arXiv:2611.31017v1 [math.MG] 23 Nov 2026

# Carnot 群中的商映射、可变形性与卢津逼近

Gareth Speight 和 Scott Zimmerman

Abstract. 我们证明，在 Carnot 群中，可塑性和卢津逼近性质在商映射下得以保留，并由此推导出若干应用。例如，我们证明，在步数至少为 3 且生成元至少为 2 的自由 Carnot 群中，每个水平方向都是不可屈的，卢津性质以强意义失效，并且存在一条相对于光滑水平曲线而言纯不可整流的 Lipschitz曲线。我们还给出了一个此前未发表的可塑 Carnot 群实例，即上三角幺幂矩阵群。

## 1. Introduction

卢津经典定理断言，在 $\mathbb{R}$上，任意可测函数都与某个连续函数在一个测度任意小的集合之外相同。近年来，类似的卢津逼近结果在几何测度论和几何函数论领域发挥了重要作用。若对初始映射施加更强的假设，就可以用正则性更高的映射进行逼近。例如，每个绝对连续映射都可以用 $C^1$ 映射进行逼近。一种构造这类卢津逼近的标准策略依赖于Whitney延拓定理[14]。给定一个正则性较低的映射，先找出定义域中的一个大子集，使Whitney定理的假设在其上成立，再应用该定理构造一个光滑映射，使其仅在一个小集合上与原映射不同。

近年来，这些问题已在非欧几里得环境中得到研究，尤其是在 Carnot 群和其他次黎曼流形中 [1, 9]。Carnot群$\mathbb{G}$是一个连通、单连通且其李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$ 具有分层结构的李群。第一层 $\mathfrak{g}_1$ 定义了一个水平分布，而速度向量几乎处处位于 $\mathfrak{g}_1$ 中的曲线被称为水平曲线。这类曲线代表了人在此类流形中可以行进的方向。如果这些速度向量在 $\mathfrak{g}_1$中连续变化，我们就称该曲线属于 $C^1_H$类。由于次黎曼流形的几何结构由其水平方向所定义，经典的欧几里得延拓与逼近技术往往会失效，或需要进行精细的次黎曼调整。

Juillet 和 Sigalotti 为 Carnot 群 [4]水平层中的向量引入了可变形性的概念。一个向量 $V \in \mathfrak{g}_1$ 是可塑的，如果曲线 $t \mapsto \exp(tV)$ 的任意小 $C^1_H$ 扰动总能到达端点 $\exp(V)$ 的一个开邻域中的

*Date*：2026年11月24日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C17，58C25。
*Key words and phrases.* 可柔性、卢津逼近、自由Carnot群、商映射。

$\mathbb{G}$。Juillet 和 Sigalotti 证明，在 Carnot群 $\mathbb{G}$ 中，$C^1_H$ 曲线的 Whitney延拓定理成立，当且仅当 $\mathbb{G}$ 的水平层中的每个向量都是可塑的。随后，这些性质蕴含了对 Lipschitz曲线 [4, 7, 11, 15]的卢津逼近。

在二步Carnot群中，所有水平向量都是可塑的。然而，在步数至少为 3 的 Carnot 群中会出现不可屈向量。例如，在步长 3 的 Engel群 $\mathbb{E}$中，水平向量 $E_2$ 不可屈，而其他所有非零水平方向都是可塑的 [4, 13]。此外，可以证明，Engel群不具备$C^1_H$ 针对 Lipschitz 曲线的卢津逼近 [11]。不过，它具备弱Lusin逼近性质，即每条 Lipschitz 曲线都与某条 $C^1$ 水平曲线相交于一个测度严格为正的集合。这一结果在 [13], 中得到证明，是以下事实的一个推论：只要某些水平方向具有可变形性，就足以保证存在这些方向上的曲线的$C^1_H$ Whitney延拓和卢津逼近。作者在 [12] 中证明，自由 Carnot 群$\mathbb{F}_{2,\ 3}$（步数为 3，生成元为 2 个）表现出比 Engel群更为病态的性质。事实上，存在一条 Lipschitz 曲线，其与任意 $C^1_H$ 曲线的交集的 1 维豪斯多夫测度均为 0。也就是说，$\mathbb{F}_{2,\ 3}$ 中的 Lipschitz 曲线未必能够通过光滑曲线逼近。

在本文中，我们研究两个自然问题。首先，我们通过证明可塑性和卢津逼近在 Carnot群的李代数 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{h}$ 之间的商映射下得以保持，考察这些性质如何在适当的映射下保持。商映射（定义2.14）是这样一种李代数同态：它将 $\mathfrak{g}$ 的水平层 $\mathfrak{g}_1$ 映 onto $\mathfrak{h}$ 的水平层 $\mathfrak{h}_1$ 。总之，我们证明以下结果。

**定理1.1**。设 $\mathbb{G}$、$\mathbb{H}$ 是 *Carnot*群，$\mathfrak{g}$、$\mathfrak{h}$ 分别是它们的李代数，水平层分别为 $\mathfrak{g}_1$、$\mathfrak{h}_1$，且 $\Phi\colon\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是一个商映射。

*(1)* 如果 $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathbb{G}$ 在 $\Phi^{-1}(\mathfrak{B})\subset\mathfrak{g}_1$ 上具有 $C^1_H$ *Lusin* 性质，那么 $\mathbb{H}$ 在 $\mathfrak{B}$ 上具有 $C^1_H$*Lusin* 性质。*(2)* 如果 $\mathbb{G}$ 具有弱 $C^1_H$ *Lusin* 性质，那么 $\mathbb{H}$ 具有弱 $C^1_H$ *Lusin* 性质。*(3)* 如果 $X\in\mathfrak{g}_1$ 是可塑的，那么 $\Phi(X)\in\mathfrak{h}_1$ 是可塑的。

我们注意到，定理1.1中的性质（3）曾在 [4] 第1644页的脚注中作为一项归因于E. Le Donne的观察被提及。在本文中，我们将给出论证这一陈述的精确细节。

第二个自然问题是，在多大程度上，$\mathbb{F}_{2、3}$中构造的病态曲线也存在于其他Carnot群中。我们证明，这些结果可以推广到更多的Carnot 群，即所有具有$s$ 步、 $r\geq 2$ 个生成元的自由 Carnot 群$\mathbb{F}_{r,\ s}$。记$\mathfrak{f}_{r,\ s}$为$\mathbb{F}_r$的李代数$\mathbb{F}_{r,\ s}$。

**定理 1.2**。固定整数 $r\geq 2$ 和 $s\geq 3$。

（*1*）$\mathfrak{f}_{r,\ s}$ 中的唯一可变形向量是0。（*2*）存在一条*Lipschitz*曲线 $\gamma\colon\ [0,1]\to\mathbb{F}_{r,\ s}$，使得对于$\mathbb{F}_{r,\ s}$中的任意$C^1_H$ 曲线 $\Gamma$，都有 $\mathcal{H}^1\left(\mathrm{Im}(\gamma)\cap\mathrm{Im}(\Gamma)\right)=0$。

为证明定理 1.2，我们证明：当$r\geq 2,\ \ s\geq 3$时，存在从 $\mathbb{F}_{r、s}$ 到 $\mathbb{F}_{2、3}$ 的商映射。[12] 中已证明，$\mathbb{F}_{2、3}$ 不具有弱 $C^1_H$ Lusin 性质。

因此，由定理 1.1，我们可以得出$\mathbb{F}_{r,\ s}$ 不具有弱 $C^1_H$Lusin 性质。将此与 [12, 定理 5.1] 结合，即可得到定理 1.2。再次利用定理 1.1及类似技术，我们还研究了模型 Filiform 群（推论5.4）和幂零矩阵群（推论 5.13）中的可变形向量。特别地，我们证明，对于任意 $s$，由 $(s+1)\times(s+1)$ 幂零矩阵组成的群是另一个步数为 $s$ 的可变形 Carnot 群示例。

本文的结构安排如下。第 2 节回顾 Carnot 群、水平曲线、可变形性和卢津性质的预备知识。第 3 节证明商映射保持卢津逼近性质。第 4 节证明商映射将可变形向量推前。由此证明定理1.1。最后，在第 5 节中，我们构造若干商映射，并推导出定理 1.1 的一些应用。特别地，我们证明定理 1.2

**致谢：** G. Speight 的研究获得了美国国家科学基金会奖项编号 2348715 的资助。

## 2. 预备知识

2.1. **Carnot 群**。 我们简要回顾与 Carnot 群有关的基本术语。李代数是一个向量空间 $\mathfrak{g}$，配备一个李括号 $[\cdot,\cdot]\colon\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，该李括号是双线性的，满足 $[X,X]=0$，并满足 Jacobi 恒等式 $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$。与李群相关联的李代数是左不变向量场构成的空间，并配备李括号 $[X,Y]$；该李括号在光滑函数上的定义为$[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f))$。

**定义 2.1**。 若一个李代数 $\mathfrak{g}$具有如下形式的子空间直和分解，则称其为幂零且分层：

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_s$$

使得对于任意 $i=2,\dots,s$以及 $[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_s]=0$，均有 $\mathfrak{g}_i=[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_{i-1}]$。子空间 $\mathfrak{g}_1$ 称为水平或第一层。

若一个李群 $\mathbb{G}$ 是连通、单连通的，且其李代数$\mathfrak{g}$是幂零且分层的，则称其为*Carnot* 群。

设 $\mathbb{G}$ 为一个Carnot群。我们取其水平层的一组基 $\{X_1,\dots,X_r\}$。这为$\mathfrak{g}_1$ 赋予了一个内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathfrak{g}_1}$ 使得 $\{X_1,\dots,X_r\}$ 为正交归一基。随后，对于向量 $V=\sum_{i=1}^r v_iX_i\in\mathfrak{g}_1$，我们通过 $\|V\|_{\mathfrak{g}_1}=\sqrt{\langle V,\ V\rangle_{\mathfrak{g}_1}}=\left(\sum_{i=1}^r v_i^2\right)^{1/2}$定义其长度 $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}_1}$。

注记 2.2。 在任意 Carnot群 $\mathbb{G}$ 中，我们采用以下记号。令 $m_i$ :=dim($\mathfrak{g}_i$),$h_i:=m_1+\cdots+m_i$ for $1\le i\le s$, and $h_0:=0$。基 $X_1,\dots,X_n$ of $\mathfrak{g}$ 若满足 $X_{h_{i-1}+1},\dots,X_{h_i}$是 $\mathfrak{g}_i$ for $1\le i\le s$的基，则称其适配于分层 。我们固定这样一组基。令 $r$为水平层的维数，即 $r:=m_1$。

**定义 2.3**。 映射 exp: $\mathfrak{g}\to\mathbb{G}$ 定义为 exp($X$) $=\gamma(1)$，其中 $\gamma\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{G}$ 是 $\mathbb{G}$中唯一的单参数子群，其在单位元处的切向量等于$X$。该指数映射 是 $\mathfrak{g}$与 $\mathbb{G}$之间的微分同胚。

我们可以利用下述微分同胚将 $\mathbb{G}$与 $\mathbb{R}^n$ 对应起来:

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longleftrightarrow \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n) \in \mathbb{G}.$$

这种对应被称为第一类指数坐标。根据 Baker-Campbell-Hausdorff 公式 [1, 定义 2.2.11], 它在 $\mathbb{R}^n$ 上诱导出一种李群运算。

曲线 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{G}$ 若作为取值于 $\mathbb{R}^n$ 的曲线是绝对连续的，则称其为绝对连续。这意味着速度 $\dot{\gamma}(t)$ 对几乎所有 $t \in [a,b]$ 都存在。由于所选坐标赋予 $\mathbb{R}^n$ 李群结构，其李代数为 $\mathfrak{g}$，我们可以将任意 $X \in \mathfrak{g}$ 视为 $\mathbb{R}^n$上的左不变向量场。也就是说，对于某些控制函数 $u_1, \dots, u_n \in L^1[a,b]$，我们可以写成 $\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^n u_j(t) X_j(\gamma(t))$。

**定义 2.4**。 若绝对连续曲线 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{G}$ 可以写成

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{r} u_j(t) X_j(\gamma(t)) \qquad \text{almost everywhere,} \tag{2.1}$$

即，几乎处处有 $u_{r+1} = \cdots = u_n = 0$。我们将此类曲线的长度 定义为 $\ell_{\mathbb{G}}(\gamma) := \int_a^b |u|$。

对于任意满足 $\dot{\gamma}(t)$ 存在的 $t$ ，记作

$$\gamma'(t) := (dL_{\gamma(t)^{-1}})_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t) X_j \in \mathfrak{g}_1 \tag{2.2}$$

其中 $L_{\gamma(t)^{-1}}\colon \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ 是由 $\gamma(t)^{-1}$定义的左乘，即 $L_{\gamma(t)^{-1}}(p) = \gamma(t)^{-1} * p$，而 $(dL_{\gamma(t)^{-1}})_{\gamma(t)}$ 是其在 $\gamma(t)$ 处的雅可比矩阵。在此过程中，我们将 $\gamma'$ 视为到 $\mathfrak{g}$的映射，并将其与 $\mathbb{G}$ 在单位元处的切空间等同。由此得到水平性的另一种定义。

**定义 2.5.** 绝对连续曲线 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{G}$ 若几乎处处满足 $\gamma' \in \mathfrak{g}_1$，则称为水平 曲线。

**定义 2.6.** 该卡诺–卡拉泰奥多里距离（*CC* 距离）任意两点之间$x, y \in \mathbb{G}$ 定义为

$$d(x,y) := \inf\{\ell_{\mathbb{G}}(\gamma)\colon \gamma \text{ is a horizontal curve joining } x \text{ and } y\}.$$

注意，CC 距离是左不变的，即对于任意 $p$， $q$， $r \in \mathbb{G}$，有 $d(r*p,\ r*q) = d(p,\ q)$。CC 距离在 $\mathbb{G}$ 上诱导出的拓扑与欧几里得距离相同。然而，它与欧几里得距离并非双利普希茨等价。

## 2.2. **可变形性**。

假设 $\mathbb{G}$ 是一个 Carnot群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。

**定义 2.7**。 给定一个区间 $I \subset \mathbb{R}$，曲线 $\gamma\colon\ I \to \mathbb{G}$ 若作为 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线是 $C^1_H$ （即连续可微的），且为水平曲线，则称其为 $C^1$ 。等价地，$\gamma$ 若 $\gamma'\colon\ I \to \mathfrak{g}_1$ 存在且连续，则称其为 $C^1_H$。

我们用 $C_H^1(I,\ \mathbb{G})$ 表示所有$C_H^1$曲线 $\gamma\colon\ I\to\mathbb{G}$ 的集合。若 $I=[a,b]$，则空间$C_H^1([a,b],\ \mathbb{G})$ 可以赋予一个自然度量：

$$d_{C_H^1}(\gamma_1,\gamma_2):=\max\left(\sup_{t\in[a,b]}d_{\mathbb{G}}(\gamma_1(t),\gamma_2(t)),\ \sup_{t\in[a,b]}\|\gamma_2'(t)-\gamma_1'(t)\|_{\mathfrak{g}_1}\right).$$

我们有时使用记号 $\|\gamma_2'-\gamma_1'\|_\infty$ 表示 $\sup_{t\in[a,b]}\|\gamma_2'(t)-\gamma_1'(t)\|_{\mathfrak{g}_1}$。在坐标中运算时，我们偶尔使用 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{G}$上的欧几里得范数。

曲线的以下几何性质由 [4]提出。以下定义并非最初的定义，但 [4,命题3.7]证明了二者等价。

**定义2.8**。 若对空间$C_H^1([0,1],\mathbb{G})$中曲线$t\mapsto\exp(tV)$的每个邻域 $\mathcal{V}$，集合

$$\{\beta(1):\beta\in\mathcal{V},(\beta,\beta')(0)=(0_{\mathbb{G}},V)\}$$

是 $\exp(V)$ 的一个邻域。

若每个 $V\in\mathfrak{g}_1$ 都是可塑的，我们就称 $\mathbb{G}$ 是可塑的。这一性质的重要性在于，它等价于 Carnot 群中 $C_H^1$ 曲线的 Whitney延拓性质，而这正是 [4]的主要结果。 [4] 还证明了所有二步Carnot群都是可塑的，并且存在步数任意高的可塑 Carnot 群。

### 2.3. 卢津逼近。

设 $\mathbb{G}$是一个 Carnot群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。

**定义2.9**。 设 $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{g}_1$。我们称 $\mathbb{G}$ 在 $\mathfrak{A}$ 上具有 $C_H^1$ 卢津性质，如果对于任意$\varepsilon>0$ 以及任意水平曲线 $\gamma\colon\ [0,1]\to\mathbb{G}$，都存在一条 $C_H^1$ 曲线 $\Gamma\colon\ [0,1]\to\mathbb{G}$，使得

$$m\{t\in[0,1]:\gamma'(t)\in\mathfrak{A}\text{ and }\Gamma(t)\neq\gamma(t)\}<\varepsilon.$$

若 $\mathfrak{A}=\mathfrak{g}_1$，此不等式便简化为

$$m\{t\in[0,1]:\Gamma(t)\neq\gamma(t)\}<\varepsilon.$$

因此，我们得到通常的 $C_H^1$ 卢津性质。

直观地说，定义2.9意味着，沿 $\mathfrak{A}$ 方向行进的水平曲线部分可以由 $C^1$ 水平曲线很好地逼近。

**定义 2.10**。 我们称 $\mathbb{G}$ 具有弱 $C_H^1$ 卢津性质，如果对于任意水平曲线 $\gamma\colon\ [0,1]\to\mathbb{G}$，都存在一条 $C_H^1$曲线 $\Gamma\colon\ [0,1]\to\mathbb{G}$，使得

$$m\{t\in[0,1]:\Gamma(t)\neq\gamma(t)\}<1.$$

换言之，定义 2.10 意味着每条水平曲线都必须在一个具有正测度的集合上与一条 $C_H^1$ 曲线一致，但我们无法对该集合的测度进行定量控制。

由此 [4] 可知，所有可变形 Carnot 群都具有 $C_H^1$ Lusin 性质，而 Engel群不具有 [11]该性质。不过，Engel群确实具有弱 $C_H^1$ Lusin 性质 [13]。秩 2、步长 3 的自由 Carnot 群甚至不具有弱$C_H^1$ Lusin 性质 [12]。

**2.4. 李　代数同态**。以下定义来自 [1, 第 2 节。1.8 ].

**定义 2.11**。设 $(\mathbb{G}, *_1)$、$(\mathbb{H}, *_2)$ 为李群。映射 $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ 是李群同态，当且仅当它是 $C^\infty$ 且

$$\varphi(x *_1 y) = \varphi(x) *_2 \varphi(y) \qquad \text{for all } x, y \in \mathbb{G}.$$

映射是李群同构，当且仅当它是李群同态，并且是可微流形之间的微分同胚。

**定义 2.12**。设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_1)$、$(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_2)$ 为李代数。映射 $\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是李代数同态，当且仅当它是线性的且

$$\Phi([X, Y]_1) = [\Phi(X), \Phi(Y)]_2 \qquad \text{for all } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

映射是李代数同构，当且仅当它是双射李代数同态。

以下结果是李理论中的基础。

**定理 2.13**（Lee，2013年，定理20.19）。设 $\mathbb{G}$、$\mathbb{H}$ 为 *Carnot* 群，其李代数分别为$\mathfrak{g}$、$\mathfrak{h}$。给定李代数同态 $\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$，定义映射 $F\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ 为

$$F(\exp_{\mathbb{G}}(X)) = \exp_{\mathbb{H}}(\Phi(X))$$

这是一个李群同态，并且 $dF_{e_{\mathbb{G}}} = \Phi$。

我们考虑以下这类映射。

**定义2.14**。分层幂零李代数之间的李代数同态 $\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$，如果 $\Phi(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{h}_1$，则称为商映射 。

以下只是对微分的标准链式法则 [8, 命题3.5]的重新表述。它将由我们对 $\gamma'$的定义（2.2）推出。

**命题 2.15**。设 $\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是分层幂零李代数之间的李代数同态，且 $F\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ 是其诱导的李群同态。若 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{G}$ 是水平曲线，则对几乎处处的 $t \in [0,1]$,

$$(F \circ \gamma)'(t) = \Phi(\gamma'(t)).$$

证明。注意到，对于任意 $p \in \mathbb{G}$，都有 $L_{F(p)} \circ F = F \circ L_p$，因为 $F$是李群同态。在 $\gamma$ 可微处固定 $t \in [0,1]$。因此，写作 $p = \gamma(t)$，由（2.2）可得

$$\begin{aligned}(F \circ \gamma)'(t) = (dL_{F(p)^{-1}})_{F(p)} \tfrac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) &= (dL_{F(p)^{-1}})_{F(p)} dF_p(\dot\gamma(t)) \\ &= d(L_{F(p)^{-1}} \circ F)_p(\dot\gamma(t)) \\ &= d(F \circ L_{p^{-1}})_p(\dot\gamma(t)) \\ &= dF_{e_{\mathbb{G}}}(dL_{p^{-1}})_p(\dot\gamma(t)) = \Phi(\gamma'(t))\end{aligned}$$

其中，这里的第三个和第五个等式由微分的标准链式法则推出[8,命题 3.5]。□

**推论 2.16.** 假设 $\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是一个商映射，$F\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ 是其诱导的李群同态。如果 $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{G}$ 是水平的，那么 $F \circ \alpha$ 在 $\mathbb{H}$中也是水平的。如果$\alpha \in C^1_H([0,1], \mathbb{G})$，那么 $F \circ \alpha \in C^1_H([0,1], \mathbb{H})$。

## 3. Quotient maps preserve Lusin approximations

本节指出，Carnot 群中 Lipschitz曲线的卢津性质在商映射下保持不变。首先，我们记录下面的引理，它证明水平曲线可以通过商映射“提升”，且提升曲线的长度受原曲线长度控制。 [7]的定理4.1中证明了一个类似的结果。

**引理 3.1**。 固定 *Carnot* 群 $\mathbb{G}$、$\mathbb{H}$ 以及商映射 $\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$。记由 $\Phi$ 诱导的李群同态为$F\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$，即 $dF_{e_{\mathbb{G}}} = \Phi$。存在一个常数 $C > 0$，使得对于任意满足 $\gamma(0) = 0_{\mathbb{H}}$ 的水平曲线 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{H}$，存在一条水平曲线 $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{G}$，满足 $F \circ \alpha = \gamma$ 处处成立， $\Phi(\alpha') = \gamma'$ 几乎处处成立，并且

$$L_{\mathbb{G}}(\alpha) \le C L_{\mathbb{H}}(\gamma). \tag{3.1}$$

证明。 由于 $\Phi$ 是商映射，限制映射 $\Phi|_{(\ker\Phi)^\perp \cap \mathfrak{g}_1}$ 是从 $(\ker\Phi)^\perp \cap \mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{h}_1$ 的同构。记

$$A := (\Phi|_{(\ker\Phi)^\perp \cap \mathfrak{g}_1})^{-1}\colon \mathfrak{h}_1 \to (\ker\Phi)^\perp \cap \mathfrak{g}_1.$$

设 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{H}$ 是一条满足 $\gamma(0) = 0_{\mathbb{H}}$ 的水平曲线。初值问题

$$\begin{cases} \alpha'(t) = A(\gamma'(t)) \text{ for a.e. } t \in [0,1] \\ \alpha(0) = 0_{\mathbb{G}} \end{cases}$$

有唯一解 $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{G}$（例如参见 [10, 定理 A.3]）。此外， $\alpha$ 是水平的，因为 $\alpha' = A(\gamma') \in (\ker\Phi)^\perp \cap \mathfrak{g}_1$。特别地， $\Phi \circ (\alpha') = \Phi \circ A \circ (\gamma') = \gamma'$，并且根据命题 2.15，

$$(F \circ \alpha)'(t) = \Phi(\alpha'(t)) = \gamma'(t)$$

几乎处处 $t \in [0,1]$。由于 $F(\alpha(0)) = F(0_{\mathbb{G}}) = 0_{\mathbb{H}}$，可知 $F \circ \alpha = \gamma$ 几乎处处成立。最后，

$$L_{\mathbb{G}}(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'\|_{\mathfrak{g}_1} = \int_0^1 \|A \circ (\gamma')\|_{\mathfrak{g}_1} \le \|A\| \int_0^1 \|\gamma'\|_{\mathfrak{h}_1} = \|A\| L_{\mathbb{H}}(\gamma)$$

其中 $\|A\|$ 是线性映射 $A$的算子范数。 □

虽然任何具有 $C^1_H$ Lusin 性质的 Carnot 群（例如所有步为 2 的群）都必定具有弱 $C^1_H$ Lusin 性质，但文献 [12] 中的定理 1.2 表明，存在不具备该性质的 Carnot 群。现在我们将证明，这两种性质在商映射下均得以保持。

**命题3.2**。 假设 $\mathbb{G}$、$\mathbb{H}$ 是 *Carnot* 群，且 $\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是一个商映射。

*(1)* 如果 $\mathbb{G}$ 具有弱 $C^1_H$ *Lusin* 性质，那么 $\mathbb{H}$ 具有弱 $C^1_H$ *Lusin* 性质。*(2)* 如果 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{h}_1$ 和 $\mathbb{G}$ 在 $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \cap \mathfrak{g}_1$ 上具有 $C^1_H$ *Lusin* 性质，那么 $\mathbb{H}$ 在 $\mathfrak{B}$ 上具有 $C^1_H$*Lusin* 性质。

证明。 令 $F\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ 为由定理 2.13 保证存在、与 $\Phi$ 相关联的李群同态。假设 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{H}$ 是水平的，并且不失一般性地假设 $\gamma(0) = 0$。由引理 3.1，存在一条水平曲线 $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{G}$，使得 $\gamma = F \circ \alpha$，且对几乎处处的 $t \in [0,1]$，有 $\Phi(\alpha'(t)) = \gamma'(t)$。

设 $\beta\colon [0,1]\to\mathbb{G}$ 是任意一条$C^1_H$曲线。那么曲线 $\Gamma = F\circ\beta\colon [0,1]\to\mathbb{H}$ 是$C^1_H$，并且对所有满足 $\alpha(t) = \beta(t)$ 的 $t\in[0,1]$，我们有

$$\Gamma(t) = F(\beta(t)) = F(\alpha(t)) = \gamma(t).$$

因此，$\{t\in[0,1]\colon \Gamma(t)\neq\gamma(t)\}\subset\{t\in[0,1]\colon \beta(t)\neq\alpha(t)\}$。

利用这一观察，我们现在证明（1）和（2）。假设 $\mathbb{G}$ 具有弱 $C^1_H$ Lusin 性质。那么，在上述论证中，我们还可以假设 $\beta$ 满足

$$m\{t\in[0,1]:\beta(t)\neq\alpha(t)\}<1,$$

由此可得：$m\{t\in[0,1]\colon \Gamma(t)\neq\gamma(t)\}<1$。这就证明了（1）。

接下来，假设 $\mathbb{G}$ 在 $\Phi^{-1}(\mathfrak{B})\cap\mathfrak{g}_1$上具有 $C^1_H$ Lusin 性质。给定 $\varepsilon>0$，我们可以假设 $\beta$ 满足

$$m\{t\in[0,1]:\alpha'(t)\in\Phi^{-1}(\mathfrak{B})\cap\mathfrak{g}_1 \text{ and } \beta(t)\neq\alpha(t)\}<\varepsilon.$$

如果 $\gamma'(t)\in\mathfrak{B}$ 且 $\Phi(\alpha'(t)) = \gamma'(t)$，则有 $\alpha'(t)\in\Phi^{-1}(\mathfrak{B})$。由于对于几乎处处的 $t\in[0,1]$，$\Phi(\alpha'(t)) = \gamma'(t)$ 且$\alpha'(t)\in\mathfrak{g}_1$，因此可得

$$m\{t\in[0,1]:\gamma'(t)\in\mathfrak{B} \text{ and } \Gamma(t)\neq\gamma(t)\}<\varepsilon.$$

这就证明了 (2)。 □

## 4. Quotient Maps Preserve Pliability

**注 4.1。** 设 $\Phi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是一个商映射，其诱导的李群同态为$F$。对于任意水平曲线 $\alpha\colon [0,1]\to\mathbb{G}$,

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(F\circ\alpha) = \int_0^1 \|(F\circ\alpha)'\|_{\mathfrak{h}_1} = \int_0^1 \|\Phi\circ(\alpha')\|_{\mathfrak{h}_1} &\le \|\Phi|_{\mathfrak{g}_1}\| \int_0^1 \|\alpha'\|_{\mathfrak{g}_1} \\ &= \|\Phi|_{\mathfrak{g}_1}\| L_{\mathbb{G}}(\alpha), \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $\|\Phi|_{\mathfrak{g}_1}\|$ 是线性映射 $\Phi|_{\mathfrak{g}_1}\colon \mathfrak{g}_1\to\mathfrak{h}_1$的算子范数。

因此，我们注意到 $F$ 是 $\|\Phi|_{\mathfrak{g}_1}\|$-Lipschitz。事实上，给定 $x,\ y\in\mathbb{G}$ 以及一条从 $x$ 到 $y$的水平最短长度曲线 $\beta\colon [0,1]\to\mathbb{G}$，由 $d_{\mathbb{H}}$ 的定义和 (4.1) 可得

$$d_{\mathbb{H}}(F(x),F(y))\le L_{\mathbb{H}}(F\circ\beta)\le\|\Phi|_{\mathfrak{g}_1}\|L_{\mathbb{G}}(\beta) = \|\Phi|_{\mathfrak{g}_1}\| d_{\mathbb{G}}(x,y). \tag{4.2}$$

以下是一个看似众所周知结果的双 Lipschitz 修改，例如参见 [6]。我们在此给出一个简短的证明。

**引理 4.2。** 设 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{H}$ 是 *Carnot* 群，且 $\Phi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是一个商映射。则存在一个常数 $C = C(\Phi)\ge 1$，使得对于所有 $x\in\mathbb{G}$ 和 $\widetilde{y}\in\mathbb{H}$，都存在某个 $y\in F_\Phi^{-1}(\widetilde{y})$，使得

$$C^{-1}d_{\mathbb{G}}(x,y)\le d_{\mathbb{H}}(F_\Phi(x),\widetilde{y})\le C d_{\mathbb{G}}(x,y).$$

**证明。** 固定 $x\in\mathbb{G}$ 和 $\widetilde{y}\in\mathbb{H}$。取一条水平最短长度曲线 $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{H}$，从 $F_\Phi(x)$ 到 $\widetilde{y}$。由于 $F$ 是同态，我们不妨设 $x = 0_{\mathbb{G}}$，使得$F_\Phi(x) = 0_{\mathbb{H}}$。因此 $d_{\mathbb{H}}(0_{\mathbb{H}},\widetilde{y}) = L_{\mathbb{H}}(\gamma)$。

令 $\alpha\colon [0,1]\to\mathbb{G}$ 为 $F_\Phi$ 对 $\gamma$ 的一个提升，如引理 3.1 所保证，并设 $C'>0$ 是该引理中的常数。令 $y:=\alpha(1)$。则 $F_\Phi(y)=F_\Phi(\alpha(1))=\gamma(1)=\widetilde{y}$，并且

$$d_{\mathbb{G}}(0_{\mathbb{G}},y)\le L_{\mathbb{G}}(\alpha)\le C'L_{\mathbb{H}}(\gamma)=C'd_{\mathbb{H}}(0_{\mathbb{H}},\widetilde{y}).$$

这就证明了第一个不等式，而第二个不等式由（4.2）得出，因为 $\widetilde{y}=F_\Phi(y)$。 □

现在我们证明商映射保持可变形性。

**命题 4.3**。设 $\mathbb{G}$、$\mathbb{H}$ 是 *Carnot*群，且 $\Phi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是一个商映射。如果 $X\in\mathfrak{g}_1$ 是可塑的，那么 $\Phi(X)\in\mathfrak{h}_1$ 是可塑的。

证明。利用 $X$ 是可塑性的假设，对于曲线 $\gamma_X(t):=\exp_{\mathbb{G}}(tX)$ 在 $C^1_H([0,1],\mathbb{G})$ 中的每个邻域，该集合

$$\{\alpha(1):\alpha\in\mathcal{V},(\alpha,\alpha')(0)=(0_{\mathbb{G}},X)\}$$

是 $\gamma_X(1)=\exp_{\mathbb{G}}(X)$ 在 $\mathbb{G}$ 中的一个邻域。

令 $Y:=\Phi(X)$ 且令 $\gamma_Y(t):=\exp_{\mathbb{H}}(tY)$ 对于 $t\in[0,1]$。根据定理 2.13，

$$\exp_{\mathbb{H}}(tY)=\exp_{\mathbb{H}}(\Phi(tX))=F_\Phi(\exp_{\mathbb{G}}(tX))\qquad\text{for every } t\in[0,1].$$

也就是说，$\gamma_Y=F_\Phi\circ\gamma_X$。

固定 $\mathcal{U}$ 中 $\gamma_Y$ 的任意邻域 $C^1_H([0,1],\mathbb{H})$。根据可变形性的定义，只需证明集合

$$\{\beta(1):\beta\in\mathcal{U},(\beta,\beta')(0)=(0_{\mathbb{H}},Y)\}$$

是 $\mathbb{H}$ 中 $\gamma_Y(1)=\exp_{\mathbb{H}}(Y)$ 的一个邻域。为此，我们将证明存在某个 $s>0$，使得如果 $y\in\mathbb{H}$ 满足 $d_{\mathbb{H}}(y,\exp_{\mathbb{H}}(Y))<s$，那么存在一条曲线 $\beta\in\mathcal{U}$，满足 $(\beta,\beta')(0)=(0_{\mathbb{H}},Y)$，且 $\beta(1)=y$。

设 $C\ge\max\{\|\Phi|_{\mathfrak{g}_1}\|,1\}$ 是满足引理 4.2 对商映射 $\Phi$ 的结论的常数。利用 $\mathcal{U}$ 是 $\gamma_Y$ 的邻域这一事实，我们可以选取 $r>0$，使得 $B(\gamma_Y,r)\subset\mathcal{U}$。由于 $X$ 是可塑的，存在某个 $0<s<r$，使得

$$B(\exp_{\mathbb{G}}(X),s)\subset\{\alpha(1):\alpha\in B(\gamma_X,\tfrac{r}{C}),\,(\alpha,\alpha')(0)=(0_{\mathbb{G}},X)\}.\tag{4.3}$$

取 $y\in\mathbb{H}$，使得 $d(y,\exp_{\mathbb{H}}(Y))<\frac{s}{C}$。根据引理 4.2，存在某个 $x\in\mathbb{G}$，使得 $d(x,\exp_{\mathbb{G}}(X))\le Cd(y,\exp_{\mathbb{H}}(Y))<s$，且 $F_\Phi(x)=y$，因此由 (4.3) 可知，存在某个 $\alpha\in B(\gamma_X,\frac{r}{C})$，使得 $(\alpha,\alpha')(0)=(0_{\mathbb{G}},X)$，且 $\alpha(1)=x$。

考虑 $\mathbb{H}$ 中的曲线 $\beta=F_\Phi\circ\alpha$。由于 $F_\Phi$ 是李群同态，我们有 $\beta(0)=F_\Phi(\alpha(0))=F_\Phi(0_{\mathbb{G}})=0_{\mathbb{H}}$。此外，命题 2.15 意味着

$$\beta'(0)=\Phi(\alpha'(0))=\Phi(X)=Y.$$

因此 $(\beta,\beta')(0)=(0_{\mathbb{H}},Y)$。此外，注意到 $\beta(1)=F_\Phi(\alpha(1))=F_\Phi(x)=y$。由于 $F_\Phi$ 是 $C$-Lipschitz（见 (4.2)），我们有

$$d_{\mathbb{H}}(\beta(t),\gamma_Y(t))=d_{\mathbb{H}}(F_\Phi(\alpha(t)),F_\Phi(\gamma_X(t)))\le Cd_{\mathbb{G}}(\alpha(t),\gamma_X(t))<r.$$

此外，

$$\|\beta'(t)-\gamma_Y'(t)\|_{\mathfrak{h}_1}=\|(F_\Phi\circ\alpha)'(t)-(F_\Phi\circ\gamma_X)'(t)\|_{\mathfrak{h}_1}=\|\Phi(\alpha'(t))-\Phi(\gamma_X'(t))\|_{\mathfrak{h}_1}$$

$$\leq \|\Phi|_{\mathfrak{g}_1}\|\alpha'(t) - \gamma_X'(t)\|_{\mathfrak{g}_1} < r.$$

因此 $\beta \in B(\gamma_Y,\ r) \subset \mathcal{U}$，这就证明了 $Y = \Phi(X)$ 是可塑的。 □

回顾一下端点映射 $\mathrm{End}_{\mathbb{G}}$: $C^0([0,1],\ \mathfrak{g}_1) \to \mathbb{G}$ 定义为 $\mathrm{End}_{\mathbb{G}}(v) = \gamma(1)$，其中 $\gamma \in C^1_H([0,1],\ \mathbb{G})$ 满足 $\gamma(0) = 0_{\mathbb{G}}$ 和 $\gamma' = v$。

注 4.4。 正如 [3, 4]中所述， $X \in \mathfrak{g}_1$ 是可塑的，当且仅当端点映射 $\mathrm{End}_{\mathbb{G}}$在常值曲线 $\delta_X$: $[0,1] \to \mathfrak{g}_1$ 处是开映射，其中 $\delta_X(t)$ 定义为: $= X$ （为完整起见，我们将在下文简要证明这一事实）。因此，为证明上述结果，我们可以证明：只要 $\mathrm{End}_{\mathbb{G}}$ 在 $\delta_X$处是开映射，$\mathrm{End}_{\mathbb{H}}$ 就在常值曲线 $\delta_{\Phi(X)}$ 处是开映射。由于映射 $\Phi$ 是开映射，只需证明对于 $U$的任意邻域， $\Phi^{-1}(U)$ 是 $\delta_X$ 的一个邻域，即证明通过与 $\Phi$ 复合，将 $C^0([0,1],\ \mathfrak{g}_1)$ 投影到 $C^0([0,1],\ \mathfrak{h}_1)$ 是连续的。这正是上述证明的内容。

现在证明前面提到的可变形性的等价刻画。

**命题4.5**。 设 $\mathbb{G}$ 是一个*Carnot*群。那么，当且仅当映射 $v \mapsto \mathrm{End}_{\mathbb{G}}(X+v)$ 在 $0 \in C^0([0,1], \mathfrak{g}_1)$处是开映射时， $X \in \mathfrak{g}_1$ 是可塑的。

证明。 向量 $X \in \mathfrak{g}_1$是可塑的，是指对于 $C^1_H([0,1],\mathbb{G})$中 $t \mapsto \exp(tX)$的任意邻域 $\mathcal{V}$，集合

$$\{\beta(1) : \beta'(0) = X,\ \beta(0) = 0,\ \beta \in \mathcal{V}\}$$

是$\exp(X)$的一个邻域。这等价于说，对于任意 $\varepsilon > 0$，集合

$$\begin{aligned}\{\mathrm{End}(v) : v \in C^0([0,1],\mathfrak{g}_1),\ v(0) = X,\ \|v - X\|_\infty < \varepsilon\}\\ = \{\mathrm{End}(X+v) : v \in C^0([0,1],\mathfrak{g}_1),\ v(0) = 0,\ \|v\|_\infty < \varepsilon\}\end{aligned}$$

是$\exp(X)$的一个邻域。 □

## 5. Applications

在本节中，我们运用定理1.1研究若干Carnot群中的可变形性与卢津逼近。为此，我们构造适当的商映射，将这些群映射到此前已研究过的空间上。

**5.1. 模型丝状群**。我们首先利用关于恩格尔群的已有结果，推断模型丝状群的相关性质。

**定义5.1**。三步*Engel*代数 $\mathfrak{e}$ 是一个具有如下基$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ 的4维李代数，其中唯一非零的括号对为

$$[E_1, E_2] = E_3 \quad \text{and} \quad [E_1, [E_1, E_2]] = [E_1, E_3] = E_4.$$

恩格尔群 $\mathbb{E}$ 是唯一一个（在李群同构意义下）其李代数为 $\mathfrak{e}$的Carnot群。

**定义 5.2.** 步数为 $s$ 的模型丝状代数 $\mathfrak{fil}_s$ 是一个维数为 $(s+1)$ 的李代数，其分层为

$$\mathfrak{fil}_s = \mathrm{span}\{Z_1, Z_2\} \oplus \mathrm{span}\{Z_3\} \oplus \cdots \oplus \mathrm{span}\{Z_{s+1}\}$$

其中仅有的非零括号对为 $[Z_1, Z_k] = Z_{k+1}$，适用于 $k = 2, \ldots\ldots, s$。模型丝状群$\mathbb{F}\mathbb{i}\mathbb{l}_s$是唯一一个（在李群同构意义下）其李代数为 $\mathfrak{fil}_s$的 Carnot群。

特别地， $\mathfrak{fil}_1 = \mathbb{R}$、 $\mathfrak{fil}_2 = \mathfrak{h}$ 是第一个海森堡代数，而 $\mathfrak{fil}_3 = \mathfrak{e}$ 是三步Engel代数。我们回顾 [13]中的以下事实。

**命题5.3**。 向量 $0 \neq X \in \mathfrak{e}_1$ 是可塑的，当且仅当 $X \notin \mathrm{span}(E_2)$。

作为命题5.3和定理1.1的推论，我们得到以下结果。

**推论5.4**。 对于任意 $s \geq 3$，向量 $Z_2 \in \mathfrak{fil}_s$ 都不是可塑的。

证明。 通过延拓定义李代数同态 $\Phi : \mathfrak{fil}_s \to \mathfrak{fil}_3 = \mathfrak{e}$

$$\Phi(Z_i) = \begin{cases} E_i & \text{for } i = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{for } i \geq 5 \end{cases}$$

线性地映射到所有的 $\mathfrak{fil}_s$。这确实是一个李代数同胚，因为 $\Phi([Z_1, Z_2]) = \Phi(Z_3) = E_3 = [E_1, E_2]$ 且 $\Phi([Z_1, Z_3]) = [E_1, E_3]$，而所有其他括号对的像均为零。因此，对于任意 $X = \sum_{i=1}^{s+1} x_i Z_i \in \mathfrak{fil}_s$ 和 $Y = \sum_{i=1}^{s+1} y_i Z_i \in \mathfrak{fil}_s$，我们有

$$\Phi([X, Y]) = \sum_{i,j=1}^{s+1} x_i y_j \Phi([Z_i, Z_j]) = \sum_{i,j=1}^{4} x_i y_j [\Phi(Z_i), \Phi(Z_j)] = [\Phi(X), \Phi(Y)].$$

由于 $\Phi(\mathrm{span}\{Z_1, Z_2\}) = \mathrm{span}\{E_1, E_2\}$， $\Phi$ 是一个商映射。因此，由于命题5.3指出 $E_2$ 不可塑，引理4.3推出 $Z_2$ 不可塑。□

**推论5.5**。 对于任意 $s \geq 3$，$\mathbb{F}\mathbb{i}\mathbb{l}_s$ 不具有 $C_H^1$ *Lusin* 性质。

证明。 回顾一下， $\mathbb{E}$ 在 $\mathfrak{B} = \mathfrak{e}_1$ [11]上不具有 $C_H^1$ Lusin 性质，因此命题3.2推出 $\mathbb{F}\mathbb{i}\mathbb{l}_s$ 在 $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{fil}_s)_1 = (\mathfrak{fil}_s)_1$ 上不可能具有 $C_H^1$ Lusin 性质。□

5.2. **自由 Carnot 群**。 在 [12] 中，作者证明，在具有 2 个生成元的步长 3 自由 Carnot 群$\mathbb{F}_{2,\,3}$ 中，每个非零向量都不可屈。此外，弱$C_H^1$ Lusin 性质不成立，并且存在一条 Lipschitz曲线，使其与任意$C_H^1$ 曲线的交集的 1 维豪斯多夫测度为 0。现在，我们将先前的研究应用于此，证明这种病态行为存在于所有步数至少为 3 且生成元数至少为 2 的自由 Carnot 群中。回忆一下，自由幂零李代数可定义如下 [1, 定义 14.1.1]。

**定义 5.6**。 设 $r \geq 2$ 和 $s \geq 1$ 为整数。若 $\mathfrak{f}_{r,\,s}$ 是具有步 $s$ 和 $r$ 生成元 的自由幂零李代数，则称其为

(1) $\mathfrak{f}_{r,\,s}$是由 $r$个元素生成的李代数，我们将其记为 $F^{r}{}_{,\,1}{}^{s}$、……、$F^{r}{}_{,\,r}{}^{s}$；(2) $\mathfrak{f}_{r,\,s}$ 是步为 $s$ 的幂零李代数（即长度为 $s+1$ 的嵌套李括号均为 0）；(3) 对于每个步为 $s$的幂零李代数 $\mathfrak{g}$以及每个映射 $f\colon \{F_1^{r,s}, \ldots, F_r^{r,s}\} \to \mathfrak{g}$，都存在一个（唯一的）李代数同态 $\Phi\colon \mathfrak{f}_{r,\,s} \to \mathfrak{g}$，将 $f$扩展到该同态。

对于每个固定的 $r \geq 2$ 和 $s \geq 1$，可以证明存在一个满足定义 5.6 中各项性质的李代数 $\mathfrak{f}_{r,\,s}$，并且它在李代数同构意义下唯一 [2]。接下来我们定义自由 Carnot 群 [1，定义 14.1.3]。

**定义 5.7**。设 $r \geq 2$ 和 $s \geq 1$ 为整数。若其李代数同构于自由幂零李代数 $\mathfrak{f}_{r,\,s}$，则称 $\mathbb{F}_{r,\,s}$ 是秩为 $r$、步为 $s$ 的自由 *Carnot* 群。

注意，如果两个 Carnot 群具有同构的李代数，那么这两个 Carnot 群本身也是同构的。因此，对于每个自由幂零李代数 $\mathfrak{f}_{r,\,s}$，本质上都存在唯一一个相应的 Carnot 群。称两个 Carnot 群同构，仅仅意味着它们作为李群同构，且该同构保持分层。

我们记录以下初等结果。

**引理 5.8**。对于每个 $r \geq 2$ 和 $s \geq 3$，存在一个商映射 $\Phi\colon\ \mathfrak{f}_{r,\,s} \to \mathfrak{f}_{2,\,3}$。

证明。将映射 $f$ 定义为：$\{F_1^{r,3}, \ldots, F_r^{r,3}\} \to \mathfrak{f}_{2,\,3}$ 其形式为

$$f(F_i^{r,3}) = \begin{cases} F_i^{2,3} & \text{if } i \in \{1,2\} \\ 0 & \text{if } i \in \{3,\ldots,r\} \end{cases}$$

根据定义 义，存在唯一的李代数同态 $\Phi_1\colon\ \mathfrak{f}_{r,\,3} \to \mathfrak{f}_{2,\,3}$ 延拓 $f$。

通过将 $F^r{}_{,\,i}{}^{\,s} \leftrightarrow F^r{}_{,\,i}{}^{\,3}$ for $i \in \{1,\ldots,r\}$ 进行对应，我们可以将 $(\mathfrak{f}_{r,\,s})_k = (\mathfrak{f}_{r,\,3})_k$ for $k = 1、2、3$ 对应起来，因为 $\mathfrak{f}_{r,\,s}$ 和 $\mathfrak{f}_{r,\,3}$ 都是由这些基元素生成的李代数。因此，定义 $\Phi_2\colon\ \mathfrak{f}_{r,\,s} \to \mathfrak{f}_{r,\,3}$，使其在 $(\mathfrak{f}_{r,\,s})_1 \oplus (\mathfrak{f}_{r,\,s})_2 \oplus (\mathfrak{f}_{r,\,s})_3$ 上为单位元，并规定对于任意 $k \geq 4$，$\Phi_2((\mathfrak{f}_{r,\,s})_k) = \{0\}$，即可确保 $\Phi_2$ 是一个商映射。特别地，$\Phi_1(\Phi_2((\mathfrak{f}_{r,\,s})_1)) = \Phi_1((\mathfrak{f}_{r,\,3})_1) = (\mathfrak{f}_{2,\,3})_1$。定义 $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ 即完成证明。□

下面的结果表明，在自由 Carnot 群中，Lusin 性质以一种强烈的方式失效。

**推论 5.9**。固定整数 $r \geq 2$ 和 $s \geq 3$。则存在一条 *Lipschitz* 曲线 $\gamma\colon\ [0,1] \to \mathbb{F}_{r,\,s}$ 使得

$$m\{t \in [0,1] : \gamma(t) = \Gamma(t)\} = 0$$

对于任意 $C_H^1$ 曲线 $\Gamma\colon\ [0,1] \to \mathbb{F}_{r,\,s}$。

证明。假设该陈述不成立。那么，根据定义，$\mathbb{F}_{r,\,s}$ 具有弱 $C_H^1$ Lusin 性质。由引理 5.8，存在从 $\mathfrak{f}_{r,\,s}$ 到 $\mathfrak{f}_{2,\,3}$ 的商映射，因此命题3.2意味着 $\mathfrak{f}_{2,\,3}$ 具有弱 $C_H^1$ Lusin 性质。然而，这与定理 1.2 from [12] 相矛盾。□

将这一结果与定理 5.1 from [12], 结合起来，我们得到如下无限多个病态例子。回顾一下，在 Carnot 群 $\mathbb{G}$ 中，如果集合 $E \subset \mathbb{G}$ 对于 $C_H^1$ 曲线是纯不可整流的，那么

$$\mathcal{H}^1(E \cap \Gamma([0,1])) = 0$$

对每条 $C_H^1$ 曲线 $\Gamma\colon\ [0,1] \to \mathbb{G}$。这里，$\mathcal{H}^1$ 是相对于 CC 度量的标准一维豪斯多夫测度。

**推论5.10**。 固定整数 $r \geq 2$ 和 $s \geq 3$。那么存在一条 *Lipschitz*曲线 $\gamma\colon\ [0,1] \to \mathbb{F}_{r,\ s}$ 使得 $\gamma$（$[0,1]$）是相对于$C_H^1$ 曲线纯不可整流的。

运用类似的技巧，我们证明每个非零向量都是不可屈的。

**引理5.11**。 固定 $0 \neq X \in$ （$\mathfrak{f}_{r,\ s}$）$_1$。存在一个商映射 $\Phi\colon\ \mathfrak{f}_{r,\ s} \to \mathfrak{fir}_s$ 满足 $\Phi$（$X$） $=Z_2$。

证明。 令 $F_1$，.....， $F_r$ 表示 $\mathfrak{f}_{r,\ s}$的生成元，并记 $X = \sum_{k=1}^{r} x_k F_k \neq 0$ 为某个$x_1 \ldots,$ $x_r \in \mathbb{R}$。为证明该引理，我们将定义一个映射 $\phi\colon\ \{F_1, \ldots, F_r\} \to \mathfrak{fir}_s$，使得当 $\phi$ 按照定义 5.6延拓为李代数同态 $\Phi$时，有 $\Phi(X) = Z_2$，且 $\Phi$ 将是一个商映射。

不妨设 $x_1 \neq 0$。定义 $\phi\colon\ \{F_1, \ldots, F_r\} \to \mathfrak{fir}_s$，使得$\phi(F_1) = \frac{1}{x_1} Z_2 - \frac{x_2}{x_1}(Z_1 + Z_2)$ 且 $\phi(F_2) = Z_1 + Z_2$，并令 $\phi(F_k) = 0$，其中 $k \geq 3$。根据定义 5.6，存在一个李代数同态 $\Phi : \mathfrak{f}_{r,\ s} \to \mathfrak{fir}_s$ 延拓了 $\phi$。特别地，

$$\Phi(-x_1 F_1 + (1 - x_2)F_2) = -Z_2 + x_2(Z_1 + Z_2) + (1 - x_2)(Z_1 + Z_2) = Z_1$$

and

$$\Phi(X) = x_1\Phi(F_1) + x_2\Phi(F_2) = Z_2 - x_2(Z_1 + Z_2) + x_2(Z_1 + Z_2) = Z_2.$$

因此， $\Phi((\mathfrak{f}_{r,\ s})_1) = (\mathfrak{fir}_s)_1$, ，所以 $\Phi$ 是一个商映射。又因为 $\Phi(X) = Z_2$，证明得证。□

**推论5.12**。 在$(\mathfrak{f}_{r,\ s})_1$ 中，唯一的可塑向量是$0$。

证明。 假设 $0 \neq X \in (\mathfrak{f}_{r,\ s})_1$ 是可塑的。根据引理5.11，取一个商映射$\Phi\colon \mathfrak{f}_{r,\ s} \to \mathfrak{fir}_s$，使得 $\Phi(X) = Z_2$。应用引理4.3可知 $Z_2$ 是可塑的，但这与推论5.4矛盾。因此 $X$ 不可能是可塑的。□

5.3. **幂零矩阵**。 对于正整数 $r$，令 $\mathbb{U}_r$ 为由实数值上三角幺幂矩阵构成的李群，即对角线上全为1的 $r \times r$ 上三角矩阵。这是一个步数为（$r-1$）的Carnot群 [5, 例9.3.4]。其李代数 $\mathfrak{n}_r$ 是由严格上三角的 $r$-幂零实数值矩阵构成的向量空间，即对角线上全为0的 $r \times r$ 上三角矩阵 [5, 例9.1.9]。

记 $E_{i,\ j}$ 为第 $i$ 行、第 $j$ 列元素为 1，其他位置均为 0 的矩阵。则 $\{E_{i,j}$ : $1 \leq i < j \leq r\}$ 是 $\mathfrak{n}_r$ 的一组基。此外， $\mathfrak{n}_r$ 是一个步数为 $(r-1)$ 的幂零李代数，其分层为

$$(\mathfrak{n}_r)_k = \operatorname{span}\{E_{i,i+k} : i \in \{1, \ldots, r-k\}\} \quad \text{for } k \in \{1, \ldots, r-1\}$$

因为对于所有 $i \in \{1, \ldots, r-k-1\}$，都有$[E_{i,i+1}, E_{i+1,i+k+1}] = E_{i,\ i+k+1}$。

**推论 5.13**。 对于每个正整数 $r$， $\mathbb{U}_r$ 都是可塑的。

为证明这一点，我们将构造一个从可变形 Carnot 群的李代数到 $\mathbb{U}_r$ 的李代数的商映射。给定一个整数 $s \geq 3$，我们仿照 [4,命题 6.6]的例子，定义一个步数为 $s$、分层的幂零李代数 $\mathfrak{G}_s$，其对应的 Carnot 群是可变形的。设 $F_1, \ldots, F_s$ 是 $\mathfrak{f}_{s,s}$ 的生成元，并定义 $I_i$ 为

由 $F_i$ 对每个 $i \in \{1, \dots, s\}$ 生成的 $\mathfrak{f}_{s,s}$ 中的理想。也就是说， $I_i$ 是 $\mathfrak{f}_{s,s}$ 的最小线性子空间，它包含 $F_i$，并且对所有 $X \in I_i$ 和 $Y \in \mathfrak{f}_{s,s}$ 满足 $[X, Y] \in I_i$。于是 $J = \sum_{i=1}^{s} [I_i, I_i]$ 也是一个理想，因此李代数 $\mathfrak{G}_s = \mathfrak{f}_{s,s}/J$ 也是分层且幂零的（例如参见 [5, 练习 9.5.14]）。根据 [4]，中命题 6.6 的证明，与 $\mathfrak{G}_s$ 关联的 Carnot 群是可变形的。

**例 5.14**。 可以验证 $\mathfrak{G}_3$ 满足

$$\mathfrak{G}_3 = (\mathfrak{G}_3)_1 \oplus (\mathfrak{G}_3)_2 \oplus (\mathfrak{G}_3)_3$$

*with*

$$\mathfrak{G}_1^{(3)} = \operatorname{span}\{X_1, X_2, X_3\}, \qquad \mathfrak{G}_2^{(3)} = \operatorname{span}\{X_{12}, X_{13}, X_{23}\}, \qquad \mathfrak{G}_3^{(3)} = \operatorname{span}\{X_{123}, X_{213}\}.$$

这里，非零的括号关系为

$$[X_1, X_2] = X_{12}, \qquad [X_1, X_3] = X_{13}, \qquad [X_2, X_3] = X_{23}$$

$$[X_1, X_{23}] = X_{123}, \qquad [X_2, X_{13}] = X_{213}$$

在反对称性意义下成立，且 $[X_3, X_{12}] = X_{213} - X_{123}$（其中，最后一个括号关系由 *Jacobi* 恒等式保证）。也就是说， $\mathfrak{G}_3$ 是一个 *8* 维、分层、步长 *3* 的幂零李代数。

推论 *5.13* 的证明。 取一个正整数 $s$，并令 $r = s+1$。如果 $s = 1$或 2，那么 $\mathbb{U}_r$ 是可塑的，因为它的步长至多为 2（见 [4, 定理 6.5]）。设 $s \geq 3$，并按上述方式定义 $\mathfrak{G}_s$。为方便起见，我们将采用如下恒等认定 $(\mathfrak{G}_s)_1 = (\mathfrak{f}_{s,\ s})_1 = \operatorname{span}\{F_1, \dots, F_s\}$。

为了证明 $\mathfrak{n}_{s+1}$ 中的每个水平向量都是可塑的，我们将构造一个商~映射 $\Phi\colon \mathfrak{G}_s \to \mathfrak{n}_{s+1}$。首先，定义 $\Phi(F_i) = E_{i,\ i+1}$，其中 $i = 1, \dots\dots, s$。根据定义，这将延拓为一个李代数同态 $\Phi\colon \mathfrak{f}_{s,\ s} \to \mathfrak{n}_{s+1}$。我们将通过证明以下断言，说明这会诱导出一个李代数同态 $\Phi\colon \mathfrak{G}_s \to \mathfrak{n}_{s+1}$。回顾一下，我们定义了 $J = \sum_{i=1}^{s} [I_i, I_i]$，其中 $I_i$ 是$\mathfrak{f}_{s,\ s}$ 中由 $F_i$生成的理想。

~**断言：** $J \subset$ 核 $\Phi$。

~ ~ ~断言的证明。 只需证明 $\Phi([I_i, I_i]) = [\Phi(I_i)\ \Phi(I_i)] = \{0\}$，这只是一个线性代数论证。设 $M$ 是一个形如以下形式的 $r \times r$ 矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

对于某个 $i \times (r-i)$ 矩阵 $A$。那么，如果 $N$是任意一个 $r \times r$ 上三角矩阵，则可知 $MN$和 $NM$都具有形式 (5.1)。因此， $M$与任意$r \times r$ 上三角矩阵的嵌套括号必具有形式 (5.1)。

~ ~固定 $X \in \Phi(I_i)$。那么， $X$ 等于由 $\Phi(F_i) = E_{i,i+1}$ 与 $\mathfrak{n}_r$ 中的（上三角）元素构成的嵌套括号的线性组合。由于 $E_{i,i+1}$ 具有形式 (5.1)， $X$ 也必定具有形式 (5.1)。然而请注意，对于任意 $r \times r$，形式为 (5.1) 的矩阵均有 $M_1 M_2 = 0$，因此可得 $[\Phi(I_i)\ \Phi(I_i)] = \{0\}$，如所需。□

也就是说，存在一个李代数同态 $\Phi\colon \mathfrak{G}_s \to \mathfrak{n}_{s+1}$。尚需证明 $\Phi$ 是一个商映射；根据 $\Phi$ 的定义，这一点可由下式推出：

$$\Phi((\mathfrak{G}_s)_1) = \widetilde{\Phi}((\mathfrak{f}_{s,s})_1) = \operatorname{span}\{E_{12}, E_{23}, \dots, E_{s,s+1}\} = (\mathfrak{n}_{s+1})_1.$$

□

## References

[1] A. Bonfiglioli、E. Lanconelli 和 F. Uguzzoni。分层李群及其次拉普拉斯算子的位势理论。《数学Springer专著丛书》。Springer，柏林，2007年，第 xxvi+800 页。[2] Marshall Hall Jr.。“自由李环的一个基及自由群中的高阶交换子”。载于：《美国数学会会刊》1（1950年），第 575–581 页。[3] Fr´ed´eric Jean、Mario Sigalotti 和 Alessandro Socionovo。“关于Carnot群中的可变形性与多指数映射开放性的一则注记”。载于：《*SIGMA*：对称性、可积性、几何与方法应用》22（2026年），论文编号 078，共 8 页。[4] Nicolas Juillet 和 Mario Sigalotti。“可变形性，或Carnot群中曲线的Whitney延拓定理”。载于：《分析与偏微分方程》10.7（2017年），第 1637–1661 页。[5] Enrico Le Donne。度量李群——*Carnot-Carath´eodory*空间的齐性观点。第 306 卷。《数学研究生教材》。Springer，Cham，2025年，第 xvi+480 页。[6] Enrico Le Donne、Andrea Pinamonti 和 Gareth Speight。“Carnot群中的普适可微集与最大方向导数”。载于：《纯粹与应用数学杂志》（第九辑）121（2019年），第 83–112 页。[7] Enrico Le Donne 和 Gareth Speight。“二步Carnot群中水平曲线的Lusin逼近”。载于：《变分法与偏微分方程》55.5（2016年），第 111 号文章，共 22 页。[8] John M. Lee。光滑流形导论。第二版。第 218 卷。《数学研究生教材》。Springer，纽约，2013年，第 xvi+708 页。[9] Pierre Pansu。“一阶对称空间的Carnot-Carathéodory度量与拟等距变换”。载于：《数学年刊》（第二辑）129.1（1989年），第 1–60 页。[10] Ludovic Rifford。次黎曼几何与最优传输。《数学Springer简明丛书》。Springer，Cham，2014年，第 viii+140 页。[11] Gareth Speight。“Carnot群中曲线的Lusin逼近与水平曲线”。载于：《伊比利亚美洲数学杂志》32.4（2016年），第 1423–1444 页。[12] Gareth Speight 和 Scott Zimmerman。“一条不能由光滑水平曲线整流的Carnot群中的Lipschitz曲线”。已提交发表。2026年。[13] Gareth Speight 和 Scott Zimmerman。“方向可塑性、Whitney延拓与Carnot群中曲线的Lusin逼近”。载于：《芬兰数学年刊》50.2（2025年），第 665–684 页。[14] Hassler Whitney。“定义在闭集上的可微函数的解析延拓”。载于：《美国数学会汇刊》36.1（1934年），第 63–89 页。

[15] Scott Zimmerman。“ $C^1$的Whitney延拓定理：Heisenberg群中的水平曲线”。载于：《几何分析杂志》28.1（2018年），第 61–83 页。

Department of Mathematical Sciences, University of Cincinnati, 2815 Commons Way, Cincinnati, OH 45221, United States*Email address*: Gareth.Speight@uc.edu

Department of Mathematics, The Ohio State University, 100 Math Tower, 231 West 18th Avenue, Columbus, OH 43210, United States*Email address*: zimmerman.416@osu.edu