) = 2r$ 个未使用的颜色。因此，在第一次 F 步以及之后的 J 次 F 步之后，只要 $2^J - 1 \geq \ell_1$，所有类就都完成了。由于 $\ell_1 = \lfloor k/2 \rfloor \leq C - 1$，$J = \lceil \log_2 C \rceil$就足够，而最后一步是在切口 $z_j \leq z + 2J = z + D - 1$处进行的 F 步。于是每个类都已完成，因此根据 (b) 和 (c)，具有 $x \geq z + D - 1$ 且 d 有定义的点只使用 k种颜色 $\varphi(B_1)$.....，$\varphi(B_k)$，并且 d 是具有 $x < z + D + 1$ 的点的合法着色，在其他位置未定义。这就是条带 $i+1$的进入条件，其中用 $z + D$ 代替 z。最后一个条带之后，d 是 G 的合法着色，至多使用 $h = \lceil 3k/2 \rceil \leq \lceil 3\chi(G)/2 \rceil$ 种颜色。每个点被重新着色 $O(D)$次，每次检查少于 $25C$ 个邻居；扫描会在 $O(n \log n + Cn)$时间内列出所有点的这些邻居，因此拼接需要 $O(n \log n + nC \log C)$时间。每个点至多属于两个条带，且 $D = O(\log C)$，所以根据引理18，所有条带的着色总共需要 $O(n \log n) + 2^{O(C \log^2 C)} n$ 时间。◀

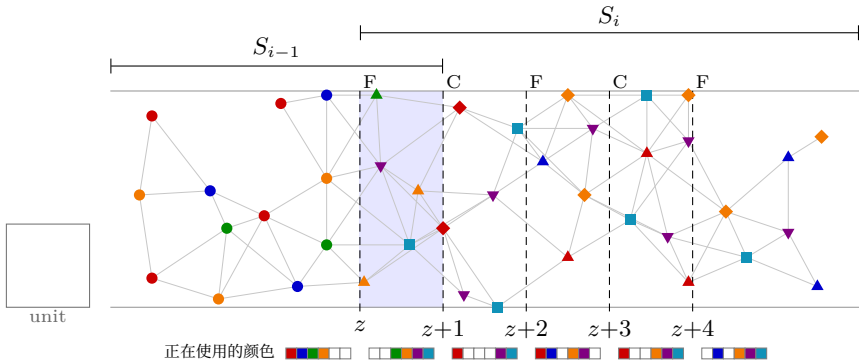


图 8 引理 28 中的 $k=4$ 和 $h=6$，位于条带 S_i左端附近的 z。颜色表示 d，形状表示 σ_i 的类，圆圈标出 S_i 之外的点；条形显示每个带状区域所用的颜色。z、$z+2$ 和 $z+4$ 处的 F 步分别完成 2、1 和 1 个类；在 $z+4$ 右侧，σ_i 的每个类都只有一种颜色。

证明只用到了每个 σ_i 都是使用 k 种颜色的合法着色；只有对于 $k \le \chi(G)$才需要最优性。因此，对于宽度为 $2\lceil \log_2 \omega(G)\rceil + 2$的条带，无论 $\omega(G)$是什么，每个单位正方形图都满足 $\chi(G) \le \lceil \frac{3}{2} \max_i \chi(G[S_i])\rceil$，其中$S_i$。证明同样适用于每个 c-可扫描的类，只要其顺序 $\prec$满足：当 $x_u < x_v$时有 $u \prec v$；此时使用 $h = \lceil ((2c-1)k - c + 2)/c\rceil$ 种颜色和由 A构成的 $c(\ell-1)+1$种颜色的集合，随后至多使用 $(2 - \frac{1}{c+1})\chi$种颜色；对于单位圆盘图，这就是 $\frac{7}{4}\chi$，但我们不需要这一点。由于对于 $\chi \ge 2$ 有 $\lceil 3\chi/2\rceil \le \frac{5}{3}\chi$，且 $\frac{5}{3} < 1 + \ln 2 < 1.6932$，采用 $c=2$、$\varepsilon = 1/1000$以及以引理 28替代引理 19的引理 20的证明，可以在不重复使用颜色的情况下，为每个单位正方形图着少于 $1.6942\,\chi$ 种颜色。

重用。 单位正方形图的邻域独立数至多为 4，因为 $N_G(v)$ 位于 $v + [-1,1]^2$ 中，而 $v + [-1,1]^2$ 是四个闭单位正方形的并，每个正方形都诱导一个团（图 7(d)）。对于 $c=2$、$a=4$ 和 $s = 4/5$，我们得到 $2e^{-s} \ge \Phi_4(s)$ 和 $\kappa_{2,\,4}(s) < 1.679599$，与 s 上的最小值相差不超过 10^{-4}，而 $1 + \ln 2 > 1.6931$。

定理 4 的证明。 定理 26 配合 $c=2$、$a=4$、$s=4/5$ 和 $\varepsilon = 10^{-6}$ 给出第二个结论。对于第一个结论，使用这些参数，并以引理 28 代替引理 19，定理 1 的证明至多使用 $(\kappa_{2,\,4}(4/5) + 10^{-6})\chi < 1.6796\,\chi$ 种颜色，条件是 $F \ge C$。否则，若 $\chi \ge 2$，引理 28 至多使用 $\lceil 3\chi/2\rceil \le \frac{5}{3}\chi$ 种颜色；若 $\chi = 1$，一种颜色就足够；而 $\frac{5}{3} < \kappa_{2,\,4}(4/5)$。◀

关于 χ/ω 的下界。 已发表的单位正方形图上 $\limsup \chi/\omega$ 的下界 $5/4$ 是通过将五环 C_5 中的每个正方形替换为其自身的 t 个副本而得到的 [7, 4]。八环的平方 C_8^2，其顶点为 0、……、7，且 i 与模 8 意义下的 $i \pm 1$ 和 $i \pm 2$ 相邻，是用于圆盘的圈幂族 [22]，中紧随 C_5 之后的成员，同时也是一个单位正方形图（图9）。它有 $\omega = 3$ 和 $\alpha = 2$，因此对每个正方形取 t 个副本，就得到满足 $\omega = 3t$ 和 $\alpha = 2$ 的单位正方形图，进而有 $\chi \ge 8t/2 = 4t$。

参考文献

1 Stefan Arnborg 和 Andrzej Proskurowski。针对部分 k-树上的 NP难问题的线性时间算法。《离散应用数学》，23(1):11–24，1989。 doi:10.1016/0166-218X(89)90031-0。

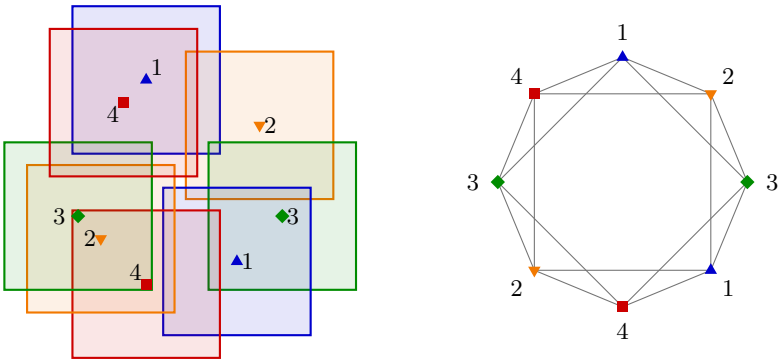


图9 图 C_8^2，其中 i 与 $i \pm 1$ 和 $i \pm 2$ 模 8 相邻，表示为八个单位正方形（左）和圆形（右），并采用 4-着色。由于 $\omega = 3$ 和 $\alpha = 2$，我们有 $\chi \geq 8/2 = 4$。

2 Nikhil Bansal、Alberto Caprara 和 Maxim Sviridenko。集合覆盖问题的一种新近似方法及其在多维装箱中的应用。SIAM计算杂志，39(4):1256–1278，2009。 doi:10.1137/080736831。3 Allan Borodin、Ioana Ivan、Yuli Ye 和 Bryce Zimny。受限图族的和着色与和多重着色。理论计算机科学，418:1–13，2012。doi:10.1016/j.tcs.2011.11.010。4 Marco Caoduro 和 András Sebő。正方形的装填、击中与着色。计算几何杂志，15(1):172–202，2024。5 Brent N. Clark、Charles J. Colbourn 和 David S. Johnson。单位圆盘图。离散数学，86(1–3):165–177，1990。 doi:10.1016/0012-365X(90)90358-O。6 Peter G. Doyle、Jeffrey C. Lagarias 和 Dana Randall。$\mathbb{R}^2$中的中心对称凸体自装填。《离散与计算几何》，8(2):171–189，1992。 doi:10.1007/BF02293042。7 Adrian Dumitrescu 和 Minghui Jiang。凸体的平移副本与位似体着色。代数与几何论丛，53(2):365–377，2012。 doi:10.1007/s13366-011-0048-4。8 Paul Erdős 和 László Lovász。关于3-色超图的问题与结果及若干相关问题。载于《无限集与有限集》，János Bolyai数学学会研讨会第10卷，第609–627页。North-Holland出版社，1975年。9 Thomas Erlebach、Klaus Jansen 和 Eike Seidel。几何交图的多项式时间近似方案。SIAM计算杂志，34(6):1302–1323，2005。doi:10.1137/S0097539702402676。10 Louis Esperet、Sébastien Julliot 和 Arnaud de Mesmay。单位圆盘图的分布式着色与局部结构。理论计算机科学，944:113674，2023年。 doi:10.1016/j.tcs.2022.12.024。11 Stefanie Gerke 和 Colin McDiarmid。图的不完善性。组合理论杂志 B辑，83(1):58–78，2001年。 doi:10.1006/jctb.2001.2042。12 Albert Gräf、Martin Stumpf 和 Gerhard Weißenfels。关于单位圆盘图的着色。算法学，20(3):277–293，1998年。 doi:10.1007/PL00009196。13 Martin Grötschel、László Lovász 和 Alexander Schrijver。《几何算法与组合优化》，《算法与组合学》第2卷。Springer，1988年。 doi:10.1007/978-3-642-97881-4。14 T. E. Harris。某一渗流过程临界概率的下界。《剑桥哲学学会会刊》，56(1):13–20，1960年。 doi:10.1017/S0305004100034241。15 Dorit S. Hochbaum 和 Wolfgang Maass。图像处理与超大规模集成电路中的覆盖与装填问题近似方案。ACM期刊，32(1):130–136，1985年。 doi:10.1145/2455.214106。

22 单位圆盘图着色的 2.05-近似

16 Klaus Jansen。用于分数图着色和抢占式调度的近似强分离。理论计算机科学，302(1–3)：239–256，2003年。 doi:10.1016/S0304-3975(02)00829-0。17 Jeff Kahn。多重图色指数的渐近性。组合理论杂志 B辑，68(2)：233–254，1996年。 doi:10.1006/jctb.1996.0067。18 Frank Kammer 和 Torsten Tholey。交图的近似算法。Algorithmica，68(2)：312–336，2014年。 doi:10.1007/s00453-012-9671-1。19 Seog-Jin Kim、Alexandr Kostochka 和 Kittikorn Nakprasit。关于平面中凸集交图的色数。Electronic Journal of Combinatorics，11(1)：#R52，2004年。 doi:10.37236/1805。20 Vijay Kumar。全光环形网络中圆弧着色和带宽分配的近似算法。载于《组合优化近似算法》（APPROX），《计算机科学讲义》第1444卷，第147–158页。Springer，1998年。 doi:10.1007/BFb0053971。21 Frank Thomson Leighton、Chi-Jen Lu、Satish Rao 和 Aravind Srinivasan。局部引理的新算法方面及其在路由和划分中的应用。SIAM计算杂志，31(2)：626–641，2001年。 doi:10.1137/S0097539700379760。22 Ewa Malesińska、Steffen Piskorz 和 Gerhard Weißenfels。关于圆盘图的色数。Networks，32(1)：13–22，1998年。 doi:10.1002/(SICI)1097-0037(199808)32:1<13::AID-NET2>3.0.CO;2-M。23 Madhav V. Marathe、Heinz Breu、Harry B. Hunt III、S. S. Ravi 和 Daniel J. Rosenkrantz。单位圆盘图的简单启发式方法。Networks，25(2)：59–68，1995年。 doi:10.1002/net.3230250205。24 Tomomi Matsui。单位圆盘图上的最大独立集问题和分数着色问题的近似算法。载于《离散与计算几何》（JCDCG 1998），《计算机科学讲义》第1763卷，第194–200页。Springer，2000年。 doi:10.1007/978-3-540-46515-7_16。25 Colin McDiarmid。关于有界差分法。载于《组合学综述，1989》，《伦敦数学学会讲义系列》第141卷，第148–188页。剑桥大学出版社，1989年。 doi:10.1017/CBO9781107359949.008。26 Colin McDiarmid 和 Tobias Müller。关于随机几何图的色数。Combinatorica，31(4)：423–488，2011年。 doi:10.1007/s00493-011-2403-3。27 Michael Molloy 和 Bruce Reed。《图着色与概率方法》，算法与组合学第23卷。Springer，2002年。 doi:10.1007/978-3-642-04016-0。28 Robin A. Moser 和 Gábor Tardos。一般洛瓦兹局部引理的构造性证明。ACM期刊，57(2)：11:1–11:15，2010年。 doi:10.1145/1667053.1667060。29 René Peeters。关于 j-单位球图。研究备忘录 FEW 512，蒂尔堡大学，1991年。30 I. G. Perepelitsa。平面中集合交图色数的界。离散数学，262：221–227，2003年。 doi:10.1016/S0012-365X(02)00501-0。31 Aravind Srinivasan。洛瓦兹局部引理的扩展及其在整数规划中的应用。SIAM计算杂志，36(3)：609–634，2006年。 doi:10.1137/S0097539703434620。32 Konrad J. Swanepoel。赋范空间中的组合距离几何。载于《直观几何新趋势》，Bolyai学会数学研究，第407–458页。Springer，2018年。 doi:10.1007/978-3-662-57413-3_17。33 Yuli Ye 和 Allan Borodin。消去图。ACM算法汇刊，8(2)：14:1– 14:23，2012年。 doi:10.1145/2151171.2151177。

人工智能声明

本文在 AI 助手 Claude（Anthropic）和 ChatGPT（OpenAI）的大力协助下完成。他们参与了算法和证明的开发、参考文献核查以及文本撰写。作者核查了所有结果，并对本文内容负责。