arXiv:2611.31020v1 [math.CV] 23 Nov 2026

非平凡膨胀型凯勒–里奇孤子与 Stein 域的自同构群

SOUMYA GANGULY

摘要。我们研究带有完备实全纯孤子场的完备非平凡膨胀凯勒–里奇孤立子。设 Ω 是复曲面中的相对紧域，并且 Ω 的某个邻域可以全纯浸入欧氏空间。我们证明，这样的孤子存在，当且仅当 Ω 是 Stein 域且 Aut(Ω) 的单位分支是非紧的。在这样的 Stein 域上，一个完备实全纯向量场是某个完备非平凡膨胀子的孤子场，当且仅当其流在 Aut(Ω) 中的闭包是非紧的。在更高维情形下，我们利用自同构群的伴随表示、边界几何以及齐次正闭 (1，1)-流，建立存在性判据。对于 Stein n-流形上真全纯 $\mathbb{R}^{n-1}$-作用的全局化，我们给出了其全纯 $\mathbb{C}^{n-1}$-作用自由且适当的充分条件。应用包括有界凸域和齐次域、满足弱 Kobayashi 可见性的域，以及某些有限型域。

1. 引言与主要结果

Kähler–Ricci流

$$\frac{\partial \omega(t)}{\partial t} = -\operatorname{Ric}_{\omega(t)} \tag{1}$$

在固定的复流形上演化 Kähler 度量。其自相似解称为 Kähler–Ricci 孤立子，它们通过缩放及双全纯映射下的拉回而演化。我们研究实全纯孤立子向量场也完备的完备膨胀孤子。

膨胀情形自然出现在有界伪凸域上。Mok–Yau [30, 主定理，p. 42] 证明了，$\mathbb{C}^n$ 中的有界域是伪凸域，当且仅当它具有负 Einstein 常数的完备 Kähler–Einstein 度量。对于任意 $K > 0$，对该度量作常数缩放可得到一个完备度量 ω_E，满足

$$\operatorname{Ric}_{\omega_E} = -K\omega_E, \qquad K > 0. \tag{2}$$

那么 $\omega(t) = (1 + Kt)\omega_E$ 满足方程 (1)。更一般地，膨胀 Kähler–Ricci 孤子满足

$$\operatorname{Ric}_{\omega} + K\omega = \mathcal{L}_Y \omega, \qquad K > 0, \tag{3}$$

其中，Y 是一个实全纯向量场，K 是膨胀常数。在本文中，要求度量 ω 是完备的，并且 Y 的流对所有实时间都有定义。当$\mathcal{L}_Y\omega = 0$时，或等价地，当 $\operatorname{Ric}_\omega = -K\omega$时，该孤子称为平凡的；否则称为非平凡的。因此，($\omega_E$,0) 是一个平凡膨胀子。

Conlon–Deruelle–Sun [11, 定理A] 研究了满足二次曲率衰减假设的完备梯度Kähler–Ricci孤立子，其中包括对曲率的协变导数的界，
涵盖膨胀情形。我们关注的是具有完备实全纯向量场的完备膨胀孤子，而不要求梯度条件或曲率衰减假设。

在 [16, 定理 1.1], 中，我们证明了：对于 Stein 流形 Z中的相对紧域 Ω，存在具有完备孤子场的完备膨胀孤子，当且仅当 Ω 是 Stein 的。当 Z 为任意复流形时，只要 Ω 的某个邻域允许全纯浸入某个 $\mathbb{C}^N$ [16, 中，同样的等价性仍然成立，见注 3.6(2)]。

完备膨胀子的存在本身并不意味着非平凡完备膨胀子的存在。事实上，Yg 上的完备实全纯 Killing 场 ω_E 会给出一个平凡膨胀子（ω_E, Y），即使 $Y \neq 0$ 也如此。

2020 数学主题分类。 主要分类：53E30；次要分类：32M05、32Q28、32U40。关键词和短语。 膨胀 Kähler–Ricci 孤子、有界伪凸域、自同构群、正的闭流、弱 Kobayashi 可见性、Stein 流形、复化全纯作用。

更一般地，设 $\{\Phi_s\}_{s\in\mathbb{R}} \subset \mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 是完备实全纯向量场Y的流，其中 $\mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 表示 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 的单位分支。若此流在 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 中的闭包是紧的，则每个以 Y 为孤子场的完备膨胀孤子都是平凡的 [16,引理 3.1]。

因此，对于完备非平凡膨胀子，自同构群 $\mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 的非紧性是必要条件。我们探讨何时该条件也是充分的；对于给定的完备实全纯向量场 Y，又在何种情况下存在孤子场为 Y 的膨胀子。

猜想 1.1。设 Z 是一个复流形，$\Omega \Subset Z$ 是一个复维数为 $n \geq 2$ 的域。假设 Ω 的一个开邻域 $V \subset Z$ 存在全纯浸入 $F\colon V \to \mathbb{C}^N$。那么，$\Omega$ 存在一个具有完备向量场的完备非平凡膨胀 *Kähler–Ricci* 孤子，当且仅当 Ω 是 *Stein*，且 自同构群$_0(\Omega)$ 非紧。

我们证明了复维数二的猜想 1.1，并确定了高维情形下可作为孤子场的完备实全纯向量场。这些构造依赖于正闭 (1,1)-流；在完备实全纯向量场的流作用下，这些流按指数函数变换。

设 (ω, Y) 满足 (3)，并记 Φ_s 为 Y 的流。在 $t = 1/K$ 处归一化的相应自相似 Kähler–Ricci 流为

$$\omega(t) = Kt\,\Phi^*_{-K^{-1}\log(Kt)}\omega, \qquad t > 0 \tag{4}$$

[16, 方程 (4)]。由群律 (17),

$$\Phi_s^*\omega(t) = Kt\,\Phi^*_{s-K^{-1}\log(Kt)}\omega = e^{Ks}\omega(e^{-Ks}t). \tag{5}$$

若 $\omega(t) \rightharpoonup T$ 当 $t \downarrow 0$ 时，则 T 是正的闭 (1,1)-流，且由 (5) 得

$$\Phi_s^* T = e^{Ks}T, \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

令 $\mathcal{T}_{Y,K}(\Omega)$ 表示满足 (6) 的正闭实 $(1,1)$-流之锥。若 $\Omega \Subset Z$ 是 Stein，且 Ω 的一个邻域可全纯浸入 $\mathbb{C}^N$，则该锥中的非零元素给出一个完备非平凡膨胀子，其向量场为 Y，膨胀常数为 K [16, 定理 1.2]。

我们利用 $\mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 的伴随表示构造齐次流。对于通常的向量场括号，ad_Y 表示 $V \mapsto [Y,V]$ 的复线性延拓。

定理 1.2。设Ω 是一个维数为 $n \geq 2$ 的连通复流形，其有界全纯函数能够分离切向方向。假设 $G =$ 自同构群$_0(\Omega)$ 是一个适当作用的非紧李群，并令 $\mathfrak{g}$ 为其无穷小自同构李代数。

(i) 令 $Y \in \mathfrak{g}$ 生成一个适当实流。若ad_Y 具有实部为正（分别为负）的特征值，则对于每个 $K > 0$，$\mathcal{T}_{Y,K}(\Omega)$ （分别为$\mathcal{T}_{-Y,K}(\Omega)$）都包含一个非零流。若$\mathrm{ad}_Y$ 对应于纯虚特征值具有非平凡 *Jordan*块，则对于每个 $K > 0$，$\mathcal{T}_{Y,K}(\Omega)$和$\mathcal{T}_{-Y,K}(\Omega)$ 都包含非零光滑形式。

(ii) 假设对于由 $Y \in \mathfrak{g}$生成的每个适当实流，算子ad_Y 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化，且其谱包含于 $\sqrt{-1}\mathbb{R}$中。那么

$$G \simeq \mathbb{R}^p \times C, \qquad 1 \leq p \leq n, \tag{7}$$

其中 C 为紧致连通李群。实因子是中心的，且作用自由并适当，其生成元的全纯部分在每一点都复线性无关。若 Ω 是 *Stein*，则其 *Bergman*核形式处处不为零，其 *Bergman*度量正定，并且 $p \geq n-1$，那么对于每个具有非零 $\mathbb{R}^p$-分量的 $Y \in \mathfrak{g}$以及每个 $K > 0$，$\mathcal{T}_{Y,\,K}(\Omega)$ 和 $\mathcal{T}_{-Y,\,K}(\Omega)$ 都包含非零光滑形式。

此外，假设 $\Omega \Subset Z$ 是 *Stein*，且 Ω 的某个邻域可全纯浸入欧氏空间。对于每个 $Y \in \mathfrak{g}$以及满足 (i) 或 (ii) 可推出 $\mathcal{T}_{Y,\,K}(\Omega) \neq \{0\}$的 $K > 0$，存在一个完备非平凡膨胀子，其孤子场为 Y，膨胀常数为K [16, 定理1。2]。

定理 1.2 给出以下存在性判据。

推论 1.3。设$\Omega \Subset Z$ 是一个复维数为 $n \geq 2$ 的 *Stein* 域，且Ω 的某个邻域可全纯浸入 $\mathbb{C}^N$。假设 $G =$ 自同构群$_0(\Omega)$ 非紧，且不同构于

$$\mathbb{R}^p \times C, \qquad 1 \leq p \leq n-2,$$

任意紧致连通李群 C。那么，对于每个 $K > 0$，Ω 都存在一个完备非平凡膨胀凯勒–里奇孤立子，其孤立子向量场完备，膨胀常数为 K。

对于满足浸入假设的复曲面中的 Stein 域，引理 4.3 表明，每个流的闭包非紧的完备实全纯向量场都会生成一个真 $\mathbb{R}$-作用。应用定理 5.9 可得到如下刻画。

推论 1.4。 猜想 *1.1* 在复维数二的情形下成立。此外，设 Ω 是一个满足该猜想假设的二维 *Stein* 域，并设 Y 是 Ω 上的完备实全纯向量场Ω。那么，当且仅当 Y 的流在 Aut(Ω)中的闭包是非紧的时，Y 才是某个完备非平凡膨胀子的孤子场。对于每个这样的 Y 以及每个 $K > 0$，都存在光滑、非零、正的闭实$(1,\ 1)$-形式 T_+ 和 T_-，且它们在每一点的秩均为一，使得

$$\Phi_s^* T_+ = e^{Ks} T_+, \qquad \Phi_s^* T_- = e^{-Ks} T_-.$$

特别地，Y和 $-Y$都作为膨胀常数为 K的完备非平凡膨胀子的孤子场出现。

因此，根据推论 1.4and $[16,\ 注记\ 3.6(1)]$, ， $\mathbb{C}^2$ 中的有界域存在完备非平凡膨胀子且其孤子场完备，当且仅当该域是伪凸的，并且 $\mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 非紧。

Yau 猜想，有界伪凸域的 Bergman度量完备且为 Kähler–Einstein，当且仅当该域是齐性的 [37]。我们通过完备非平凡膨胀凯勒–里奇孤立子的存在性给出的刻画，为复维数二的情形提供了相关分类。在 $[16,\ 定理\ 1.4]$, 中，我们证明了：一个复维数至少为二、其有界全纯函数能够分离点且所有边界轨道聚点均为 C^2 强拟凸的相对紧域，双全纯于单位球，当且仅当它存在一个完备非平凡膨胀凯勒–里奇孤立子，且其孤子场完备。对于 $\mathbb{C}^n, n \geq 2$中的光滑边界强拟凸域，Huang 和 Xiao 通过 Bergman度量的 Kähler–Einstein 性质刻画了球 $[20,\ 定理\ 1.1]$。

我们还从有界非负拟次调和函数构造齐次流，这些函数沿反向流局部一致地衰减。

定理 1.5。 设 $\Omega \Subset Z$ 是 *Stein* 域，并假设 Ω 的某个邻域可全纯浸入 $\mathbb{C}^N$。设 Y 生成一个完备的实全纯流。假设一个有界非负的$u \in$PSH(Ω)， $u \not\equiv 0$，满足

$$u \circ \Phi_s \longrightarrow 0 \quad locally\ uniformly\ as\ s \to -\infty. \tag{8}$$

那么，对每个 $K > 0$ ，都存在一个完备非平凡膨胀子，其李代数为 Y ，膨胀常数为K。

下一个定理使用全纯浸入 $\iota = (f_1,\ \ldots\ldots,\ f_N)$ 的单位时间位移，该浸入定义在 Ω 的某个邻域内。在以下任一边界假设下，每个真性实全纯流 Φ_t 都满足

$$(f_j \circ \Phi_1 - f_j) \circ \Phi_t \longrightarrow 0 \quad \text{locally uniformly as } t \to \pm\infty$$

对每个 j都成立；参见 (103)。真性和浸入保证至少有一个位移不恒为零，因此引理 3.8 适用。

定理 1.6。 设 $\Omega \Subset Z$ 是一个域，且假设 Ω 的某个邻域可全纯浸入 $\mathbb{C}^N$。假设以下条件之一成立

(i) $\partial_Z\Omega$ 不包含非恒定解析圆盘，或者(ii) Ω 相对于 ∂_Z Ω 具有$(1, \kappa_0)$-可见性，适用于某个 $\kappa_0 > 0$。

对于 Ω 上任意生成元为 Y 的真全纯实流，以及任意 $K > 0$，$T_{Y,\ K}(\Omega)$ 和 $T_{-Y,\ K}(\Omega)$ 都包含非零光滑形式。若 Ω 是 *Stein*，则 Y 和 $-Y$ 都是膨胀常数为 K 的完备非平凡膨胀子的孤子场。存在带有完备孤子场的完备非平凡膨胀子，当且仅当 Ω 是 *Stein* 且 $\mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 非紧。

设 Ω 是 Kobayashi 双曲的，并满足某个 $\kappa_0 > 0$ 下的相对 (1，κ_0)-可见性。若 $F \in \mathrm{Aut}(\Omega)$，且每一对紧集 E，$L \Subset \Omega$ 满足 $F^m(E) \cap L = \varnothing$ 对所有充分大的 m 均成立，则 F^m 局部一致地收敛到 ∂_Z Ω 中的某一点（引理 6.4）。对于适当实流，这给出实时间两端各自的极限（注记 7.2）。关于有界 taut 弱可见子流形上的迭代理论，参见 [8, 定理 1.14]。根据 [6,定理 1.4]，有界 Goldilocks 域满足可见性假设。

边界中的非常值解析圆盘沿其像与边界具有无穷接触阶。特别地，每个边界点处的有限 D'Angelo 1-型排除了非常值边界圆盘。

推论 1.7。 设$\Omega \Subset Z$ 是一个 ***Stein*** 域，使得Ω 的某个邻域可全纯浸入 $\mathbb{C}^N$。假设 $\partial_Z\Omega$ 是 C^∞，且在每一点处具有有限 ***D'Angelo*** 1-型。对于每个 $K > 0$，完备实全纯向量场具有非紧流的闭包，当且仅当它是完备非平凡膨胀子的向量场。

设 Ψ_t 是作用在 M 上的真全纯 $\mathbb{R}$-作用，并且 $M/\langle\Psi_1\rangle$是 Stein。命题 3.5 给出了 M上的一个全纯函数 F，满足 $F\circ\Psi_t = F + t$。因此，形式 $\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial e^{\pm K\Re F}$通过特征 $e^{\pm Kt}$变换。

定理 1.8. 设 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是复流形 Ω 上的全纯 $\mathbb{R}$-作用，生成元为 Y。设 $\{\Psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是连通复流形 M 上的真全纯 $\mathbb{R}$-作用。假设存在全纯映射 $f : \Omega \to M$，满足

$$f \circ \Phi_t = \Psi_t \circ f, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

若 $M/\langle\Psi_1\rangle$ 是 ***Stein***，则对每个 $K > 0$，都存在定义在 Ω 上的光滑正闭实 (1,1)-形式 T_+ 和T_-，且它们在每一点的秩均为一，满足

$$\Phi_t^* T_+ = e^{Kt} T_+, \qquad \Phi_t^* T_- = e^{-Kt} T_-.$$

若 Ω 是一个相对紧 ***Stein*** 域，且其闭包的某个邻域可全纯浸入 $\mathbb{C}^N$，则 Y 和 $-Y$ 均为完备非平凡膨胀子的孤子场，其膨胀常数为 K。

对于有界齐性域上的真流，由 [28,定理 6.5] 可知，时间一商空间是 Stein。因此，定理 1.8 可应用于恒等映射。对于有界凸域，我们则利用引理 7.5 中关于对角 Bergman 核的估计来控制自同构的对数雅可比，然后应用命题 3.12。

定理 1.9。 设 M 与$\mathbb{C}^n$中的某个有界凸域或有界齐性域双全纯。对于 M 上的每个真实全纯流 Φ_t，其生成元为 Y，以及任意 $K > 0$，存在非零光滑正闭实 (1,1)-形式 $T_\pm$，满足

$$\Phi_t^* T_\pm = e^{\pm Kt} T_\pm.$$

Y 和 $-Y$ 都是膨胀常数为 K 的完备非平凡膨胀子的孤子场。如果$n \geq 2$，则 M 存在具有完备孤子场的完备非平凡膨胀子，当且仅当自同构群$_0(M)$是非紧的。

在齐性情形下，定理 1.9 中的非平凡孤立子度量本身不可能是齐性的。事实上，根据 [26, 定理 1.1(i) 以及命题 4.1]，的证明，一个允许浸入具有齐性 Kähler度量的有界齐性域中的全纯等距浸入的 Kähler–Ricci 孤子必为 Kähler–Einstein，且其孤子场为基灵场。

在下述有限型和莱维秩假设下，Bedford–Pinchuk [3, 主定理（第 165]页）对具有非紧自同构群的有界伪凸域进行了分类。每个蛋形域的西格尔实现上的实平移给出了相应的逆向构造。

推论 1.10. 设$\Omega \Subset \mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 1$的边界具有有限 ***D'Angelo*** 型，且处处莱维秩至少为 $n-1$ 。那么 Ω 存在一个完备非平凡膨胀凯勒–里奇孤立子，且其孤子场完备，当且仅当它双全纯于

$$E_m = \left\{ (w, z_1, \ldots, z_n) : |w|^2 + |z_1|^{2m} + \sum_{j=2}^{n} |z_j|^2 < 1 \right\} \tag{10}$$

对于某个整数 $m \geq 1$。

在此情形下，如果 Y 生成一个流的闭包非紧的完备实全纯流，那么对每个 $K > 0$，在 $T_Y(1,1)$形式中都存在非零光滑正闭形式，分别属于$\mathcal{K}(\Omega)$ 和 $\mathcal{T}_{-Y,K}(\Omega)$。这两个向量场都出现在膨胀常数为 K的完备非平凡膨胀子中。

对于复曲面中具有光滑拟凸有限型边界轨道聚集点的域，Seshadri–Verma 的多项式模型 [33, 定理 1.1] 是伪凸的，因此该域是 Stein 域。此外，若 $\Omega \Subset Z$ 及 Ω 的一个邻域都允许全纯浸入到 $\mathbb{C}^N$中，那么对于每个流闭包非紧的完备实全纯向量场 Y以及每个 $K > 0$，定理 8.1 给出属于 $\mathcal{T}_{Y,K}(\Omega)$ 和 $\mathcal{T}_{-Y,K}(\Omega)$ 的非零光滑正闭秩一 $(1,1)$-形式。

在加权多项式模型上，我们为膨胀场和平移场的每个非零实线性组合给出了显式的流（命题 8.3）。根据 Zimmer [38, 定理 1.2]的一致化定理，这一结果适用于 $\mathbb{C}^n$ 中具有光滑有限型边界且边界轨道聚集集中至少包含两个点的有界伪凸域。第 8 节还讨论了在一个 h-可延拓点处的非切向轨道聚积。

第 2 节规定了记号和约定。第 3 节构造了齐次正闭流，并建立了傅里叶积分所需的估计。第 4 节在浸入假设下证明了自同构群作用的真性，并研究了伴随表示。第 5 节利用与负爱因斯坦常数的完备 Kähler–Einstein 度量或正定 Bergman 度量相关联的动量映射，证明了全局化的豪斯多夫性。随后，平方可积全纯 n-形式的张量平方的傅里叶变换给出了等变全纯截面；这些截面的比值在余秩一情形下确立了复化作用的真性（定理 5.7）。满秩情形给出了 $\mathbb{C}^n$ 上的平移作用（推论 5.8）。相应的特征线丛产生了定理 5.9 中的秩一齐次形式。第 6 节在相对 Kobayashi 可见性下研究自同构的正规极限以及迭代的边界收敛。第 7 节应用这些结果，在几何假设下构造齐次流和完备膨胀子。最后，第 8 节应用一致化定理，并在加权多项式模型上构造显式的齐次流。

2. 约定与预备知识

在全文中，域均指连通开集。对于复流形Z 的子集 A，若 A 在 Z中是紧的，我们记作 $A \Subset Z$。对于域 $\Omega \subset Z$，置

$$\partial_Z \Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega. \tag{11}$$

我们置 $n = \dim_{\mathbb{C}} \Omega = \dim_{\mathbb{C}} Z$。对于有界欧氏域，我们记作 $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$。若存在 $z_0 \in \Omega$ 和 $F_j \in \mathrm{Aut}(\Omega)$，使得 $F_j(z_0) \to \xi \in \partial Z$，则点 ξ 称为边界轨道累积点。

对于 Kähler流形 (M, J, g)，我们记作 $\omega_g = g(J\cdot, \cdot)$；在不致混淆时，对于 Kähler度量及其相应的形式，我们均使用 ω 表示。我们的局部约定如下：

$$\omega = \sqrt{-1} g_{j\bar{k}}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k, \qquad \mathrm{Ric}_\omega = -\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} \log \det(g_{j\bar{k}}). \tag{12}$$

黎曼Ricci张量满足 $\mathrm{Ric}_\omega(V, W) = \mathrm{Ric}_g(JV, W)$，其中 V, W为实切向量。在$\mathbb{C}^n$ 上置

$$\omega_{\mathrm{Euc}} = \sqrt{-1} \sum_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\bar{z}^j, \qquad dV_{\mathrm{E}} = \omega_{\mathrm{Euc}}^n. \tag{13}$$

在（12）的坐标下，$\omega^n / dV_{\mathrm{E}} = \det(g_{j\bar{k}})$。对于实（1,1）形式 α，我们令

$$\mathrm{tr}_\omega\, \alpha = n \frac{\alpha \wedge \omega^{n-1}}{\omega^n}, \qquad \Delta_\omega f = \mathrm{tr}_\omega(\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} f) = g^{j\bar{k}} f_{j\bar{k}}, \qquad R_\omega = \mathrm{tr}_\omega\, \mathrm{Ric}_\omega\,. \tag{14}$$

若 $\Delta_g = \mathrm{tr}_g \nabla^2$ 和 S_g 分别表示黎曼拉普拉斯算子和标量曲率，则 $\Delta_g = 2\Delta_\omega$且 $S_g = 2R_\omega$。对于实数 f，$|\nabla^g f|_g^2 = 2|\partial f|_\omega^2$；黎曼体积形式为 $dV_g = \omega^n / n!$ 最后，

$$d^c = \sqrt{-1}(\bar{\partial} - \partial), \qquad dd^c = 2\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}. \tag{15}$$

对于实向量场 Y，其局部流为 $\{\Phi_t\}$，我们的 Lie 导数约定为

$$\mathcal{L}_Y A = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t^* A. \tag{16}$$

向量场 V 的拉回表示为 $\Phi_t^* V = (\Phi_{-t})_* V$；特别地，$\mathcal{L}_Y V = [Y, V]$。若 $\mathcal{L}_Y J = 0$，则该场Y 是实全纯 的；等价地，其局部流由双全纯映射组成。若该流对所有实时间都有定义，则它是完备的 。Kähler度量的完备性始终指测地完备性。

M 上的全纯 $\mathbb{R}$-作用是一个光滑映射 $\Phi:\ \mathbb{R} \times M \to M$，其时间-$t$ 映射 Φ_t 是全纯的，并且满足

$$\Phi_0 = \mathrm{id}_M, \qquad \Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t \quad (s, t \in \mathbb{R}). \tag{17}$$

因此 $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$，其无穷小生成元是一个完备实全纯向量场。反之，每个这样的向量场都会生成一个全纯 $\mathbb{R}$-作用。若 $\Phi_t(z) = z$ 蕴含$t = 0$，则该作用是自由的；若

$$\mathbb{R} \times M \longrightarrow M \times M, \qquad (t, z) \longmapsto (z, \Phi_t(z)) \tag{18}$$

是可的。相同的定义适用于作用在 M 上的李群 H，其中以 H 替代 $\mathbb{R}$，并在（18）中以 $(h,\ z) \mapsto (z,\ h \cdot z)$ 替代。

我们用 $\mathrm{Aut}(M)$ 表示赋予紧开拓扑的 M 的双全纯映射群，并用 $\mathrm{Aut}_0(M)$ 表示其单位分支。当 $G = \mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 是一个李群时，$\mathfrak{g}$ 表示其由完备实全纯向量场组成的实李代数，并采用通常的向量场括号，如式 (16) 所示。我们记作 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$，并且对于 $Y \in \mathfrak{g}$ 置

$$\mathrm{ad}_Y(V) = [Y, V], \qquad Y^{1,0} = \tfrac{1}{2}(Y - \sqrt{-1}JY). \tag{19}$$

我们称复流形 M 上的有界全纯函数能够分离切向方向，如果对于每个 $z \in M$ 和 $0 \neq v \in T^{1,0}_z M$，都存在一个有界 $f \in \mathcal{O}(M)$，使得 $df_z(v) \neq 0$。如果 $\{\Phi_t :\ t \in \mathbb{R}\}$ 在 $\mathrm{Aut}(M)$ 中是非紧的，则称该流具有非紧闭包 。对于一个全纯 $\mathbb{R}^p$-作用，参数 $t = (t_1, \ldots, t_p)$ 在同一个光滑作用定义中取遍 $\mathbb{R}^p$。$s \mapsto \Phi_{sv}$ 对于 $v \in \mathbb{R}^p$ 的生成元是 X_v。$A = \mathbb{R}^p$ 的普遍复化是 $\mathbb{C}^p$。

对于复流形 M，$\mathrm{PSH}(M)$ 表示其多重次调和函数，允许取值为 $-\infty$。域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是伪凸的，当且仅当它具有连续的多重次调和穷举函数 ρ；因此

$$\{\rho < c\} \Subset \Omega \qquad (c \in \mathbb{R}). \tag{20}$$

在欧氏空间中，这等价于 Stein性 [19]。光滑实函数 h 是拟调和的，当且仅当 $\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} h = 0$。

对于边界为 C^∞ 的域 $\Omega \Subset Z$，令 $p \in \partial_Z \Omega$，并选取以 p 为中心的局部全纯坐标，以及 p附近的光滑实定义函数 ρ。边界在 p 处的 D'Angelo 1-型为

$$\Delta_1(\partial_Z \Omega, p) = \sup_\gamma \frac{\mathrm{ord}_0(\rho \circ \gamma)}{\mathrm{ord}_0(\gamma - \gamma(0))},$$

其中 γ 遍历满足 $\gamma(0) = p$ 的非常数全纯曲线芽。对于光滑函数芽，其阶是非零泰勒项的最低次数；若所有泰勒系数均为零，则为 $+\infty$。更换定义函数会使 ρ 乘以一个处处不为零的光滑函数，而更换全纯坐标则保持曲线芽的消失阶不变。因此，$\Delta_1(\partial_Z \Omega\ p)$ 与这些选择无关 [12, 定义 2.16 和 2.18]；另见 [13, 第 6] 节。

复流形上的实$(1,\ 1)$-流 T 若在光滑、紧支撑的强正$(n-1,\ n-1)$-形式上取非负值，则称其为正的 。若 $dT = 0$在分布意义下，则称其为闭的 。正的闭$(1,\ 1)$-流具有局部多重次调和势 $T = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} u$。弱收敛 $T_j \rightharpoonup T$ 是指在光滑、紧支撑的$(n-1,\ n-1)$-形式上的收敛。对于光滑实$(1,\ 1)$-形式，正性意味着半正性。光滑半正$(1,\ 1)$-形式在一点处的秩，是其在局部全纯坐标下的厄米系数矩阵关于 $\mathbb{C}$ 的秩。

For 在 M 上的完备实全纯场 Y 具有流 Φ_s 和 $K > 0$，定义锥

$$\mathcal{T}_{Y,K}(M) = \Big\{ T : \begin{array}{l} T \text{ is a positive closed real } (1,1)\text{-current on } M, \\ \Phi_s^* T = e^{Ks} T \quad (s \in \mathbb{R}) \end{array} \Big\}. \tag{21}$$

更一般地，设 G 全纯地作用于 M。如果张量场或流 A 在 M 上按 特征 χ 变换：$G \to \mathbb{C}^*$，其中 χ 是连续群同态，并且

$$\Phi_g^* A = \chi(g) A \qquad (g \in G).$$

特别地，$\mathcal{T}_{Y,\,\kappa}(M)$ 中的每个流都相对于 Φ_s 是齐性的，具有正的特征$\chi(s) = e^{Ks}$。锥 (21) 可能仅由零流组成。反转该流得到 $\mathcal{T}_{-Y,\,\kappa}(M)$，其元素满足 $\Phi_s^* T = e^{-Ks} T$。

我们分别将 k_M 和 κ_M 记为 Kobayashi伪距离和 Kobayashi–Royden无穷小伪度量。因此，k_M 由全纯圆盘链定义；如果 k_M 是一个距离，则 M 是 Kobayashi 双曲的。对于环境流形 Z 上的 Hermitian度量 h，d_h 是其诱导距离。我们在圆盘上的归一化为

$$\kappa_{\mathbb{D}}(\zeta; v) = \frac{|v|}{1 - |\zeta|^2}, \qquad k_{\mathbb{D}}(0, r) = \operatorname{arctanh} r \quad (0 \le r < 1).$$

对于 $\lambda \ge 1$ 和 $\kappa \ge 0$，Ω 中的 (λ，κ)-拟测地线是一个绝对连续路径 $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$，满足 $\kappa_\Omega(\gamma(t); \gamma'(t)) \le \lambda$ 几乎处处成立，并且

$$\lambda^{-1}|s-t| - \kappa \le k_\Omega(\gamma(s), \gamma(t)) \le \lambda |s-t| + \kappa \qquad (a \le s, t \le b) \tag{22}$$

[27,定义 2.3]。

按照 [27, 定义 1.1(c)], ，若 Kobayashi 双曲域 $\Omega \Subset Z$ 满足以下条件，则称其具有相对弱可见性：对于任意一对不同的点 ξ，$\eta \in \partial_Z\Omega$，存在邻域 U_ξ，U_η，它们包含于 Z 且闭包互不相交，并且对于每个 $\kappa \ge 0$，都存在一个紧集 $Q \Subset \Omega$，与每条 (1，κ)-拟测地线γ 相交：$[a,b] \to \Omega$ 满足

$$\gamma(a) \in U_\xi \cap \Omega, \qquad \gamma(b) \in U_\eta \cap \Omega.$$

对于固定的 $\kappa_0 > 0$，相对 (1，κ_0)-可见性是指只需满足相同条件，其中仅有 $\kappa = \kappa_0$。对于有界域 $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$，这与 [8, 定义 1.1 和定理 2.8]中的 (1，κ_0)-可见性条件一致。

若映射序列 $F_j : \Omega \to \Omega$ 满足以下条件，则称其紧致发散：对于任意一对紧集 E，$L \Subset \Omega$，

$$F_j(E) \cap L = \varnothing$$

对于所有充分大的 j。此类序列的一个环境正规极限是映射 $F\colon \Omega \to Z$，它是在 Z 中取某个子序列的局部一致极限得到的。

对于 n =维的 $_{\mathbb{C}} M$，令 $K_M = \Lambda^n(T^{1,0}M)^*$表示典范丛，令 $K_M^{\otimes 2}$表示其张量平方。K_M 在 $U \subset M$ 上的全纯标架，是 U上处处不为零的全纯 n-形式，例如局部坐标中的 $dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$。整体标架是在整个 M上定义的标架。我们用$\mathcal{O}(M)$表示 M上的全纯函数，用 $H^0(M, L)$表示丛 L 的全纯截面。令$\sigma \in H^0(M, K_M)$

$$dV_\sigma = \sqrt{-1}^{\,n^2} \sigma \wedge \overline{\sigma}, \qquad \|\sigma\|^2_{2,M} = \int_M dV_\sigma. \tag{23}$$

如果 $\sigma = \rho\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$，则根据（13）有 $dV_\sigma = |\rho|^2 dV_{\mathrm{E}}/n!$。Bergman空间 $A^2(M, K_M)$由具有有限范数的全纯 n-形式组成。其对角线上的 Bergman核形式为 $\mathcal{B}_M = \sum_j dV_{\sigma_j}$，其中 $A^2(M,$ $K_M)$的一组正交归一基为 $\{\sigma_j\}$。在局部全纯标架 e 中，记 $\mathcal{B}_M = B_e\, dV_e$。等价地，$B_e(z)$是该标架下求值泛函的平方范数。当且仅当存在某个 $\sigma \in A^2(M, K_M)$满足 $\sigma(z) \ne 0$ 时，Bergman核形式 $\mathcal{B}_M$在 z处非零。在此集合上，Bergman（1,1）-形式为

$$\omega_B = \sqrt{-1}\, \partial\bar\partial \log B_e. \tag{24}$$

由于 $B_{ge} = |g|^{-2} B_e$ 在全纯标架变换 $e \mapsto ge$下，(24) 与标架无关。对于欧几里得域，$K_\Omega(z,\ w)$ 是关于 dV_{E} 平方可积函数的标量 Bergman 核，因此 $\mathcal{B}_\Omega = K_\Omega(z,\ z)\, dV_{\mathrm{E}}$。

我们用 ω_E 表示完备 Kähler–Einstein 形式，其归一化为 $\mathrm{Ric}_{\omega_E} = -\omega_E$，除非另行指定不同的 Einstein常数。

3. 正闭流的构造

3.1. 拟多调和构造。 我们构造了一个具有特征 $e^{Ks/2}$的拟多调和势。其平方具有特征 e^{Ks}。

引理 3.1。 设 M 为一个连通复流形，且 $\{\Phi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ 为 M上的全纯 $\mathbb{R}$-作用。假设 $U \in$ 拟多调和函数$(M) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(M)$ 是非负的且不恒为零，并且对于某个 $a > 0$,

$$U \circ \Phi_s = e^{as} U \qquad (s \in \mathbb{R}). \tag{25}$$

Then

$$T = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(U^2)$$

是 M 上满足以下条件的一个非零正闭实 (1,1)-流

$$\Phi_s^* T = e^{2as} T \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

此外，若 $\log U \in$ 拟多调和函数(M)，其中 $\log 0 = -\infty$，则 $S = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial U$是一个满足以下条件的非零正闭实 (1,1)-流

$$\Phi_s^* S = e^{as} S \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

若(25)是充分 仅对 $s = 1$，结论在将特征恒等式限制于 o $s \in \mathbb{Z}$。

证明。 由于 U 非负且为多重次调和函数，而函数 $t \mapsto t^2$ 在 $[0,\infty)$ 上是凸且递增的，因此函数 U^2 是多重次调和函数。因此， $T = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(U^2)$ 是一个正的闭实 (1,1)-流。

我们证明 T非零。假设 $T = 0$，并令 $H = U^2$。那么 $\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial H = 0$在分布意义下成立。在一个坐标球中取欧氏迹，得到 $\Delta H = 0$ 在分布意义下成立。根据 Weyl 引理， [32, 定理 IX.25], H 有一个光滑调和代表。由于 H 是多重次调和函数，它处处与该代表相等。因此， H 是光滑且拟调和的。

我们断言 $H > 0$在 M上成立。事实上，若 $H(p) = 0$在某点 $p \in M$处成立，则调和函数的强极小值原理 [15, 第 2.2 节3]蕴含 H 在p的某个邻域内恒为零。因此$\{H = 0\}$ 在 M中既是开集又是闭集。由连通性可知， H 将恒等于零，这与关于 U的假设矛盾。因此 $H > 0$，且$U = \sqrt{H}$光滑。由于 $\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial H = 0$，求导得到

$$\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial U = -\frac{\sqrt{-1}}{4H^{3/2}}\,\partial H \wedge \bar\partial H.$$

左边非负，因为 U 是多重次调和的，而右边非正。因此

$$\partial H = 0.$$

由于 M 是连通的， H 是正常数。在 $s = 1$ 处对式 (25) 求值得到 $H \circ \Phi_1 = e^{2a} H$，矛盾。因此 $T \neq 0$。

最后，由于 Φ_s 是全纯的，由式 (25) 得到

$$\begin{aligned}\Phi_s^* T &= \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\big((U\circ\Phi_s)^2\big)\\ &= \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(e^{2as}U^2)\\ &= e^{2as}T.\end{aligned}$$

现在设 $\log U$ 是多重次调和的。那么 $S = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial U$ 是正且闭的。如果 $S = 0$，则 $\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial U = 0$ 在分布意义下成立。根据 Weyl 引理， U 是光滑且拟调和的。由于 $U \geq 0$ 和 $U \not\equiv 0$，强极小值原理和 M 的连通性推出，在 M 上 $U > 0$。因此，

$$0 \leq \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log U = -\frac{\sqrt{-1}}{U^2}\,\partial U \wedge \bar\partial U.$$

由此可得 $\partial U = 0$，因此 U在 M上为常数，这与 $U\circ\Phi_1 = e^a U$ 矛盾。因此 $S \neq 0$。此外，

$$\Phi_s^* S = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(U\circ\Phi_s) = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(e^{as}U) = e^{as}S.$$

反之，假设 (25) 仅对 $s=1$ 成立。前面的非消失论证仍然适用。由于对 $m\in\mathbb{Z}$ 有 $\Phi_m=\Phi_1^m$，我们得到

$$U\circ\Phi_m=e^{am}U,\qquad \Phi_m^*T=e^{2am}T\qquad (m\in\mathbb{Z}).$$

如果 $\log U$ 是多重次调和的，则对于每个 $m\in\mathbb{Z}$，我们还有 $\Phi_m^*S=e^{am}S$。 □

我们首先注意到，在整数时间满足特征恒等式的正闭流，可以通过取平均，得到对于完整实作用的相应恒等式。

设一个非零正闭流 T_0 满足 $\Phi_1^*T_0=e^kT_0$，其中某个 $k\in\mathbb{R}$。令

$$T=\int_0^1 e^{-ks}\Phi_s^*T_0\,ds. \tag{26}$$

对于测试形式 β，配对 $(\Phi_s^*T_0)(\beta)=T_0(\Phi_{-s}^*\beta)$ 关于 s 连续变化。当 $0\le s\le 1$ 时，传输后的形式的支集包含在一个固定的紧集内。该平均是正且闭的；由于与 T_0 配对为正的正测试形式，对于接近零的 s 也具有正配对，因此该平均非零。群律 (17) 给出

$$\Phi_t^*T=e^{kt}\int_t^{t+1}e^{-kr}\Phi_r^*T_0\,dr=e^{kt}T. \tag{27}$$

第二个等式由周期为一的恒等式 $e^{-k(r+1)}\Phi_{r+1}^*T_0=e^{-kr}\Phi_r^*T_0$ 得出。

令 u 为 M 上的正多重调和函数，满足

$$u\circ\Phi_s=e^{\lambda s}u\qquad (s\in\mathbb{R}),$$

对某个 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$成立。对任意 $k\in\mathbb{R}$，令 $q=k/\lambda$ 并定义

$$T_k=u^{q-2}\sqrt{-1}\,\partial u\wedge\bar\partial u. \tag{28}$$

由于 $u>0$，对于每个 $q\in\mathbb{R}$，这是一个光滑半正的实 (1,1)-形式。此外，$\partial\bar\partial u=0$ 推出 $d(\partial u)=d(\bar\partial u)=0$。因此，

$$dT_k=\sqrt{-1}(q-2)u^{q-3}\,du\wedge\partial u\wedge\bar\partial u=0.$$

因此 T_k 是闭的。

对恒等式 $u\circ\Phi_s=e^{\lambda s}u$ 在 $s=0$ 处求微分，得到 $Yu=\lambda u$。由于 $\lambda\neq 0$ 且 $u>0$，微分 du 处处不为零。因此 ∂u 处处不为零，并且 T_k 在每一点的秩均为一。

由于 Φ_s 是全纯的，我们有

$$\begin{aligned}\Phi_s^*T_k&=\sqrt{-1}\,(u\circ\Phi_s)^{q-2}\partial(u\circ\Phi_s)\wedge\bar\partial(u\circ\Phi_s)\\&=\sqrt{-1}\,(e^{\lambda s}u)^{q-2}\partial(e^{\lambda s}u)\wedge\bar\partial(e^{\lambda s}u)=e^{q\lambda s}T_k=e^{ks}T_k.\end{aligned}$$

反之，假设 $u\circ\Phi_1=e^\lambda u$。根据群律 (17)，

$$u\circ\Phi_m=e^{\lambda m}u\qquad (m\in\mathbb{Z}),$$

同样的计算可得

$$\Phi_m^*T_k=e^{km}T_k\qquad (m\in\mathbb{Z}).$$

形式 T_k 非零：否则 $\partial u=0$，因此 u 在连通流形 M 上为常数，这与 $u\circ\Phi_1=e^\lambda u$ 矛盾。

将 (26) 应用于 T_k，我们得到一个非零的光滑正的闭实 (1，1)-形式

$$\widetilde{T}_k=\int_0^1 e^{-ks}\Phi_s^*T_k\,ds$$

满足

$$\Phi_t^*\widetilde{T}_k=e^{kt}\widetilde{T}_k\qquad (t\in\mathbb{R}),$$

由 (27) 得。

接下来，我们通过沿流对非负多重次调和函数进行积分，构造满足特征恒等式 (25) 的多重次调和函数。

命题 3.2。 设 M 是一个连通复流形，且 $\{\Phi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ 是 M 上的全纯 $\mathbb{R}$-作用。固定 $K>0$，并假设 $b\in$ 拟多调和函数 $(M)\cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(M)$ 非负且不恒为零。假设

$$U(z)=\int_{\mathbb{R}} e^{-Ks/2}b(\Phi_s(z))\,ds \tag{29}$$

在 M 上局部一致收敛。于是， U 是一个非负、局部有界的多重次调和函数，并且不恒等于零，满足

$$U\circ\Phi_t=e^{Kt/2}U \qquad (t\in\mathbb{R}). \tag{30}$$

因此， $T=\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\,\overline{(U^2)}$ 是 M 上的一个非零正的闭实 （1，1）-流，满足 （6）。

证明。 对于 $R>0$，设

$$U_R(z)=\int_{-R}^{R} e^{-Ks/2}b(\Phi_s(z))\,ds.$$

我们首先证明 U_R 是多重次调和的。对于每个紧集 $C\Subset M$，该 t

$$C_R=\{\Phi_s(z):z\in C,\ |s|\le R\}$$

是紧的。由于 b 局部有界，存在 $B_{C,\ R}>0$ 使得

$$0\le b(\Phi_s(z))\le B_{C,R}, \qquad z\in C,\quad |s|\le R.$$

令 $z_j\to z$，并选取一个包含 z 及所有充分靠后的 z_j的紧邻域 C。对 $e^{-Ks/2}\{B_{C,R}-b(\Phi_s(z_j))\}$ 在 $[-R,R]$ 上应用法图引理，得到

$$\limsup_{j\to\infty}U_R(z_j)\le\int_{-R}^{R}e^{-Ks/2}\limsup_{j\to\infty}b(\Phi_s(z_j))\,ds\le\int_{-R}^{R}e^{-Ks/2}b(\Phi_s(z))\,ds=U_R(z),$$

第二个不等式由 b 的上半连续性以及 Φ_s的连续性得出。因此， U_R 是上半连续的。设 f 是从 Δ 的某个邻域映入 M的全纯映射。对 $b\circ\Phi_s\circ f$ 应用均值不等式和托内利定理，得到

$$U_R(f(0))\le\int_{-R}^{R}\frac{e^{-Ks/2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}b(\Phi_s(f(e^{\sqrt{-1}\theta})))\,d\theta\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_R(f(e^{\sqrt{-1}\theta}))\,d\theta.$$

结合上半连续性可知， U_R 是多重次调和的。根据我们的假设，函数 U_R 当 $R\to\infty$时局部一致地收敛到 U 。因此， U 非负、多重次调和且局部有界。

接下来我们证明 $U\not\equiv 0$。取满足 $b(p)>0$的 $p\in M$。在 p的一个全纯坐标邻域中，函数 b是次调和的。因此，在以 p为中心且充分小的欧几里得球上应用均值不等式可知， b 在一个正测度集上为正。令 dV 为 M上的任意光滑正体积形式。由于每个 Φ_s 都是微分同胚，

$$\int_M b(\Phi_s(z))\,dV(z)>0 \qquad (s\in\mathbb{R}),$$

其中积分可能为无穷大。根据托内利定理，

$$\int_M U(z)\,dV(z)=\int_M\int_{\mathbb{R}}e^{-Ks/2}b(\Phi_s(z))\,ds\,dV(z)=\int_{\mathbb{R}}e^{-Ks/2}\left(\int_M b(\Phi_s(z))\,dV(z)\right)ds>0.$$

因此， U并非恒等于零。对于 $t\in\mathbb{R}$，由群律 (17) 和变量替换 $r=s+t$可得

$$U(\Phi_t(z))=\int_{\mathbb{R}}e^{-Ks/2}b(\Phi_{s+t}(z))\,ds=e^{Kt/2}\int_{\mathbb{R}}e^{-Kr/2}b(\Phi_r(z))\,dr=e^{Kt/2}U(z).$$

这就证明了 (30)。将引理 3.1 应用于 $a=K/2$，我们得到 $T=\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(U^2)$ 是一个非零的正的闭实 (1,1)-流，满足 (6)。□

注 3.3。 (29) 局部一致收敛的一个充分条件如下：对于每个紧集 $C\Subset M$，都存在常数 $A_C,B_C>0$和 $\gamma_C<K/2$，使得

$$b(\Phi_s(z))=0 \qquad (z\in C,\ s<-A_C)$$

and

$$b(\Phi_s(z))\le B_Ce^{\gamma_Cs} \qquad (z\in C,\ s\ge 0).$$

对于 $s < -A_C$，被积函数在 (29) 中于 C 上消失。对于 $s \geq 0$，我们有

$$e^{-Ks/2} b(\Phi_s(z)) \leq B_C e^{-(K/2-\gamma_C)s}, \qquad z \in C.$$

由于 $\gamma_C < K/2$，可得

$$\sup_{z\in C} \int_R^\infty e^{-Ks/2} b(\Phi_s(z))\, ds \leq B_C \int_R^\infty e^{-(K/2-\gamma_C)s}\, ds = \frac{B_C}{K/2-\gamma_C} e^{-(K/2-\gamma_C)R} \longrightarrow 0$$

如 $R \to \infty$。此外，集合

$$\{\Phi_s(z) : z \in C,\ -A_C \leq s \leq 0\}$$

是紧的。由于 b局部有界，在 C上对 $[-A_C, 0]$ 的积分是一致有界的。结合消失条件 $b(\Phi_s(z)) = 0$（当 $z \in C$ 和 $s < -A_C$时），我们得出，式 (29) 中的积分在 C上一致收敛。

当 b有界时，注 3.3 中的正向时间估计是自动成立的。因此，只需验证当 s 充分负时 $b\circ \Phi_s$ 的消失。这给出了如下构造。

引理 3.4。设 Ω 是一个连通复流形，设 $\{\Phi_s\}_{s\in\mathbb{R}} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 是一个全纯$\mathbb{R}$作用，并设 $K > 0$。假设

$$b \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \qquad b \geq 0, \qquad b \not\equiv 0,$$

并且对于每个紧集 $C \Subset \Omega$，存在 $A_C > 0$ 使得

$$b(\Phi_s z) = 0 \qquad (z \in C,\ s < -A_C). \tag{31}$$

于是，在Ω 上存在一个非零正的闭 (1,1)-流 T，满足

$$\Phi_t^* T = e^{Kt} T \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{32}$$

证明。由于 b 有界，对于每个紧集 $C \Subset \Omega$ 以及每个 $R \geq 0$,

$$\sup_{z\in C} \int_R^\infty e^{-Ks/2} b(\Phi_s(z))\, ds \leq \|b\|_\infty \int_R^\infty e^{-Ks/2}\, ds = \frac{2\|b\|_\infty}{K} e^{-KR/2}.$$

结合（31），注 3.3 表明积分

$$\Psi(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-Ks/2} b(\Phi_s(z))\, ds \tag{33}$$

在 Ω 上局部一致地收敛。由命题 3.2，$T = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(\Psi^2)$ 是满足（32）的非零正的闭实 (1,1)-流。□

定理 *1.5* 的证明。取 $p \in \Omega$，使得 $u(p) > 0$，并固定 $0 < \delta < u(p)$。令

$$b = (u - \delta)_+ = \max\{u - \delta, 0\}.$$

函数 b 是多重次调和的、有界且非负，并且 $b(p) = u(p) - \delta > 0$。对于每个紧集 $C \Subset \Omega$，(8) 给出 $A_C > 0$ 使得

$$u(\Phi_s(z)) < \delta \qquad (z \in C,\ s < -A_C).$$

因此 b 满足 (31)。引理 3.4 给出了一个非零的 $T \in \mathcal{T}_{Y,K}(\Omega)$，而 [16, 定理 1.2] 给出了该孤子。□

3.2. **Stein 循环商与全纯映射**。下面的构造用商空间在一个真全纯 $\mathbb{R}$-作用的时刻一映射下的 Stein性，替代反向衰减假设。Cartan 定理 B 随即给出一个全纯时间函数。

命题 3.5。设 M 为一个连通复流形，且 $\{\Psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 M上的真全纯$\mathbb{R}$-作用。假设商空间

$$S = M/\langle \Psi_1 \rangle$$

是 *Stein* 的。则存在一个全纯函数 $F \in \mathcal{O}(M)$ 满足

$$F \circ \Psi_t = F + t \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{34}$$

因此，对于每个 $K > 0$，该形式

$$T_K = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial e^{K \operatorname{Re} F}$$

是一个光滑、正的闭实$(1,1)$形式，在 M 的每一点秩均为一，并满足

$$\Psi_t^* T_K = e^{Kt} T_K \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

证明。 适当实作用的稳定子是 $\mathbb{R}$ 的紧子群，因而是平凡的。将适当作用映射限制在闭子群 $\mathbb{Z}$上，可得由映射 Ψ_m、 $m \in \mathbb{Z}$给出的自由且适当不连续作用。因此

$$\pi : M \longrightarrow S$$

是一个全纯覆盖。取一个开覆盖 $\{V_i\}$ ，使得在其上 S 具有全纯截面

$$\sigma_i : V_i \longrightarrow M.$$

由于 π 的纤维是 $\langle \Psi_1 \rangle$的轨道，因此存在唯一的整数 $n_{ij}(x)$，使得

$$\sigma_i(x) = \Psi_{n_{ij}(x)}(\sigma_j(x)), \qquad x \in V_i \cap V_j.$$

由于 π 是覆盖映射，函数 $n_{ij}\colon V_i \cap V_j \to \mathbb{Z}$ 是局部常值的。由（17）以及作用的自由性，

$$n_{ij} + n_{jk} = n_{ik} \qquad \text{on } V_i \cap V_j \cap V_k.$$

由于每个 n_{ij} 都是局部常值的，函数 n_{ij} 构成一个取值于 $\mathcal{O}_S$ 的 Čech 1-余循环。由于S 是 Stein, Cartan 定理 B [18,第四章] 给出

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0.$$

因此，在必要时细化覆盖后，存在全纯函数 $a_i \in \mathcal{O}(V_i)$，使得

$$n_{ij} = a_i - a_j \qquad \text{on } V_i \cap V_j.$$

对于 $x \in V_i$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，定义

$$h(\Psi_m(\sigma_i(x))) = m + a_i(x).$$

这些定义在交叠区域上一致。事实上，对于 $x \in V_i \cap V_j$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，有

$$\Psi_m(\sigma_i(x)) = \Psi_{m+n_{ij}(x)}(\sigma_j(x))$$

and

$$m + a_i(x) = m + n_{ij}(x) + a_j(x).$$

因此， h 是 M 上的整体定义的全纯函数，满足

$$h \circ \Psi_1 = h + 1. \tag{35}$$

现在定义

$$F(z) = \int_0^1 h(\Psi_s(z))\, ds.$$

函数 F是全纯的，因为 $h \circ \Psi_s$ 在 z中是全纯的，并且连续依赖于 s。根据（17），

$$F(\Psi_t(z)) = \int_t^{t+1} h(\Psi_s(z))\, ds.$$

对 t 求导并利用（35），可得

$$\frac{d}{dt} F(\Psi_t(z)) = h(\Psi_{t+1}(z)) - h(\Psi_t(z)) = 1.$$

由于 $F(\Psi_0(z)) = F(z)$，积分可证得（34）。令 Y为$\{\Psi_t\}$的无穷小生成元。在 $t = 0$ 处对（34）求导，得到

$$YF = 1.$$

特别地， ∂F 处处不为零。由于 F 是全纯的，

$$T_K = \sqrt{-1}\, \partial\bar{\partial} e^{K \operatorname{Re} F} = \frac{K^2}{4} e^{K \operatorname{Re} F} \sqrt{-1}\, \partial F \wedge \bar{\partial}\overline{F}.$$

因此，T_K 是一个在每一点都为光滑正的闭实（1，1）-形式，且秩为一。

最后，由于 Ψ_t 是全纯的，由 (34) 得

$$\Psi_t^* T_K = \sqrt{-1}\, \partial\bar{\partial} e^{K \operatorname{Re}(F \circ \Psi_t)} = \sqrt{-1}\, \partial\bar{\partial} e^{K(\operatorname{Re} F + t)} = e^{Kt} T_K.$$

□

定理 *1.8* 的证明。设 $F \in \mathcal{O}(M)$ 由命题 3.5 给出，并令 $H = F \circ f$。由方程 (9) 和 (34) 得

$$H \circ \Phi_t = H + t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

在 $t = 0$ 处求导可得 $YH = 1$。对于 $K > 0$,

$$T_\pm = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial e^{\pm K \Re H} = \frac{K^2}{4} e^{\pm K \Re H} \sqrt{-1}\,\partial H \wedge \bar\partial \overline{H}. \tag{36}$$

由于 $YH = 1$，全纯一形式 ∂H 处处不为零。因此，这两个形式在每一点的秩均为一。此外,

$$\Phi_t^* T_\pm = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial e^{\pm K \operatorname{Re}(H \circ \Phi_t)} = e^{\pm K t} T_\pm.$$

孤子断言由 [16,定理 1.2]得出。 □

前一个证明中构造的形式是 M上相应形式的拉回。该论证适用于目标空间上的任意齐次正闭形式，与循环商构造无关。

注 3.6。设 $f : \Omega \to M$ 为全纯映射，并设 Φ_t 和 Ψ_t 分别是 Ω 和 M上的全纯 $\mathbb{R}$-作用，其生成元分别为 Y和 X。假设 (9) 成立。若 $S \in \mathcal{T}_{X,\,K}(M)$ 对某个 $K > 0$是光滑形式，则 f^*S 为正且闭，并且

$$\Phi_t^*(f^*S) = (f \circ \Phi_t)^* S = (\Psi_t \circ f)^* S = f^*(\Psi_t^* S) = e^{Kt} f^* S.$$

因此 $f^*S \in \mathcal{T}_{Y,\,K}(\Omega)$。若 f是满射浸没且 $S \neq 0$，则 $f^*S \neq 0$，因为正的切向量可以通过 df提升。

更一般地，只要 $f^*S \neq 0$ 且 $\Omega \Subset Z$ 是复维数为 $n \geq 2$ 的 Stein 域，并且 Ω 的某个邻域可全纯浸入 $\mathbb{C}^N$，那么由 $[16, \text{定理 } 1.2]$，形式 f^*S 便给出一个具有场 Y 和膨胀常数 K 的完备非平凡膨胀子。

推论 3.7。设 $\Omega \Subset \mathbb{C}_z^m \times \mathbb{C}_w^r$ 是一个在$(z,w) \mapsto (z, e^{i\theta} w)$ 作用下保持不变，并满足$(z,w) \in$的有界伪凸域$\Omega \Longrightarrow (z,0) \in \Omega$。设 Φ_t 是 Ω 上一个与圆作用可交换的全纯 $\mathbb{R}$-作用，其生成元为 Y。令

$$D = \{z : (z,0) \in \Omega\},$$

并记 Ψ_t 为 D 上的诱导流。若对于某个 $K > 0$，存在非零的光滑正闭实 (1,1)-形式 S，定义在 D 上并满足

$$\Psi_t^* S = e^{Kt} S,$$

那么 Ω 存在一个完备非平凡膨胀 ***Kähler–Ricci*** 孤子，其孤子场为 Y，膨胀常数为 K。

证明。不动集 $\{(z,0) : z \in D\}$ 在 Φ_t 的作用下保持不变。记 $\Phi_t = (A_t, B_t)$。由于 Φ_t 与圆作用可交换,

$$A_t(z, e^{\sqrt{-1}\theta} w) = A_t(z,w).$$

对于每个 $z \in D$，在 $(z,0)$ 附近按 w 变量展开 A_t：

$$A_t(z,w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}} a_\alpha(z) w^\alpha.$$

上述不变性意味着

$$(e^{\sqrt{-1}|\alpha|\theta} - 1) a_\alpha(z) = 0 \qquad (\theta \in \mathbb{R}).$$

因此，当 $|\alpha| > 0$ 时，$a_\alpha(z) = 0$。于是，在零截面的一个邻域内，$A_t(z,w) = A_t(z,0)$。

根据假设，$(z,\ w) \in \Omega$ 蕴含 $(z,\ 0) \in \Omega$，因此 $A_t(z,\ w) - A_t(z,\ 0)$ 在 Ω 上是全纯的。由于 Ω 是连通的，恒等定理给出

$$A_t(z,w) = A_t(z,0) \qquad ((z,w) \in \Omega).$$

因此，全纯映射 $f(z,\ w) = z$ 满足关于流 Φ_t 和 Ψ_t的 (9)。它是满射浸没。由于 Ω 是有界伪凸欧氏域，注 3.6 的度量结论适用。□

3.3. **全纯雅可比与单侧估计**。 拉普拉斯构造同样适用于沿流的两端均衰减的全纯函数。这类函数将在下文中由适当作用下平方可积全纯 n-形式的拉回产生。

引理 3.8。 设 M 为一个连通复流形，并设 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 M上的全纯 $\mathbb{R}$-作用。假设非零的 $f \in \mathcal{O}(M)$ 满足

$$f \circ \Phi_t \longrightarrow 0 \quad \textit{locally uniformly on } M \quad \textit{as } t \to \pm\infty. \tag{37}$$

那么，对每个 $K > 0$，都存在定义在 M 上的非零光滑正的闭实 (1,1)-形式 $T_{K,+}$ 和 $T_{K,-}$，满足

$$\Phi_t^* T_{K,+} = e^{Kt} T_{K,+}, \qquad \Phi_{-t}^* T_{K,-} = e^{Kt} T_{K,-} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

证明。 取 $p \in M$，使得 $f(p) \neq 0$且 $\delta \in (0, |f(p)|^2)$。令 $\chi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为一个光滑凸非减函数，使得

$$\chi = 0 \quad \text{on } [0,\delta], \qquad \chi(|f(p)|^2) > 0.$$

Then

$$b = \chi(|f|^2)$$

是定义在 M上的光滑、非负、非零多重次调和函数。

由（37），对每个紧集 $C \Subset M$，都存在 $A_C > 0$ 使得

$$b(\Phi_t(z)) = 0 \qquad (z \in C,\ |t| \geq A_C). \tag{38}$$

对于 $K > 0$，定义

$$U_{K,\pm}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-Kt/2} b(\Phi_{\pm t}(z))\, dt.$$

设 $V \Subset M$ 为开集，并令 $C = \overline{V}$。由（38），

$$U_{K,\pm}(z) = \int_{-A_C}^{A_C} e^{-Kt/2} b(\Phi_{\pm t}(z))\, dt, \qquad z \in V.$$

因此，两个积分在 M上都局部一致地收敛。由于被积函数关于（t， z）是光滑的，在固定的紧区间上应用积分号下微分可得 $U_{K,\,\pm} \in C^\infty(V)$。由于 V 是任意的，两个函数在 M上都是光滑的。由命题 3.2 得到非零的光滑正闭形式

$$T_{K,\pm} = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}(U_{K,\pm}^2)$$

它们满足所断言的变换律。 □

引理 3.9。 设 D 是一个维数为 n的连通复流形，且 Φ 是 D上的全纯$\mathbb{R}^p$-作用。假设 σ 是 D上的处处不为零的全纯 n-形式。对于每个$t \in \mathbb{R}^p$，由 $\Phi_t^*\sigma = L_t\sigma$定义处处不为零的全纯函数 L_t。存在全纯函数 j_t，其关于 （t, z）连续，使得

$$e^{j_t} = L_t, \qquad j_0 = 0, \qquad j_{t+s} = j_t \circ \Phi_s + j_s. \tag{39}$$

若 $Z_\alpha = X^{1,\,0}_{e_\alpha}$，记作 $L_{Z_\alpha}\sigma = h_\alpha\sigma$。则

$$j_t(z) = \int_0^1 \sum_{\alpha=1}^{p} t_\alpha h_\alpha(\Phi_{rt} z)\, dr.$$

证明。 对于固定的 t，拉回的微分为

$$\frac{d}{dr}(\Phi_{rt}^*\sigma) = \Phi_{rt}^*(\mathcal{L}_{X_t}\sigma) = \left(\sum_\alpha t_\alpha h_\alpha \circ \Phi_{rt}\right)\Phi_{rt}^*\sigma,$$

由于 $\iota_{\overline{Z_\alpha}}\sigma = 0$和 $d\sigma = 0$。初始条件 $L_0 = 1$ 给出了 j_t的径向积分。对于固定的 z， L_t 的余循环恒等式意味着， $j_{t+s}(z) - j_t(\Phi_s z) - j_s(z)$的取值属于 $2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$。它关于（t， s）连续，并且在（0, 0）处为零。由于 $\mathbb{R}^{2p}$是连通的，它恒等于零。这就证明了（39）。□

注记 3.10。 (i) 设在一个全纯坐标图中,

$$\sigma = \rho\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n, \qquad Z_\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k}.$$

当 z 和 $\Phi_t(z)$ 属于此坐标图时，引理 3.9 中 σ 的乘子和系数 h_α 为

$$\begin{aligned} L_t &= J_t \frac{\rho \circ \Phi_t}{\rho}, \qquad J_t = \det_{\mathbb{C}} D\Phi_t, \\ h_\alpha &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_\alpha^k}{\partial z^k} + \frac{Z_\alpha \rho}{\rho}. \end{aligned} \tag{40}$$

第一个恒等式可通过拉回 σ 得出。为验证雅可比公式，取一段包含在坐标图内的流，并令

$$v_t^k = \sum_{\alpha=1}^{p} t_\alpha a_\alpha^k, \qquad A_r = D\Phi_{rt}.$$

求导得

$$A_r' = Dv_t(\Phi_{rt}) A_r.$$

由 Jacobi 公式,

$$\frac{d}{dr} J_{rt} = J_{rt} \operatorname{tr}(A_r^{-1} A_r') = J_{rt} \sum_{\alpha,k} t_\alpha \left(\frac{\partial a_\alpha^k}{\partial z^k} \right) \circ \Phi_{rt}.$$

h_α 的表达式可直接通过计算 $\mathcal{L}_{Z_\alpha}\sigma$ 得到。对于欧几里得坐标标架 $\rho = 1$，我们有 $e^{j_t} = J_t$。

(ii) 若将 σ 替换为满足 $b \in \mathcal{O}^*(D)$ 的 $b\sigma$，则其乘子变为

$$L_t' = L_t \frac{b \circ \Phi_t}{b}.$$

引理 3.9 给出了一个由 $j_0' = 0$ 归一化的全纯对数 j_t'。当 $b = e^g$ 对某个 $g \in \mathcal{O}(D)$ 成立时，该对数为

$$j_t' = j_t + g \circ \Phi_t - g.$$

真性给出了平方可积全纯 n-形式的如下衰减结果；当 $\Phi_t^*\sigma = L_t\sigma$ 时，该结果也适用于函数 L_t。

引理 3.11。 设 Φ_t 是复流形 D 上的一个真全纯 $\mathbb{R}^p$-作用。若 $\sigma \in H^0(D, K_D)$ 平方可积，则当 $|t| \to \infty$ 时，$\Phi_t^*\sigma \to 0$ 局部一致地成立。若 σ 处处不为零且 $\Phi_t^*\sigma = L_t\sigma$，则当 $|t| \to \infty$ 时，$L_t \to 0$ 局部一致地成立。

证明。 对于任意 $\varepsilon > 0$，取一个紧集 $L \subset D$，使得 $\int_{D\setminus L} dV_\sigma < \varepsilon$。给定开集 $V \Subset D$，真性使得满足 $\Phi_t(V) \cap L \neq \varnothing$ 的 t 的集合为紧集。对于所有充分大的 $|t|$，由变量替换可得

$$\int_V dV_{\Phi_t^*\sigma} = \int_{\Phi_t(V)} dV_\sigma \le \int_{D\setminus L} dV_\sigma < \varepsilon.$$

在坐标图 $A_t = \Phi_t^*\sigma = a_t\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$ 中。在该坐标图内的同心球 $B_r \Subset B_{2r} \Subset V$ 上，次平均不等式给出

$$\sup_{B_r} |a_t|^2 \le C_r \int_{B_{2r}} |a_t|^2\, dV_{\mathrm{E}} \le n! C_r \int_V dV_{A_t}.$$

有限覆盖给出了所断言的一致局部衰减。如果 $\sigma = \rho\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$ 在该坐标图中处处不为零，则 $\inf_{B_r} |\rho| > 0$。由于 $\Phi_t^*\sigma = a_t\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$，我们在 B_r 上一致地有 $L_t = a_t/\rho \to 0$。□

假设 $D \Subset Z$，且在 D 的某个邻域上定义了一个全纯 n-形式 σ。它在 D 上的限制是平方可积的。对于 K_D 上任意固定的光滑 Hermitian 度量，引理 3.11 给出：对每个 $Q \Subset D$,

$$\sup_{Q} \|\Phi_t^*\sigma\| \longrightarrow 0 \qquad (|t| \longrightarrow \infty). \tag{41}$$

对于有界域 $D \subset \mathbb{C}^n$，取 $\sigma = dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$。于是 $\Phi_t^*\sigma = J_t\sigma$，从而

$$\sup_{Q} |J_t| \longrightarrow 0 \qquad (|t| \longrightarrow \infty). \tag{42}$$

接下来，我们将这一衰减与关于 $j_t(z) - j_t(a)$ 的上界结合起来，其中 $t \geq 0$。

命题 3.12。设 Φ_t 是一个真真实全纯流，其生成元为 Y，作用在一个维数为 n 的连通复流形 D 上，该流形带有处处不为零的全纯 n-形式 σ，满足$\|\sigma\|_{2,\,D} < \infty$。假设 D 具有一个光滑不变体积形式 $B_\sigma^0 dV_\sigma$，满足 $B_\sigma^0 > 0$ 且$\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial$对数 $B_\sigma^0 \geq 0$。令 $a \in D$，并令 j_t 为引理 *3.9* 中关于标架 σ 的对数。考虑以下界

$$\sup_{t\geq 0,\ z\in L} \Re(j_t(z) - j_t(a)) < \infty \qquad (L \Subset D). \tag{43}$$

若此条件成立，则对于每个 $K > 0$，$T_{Y,\,K}(D)$ 都包含一个非零光滑形式。若该界成立，但其中的 j_t 被某个 $g \in O(D)$ 的 $j_t + g \circ \Phi_t - g$ 所替代，则对于每个 $K > 0$，$T_{\varepsilon Y,\,K}(D)$ 都包含一个非零光滑形式，并且 $\varepsilon \in \{1, -1\}$ 的某一种选择与 K 无关。

证明。将 $\Phi_t^*\sigma = L_t\sigma$ 写成 $L_t = e^{j_t}$，并令

$$h_t = j_t + g \circ \Phi_t - g, \qquad q_t = h_t - h_t(a),$$

在第一种情况下取 $g = 0$。对于每个紧集 L，其界为 $\sup_{t\geq 0} \sup_{L}$实数集$q_t < \infty$。在同心坐标球 $B(x,\ r) \Subset B(x,\ 2r)$ 上，沿通过 x [25,的复直线应用 Borel–Carathéodory 定理（第十二章，第 § 3] 节）可得

$$\sup_{B(x,r)} |q_t - q_t(x)| \leq 2\Big(\sup_{B(x,2r)} \Re q_t - \Re q_t(x)\Big).$$

假设

$$\sup_{t\geq 0} |q_t(x)| \leq A, \qquad M = \sup_{t\geq 0} \sup_{B(x,2r)} \Re q_t < \infty.$$

前面的不等式给出

$$\sup_{t\geq 0} \sup_{B(x,r)} |q_t| \leq A + 2(M + A) = 2M + 3A.$$

固定 $z \in D$，并选择一条连接 a 与 z 的路径。用有限个坐标球 $B(x_j,\ 2r_j) \Subset D$ 覆盖其紧致像，并排列这些坐标球，使得 $x_0 = a$、$x_m = z$ 以及 $x_{j+1} \in B(x_j,\ r_j)$。从 $q_t(a) = 0$ 开始，前面的估计给出 q_t 在每个连续中心处的统一界，进而在 z 的某个邻域内也有统一界。用有限个这样的邻域覆盖任意紧集 $L \Subset D$，即可得到

$$\sup_{\substack{t\geq 0\\ z\in L}} |q_t(z)| < \infty. \tag{44}$$

设定 $G_N = N^{-1}\int_0^N q_t\,dt$。根据 Montel 定理，沿某个 $N_j \to \infty$，我们有 $G_{N_j} \to G$ 局部一致地成立，并且 $G(a) = 0$。由于 h_t 满足加性余循环恒等式，

$$q_{t+s}(z) = q_t(\Phi_s(z)) - q_t(\Phi_s(a)) + q_s(z).$$

积分得到

$$G_N(\Phi_s z) - G_N(\Phi_s a) + q_s(z) - G_N(z) = \frac{1}{N}\left(\int_N^{N+s} q_t(z)\,dt - \int_0^s q_t(z)\,dt\right).$$

对于每个固定的 $s \in \mathbb{R}$，当 $N > |s|$时，根据（44），第一个积分在紧集上有界；第二个积分则由于连续性而在紧区间上有界，并且当 $s < 0$时，两个积分均按指定方向取向。取极限可得，$G \circ \Phi_s + h_s - G$ 是常数 $\ell(s) = G(\Phi_s a) + h_s(a)$。余循环使得 ℓ连续且可加，因此 $\ell(s) = \lambda s$。于是

$$G \circ \Phi_t + h_t - G = \lambda t. \tag{45}$$

由 $\widehat{G} = G + g$ 这可写为

$$\widehat{G} \circ \Phi_t + j_t - \widehat{G} = \lambda t. \tag{46}$$

若 $g = 0$，则余循环给出

$$G_N(\Phi_1 a) + j_1(a) = \frac{1}{N}\left(\int_N^{N+1} j_t(a)\,dt - \int_0^1 j_t(a)\,dt\right).$$

量 实数集$j_t(a)$ = 对数$|L_t(a)|$ 由引理 3.11 和连续性可知，对 $t \geq 0$ 有上界。在欧几里得坐标标架中，对有界映射 Φ_t 应用柯西估计，可在 a处得到相同的上界。沿着 N_j 取极限并利用 (45)，我们得到

$$\Re\lambda = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{N_j} \left(\int_{N_j}^{N_j+1} \Re j_t(a)\, dt - \int_0^1 \Re j_t(a)\, dt \right) \leq 0.$$

⌢若实数集$\lambda = 0$，令 $f = e^{-G}$。则

$$f \circ \Phi_t = e^{-\lambda t} L_t f. \tag{47}$$

由引理 3.11 应用于 σ 可知，当 $|t| \to \infty$ 时， $|e^{-\lambda t}| = 1$ 和 $L_t \to 0$ 局部一致地成立。引理 3.8 给出了 Y 和 $-Y$ 对应的两个非零光滑形式。

若 $b =$ 实数集$\lambda \neq 0$，由 $B_\sigma^0 dV_\sigma$ 的不变性可得 log $B_\sigma^0 \circ \Phi_t + 2$实数集$j_t =$log B_σ^0。结合这一 (46)，点，我们得到，对于 $H =$log $B_\sigma^0 -$ 2实数集 $\widehat{G}$，

$$H \circ \Phi_t = H - 2bt, \qquad \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial H = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log B_\sigma^0. \tag{48}$$

置 $\varepsilon = -$s gn(b) 和 $c = K/(2|b|)$。当 $g = 0$ 时，最后一个不等式给出 $b < 0$，因此 $\varepsilon = 1$。于是

$$T_K = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial e^{cH} = e^{cH}\left(c\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial H + c^2\sqrt{-1}\,\partial H \wedge \bar\partial H \right).$$

由（48），

$$\Phi_{\varepsilon t}^* T_K = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial e^{c(H+2|b|t)} = e^{Kt} T_K.$$

此外 $YH = -2b$，因此 ∂H 处处不为零，且第二项在 D上处处非零。若$\sqrt{-1}\,\partial\partial H > 0$，则该形式为正定的。特别地，若对于具有 Ric$_{\omega_E} = -\omega_E$的 Kähler–Einstein 度量，不变体积形式为 ω_E^n，则 $\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial$log $B_\sigma^0 = \omega_E > 0$。□

注 3.13。 （i）对于有界伪凸域 $D \Subset \mathbb{C}^n$，坐标标架

$$\sigma = dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$$

是平方可积的。Bergman核形式 $\mathcal{B}_D = B_\sigma^0 dV_\sigma$ 是不变的，其中

$$\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log B_\sigma^0 > 0.$$

因此命题 3.12适用于 j_t 上的真全纯实流的复雅可比行列式的全纯对数。

若 (43) 成立，则对每个 $K > 0$ ，都存在一个完备非平凡膨胀子，其孤子场为Y。若将 j_t 替换为 $j_t + g \circ \Phi_t - g$ 后，对某个 $g \in \mathcal{O}(D)$，该界仍成立，则同样的结论也适用于场 εY ，其中 $\varepsilon \in \{1, -1\}$ 为固定值，且与 K无关。这些结论由 [16,定理 1.2]推出。

在后一种构造中，$R\lambda = 0$ 分别为 Y和 $-Y$给出非零光滑齐次形式，而 $R\lambda \neq 0$ 则为所选场 εY给出一个正定齐次形式。

(ii) 界 (43) 也可以用不变体积密度来表示。令 $R =$log B_σ^0。由 $B_\sigma^0 dV_\sigma$ 的不变性可得

$$R \circ \Phi_t + 2\Re j_t = R.$$

将此恒等式在 a处的取值减去在 z 处的取值，可得

$$2\Re(j_t(z) - j_t(a)) = R(z) - R(a) \quad + R(\Phi_t a) - R(\Phi_t z).$$

由于 $R(z) - R(a)$ 在 D 的每个紧子集上都有界，条件 (43) 等价于

$$\sup_{t\geq 0} \sup_{z\in L} \big(R(\Phi_t a) - R(\Phi_t z) \big) < \infty \qquad (L \Subset D).$$

对于 $D \Subset \mathbb{C}^n$ 且 $\sigma = dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$，我们有 $R =$log $K_D(z,\ z) +$log$(n!)$。这个加性常数在前面的差中抵消。

3.4. 轨道 L^2 全纯 n形式的估计。在第 5 节中，我们对 $t \in \mathbb{R}^p$ 中的 $(\Phi_t^*\sigma)^{\otimes 2}$ 取傅里叶变换。为确保这些积分局部一致收敛，我们需要在 M 的紧子集上一致成立的估计，且其强于引理 3.11 中的衰减。

引理 3.14。 设 M 是一个维数为 n 的连通复流形，且 $\Phi\colon\ \mathbb{R}^p \times M \to M$ 是一个真全纯作用。假设 $\sigma \in H^0(M, K_M)$ 满足 $\|\sigma\|_{2,\ M} < \infty$，并令

$$A_t = \Phi_t^*\sigma.$$

对于每个相对紧开集 $V \Subset M$，定义

$$E_V = \{u \in \mathbb{R}^p : \Phi_u(\overline{V}) \cap \overline{V} \neq \varnothing\}.$$

则 E_V 是紧的，并记其勒贝格测度为 $|E_V|$，

$$\int_{\mathbb{R}^p}\int_V \sqrt{-1}^{n^2} A_t \wedge \overline{A_t}\, dt \leq |E_V|\, \|\sigma\|_{2,M}^2 < \infty. \tag{49}$$

此外，在 M 上固定一个光滑 *Hermitian* 度量 h，并在 K_M 上固定一个光滑 *Hermitian* 度量和联络。令 $\nabla^m A_t$ 表示迭代协变导数，其中使用诱导的张量积联络和 h 的列维-奇维塔联络。对于每个 $Q \Subset V$ 和 $m \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^p} \sup_{z\in Q} |\nabla^m A_t(z)|^2\, dt \leq C_{Q,V,m}\, \|\sigma\|_{2,M}^2 < \infty. \tag{50}$$

该常数与 t 和 σ 无关。在任意全纯坐标图中，写作 $A_t = a_t(z)\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$。那么 $z \mapsto a_\cdot(z)$ 是取值于 $L^2(\mathbb{R}^p)$的全纯映射。

证明。 作用的真性意味着 E_V 是紧的。对于 $w \in M$，令

$$B_w = \{t \in \mathbb{R}^p : w \in \Phi_t(V)\}.$$

若 $B_w \neq \varnothing$，取 $t_0 \in B_w$。对于 $t \in B_w$，写成

$$w = \Phi_t(z) = \Phi_{t_0}(z_0), \qquad z, z_0 \in V.$$

于是 $z_0 = \Phi_{t-t_0}(z)$，因此 $B_w \subset t_0 + E_V$。从而，

$$|B_w| \leq |E_V|. \tag{51}$$

由于 $dV_{A_t} = \Phi_t^* dV_\sigma$，变量替换和托内利定理给出

$$\int_{\mathbb{R}^p}\int_V dV_{A_t}\, dt = \int_{\mathbb{R}^p}\int_{\Phi_t(V)} dV_\sigma\, dt = \int_M |B_w|\, dV_\sigma(w) \leq |E_V|\|\sigma\|_{2,M}^2.$$

这证明了（49）。固定 $Q \Subset V$。取有限个坐标球覆盖 Q，并使其略大的闭包包含于 V 中。在每个球上写成

$$A_t = a_t(z)\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n.$$

在每个坐标球上，均值不等式和柯西估计可通过较大球上的 L^2 范数，控制 a_t 的阶数至多为 m 的导数。固定联络的系数及其导数在这些球上均有界。因此，

$$\sup_Q |\nabla^m A_t|^2 \leq C_{Q,V,m} \int_V dV_{A_t}.$$

这里的常数还取决于固定的Hermitian度量和联络，但不取决于 t 或 σ。对 t 进行积分并利用(49)，即可证明(50)。

最后，在一个较小的坐标球上，泰勒公式给出

$$\left\| a_\cdot(z+h) - a_\cdot(z) - \sum_j h^j \partial_j a_\cdot(z) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^p)} \leq C|h|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^p} \sup_Q |D^2 a_t|^2\, dt \right)^{1/2} = O(|h|^2).$$

根据（50），导数 $\partial_j a_\cdot(z)$ 属于 $L^2(\mathbb{R}^p)$。因此，系数映射是取值于 $L^2(\mathbb{R}^p)$中的全纯映射。□

如果 σ在 M上处处不为零，记作 $A_t = L_t\sigma$。固定一个全纯坐标图（U， z），并选取 $Q \Subset V \Subset U$，使得 V为开集。在 U上，记作

$$\sigma = \rho\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n, \qquad A_t = a_t\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n.$$

由于 ρ 处处不为零， $L_t = a_t/\rho$。 ρ^{-1} 的导数在 V上有界。对阶数 0、...、 $\overline{m}$应用乘积法则和（50），可得

$$\int_{\mathbb{R}^p} \sup_{z\in Q} \sum_{|\alpha|=m} |\partial_z^\alpha L_t(z)|^2\, dt < \infty \qquad (m \geq 0). \tag{52}$$

同样的估计表明， $z \mapsto L.(z)$是取值于 $L^2(\mathbb{R}^p)$的全纯函数。

在 $D \subset \mathbb{C}^n$上，写作 $\sigma = \rho\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$。于是，当且仅当 $\int_D |\rho|^2\, dV_{\mathrm{E}} < \infty$时， σ是平方可积的，其乘子为 $L_t = J_t(\rho \circ \Phi_t)/\rho_\circ$

将 $\mathbb{R}^p$ 替换为格 $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$，并以计数测度代替勒贝格测度时，同样的估计仍然成立。事实上，如果 $B_w \cap \Lambda \neq \varnothing$ 和 $t_0 \in B_w \cap \Lambda$，则

$$B_w \cap \Lambda \subset t_0 + (E_V \cap \Lambda).$$

因此

$$\#(B_w \cap \Lambda) \leq \#(E_V \cap \Lambda) < \infty,$$

关于 w一致。对 Λ 求和并应用相同的柯西估计，可得（49）和（50）的离散类比式。

4. 自同构群的结构

4.1. 自同构群作用的真性。我们首先利用 Bergman度量来证明自同构群作用的真性。对于 Stein环境流形，下面的浸入假设由 [31, 定理 3]推出。

引理 4.1。设 Ω $\Subset Z$ 是复流形中的一个域。假设 Ω的一个邻域 V 允许一个全纯浸入 $F\colon\ V \to \mathbb{C}^N$。

则 Ω上的有界全纯函数可以分离切向方向，并且每个全纯映射 $\mathbb{C} \to$Ω 都是常值的。

*Bergman*核形式 B_Ω 处处非零，且相应的 *Bergman*度量是正定的。

此外，Aut(Ω) 是一个有限维实李群，并在 Ω上适当地作用。若 X 和 JX 都是 Ω上的完备实全纯向量场，则 $X = 0$。

证明。 $F|_\Omega$的各分量有界，因为 F(Ω)是紧的；它们能分离切向方向，因为 dF 是单射。若 h：$\mathbb{C} \to$ Ω是全纯的，将刘维尔定理应用于 $F \circ h$，得到 $dF_{h(\zeta)}\, dh_\zeta = 0$。由于 dF 是单射，故 $dh = 0$。

固定 $x \in$Ω和 $0 \neq v \in T^1_{\ x}{}^0$Ω。选取指标，使得$\sigma = dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_n}$在 x处非零，并选取一个分量 $f = F_j$，使得 $df_x(v) \neq 0$。令 $\tau = (f - f(x))\sigma$。这些形式均为平方可积：对于Ω附近任意光滑的正体积形式 dV，密度 dV_σ/dV 和 dV_τ/dV 在紧致闭包上有界。选取 x附近的全纯坐标，对于 $\eta \in A^2(\Omega\ K_\Omega)$，写作 $\eta = f_\eta(z)\ dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$。将求值泛函定义为 $E_z(\eta) = f_\eta(z)$。稍大的坐标球上的柯西估计表明， $z \mapsto E_z$ 是取值于对偶希尔伯特空间的全纯函数。特别是，

$$E_x(\sigma) \neq 0, \qquad E_x(\tau) = 0, \qquad (dE_x(v))(\tau) = df_x(v)E_x(\sigma) \neq 0.$$

因此 $E_x \neq 0$ 和 $dE_x(v) \notin \mathbb{C}E_x$。根据 Bergman形式的定义以及全纯希尔伯特范数的 Levi公式，

$$-\sqrt{-1}\omega_B(v, \bar{v}) = \frac{\|E_x\|^2 \|dE_x(v)\|^2 - |\langle dE_x(v), E_x\rangle|^2}{\|E_x\|^4} > 0. \tag{53}$$

对 $A^2(\Omega\ K_\Omega)$ 作变量替换表明， g_B 在 Aut(Ω) 下保持不变。全纯元素构成 Isom(Ω g_B) 的一个闭子群，并且相对于紧开拓扑，这是因为属于等距群的局部一致极限仍然是全纯的。因此，根据 [1, 定理 2.12], Aut(Ω) 是一个李群。我们给出关于 g_B的真性论证，但该论证可能并不完整。参见 [1,命题 3.62]。

设 d_B 为 g_B 的距离，并设 $B_B(q,r)$ 为相应的球。假设 $x_j \to x$ 和$A_j x_j \to y$，其中 $A_j \in \mathrm{Aut}(\Omega)$。则 $A_j x \to y$ 和 $A_j^{-1} y \to x$。置

$$S = \{q \in \Omega : \{A_j q : j \geq 1\} \text{ has compact closure in } \Omega\}.$$

若 $q \in S$ 和 $\overline{B_B(q,\ 2r)}$ 是紧的，则用有限个球 $B_B(A_{j_\ell} q,\ r)$ 覆盖 $\{A_j q\}$。对于 $d_B(q,\ z) < r$和 $A_j q \in B_B(A_{j_\ell} q,\ r)$,

$$d_B(A_{j_\ell}^{-1} A_j z, q) \leq d_B(z,q) + d_B(A_j q, A_{j_\ell} q) < 2r.$$

因此$\{A_j z\}$ 包含在有限个该紧球的平移像中。这证明了 S 是开集。若 $q_* \in S$，取 $r > 0$，使得 $B_B(q_*,\ 4r)$紧，并取 $q \in S$，使得 $d_B(q,\ q_*) < r$。使用 $B_B(q,\ 2r) \subset B_B(q_*,\ 4r)$，同样的估计表明 $q_* \in S$。由于 $x \in S$ 且 Ω 连通，$S = \Omega$。

将此论证应用于从 y 开始的 A_j^{-1}。由于这些映射及其逆映射都是等距变换，在紧子集上应用阿尔泽拉–阿斯科利定理并取对角子列，可得 A_j 和 A_j^{-1} 的局部一致极限 A 和 B。这些极限是全纯的，并且通过在紧邻域上对复合映射取极限，可得 $A \circ B = B \circ A = \mathrm{id}_\Omega$。因此，$A_j$ 有一个子序列在 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 中收敛，这证明了真性。

若 $X,\ JX$是完备实全纯场，则 $[X, JX] = (\mathcal{L}_X J)X + J[X,X] = 0$。它们的交换流给出映射

$$H_x(s+it) = \exp(sX)\exp(tJX)x, \qquad \partial_t H_x = J\,\partial_s H_x.$$

这是一个整曲线，因此根据第一部分它是常值的。在零点处求导得到：对每个 x，$X(x) = 0$。□

4.2. **李群结构与适定流**。

引理 4.2. 设 G 是一个连通实李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。假设对于每个 $X \in \mathfrak{g}$，算子 $\mathrm{ad}_X\colon\ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化，且其谱包含于 $\sqrt{-1}\mathbb{R}$中。那么 $G \simeq \mathbb{R}^p \times C$ 对于某个 $p \geq 0$ 以及一个紧致连通李群 C成立。

证明。记 $\mathfrak{g}$ 为 G的李代数。令 $\mathfrak{n}$ 表示幂零根，即最大的幂零理想；令 $\mathfrak{r}$ 表示 $\mathfrak{g}$的根基，即其最大的可解理想。固定 $X \in \mathfrak{n}$。由于 $\mathfrak{n}$ 是$\mathfrak{g}$的理想，我们有 $[X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$。定义 $\mathfrak{n}$的下中心列为 $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{n}_{k+1} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_k]$。由于 $X \in \mathfrak{n}$，归纳可得

$$\mathrm{ad}_X^k(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}_k, \qquad k \geq 1.$$

根据幂零性的定义，$\mathfrak{n}_m = 0$ 对于某个 $m \geq 1$成立。因此，$\mathrm{ad}_X^m = 0$ 作用于 $\mathfrak{g}$，从而也作用于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。由于 ad_X 在 $\mathbb{C}$上可对角化，可得 $\mathrm{ad}_X = 0$。记

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{Y \in \mathfrak{g} : [Y, V] = 0 \text{ for all } V \in \mathfrak{g}\}$$

设 $\mathfrak{g}$的中心为，则我们得到 $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。根据 [22, 推论 1。41]，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}$。因此，对于每个$X \in \mathfrak{r}$,

$$\mathrm{ad}_X(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),$$

从而 $\mathrm{ad}_X^2 = 0$。由于 ad_X 在 $\mathbb{C}$上可对角化，可得 $\mathrm{ad}_X = 0$。因此 $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。反之，中心是一个交换理想，因此按定义包含于根基中。故$\mathfrak{r} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。

根据 [22, 定理 B。2], 存在一个半单实李子代数 $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$，使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ 作为实向量空间成立。由于 $\mathfrak{r} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{s}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}.$$

因此，$\mathfrak{s}$ 也是 $\mathfrak{g}$的理想，且该分解是李代数的直和。对于 $X \in \mathfrak{s}$，$\mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{s}}$ 的复化的谱位于 $i\mathbb{R}$中，因此其 Killing 型满足

$$B_{\mathfrak{s}}(X,X) = \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{s}})^2\big) \leq 0.$$

由于 $\mathfrak{s}$ 是半单李代数，其 Killing 型是非退化的 [1,定理 2.41], ，因而是负定的。根据李第三定理 [1, 定理 1.14], ，存在一个连通、单连通的李群 K，其李代数与 $\mathfrak{s}$同构。由于 $\mathfrak{s}$ 是半单的且其 Killing 型是负定的，根据 [1, 定理 2.35]，K 是紧的。

由于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ 是李代数直和，群 $\mathbb{R}^r \times K$（其中 $r = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$）是连通且单连通的，其李代数与 $\mathfrak{g}$同构。根据 [22, 命题 1.99、~1.100], ，因此它是 G的万有覆盖群 G 。因此， [22, 命题 1.101]给出

$$G \simeq (\mathbb{R}^r \times K)/\Gamma,$$

其中， Γ 是一个离散中心子群。

令 Λ 为 Γ 到 $\mathbb{R}^r$的投影。我们断言 Λ 是离散的。否则，由于 Λ 是一个加法子群，存在非零的 $\lambda_j \in \Lambda$ ，使得 $\lambda_j \to 0$。选取 $k_j \in K$ 使得（λ_j， k_j） $\in \Gamma$。由 K的紧致性，这些互不相同的元素存在一个子序列在 $\mathbb{R}^r \times K$中收敛，这与 Γ 是闭且离散的事实相矛盾。令 $E = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \Lambda$，并从 Λ中选取 E的一组实基 λ_1，...， λ_q。紧致平行多面体

$$D = \left\{ \sum_{j=1}^{q} t_j \lambda_j : 0 \le t_j \le 1 \right\} \quad \text{satisfies} \quad E = D + \sum_{j=1}^{q} \mathbb{Z}\lambda_j = D + \Lambda.$$

因此， Λ是 E中的一个格。

选取一个实子空间 $F \subset \mathbb{R}^r$ 使得 $\mathbb{R}^r = F \oplus E$，并令 $p = \dim_{\mathbb{R}} F$。由于 $\Gamma \subset E \times K$，映射

$$F \times ((E \times K)/\Gamma) \longrightarrow (\mathbb{R}^r \times K)/\Gamma, \qquad (f, [(e,k)]) \longmapsto [(f+e,k)]$$

是一个李群同构。因此

$$G \simeq \mathbb{R}^p \times C, \qquad C = (E \times K)/\Gamma.$$

群 C 是连通的，因为 $E \times K$ 是连通的。对于 $(e,\ k) \in E \times K$，记 $e = d + \lambda$，其中 $d \in D$ 且 $\lambda \in \Lambda$。如果 $(\lambda,\ k_\lambda) \in \Gamma$，则 $[(e,\ k)] = [(d,\ kk_\lambda^{-1})]$。因此， $D \times K$ 映到 C 上，所以 C 是紧的。~ $\mathbb{R}^p$ 因子是中心的，因为 F 位于 G 的中心因子 $\mathbb{R}^r$ 中。□

前述分解对于寻找非紧李群的闭单参数子群也很有用。

引理 4.3。 非紧连通实李群 G 包含一个同构于 $(\mathbb{R}, +)$ 的闭单参数子群。在任意实李群中，给定的单参数子群是闭嵌入实直线，当且仅当其闭包是非紧的。当群适当地作用时，这些嵌入直线适当地作用。

证明。 对于给定的同态 $t \mapsto g_t$，其闭包 H 是一个闭连通阿贝尔李群，因此根据 [22, 推论 1.103(b)], 它同构于 $\mathbb{R}^a \times \mathbb{T}^b$。它到 $\mathbb{R}^a$ 的投影对于某个 $v \in \mathbb{R}^a$ 是 tv。由于直线 $\mathbb{R}v$ 在 $\mathbb{R}^a$ 中既闭又稠密， $\mathbb{R}v = \mathbb{R}^a$。如果 $a = 0$ ，则 H 是紧的。否则 $a = 1$ 且 $v \neq 0$，而紧集 $L \subset H$ 具有

$$\{t : g_t \in L\} \subset [-\sup_{u \in \pi(L)} |u|/|v|,\ \sup_{u \in \pi(L)} |u|/|v|],$$

其中 $\pi : H \to \mathbb{R}^a$ 是投影。其原像是闭集，因而是紧集。$\pi(g_t) = tv$ 的导数非零，且该映射是单射，因此这是一条闭嵌入实直线。反之，一条嵌入的闭直线具有非紧闭包。闭子群继承作用的真性。若给定的流具有紧致闭包，则任意点在所有实时间下的轨道都位于某个紧集内，这排除了其 $\mathbb{R}$-作用的真性。

假设对于每个 $\overline{X \in}\mathrm{Lie}(G)$，$\exp(\mathbb{R}X)$ 都是紧的。对于每个 X，在伴随表示下，取 $\mathrm{Lie}(G)$ 上的内积关于这个紧群的平均。于是 $\exp(t\,\mathrm{ad}_X)$ 是正交的，而 ad_X 对于平均内积是斜自伴的。引理 4.2 给出 $G \simeq \mathbb{R}^p \times C$。由于 G 是非紧的， $p > 0$，并且对于 $0 \neq v \in \mathbb{R}^p$ 子群

$$\{(tv, e_C) : t \in \mathbb{R}\}$$

具有非紧闭包。这与假设矛盾。因此，某个单参数子群具有非紧闭包，而上述投影论证表明它是一条闭嵌入实直线。对于有界欧氏域，另见 [29,引理 6。□

4.3. **伴随表示**。设 Ω 是一个连通复流形，其有界全纯函数能够分离切向方向，并假设 $G =$ 自同构群$_0$(Ω) 是一个适当作用的李群。根据引理 4.1，当 Ω 的某个邻域允许全纯浸入欧氏空间时，这些条件对 $\Omega \Subset Z$ 成立。

$X \mapsto X^{1,0}$ 的复线性延拓定义了一个从 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 到 Ω 上全纯向量场空间的映射。

我们首先证明该映射是单射。假设

$$X^{1,0} + \sqrt{-1}V^{1,0} = 0, \qquad X, V \in \mathfrak{g}.$$

于是 $X = -JV$。由于 V和 $JV = -X$是完备实全纯场，并且 $[V, JV] = 0$，映射

$$s + \sqrt{-1}t \longmapsto \exp(sV)\exp(tJV)(z)$$

对每个 $z \in \Omega$，都在 Ω 中定义了一条整曲线。每个有界全纯函数沿这条曲线均为常数。由于这些函数能够分离切向方向， V 恒等于零，因此$X = 0$。

对于实全纯场 X, V，它们的 (1,0) 部分与 (0,1) 部分的混合括号在局部全纯坐标中为零。因此，

$$[X^{1,0}, V^{1,0}] = [X, V]^{1,0}.$$

我们 eref因此，将 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 与 Ω 上全纯向量场的李代数中的像等同起来。

命题 4.4。设 $X \in \mathfrak{g}$ 生成一个适当实流 Φ_t，并置 $Z = X^{1,\ 0}$。

（i） 设非零全纯向量场 W 满足

$$[Z, W] = \alpha W$$

对某个 $\alpha \in \mathbb{C}$，其中 $R\alpha \neq 0$。那么，对每个 $K > 0$，当 $R\alpha > 0$ 时，在 $T_{X,\ K}(\Omega)$ 中存在一个非零流；当 $R\alpha < 0$ 时，在 $T_{-X,\ K}(\Omega)$ 中存在一个非零流。

（ii） 设 ad_X 具有一个对应于纯虚特征值的非平凡 *Jordan*块。那么，对每个 $K > 0$，在 $T_{X,\ K}(\Omega)$ 和 $T_{-X,\ K}(\Omega)$ 中分别存在非零光滑正闭实 $(1, 1)$-形式。

证明。 对于 (i)，如有必要可反向取流，因此我们可以假设 $a := R\alpha > 0$。按照约定 (16)，全纯向量场 V 的推前满足

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t)_* V = -(\Phi_t)_*[Z, V]. \tag{54}$$

事实上，$\Phi_{t*}V = \Phi^*_{-t}V$，且 $[Z, V] = 0$ 在全纯坐标中。将 (54) 应用于 W，得到

$$(\Phi_t)_* W = e^{-\alpha t}W, \qquad D\Phi_t(z)W(z) = e^{-\alpha t}W(\Phi_t(z)).$$

记 γ_Ω 为无穷小Carathéodory–Reiffen度量，

$$\gamma_\Omega(z; v) = \sup_{f \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{D})} \frac{|df_z(v)|}{1 - |f(z)|^2},$$

并令 $u(z) = \gamma_\Omega(z; W(z))$；参见命题 10–11]。由双全纯不变性和复齐次性可得

$$u(z) = \gamma_\Omega(\Phi_t(z); D\Phi_t(z)W(z)) = e^{-at}u(\Phi_t(z)).$$

由于有界全纯函数能够分离切向方向， $\gamma_\Omega(z; v) > 0$ 对于 $v \neq 0$成立。因此 Ω 是 Carathéodory–Reiffen双曲的，而 [24, 命题 11] 表明，$\log u$ 在 $\Omega \setminus \{W = 0\}$上是多重次调和的。为了在紧集 L 上界定 γ_Ω，将每个测试映射 $f \colon \Omega \to \mathbb{D}$ 与圆盘自同构 $A_{f(z)}$ 复合，使其将 $f(z)$ 映到零。于是

$$\frac{|df_z(v)|}{1 - |f(z)|^2} = |d(A_{f(z)} \circ f)_z(v)| \leq C_L |v|_h,$$

由稍大的坐标球上的柯西估计，配以 h Ω上的任意固定Hermitian度量。若$\Omega \subset \mathbb{C}^n$，可取 $\delta = \mathrm{dist}(L, \partial \Omega)$，并限制在沿 v 方向、半径为 δ 的圆盘上，从而得到$\gamma_\Omega(z; v) \leq |v|/\delta$ for $z \in L$。因此，$\log u$ 局部有上界，并在 W的零点处趋于 $-\infty$。由于$\{W = 0\}$ 是Ω中的闭解析集，因而是多极性集，Demailly的定理5.24 [14,

第一章§5.F] 表明，$\log u$ 可通过 $-\infty$ 延拓穿过此集合，成为一个多重次调和函数。由于指数函数是凸且递增的，

$$U = \exp\left(\frac{K}{2a}\log\, u\right) = u^{K/(2a)}$$

是一个非零、非负、局部有界的多重次调和函数，满足 $U\circ\,\Phi_t = e^{Kt/2}U$。因此，引理 3.1 给出了所需的非零正闭流 $\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(U^2)$。

对于 (ii)，设 $i\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$ 是一个非平凡 Jordan块所对应的特征值。选取$W\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $m\geq 1$，使得

$$V_j = (\mathrm{ad}_X - i\lambda I)^j W, \qquad 0\leq j\leq m+1,$$

满足 $V_m\neq 0$ 和 $V_{m+1}=0$。由于 V_m 是一个非零全纯向量场，切向分离给出一个有界全纯函数 h_0，使得 $V_m h_0\neq 0$。

在 G上固定左Haar测度 dg。对于满足 $\eta\geq 0$ 和 $\int_G \eta\,dg = 1$的 $\eta\in C_c^\infty(G)$，令

$$h_\eta(z) = \int_G \eta(g)h_0(gz)\,dg.$$

通过在 η 的固定紧支集上积分，该函数是有界且全纯的。对于$V\in\mathfrak{g}$，写作 $D_V f(g) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(g\exp(sV))$。因此 $V_z[h_0(g\bar z)] = D_V[h_0(\,\cdot\,\bar z)](g)$。若 D_V^* 是关于 dg的形式伴随，则分部积分得到

$$Vh_\eta(z) = \int_G (D_V^*\eta)(g)h_0(gz)\,dg.$$

Here

$$D_V^*\eta = -D_V\eta - (\mathrm{div}_{dg}\,D_V)\eta.$$

因此$\|Vh_\eta\|_\infty\leq\|D_V^*\eta\|_{L^1(G,dg)}\|h_0\|_\infty$。在全纯函数上，$V$的作用为 $V^{1,0}$，因此这些界可复线性延拓至 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。当 η 在 G 的单位元处遍历一个光滑逼近单位时，$h_\eta\to h_0$ 的所有导数在 Ω 上局部一致地收敛。于是我们可以选取 η，使得 $V_m h_\eta\not\equiv 0$。固定这样一个 η，并记 $h = h_\eta$。

由 (54)，在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上我们有

$$(\Phi_t)_* V = e^{-t\,\mathrm{ad}_X}V. \tag{55}$$

这与 [22, 命题 1.91]的抽象伴随公式一致：将 Lie(G) 识别为左作用的无穷小场会反转括号。利用 (55) 和 V_j的定义，我们得到

$$W(h\circ\Phi_t) = \big((e^{-t\,\mathrm{ad}_X}W)h\big)\circ\Phi_t = e^{-\sqrt{-1}\lambda t}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-t)^j}{j!}(V_j h)\circ\Phi_t. \tag{56}$$

由于 h 在 Ω 上有界，局部柯西估计给出

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{z\in L}|W(h\circ\Phi_t)(z)|<\infty$$

对每个 $L\Subset\Omega$ 都成立。对 (56) 取绝对值并将 $j=m$这一项单独移出，我们得到，对 $t\neq 0$,

$$\frac{|t|^m}{m!}|(V_m h)(\Phi_t(z))| \leq |W(h\circ\Phi_t)(z)| \quad + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{|t|^j}{j!}|(V_j h)(\Phi_t(z))|.$$

由上面的局部柯西估计，第一项对 $z\in L$ 和 $t\in\mathbb{R}$ 一致有界。由群平均论证，函数 $V_j h$、$0\leq j<m$在 Ω 上有界。因此，

$$\sup_{z\in L}|(V_m h)(\Phi_t(z))| \leq \frac{m!}{|t|^m}\left(C_L + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{|t|^j}{j!}\|V_j h\|_\infty\right)\longrightarrow 0 \qquad (|t|\to\infty).$$

因此，非零全纯函数 $f = V_m h$ 满足 (37)。引理 3.8 为 Φ_t 和 Φ_{-t}都给出了所需的流。□

现在只需考虑这样的情形：对于任何适当实流，两种伴随构造都不适用。相应的伴随算子可对角化，且具有纯虚谱。

命题 4.5. 假设 G 是非紧的，并且对于每个其流在Ω上定义真全纯 $\mathbb{R}$作用的 $X \in \mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 都可在 $\mathbb{C}$ 上对角化，且其谱包含于 $i\mathbb{R}$中。则(7) 成立，其中 $\mathbb{R}^p$因子是中心的，且 $1 \le p \le n$。其在Ω 上的作用是自由且适当的，并且其无穷小生成元的(1,0)部分在每一点都复线性无关。

证明。令 $X \in \mathfrak{g}$ 为其流的闭包。若 H 非紧，则引理 4.3 给出真性，因此根据假设，ad_X 具有所述的谱和对角化性质。若 H 紧，则在其推前表示下对 $\mathfrak{g}$ 上的一个内积取平均。由 (55)，对于所得内积，$e^{-t\,\mathrm{ad}X}$ 是正交的，因此

$$\langle \mathrm{ad}_X V, W\rangle_H + \langle V, \mathrm{ad}_X W\rangle_H = 0.$$

因此，ad_X 是斜自伴的，其复化具有相同的谱性质。抽象伴随会改变符号，所以引理 4.2 适用，并给出 (7)，其中由非紧性可得 $p \ge 1$ 。

如上所述， G 在 Ω 上适当地作用。由于 $\mathbb{R}^p$-因子是 G 的闭子群，其在 Ω 上的作用也是真作用。其点稳定子是 $\mathbb{R}^p$ 的紧子群，因而是平凡的。因此， $\mathbb{R}^p$-作用在 Ω 上是自由的。令 $X_1, \dots, X_p$ 为对应于 $\mathbb{R}^p$- 因子的李代数标准基的完备实全纯向量场，并令 $Z_j = X^{1,0}_j$ 。为证明它们逐点复线性无关，固定 $z \in \Omega$ 并设

$$\sum_{j=1}^{p} (a_j + ib_j) Z_j(z) = 0, \qquad a_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

令 $U = \sum_{j=1}^p a_j X_j$ 和 $V = \sum_{j=1}^p b_j X_j$。假设的关系给出 $U(z) = -J_z V(z)$。由于$[U, V] = 0$，它们的流保持这两个向量场不变。这些流是全纯的，因此保持J。于是，在每一点都有 $\exp(sV)\exp(-tU)z = s$， $t \in \mathbb{R}$。因此

$$f(s + it) = \exp(sV)\exp(-tU)z$$

满足

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -U(f) = JV(f) = J\frac{\partial f}{\partial s}.$$

因此 f 是全纯的。每个有界全纯函数在其像上都是常数，而切向分离给出 $df = 0$。于是 $U(z) = V(z) = 0$。$\mathbb{R}^p$-作用的自由性迫使所有 a_j， b_j 都为零。因此 $Z_1(z) \dots$， $Z_p(z)$ 在复线性意义下线性无关，并且 $p \le n$。□

5. 适当实作用的复化

设 $A = \mathbb{R}^p$ 在 Ω 上真且全纯地作用。命题 4.5 中得到的中心因子提供了这样一个作用。我们将 A的复化认同为 $\mathbb{C}^p = A + \sqrt{-1}A$，其中 $a + \sqrt{-1}b$对应于 $(a, b) \in A \times A$。子群 $\mathbb{Z}^p \subset A$ 是一个离散余紧格，并且

$$\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^p, \qquad [\zeta] \longmapsto (e^{2\pi\sqrt{-1}\zeta_1}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}\zeta_p})$$

是一个双全纯映射。由于 $(\mathbb{C}^*)^p$ 是 Stein，按照 [21, 第 3] 节的定义， A 是伪紧的。

A-作用的无穷小生成元 $X_1, \dots, X_p$ 彼此对易且是实全纯的。它们的 (1,0) 部分定义了彼此对易的局部全纯流，从而在 Ω 上给出一个局部 $\mathbb{C}^p$-作用，并延拓给定的 A-作用；参见 [7,第 3] 节。

在具有局部和整体 $\mathbb{C}^p$-作用的流形之间，全纯映射若在局部作用有定义的任意位置都交织这些作用，则称为局部等变的。

Ω 上局部作用的全局化由一个可能是非豪斯多夫的复流形 P 、一个整体全纯 $\mathbb{C}^p$-作用以及一个局部等变的开全纯嵌入 $\Omega \to P$ 组成。任何从 Ω 到一个具有整体全纯 $\mathbb{C}^p$-作用的可能为非豪斯多夫的复流形的局部等变全纯映射，都必须唯一延拓为一个从 P 出发的 $\mathbb{C}^p$-等变全纯映射；参见 [7, 定义 1.3]。

如果 Ω 是一个带有真全纯 A作用的连通 Stein 流形，那么 [7, 推论 3.5 和定理 1.7] 表明，所诱导的局部 $\mathbb{C}^p$作用是单叶的，并且具有一个普适整体化P，其可能不是豪斯多夫的。我们将 Ω 视为其在 P中的开像。整体作用在后者有定义的地方与局部作用一致，并且

$$P = \mathbb{C}^p \cdot \Omega.$$

记 Φ_ζ为 P上的整体作用，因此 $\Phi_{\zeta+\eta}=\Phi_\zeta\circ\Phi_\eta$对于 ζ， $\eta\in\mathbb{C}^p$。我们将使用两个判据来证明普适整体化 P是豪斯多夫的。当 Ω 具有正定 Bergman 度量时，这由 [21, 定理 4.4]推出。现在，在具有负 Einstein 常数的完备 Kähler–Einstein 度量这一替代假设下，我们给出一个直接证明。该论证还为 P上的复化作用提供了动量-水平切片。

5.1. **Kähler–Einstein 动量映射与局部切片**。设 Ω 是一个复维数为 n 的连通 Stein 流形，且 $A=\mathbb{R}^p$、 $p\ge 1$ 在 Ω 上适当且全纯地作用。记 Φ_t 为该作用，记 X_v 为 $s\mapsto\Phi_{sv}$、 $v\in\mathbb{R}^p$ 的无穷小生成元。进一步假设 Ω 带有一个完备 Kähler–Einstein 形式 ω_E，其归一化为

$$\mathrm{Ric}_{\omega_E}=-\omega_E. \tag{57}$$

对于闭包具有邻域并允许全纯浸入 $\mathbb{C}^N$ [16, Remarks 3.6(2)] 的相对紧 Stein 域，这样的度量是存在的。根据具有归一化 $\mathrm{Ric}_{\omega_E}=-\omega_E$ 的完备 Kähler–Einstein 度量的唯一性，每个 Φ_t 都保持 ω_E [10]。

对于一个实全 纯生成元 $X=X_v$，令 $Z_X=X^{1,0}$，于是 $X=Z_X+\overline{Z_X}$。在局部全纯复坐标 write

$$\omega_E=\sqrt{-1}g_{E,j\bar{k}}\,dz^j\wedge d\bar{z}^k,\qquad \rho_E=\log\det(g_{E,j\bar{k}}).$$

Einstein 方程给出

$$\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\rho_E=\omega_E. \tag{58}$$

定义函数 μ_X^E 如下

$$\mu_X^E=\sqrt{-1}\,\frac{\mathcal{L}_{Z_X}\omega_E^n}{\omega_E^n}=\sqrt{-1}\,(\mathrm{div}_{\mathbb{C}}\,Z_X+Z_X\rho_E),\qquad \mathrm{div}_{\mathbb{C}}\,Z_X=\sum_{j=1}^n\partial_jZ_X^j. \tag{59}$$

为验证坐标公式，令 $\nu_E=\omega_E^n$。由于 $\mathcal{L}_{Z_X}\nu_E=(\sum_j\partial_jZ_X^j+Z_X\rho_E)\nu_E$且 $\mathcal{L}_X\nu_E=0$，括号中的系数是纯虚数。因此， μ_X^E 为实数。 Z_X 的散度是全纯的；于是，

$$\bar{\partial}\mu_X^E=\sqrt{-1}\sum_{j,k}Z_X^j(\rho_E)_{j\bar{k}}\,d\bar{z}^k=\sqrt{-1}\sum_{j,k}Z_X^jg_{E,j\bar{k}}\,d\bar{z}^k=(\iota_X\omega_E)^{0,1}.$$

$d\mu_X^E$和 $\iota_X\omega_E$都是实一形式。因此，对于 $X_j=X_{e_j}$，

$$d\mu_X^E=\iota_X\omega_E,\qquad d\mu_{X_j}^E(JX_k)=g_E(X_j,X_k). \tag{60}$$

由于 A 是阿贝尔的且保持 ν_E不变，根据 Lie 导数的自然性可得

$$\mu_{X_j}^E\circ\Phi_t=\mu_{X_j}^E\qquad(t\in A). \tag{61}$$

爱因斯坦归一化还给出一个一般不变的凯勒度量所不具备的拉普拉斯恒等式。由凯勒对称性 $\partial_ig_{E,j\bar{k}}=\partial_jg_{E,i\bar{k}}$，

$$\Delta_E\mu_X^E=\sqrt{-1}g_E^{i\bar{k}}((\partial_iZ_X^j)g_{E,j\bar{k}}+Z_X^j\partial_ig_{E,j\bar{k}})=\sqrt{-1}(\mathrm{div}_{\mathbb{C}}\,Z_X+Z_X\rho_E)=\mu_X^E. \tag{62}$$

对于 $\mathrm{Ric}_{\omega_E}=-\kappa\omega_E$, $\kappa>0$，由 ω_E 归一化的动量为 $\mu^{E,\kappa}_X=\sqrt{-1}\kappa^{-1}(\mathcal{L}_{Z_X}\omega_E^n)/\omega_E^n$；同样的计算给出 $d\mu^{E,\kappa}_X=\iota_X\omega_E$ 和 $\Delta_E\mu^{E,\kappa}_X=\kappa\mu^{E,\kappa}_X$。

命题 5.1。 设 Ω是一个连通 *Stein* 流形，配备负爱因斯坦常数的完备凯勒–爱因斯坦度量，并设 $A=\mathbb{R}^p$ 在 Ω上适当地全纯作用。将度量缩放为 ω_E，使得 $\mathrm{Ric}_{\omega_E}=-\omega_E$，并使用 (59)中的动量。则全局化$P=\mathbb{C}^p\cdot\Omega$ 是一个连通豪斯多夫复流形，并且满足以下陈述。

(i) 对于每个 $x\in\Omega$，令

$$D_x=\{\eta\in\mathbb{R}^p:\Phi_{\sqrt{-1}\eta}(x)\in\Omega\}. \tag{63}$$

则 D_x 是开凸集，并且

$$\{\zeta\in\mathbb{C}^p:\Phi_\zeta(x)\in\Omega\}=A+\sqrt{-1}D_x.$$

(ii) 对于 $c \in \mu^E(\Omega)$，令 $N_c = (\mu^E)^{-1}(c)$，其中 $\mu^E = (\mu^E_{X_1}, \ldots\ldots, \mu^E_{X_p})$。则 N_c 是 Ω 的一个闭光滑A-不变子流形。映射

$$\mathcal{F}_c : \mathbb{R}^p \times N_c \longrightarrow P, \qquad (\eta, x) \longmapsto \Phi_{\sqrt{-1}\eta}(x)$$

是映到开不变子集 $U_c = \mathbb{C}^p \cdot N_c$ 上的微分同胚，且其上的作用由下式给出

$$(a + \sqrt{-1}b) \cdot (\eta, x) = (\eta + b, \Phi_a(x)).$$

集合 U_c 覆盖 P。

特别地，复化作用是自由且局部真（也就是说，每一点都有一个 $\mathbb{C}^p$-不变开邻域，使得限制在其上的作用为真），并且 $p \le n$。

证明。实作用是自由的，因为其稳定子是 $\mathbb{R}^p$的紧子群。轨道凸性[7, 推论 3.6] 在可能非豪斯多夫的整体化中仍成立：对于 $x \in \Omega$ 和 $b \in \mathbb{R}^p$，使得 $\Phi_{\sqrt{-1}sb}(x) \in \Omega$ 的 $s \in \mathbb{R}$ 构成一个区间。若 η_0, $\eta_1 \in D_x$，则沿着方向 $\overline{\eta_1 - \eta_0}$，在 $\Phi_{\sqrt{-1}\eta_0}(x)$ 处应用这一结论。从 η_0 到 η_1 的整个线段都属于 D_x。因此， D_x 是凸集。由于 Ω 在 P中是开集，它也是开集；而实不变性给出了 (i) 中的等式。由此证明了 (i)，且未使用豪斯多夫性。

我们利用 g_E 的完备性证明 P 是豪斯多夫空间。固定 $\zeta = a + \sqrt{-1}b \in \mathbb{C}^p$，并假设

$$x_j \longrightarrow x, \qquad y_j = \Phi_\zeta(x_j) \longrightarrow y \qquad \text{in } \Omega.$$

令 $w_j = \Phi_{-a}(y_j)$。于是 $w_j = \Phi_{\sqrt{-1}b}(x_j)$ 且 $w_j \to \Phi_{-a}(y) =: w$ 属于 Ω。由 (i),

$$\gamma_j(s) = \Phi_{\sqrt{-1}sb}(x_j) \in \Omega, \qquad 0 \le s \le 1.$$

整体作用的全纯性给出 $\dot\gamma_j = JX_b(\gamma_j)$。由 (60),

$$\int_0^1 |\dot\gamma_j(s)|^2_{g_E}\, ds = \langle \mu^E(w_j) - \mu^E(x_j), b\rangle. \tag{64}$$

右端与 j 无关且有界。对于 $0 \le s < t \le 1$，柯西–施瓦茨不等式给出

$$d_{g_E}(\gamma_j(s), \gamma_j(t)) \le |t-s|^{1/2} \left(\int_0^1 |\dot\gamma_j|^2_{g_E}\, du \right)^{1/2}.$$

长度估计表明，所有 $\gamma_j([0,1])$ 都位于以 x 为中心的固定闭 g_E-球内。根据完备性和霍普夫–里诺定理，该球是紧的。由阿尔泽拉–阿斯科利定理可得一个一致收敛的子序列，其极限为 $\gamma : [0,1] \to \Omega$， $\gamma(0) = x$， $\gamma(1) = w$。在坐标图中的一个小时间区间上，记 u_j 为 γ_j 的坐标，记 V_b 为 JX_b 的坐标表达式。在那里

$$u_j(t) - u_j(s) = \int_s^t V_b(u_j(r))\, dr.$$

在该区间上的曲线对于充分大的 j 均位于图的一个紧子集内，因此被积函数一致收敛。由此可得，在 $[0,1]$ 上有 $\dot\gamma = JX_b(\gamma)$。对于每个 $s \in [0,1]$ 以及满足 $s + h \in [0,1]$ 的充分小的 h，方程 $\dot\gamma = JX_b(\gamma)$ 在 Ω 内的唯一性给出

$$\gamma(s+h) = \Phi_{\sqrt{-1}hb}(\gamma(s)), \qquad \Phi_{-\sqrt{-1}(s+h)b}(\gamma(s+h)) = \Phi_{-\sqrt{-1}sb}(\gamma(s)).$$

因此，$s \mapsto \Phi_{-\sqrt{-1}sb}(\gamma(s))$ 关于 P 局部常值，从而在 $[0,1]$ 上为常值。特别地， $w = \Phi_{\sqrt{-1}b}(x)$ 和 $y = \Phi_\zeta(x)$。我们已经证明

$$\{(u,v) \in \Omega \times \Omega : v = \Phi_\zeta(u)\} \quad \text{is closed for every fixed } \zeta \in \mathbb{C}^p. \tag{65}$$

对于 α， $\beta \in \mathbb{C}^p$， $P \times P$ 的对角线在图的开乘积 $\Phi_\alpha(\Omega) \times \Phi_\beta(\Omega)$ 中恰好是 $\Omega \times \Omega$ 内的关系 $y = \Phi_{\alpha-\beta}(x)$。这些平移图的乘积覆盖 $P \times P$；由 (65) 可知，对角线是闭的。因此， P 是豪斯多夫的。连通性由 $P = \mathbb{C}^p \cdot \Omega$ 得出。

对于 (ii)，如果 $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$，那么根据自由性， X_u 处处不为零。Gram 恒等式

$$\sum_{j,k=1}^p u_j u_k\, d\mu^E_{X_j}(JX_k) = g_E(X_u, X_u) > 0 \qquad (u \ne 0) \tag{66}$$

表明 μ^E 是一个浸没。因此，根据（61），水平集 N_c 是光滑的、在 Ω 中闭的，并且具有 A-不变性。适当实作用限制为 N_c。

在 $(0,\ x)\in\mathbb{R}^p\times N_c$,

$$d\mathcal{F}_c(u,W)=\sum_{k=1}^{p}u_kJX_k(x)+W,\qquad W\in\ker d\mu_x^E.$$

若 $G_x=(g_E(X_j,\ X_k)(x))_{j,\ k}$，则任意 $V\in T_x\Omega$ 都有唯一的分解

$$u=G_x^{-1}d\mu_x^E(V),\qquad W=V-\sum_k u_kJX_k(x)\in\ker d\mu_x^E.$$

因此，$d\mathcal{F}_c$ 在 $(0,\ x)$ 处是一个同构。对于 $\eta,\ \xi\in\mathbb{R}^p$ 和 $y\in N_c$，群律给出 $\mathcal{F}_c(\eta+\xi,\ y)=\Phi_{\sqrt{-1}\eta}(\mathcal{F}_c(\xi,\ y))$。在 $(\xi,\ y)=(0,\ x)$ 处求导，得到

$$d\mathcal{F}_c|_{(\eta,x)}(u,W)=d(\Phi_{\sqrt{-1}\eta})_x\big(d\mathcal{F}_c|_{(0,x)}(u,W)\big).$$

因此，$\mathcal{F}_c$ 是一个局部微分同胚。

假设 $\mathcal{F}_c(\eta,\ x)=\mathcal{F}_c(\eta',\ y)$。由 $\xi=\eta-\eta'$，群律给出 $y=\Phi_{\sqrt{-1}\xi}(x)$。根据 (i)，从 x 到 y 的虚部线段位于 Ω 中。若 $\xi\neq0$，则

$$\langle\mu^E(y)-\mu^E(x),\xi\rangle=\int_0^1|X_\xi|^2_{g_E}(\Phi_{\sqrt{-1}s\xi}(x))\,ds>0,\tag{67}$$

这与 $x,\ y\in N_c$ 矛盾。因此 $\xi=0$，且 $x=y$。所以 $\mathcal{F}_c$ 是一个到U_c上的单射局部微分同胚。由于 N_c 在 A 下不变，群律给出了所述的作用公式。实作用在 N_c 上是真作用，而虚参数平移第一个因子；因此，$\mathbb{C}^p$-作用在 U_c 上自由且适当。这些集合覆盖 P，因为每个点都是某个 $x\in N_{\mu^E(x)}$ 的复平移。因此，复化作用是自由且局部真。

最后，实不变性给出 $\omega_E(X_j,\ X_k)=d\mu^E_{X_j}(X_k)=0$。$X_j$的实张成空间与 JX_j的实张成空间正交，并且根据（66），两者的维数均为 p。因此 $2p\le2n$。□

对于生成元为 X的适当实流，动量 μ^E_X 下降到 $\Omega/\mathbb{R}$。它在 JX 的投影上的导数为 $|X|^2_{g_E}>0$，因此商空间不可能是紧的。对于向量作用，在 D_x上令$m_j(\eta)=\mu^E_{X_j}(\Phi_{\sqrt{-1}\eta}(x))$。于是

$$\frac{\partial m_j}{\partial\eta_k}=g_E(X_j,X_k)(\Phi_{\sqrt{-1}\eta}(x))=\frac{\partial m_k}{\partial\eta_j}.$$

令 $\mathcal{U}_x(\eta)=\int_0^1\sum_k\eta_km_k(t\eta)\,dt$。上述对称性给出

$$\partial_{\eta_j}\mathcal{U}_x=\int_0^1\left(m_j(t\eta)+t\sum_k\eta_k(\partial_{\eta_k}m_j)(t\eta)\right)dt=m_j(\eta).$$

Hessian矩阵 $\mathcal{U}_x$ 在 $\Phi_{\sqrt{-1}\eta}(x)$ 处是正定 Gram矩阵，因此 $\mathcal{U}_x$ 在 D 上严格凸 x.

引理 5.2。 复李群 H 在复流形X 上的自由真适定全纯作用，其商空间是豪斯多夫复流形，并且构成其上的全纯主丛。

证明。 固定 $x\in X$ 并考虑全纯轨道映射

$$\alpha_x:H\longrightarrow X,\qquad h\longmapsto h\cdot x.$$

其在单位元 $e\in H$ 处的微分是单射。事实上，若 $v\in T_eH$ 属于其核，则由 v 生成的无穷小向量场在 x处消失。其积分曲线的唯一性表明，对于每个 $t\in\mathbb{R}$，$\exp(tv)\cdot x=x$。由自由性可知，对于所有 t，$\exp(tv)=e$，从而 $v=0$。

取一个经过 x 的复子流形 S_0，使得

$$T_xX=\operatorname{im}(d\alpha_x)_e\oplus T_xS_0.$$

考虑全纯映射

$$F:H\times S_0\longrightarrow X,\qquad F(h,s)=h\cdot s.$$

其在 (e,x) 处的微分是同构。根据全纯逆函数定理，存在一个单位元邻域 $N\subset H$ 和 S_0 中 x 的一个邻域 S_1，使得

$$F:N\times S_1\longrightarrow F(N\times S_1)$$

是映到 X的一个开子集上的双全纯映射。

我们断言，可以用 x 的一个更小邻域 S 替换 S_1 ，使得

$$\{h \in H : hS \cap S \neq \varnothing\} \subset N. \tag{68}$$

否则，通过选取收缩到 x 的 S_1 中的 x 的邻域，我们得到满足以下条件的序列 $s_j, s_j' \to x$ 和 $h_j \in H \setminus N$

$$h_j \cdot s_j = s_j'.$$

由于作用映射

$$H \times X \longrightarrow X \times X, \qquad (h, z) \longmapsto (z, h \cdot z)$$

是正规的，并且 $(s_j, s_j') \to (x, x)$， h_j 的一个子序列收敛到某个 $h \in H \setminus N$。取极限得到 $h \cdot x = x$，因此自由性意味着 $h = e$，这与 $e \in N$ 矛盾。这就证明了（68）。

我们证明

$$F : H \times S \longrightarrow HS, \qquad HS = \{h \cdot s : h \in H,\ s \in S\},$$

是一个双全纯映射。设 $F(h, s) = F(h', s')$。那么

$$(h'^{-1}h) \cdot s = s',$$

因此（68）给出 $h'^{-1}h \in N$。由于 F在 $N \times S$上是单射，比较

$$F(h'^{-1}h, s) = F(e, s')$$

可知 $h = h'$ 和 $s = s'$。此外， F 在 $H \times S$的每一点处都是局部双全纯映射：这在 $N \times S$ 上成立，并通过左平移延拓到每个 $h \in H$ 。因此 HS 在 X中是开集，并且F： $H \times S \to HS$ 是双全纯映射。

设 $Q = X/H$，并令 $\pi : X \to Q$ 为商映射。轨道关系

$$R = \{(z, h \cdot z) : z \in X,\ h \in H\}$$

在 $X \times X$中是闭的，因为它是适当作用映射的像。如果 $x,\ y \in X$ 属于不同的轨道，则存在 U和 V，分别为 x和 y的开邻域，使得（$U \times V$）$\cap R = \varnothing$。集合 π（U）和 π（V）不相交。它们是开集，因为对于每个开 $W \subset X$,

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{h \in H} hW$$

是开集。因此 Q是豪斯多夫的。由于 π 是开满射且 X 是第二可数的， Q也是第二可数的。

对于上面构造的每个切片 S ，置 $W = \pi(HS)$。集合 W 在 Q 中是开集，而双全纯映射 F: $H \times S \to HS$ 将 $\pi|_{HS}$ 与投影对应起来

$$H \times S \longrightarrow S, \qquad (h, s) \longmapsto s.$$

因此， $\pi|_S : S \to W$ 是一个同胚。这些映射为 Q 提供了复坐标。

为验证相容性，设 S_i, S_j 是两个这样的切片，对应的双全纯映射分别为 F_i :$H \times S_i \to HS_i$ 和 F_j: $H \times S_j \to HS_j$。在 $S_i \cap HS_j$ 上，映射

$$F_j^{-1}|_{S_i \cap HS_j} : S_i \cap HS_j \longrightarrow H \times S_j$$

是全纯的。其 S_j 分量正是商坐标的变换。因此，这些图册在 Q 上定义了一个复流形结构，并且对于该结构，π 是一个全纯次浸没。

最后，逆映射

$$\sigma_i = (\pi|_{S_i})^{-1} : W_i \longrightarrow X$$

是全纯局部截面。这些映射

$$H \times W_i \longrightarrow \pi^{-1}(W_i), \qquad (h, q) \longmapsto h \cdot \sigma_i(q)$$

是双全纯且具有 H-等变性。在 $W_i \cap W_j$ 上，满足以下条件的唯一函数 g_{ij}： $W_i \cap W_j \to H$

$$\sigma_i(q) = g_{ij}(q) \cdot \sigma_j(q)$$

是全纯的，因为它们是 $F_j^{-1} \circ \sigma_i$ 的 H 分量。这些是全纯主丛的转移函数。因此， $\pi : X \to Q$ 是一个全纯主 H 丛。□

5.2. **平方可积全纯 n-形式的傅里叶变换**。

命题 5.3. 在引理 *3.14* 的假设下，对于每个 $\theta \in \mathbb{R}^p$，关于作用参数的积分

$$S_{\sigma,\theta}(z) = \int_{\mathbb{R}^p} e^{-\sqrt{-1}\langle \theta, t\rangle} \big(\Phi_t^* \sigma\big)^{\otimes 2}(z)\, dt \tag{69}$$

定义为 $S_{\sigma,\ \theta} \in H^0(M, K_M^{\otimes 2})$。该积分在全纯平凡化中绝对收敛且局部一致地收敛，并且 $\theta \mapsto S_{\sigma,\ \theta}$ 在紧开拓扑下连续。此外，

$$\Phi_u^* S_{\sigma,\theta} = e^{\sqrt{-1}\langle \theta, u\rangle} S_{\sigma,\theta}, \qquad u \in \mathbb{R}^p. \tag{70}$$

如果 $\sigma(x) \neq 0$，那么对于至少一个 $\theta \in \mathbb{R}^p$，有 $S_{\sigma,\ \theta}(x) \neq 0$。

证明。 在一个相对紧坐标图上，写成 $\Phi_t^* \sigma = a_t(z)\ dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$。在 $K_M^{\otimes 2}$的诱导标架中，式（69）中被积函数的范数为 $|a_t(z)|^2$。由（50）可知，对于该坐标图中的每个紧集 Q，以及 $m = 0$, $\int_{\mathbb{R}^p}$，有 $\sup_Q |a_t(z)|^2 dt < \infty$。因此，式（69）局部一致收敛，且其系数是全纯的。同一个界和控制收敛性给出关于 θ的紧开连续性。由（17）及变量替换 $v = t + u$,

$$\begin{aligned} \Phi_u^* S_{\sigma,\theta} &= \int_{\mathbb{R}^p} e^{-\sqrt{-1}\langle \theta, t\rangle} (\Phi_{t+u}^* \sigma)^{\otimes 2}\, dt \\ &= e^{\sqrt{-1}\langle \theta, u\rangle} \int_{\mathbb{R}^p} e^{-\sqrt{-1}\langle \theta, v\rangle} (\Phi_v^* \sigma)^{\otimes 2}\, dv = e^{\sqrt{-1}\langle \theta, u\rangle} S_{\sigma,\theta}. \end{aligned}$$

这就是 (70)。固定 $x \in M$，使得 $\sigma(x) \neq 0$，并在 x 附近选择 K_M 的一个全纯标架 e。写作 $(\Phi_t^* \sigma)(x) = a_x(t) e(x)$。根据引理 3.14，$t \mapsto a_x(t)^2$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^p)$，它是连续的，并满足$a_x(0)^2 \neq 0$。如果每个 $S_{\sigma,\ \theta}(x)$ 都为零，那么这个 L^1 函数的傅里叶变换将在每个实频率处为零。傅里叶唯一性 [34, 第一章，推论 1。22] 将推出 $a_x(t)^2 = 0$ 几乎处处成立，从而由连续性可知处处成立，这与假设矛盾。□

对于有界域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$，坐标标架 $\sigma_0 = dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$ 平方可积。由 (52) 得，

$$\int_{\mathbb{R}^p} \sup_{z \in Q} |J_t(z)|^2\, dt < \infty \qquad (Q \Subset \Omega). \tag{71}$$

(69) 中的截面于是为

$$S_{\sigma_0,\theta}(z) = \left(\int_{\mathbb{R}^p} e^{-\sqrt{-1}\langle \theta, t\rangle} J_t(z)^2\, dt \right) \sigma_0^{\otimes 2}. \tag{72}$$

(72) 中的平方是全纯平方。由于 $J_0(z) = 1$，命题 5.3 表明，对于每个$z \in \Omega$，截面 $S_{\sigma_0,\ \theta}$ 中至少有一个在 z 处非零。

推论 5.4。 设$\Omega \Subset Z$ 为一个域，且 $V \subset Z$ 为Ω的一个开邻域。假设V 是 ***Stein***，或存在到 $\mathbb{C}^N$中的全纯浸入。那么存在有限个全纯n-形式 σ_1，……，$\sigma_m \in H^0(V, K_V)$，满足以下性质：对于Ω上的任意真全纯 $\mathbb{R}^p$-作用Φ，傅里叶积分

$$S_{j,\theta} = \int_{\mathbb{R}^p} e^{-\sqrt{-1}\langle \theta, t\rangle} \big(\Phi_t^* (\sigma_j|_\Omega)\big)^{\otimes 2}\, dt, \qquad \theta \in \mathbb{R}^p, \tag{73}$$

定义了 $K_\Omega^{\otimes 2}$的全纯截面，这些截面关于紧开拓扑依赖于 θ 连续，并满足(70)。此外，族$\{S_{j,\ \theta}:$ $1 \leq j \leq m,\ \theta \in \mathbb{R}^p\}$在$\Omega$上没有公共零点。

证明。 我们首先在 V 上选取有限个全纯 n-形式，使它们在Ω上没有公共零点。若$F\colon V \to \mathbb{C}^N$是一个全纯浸入，则其坐标微分在每一点都张成全纯余切空间。因此，这些形式

$$dF_{j_1} \wedge \cdots \wedge dF_{j_n}, \qquad 1 \leq j_1 < \cdots < j_n \leq N,$$

在 V 上没有公共零点。若 V 是 Stein，则在 K_V 上应用 Cartan 定理 A [18, 第四章]，可在 Ω 的每一点得到一个在该点不为零的全局全纯截面。由 Ω 的紧致性可知，在这种情况下也能得到所需的有限族。

每个 $\sigma_j|_\Omega$ 都是平方可积的，因为 σ_j 在紧集 Ω 的某个邻域上全纯。因此，命题 5.3 适用于每个 $\sigma_j|_\Omega$，并给出所述的收敛、全纯性、连续性和变换律。

最后，固定 $x \in \Omega$。根据构造，对于某个 j，$\sigma_j(x) \neq 0$。因此，命题 5.3 的非消失断言给出 $\theta \in \mathbb{R}^p$，使得 $S_{j,\theta}(x) \neq 0$。于是，截面 $S_{j,\theta}$ 在 Ω 上没有公共零点。□

接下来，我们将实变换律 (70) 扩展到复化作用。下述引理中的连通性假设确保这些扩展在 M 的交叠平移像上相一致。

引理 5.5。设 P 是一个豪斯多夫复流形，带有一个全纯的 $\mathbb{C}^p$-作用 Φ_ζ。假设$M \subset P$是开集，且在实子群 $\mathbb{R}^p$ 的作用下保持不变；该子群在 M 上适当作用，并且 $P = \mathbb{C}^p \cdot M$。假设对于每个 $x \in M$，集合

$$T_x = \{\zeta \in \mathbb{C}^p : \Phi_\zeta(x) \in M\}$$

是连通的。对于 M 上的每个平方可积全纯 n-形式 σ，命题 *5.3* 的截面 $S_{\sigma,\theta}$ 唯一地延拓为 $K_P^{\otimes 2}$ 的全纯截面。这些延拓连续地依赖于 θ，并满足

$$\Phi_\zeta^* S_{\sigma,\theta} = e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\zeta\rangle} S_{\sigma,\theta}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^p, \tag{74}$$

其中，配对是通常配对的复双线性扩张。若截面 $S_{\sigma,\theta}$（其中σ 遍历一族平方可积全纯 n-形式）以及 $\theta \in \mathbb{R}^p$ 在 M 上没有公共零点，则它们的扩张在 P 上也没有公共零点。

证明。对于 $\zeta \in \mathbb{C}^p$ 和 $x \in P$，记 $(\Phi_\zeta)_x^* : (K_P^{\otimes 2})_{\Phi_\zeta(x)} \to (K_P^{\otimes 2})_x$ 为关于 $D_x\Phi_\zeta$ 的拉回。由于 $\Phi_{\zeta+\eta} = \Phi_\eta \circ \Phi_\zeta$，我们得到

$$(\Phi_{\zeta+\eta})_x^* = (\Phi_\zeta)_x^* \circ (\Phi_\eta)_{\Phi_\zeta(x)}^*. \tag{75}$$

固定 $x \in M$ 和 $\theta \in \mathbb{R}^p$。表达式

$$F_{\theta,x}(\zeta) = (\Phi_\zeta)_x^*(S_{\sigma,\theta}(\Phi_\zeta(x))) - e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\zeta\rangle} S_{\sigma,\theta}(x), \qquad \zeta \in T_x,$$

是取值于固定纤维 $(K_P^{\otimes 2})_x$ 的全纯函数。根据（70），它在 $\mathbb{R}^p \subset T_x$ 上为零。在开集 T_x 中取一个以零为中心的多圆盘。对每个坐标依次应用单变量恒等定理，可得 $F_{\theta,x} = 0$ 在该多圆盘上成立。由于 T_x 是连通的，$F_{\theta,x}$ 在整个 T_x 上为零。特别地，

$$(\Phi_\zeta)_x^* S_{\sigma,\theta}(\Phi_\zeta x) = e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\zeta\rangle} S_{\sigma,\theta}(x) \qquad (\zeta \in T_x). \tag{76}$$

对于 $\eta \in \mathbb{C}^p$，令 $U_\eta = \Phi_\eta(M)$。这些开集覆盖 P。在 U_η上定义

$$S_{\sigma,\theta}^{(\eta)} = e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\eta\rangle} (\Phi_{-\eta}|_{U_\eta})^* S_{\sigma,\theta}.$$

若 $q \in U_\eta \cap U_\xi$，令 $x = \Phi_{-\eta}(q)$和 $y = \Phi_{-\xi}(q) = \Phi_{\eta-\xi}(x)$。于是 $\eta - \xi \in T_x$。在 x 处，我们有 e

$$(\Phi_\eta)_x^* S_{\sigma,\theta}^{(\eta)}(q) = e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\eta\rangle} S_{\sigma,\theta}(x).$$

对于另一个局部截面，由(75)和(76)可得

$$\begin{aligned}(\Phi_\eta)_x^* S_{\sigma,\theta}^{(\xi)}(q) &= e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\xi\rangle} (\Phi_{\eta-\xi})_x^* S_{\sigma,\theta}(y) \\ &= e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\eta\rangle} S_{\sigma,\theta}(x).\end{aligned}$$

由于$(\Phi_\eta)_x^*$ 是一个同构，这些局部截面在交叠区域上一致，并定义了 P上的一个全纯截面。对于 $\eta = 0$，局部定义就是 M上的原截面。对于 $\gamma \in \mathbb{C}^p$，$\Phi_\gamma(U_\eta) = U_{\eta+\gamma}$。在$U_\eta$ 上，粘合截面的拉回为

$$e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\eta+\gamma\rangle} (\Phi_{-(\eta+\gamma)} \circ \Phi_\gamma)^* S_{\sigma,\theta} = e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\gamma\rangle} S_{\sigma,\theta}^{(\eta)}.$$

这证明了 (74)。对于紧 $Q \subset P$，选取有限个紧集 $Q_i \subset U_{\eta_i}$，使其并集包含 Q。在 Q_i 上，该截面是来自紧集 $\Phi_{-\eta_i}(Q_i)$的S_{σ}傅里叶截面θ 的固定拉回 $e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\ \eta_i\rangle}$。这证明了 θ中的紧开连续性。根据 (74) 和 $P = \mathbb{C}^p \cdot M$可得唯一性。对于 $q \in P$，写作 $q = \Phi_\eta(x)$，其中为 $x \in M$，并选取一个满足$S_{\sigma,\theta}(x) \neq 0$的截面。由 (74)，$(\Phi_\eta)_x^* S_{\sigma,\theta}(q) = e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\ \eta\rangle} S_{\sigma,\theta}(x) \neq 0$。因此，延拓后的截面没有公共零点。□

5.3. **复化作用的真性**。 我们将以下引理应用于延拓的傅里叶截面$S_{\sigma,\ \theta}$。具有相近频率的截面之比在特征作用下变换，其指数是这些频率之差。这说明在不变开邻域上具有自由性和真性。当 $\dim_{\mathbb{C}} P = p+1$时，沿横截圆盘除以最小消失阶数，可以将这些比值延拓穿过其公共零点，从而使真性论证能够在整体上应用。

引理 5.6。 设 P 是一个带有全纯 $\mathbb{C}^p$-作用的连通豪斯多夫复流形。设$L \to P$ 是一个带有全纯 $\mathbb{C}^p$-作用的全纯线丛，该作用提升了 P 上的作用，并且在线性作用于每个纤维。设 J 是任意指标集，且 $\{s_{j,\theta}\}_{j\in J,\theta\in\mathbb{R}^p}$ 是 L的一族全纯截面，没有公共零点，并且对每个固定的 j，映射$\theta \mapsto s_{j,\theta}$ 在紧开拓扑下连续，且

$$\Phi_\zeta^* s_{j,\theta} = e^{\sqrt{-1}\langle\theta,\zeta\rangle} s_{j,\theta} \quad (\zeta \in \mathbb{C}^p). \tag{77}$$

则 $\mathbb{C}^p$在 P上的作用是自由且局部真的。若维数$_{\mathbb{C}} P = p+1$，则该作用是整体真的。

证明。 我们先记录频率收敛的一个初等推论。假设在以 θ_0 为中心的立方体 I 上，函数

$$E_k(\theta) = e^{\sqrt{-1}\langle\theta-\theta_0,\zeta_k\rangle}$$

一致收敛于连续的 H，且 $H(\theta_0) = 1$。将立方体缩小为以 θ_0为中心的较小立方体后，我们有 $|H(\theta) - 1| < 1/4$，并且对所有充分大的 k，$|E_k(\theta) - 1| < 1/2$。于是主值对数有定义，且

$$\log E_k(\theta) = \sqrt{-1}\langle\theta-\theta_0,\zeta_k\rangle. \tag{78}$$

两边之差是一个取值于 $2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$的连续函数，并且在 θ_0处为零。对于固定的$\varepsilon > 0$，若每个 ℓ对应的 $\theta_0 + \varepsilon e_\ell$ 都在较小的立方体内，则由一致收敛可得

$$\zeta_{k,\ell} = \frac{\log E_k(\theta_0+\varepsilon e_\ell)}{\sqrt{-1}\varepsilon} \longrightarrow \frac{\log H(\theta_0+\varepsilon e_\ell)}{\sqrt{-1}\varepsilon}.$$

固定 $q \in P$。选取一个指标 j 和一个频率 θ_0，使得$s_{j,\ \theta_0}(q) \neq 0$。由紧开连续性可得一个以 θ_0 为中心的闭立方体 I，使得对所有 $\theta \in I$，都有$s_{j,\ \theta}(q) \neq 0$。令

$$V = \{x \in P : s_{j,\theta}(x) \neq 0 \text{ for every } \theta \in I\}.$$

这是 q的一个开邻域：在一个局部平凡化中，连续系数在 I上有一个正的最小值，而在 q的一个较小邻域上也同样成立。特征定律（77）使V 在 $\mathbb{C}^p$下保持不变。对于 $\theta \in I$，比值$r_\theta = s_{j,\ \theta}/s_{j,\ \theta_0}$ 在 V 上全纯且处处非零，并满足

$$r_\theta(\Phi_\zeta x) = e^{\sqrt{-1}\langle\theta-\theta_0,\zeta\rangle} r_\theta(x). \tag{79}$$

若 $\Phi_\zeta(q) = q$，则 θ 在 I 上的变化给出 $e^{\sqrt{-1}\langle\theta-\theta_0,\ \zeta\rangle} = 1$，对每个 $\theta \in I$均成立。对每个实频率求导可得 $\zeta = 0$。因此该作用是自由的。

为证明 V 上的真性，设

$$x_k \to x, \qquad y_k = \Phi_{\zeta_k}(x_k) \to y, \qquad x, y, x_k, y_k \in V.$$

由 (79),

$$e^{\sqrt{-1}\langle\theta-\theta_0,\zeta_k\rangle} = \frac{r_\theta(y_k)}{r_\theta(x_k)} \longrightarrow \frac{r_\theta(y)}{r_\theta(x)}.$$

收敛在 $\theta \in I$ 上一致：这些比值在每个极限点的紧邻域与 I 的乘积上联合连续，且其分母远离零。在 θ_0 处，极限等于 1。由 (78)， ζ_k 收敛。序列判据证明了作用在 V 上是真作用。这类不变集覆盖 P。

现在假设 $\dim_{\mathbb{C}} P = p+1$。若该作用不是真作用，则存在序列 $x_k \to x$,$y_k = \Phi_{\zeta_k}(x_k) \to y$，使得 $|\zeta_k| \to \infty$。取 j 和 θ_1，使得 $s_{j,\ \theta_1}(x) \neq 0$。由连续性，可取一个以 θ_1 为中心且内点非空的闭立方体 $I \subset \mathbb{R}^p$，使得在其上 $s_{j,\ \theta}(x) \neq 0$。固定这个 j，并将 $\theta \in I$ 记为 $s_\theta = s_{j,\ \theta}$。这些截面中的每一个都是 L 的非零整体截面。

选取经过 y 的轨道的不变真适作用邻域。根据引理 5.2，在将关于 y 的像的一维商空间缩小后，取一个平凡化 $\Delta_z \times \mathbb{C}^p_w$，使得

$y=(0,\ 0)$ 和 $\Phi_\zeta(z,\ w)=(z,\ w+\zeta)$。选取 L 在零截面上的全纯标架 $e_0(z)$。对于作用在 L 上的协变提升 Φ，令 $e(z,\ w)=\Phi_w(e_0(z))$。根据定义，该提升在截面上的作用为

$$(\Phi_\zeta^* s_\theta)(q)=\widetilde{\Phi}_{-\zeta}(s_\theta(\Phi_\zeta(q))),\qquad \widetilde{\Phi}_{-w}(s_\theta(z,w))=e^{\sqrt{-1}\langle\theta,w\rangle}s_\theta(z,0),$$

~其中第二个等式是 $q=$处的 (77) 式（$z,\ 0$），$\zeta=w$。记 s_θ（$z,\ 0$）$=h_\theta$（z）e_0（z），并应用 Φ_w 得到

$$s_\theta(z,w)=e^{\sqrt{-1}\langle\theta,w\rangle}h_\theta(z)e(z,w),\qquad h_\theta\in\mathcal{O}(\Delta).\tag{80}$$

其中没有一个 h_θ 恒等于零：否则 s_θ 会在连通的 P 的一个非空开子集上消失，从而恒等于零，这与其在 x 处的值矛盾。

由于对每个 $\theta\in I$ 都有 $h_\theta\not\equiv 0$，消失阶 $\operatorname{ord}_0 h_\theta$ 都是有限的非负整数。令

$$m=\min_{\theta\in I}\operatorname{ord}_0 h_\theta,$$

取定满足 $\operatorname{ord}_0 h_{\theta_*}=m$ 的 $\theta_*\in I$。

固定 $0<r<1$。根据柯西公式，h_θ 的泰勒展开中 z^m 的系数为

$$c_m(\theta)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|\xi|=r}\frac{h_\theta(\xi)}{\xi^{m+1}}\,d\xi.$$

h_θ 在 θ 中的紧开连续性蕴含 c_m 在 I上连续。由于 $c_m(\theta_*)\neq 0$ 且$\operatorname{int} I$ 在 I中稠密，我们可以选择 $\theta_0\in\operatorname{int} I$ 使得

$$c_m(\theta_0)\neq 0.$$

对于每个 $\theta\in I$，函数 h_θ 在原点处至少 m 阶消失。因此，我们可以写成

$$h_\theta(z)=z^m a_\theta(z),\qquad a_\theta\in\mathcal{O}(\Delta).$$

我们对 θ_0 的选择给出 $a_{\theta_0}(0)\neq 0$。缩小坐标圆盘后，a_{θ_0} 在那里处处不为零。因此，对于每个 $\theta\in I$，

$$\frac{h_\theta(z)}{h_{\theta_0}(z)}=\frac{a_\theta(z)}{a_{\theta_0}(z)}$$

可全纯地延拓到 $z=0$上。

在这个公共邻域中，商空间为

$$r_\theta(z,w)=e^{\sqrt{-1}\langle\theta-\theta_0,w\rangle}\frac{h_\theta(z)/z^m}{h_{\theta_0}(z)/z^m}.$$

整体而言，商空间

$$r_\theta=s_\theta/s_{\theta_0}$$

是在 P 上的亚纯函数，在 y 附近可全纯延拓，并且在 x附近全纯。对于固定的 $0<r<1$，这些除法满足

$$\frac{h_\theta(z)}{z^m}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|\xi|=r}\frac{h_\theta(\xi)}{\xi^m(\xi-z)}\,d\xi,\qquad |z|<r.$$

右侧关于 θ连续变化，并且在较小的闭圆盘上一致连续。因此，延拓后的比值关于 θ 在两种紧开拓扑下均连续。由于 $r_{\theta_0}\equiv 1$，选取一个以 θ_0为中心、包含于$\operatorname{int} I$中的较小闭立方体 J_0，使得对于所有$\theta\in J_0$，$r_\theta(x)$和 $r_\theta(y)$均非零。

由(77)，在商空间有定义的地方，

$$r_\theta\circ\Phi_\zeta=e^{\sqrt{-1}\langle\theta-\theta_0,\zeta\rangle}r_\theta.\tag{81}$$

当 k充分大时，$s_{\theta_0}(x_k)\neq 0$，其(77)也给出 $s_{\theta_0}(y_k)\neq 0$。在 x_k 处应用(81)，并利用极限点处的全纯延拓，得到

$$e^{\sqrt{-1}\langle\theta-\theta_0,\zeta_k\rangle}=\frac{r_\theta(y_k)}{r_\theta(x_k)}\longrightarrow H(\theta):=\frac{r_\theta(y)}{r_\theta(x)}\tag{82}$$

在 J_0 上一致成立。事实上，扩展后的比值在 J_0 与 x、y 的紧邻域的乘积空间上联合连续。此外，$\inf_{\theta\in J_0}|r_\theta(x)|>0$，这使得当 k 足够大时，x_k 处的分母远离零。因此，(82) 中的收敛是一致的，其中 H 连续且非零

在 J_0 和 $H(\theta_0) = 1$ 上。将(78)之前的对数论证应用于(82)在一个更小的频率立方体上，可知 ζ_k 收敛。这与 $|\zeta_k| \to \infty$ 矛盾。□

对于双曲 Stein 曲面上的适当实作用，先前的真性定理需借助全纯凸性或伯格曼度量，并要求满足一个上同调假设 [29, 定理1.2]。当局部商空间 $\mathbb{C}^p$ 的复维数为一时，傅里叶构造给出了关于 $p = n - 1$的以下结果，无需满足该上同调假设。

定理 5.7。 设Ω 是一个维数为 $n \geq 2$ 的连通 *Stein* 流形，带有一个真全纯$\mathbb{R}^{n-1}$-作用。假设以下条件之一成立：

(i) 伯格曼核形式 B_Ω 处处非零，且相应的伯格曼度量正定；或(ii) Ω 存在一个 *Einstein* 常数为负的完备 *Kähler–Einstein* 度量，并且其伯格曼核形式 B_Ω 处处非零。

则诱导的局部 $\mathbb{C}^{n-1}$-作用具有豪斯多夫泛环球化 P，且其在 P上的作用自由且适当。因此，$P/\mathbb{C}^{n-1}$ 是豪斯多夫黎曼曲面，而 $P \to P/\mathbb{C}^{n-1}$ 是一个全纯主 $\mathbb{C}^{n-1}$-丛。

证明。 根据条件 (i)，由 [21, 定理 4.4] 可知全局化是豪斯多夫的；根据条件 (ii)，由命题 5.1 可知全局化是豪斯多夫的。在这两种情况下，引理 5.5 中的集合 T_x 都由 [7,推论 3.6] 可知是连通的。

在这两种情况下，$\mathcal{B}_\Omega$ 处处非零。对每个 $x \in \Omega$，选取在 x 处非零的 $\sigma \in A^2(\Omega,\ K_\Omega)$。于是命题 5.3 给出 θ，使得 $S_{\sigma,\theta}(x) \neq 0$。当 σ 遍历 $A^2(\Omega,\ K_\Omega)$ 且 θ 遍历 $\mathbb{R}^{n-1}$ 时，截面 $S_{\sigma,\theta}$ 在 Ω 上没有公共零点。引理 5.5 将它们延拓到 P，在那里它们满足 (74)，且仍没有公共零点。$K_P^{\otimes 2}$ 上的作用由以下提升给出

$$\widetilde{\Phi}_\zeta\big|_{(K_P^{\otimes 2})_x} = \big((\Phi_\zeta)_x^*\big)^{-1} : (K_P^{\otimes 2})_x \longrightarrow (K_P^{\otimes 2})_{\Phi_\zeta x}.$$

复合律 (75) 给出了这个全纯提升的群律，其拉回恰好是 (74) 中的拉回。对 $J = A^2(\Omega,\ K_\Omega)$、$p = n-1$ 和 $L = K_P^{\otimes 2}$ 应用引理 5.6，可得自由性和整体真性。根据引理 5.2，自由的适当作用给出一个全纯主 $\mathbb{C}^{n-1}$-丛

$$\pi : P \longrightarrow S = P/\mathbb{C}^{n-1}.$$

商空间 S 是连通的豪斯多夫空间，并且

$$\dim_{\mathbb{C}} S = n - (n-1) = 1.$$

因此， S 是一个连通的黎曼曲面。 □

推论 5.8。 设Ω 是一个维数为 n 的连通 *Stein* 流形，且 $A = \mathbb{R}^p$, $1 \leq p \leq n$ 在Ω上适当且全纯地作用。假设以下任一条件成立：

(i) Ω 具有一个*Einstein*常数为负的完备 *Kähler–Einstein* 度量；或(ii) *Ber* g*man* 核形式 B_Ω 处处不为零，且 *Ber* g流形度量是正定的 $e\ defi$的。

则所诱导的局部 $\mathbb{C}^p$-作用的全局化 P 是豪斯多夫的。此外，有如下结论。

(a) 如果 $p = n - 1 \geq 1$ 且 B_Ω 处处不为零，则 $\mathbb{C}^{n-1}$在 P 上的作用是自由且适当的。商空间 $S = P/\mathbb{C}^{n-1}$ 是一个连通的豪斯多夫黎曼曲面，并且

$$\pi : P \longrightarrow S$$

是一个全纯主 $\mathbb{C}^{n-1}$-丛。

(b) 如果 $p = n$，则 P 与带有其平移作用的 $\mathbb{C}^n$ 等变双全纯。在特别情况下， $\mathbb{C}^n$在 P 上的作用是自由且适当的，其商空间是一个点。

证明。 在条件 (i) 下，由命题 5.1 可知全局化是豪斯多夫的。在条件 (ii) 下，由 [21, 定理 4.4] 可知它是豪斯多夫的。

首先假设 $p = n - 1 \geq 1$ 且 $\mathcal{B}_\Omega$ 处处不为零。此时满足定理 5.7 的假设，因此 $\mathbb{C}^{n-1}$-作用是自由且适当的。关于商空间和主丛的断言可由同一定理得出。

剩下的任务是证明 (b)。假设 $p = n$。在 (i) 的条件下，复化作用的自由性由命题 5.1 得出。在 (ii) 的条件下，我们应用傅里叶截面论证。由于 $\mathcal{B}_\Omega$ 处处非零，

对于每个 $x \in \Omega$，都存在 $\sigma \in A^2(\Omega\ K_\Omega)$，使得 $\sigma(x) \neq 0$。由命题 5.3，某个傅里叶截面$S_{\sigma,\ \theta}$ 在 x 处非零。引理 5.5 中的集合 T_x 由 [7，推论 3.6] 可知是连通的。因此，该引理将这些傅里叶截面延拓到 P，在那里它们没有公共零点并满足 (74)。引理 5.6 的第一个断言给出 $\mathbb{C}^n$-作用的自由性。

固定 $z \in P$ 并考虑全纯轨道映射

$$f_z : \mathbb{C}^n \longrightarrow P, \qquad f_z(\zeta) = \Phi_\zeta(z).$$

由于作用是自由的，微分 $(df_z)_0$ 是单射。由于 $\dim_{\mathbb{C}} P = n$，它是一个同构。全纯逆函数定理表明，经过 z 的轨道在 P中是开集。每个轨道也都如此。由于 P 是连通的，因此只能有一个轨道，故 f_z 是满射。

自由性也使 f_z 成为单射。因此， f_z 是双射局部双全纯映射，进而是双全纯映射。最后，由群律可得

$$\Phi_\eta(f_z(\zeta)) = f_z(\zeta + \eta), \qquad \zeta, \eta \in \mathbb{C}^n.$$

因此， f_z 将 P 上的作用与 $\mathbb{C}^n$上的平移等同，从而证明 (b)。 □

5.4. **来自全纯特征的秩一形式**。一旦复化作用是自由且适当的，在下文所考虑的情形中，其商空间便是一个点或一条黎曼曲面。$\mathbb{C}^p$ 的一个全纯特征在该商空间上给出一个线丛，我们据此构造所需的形式。

定理 5.9。设Ω 是复维数为 n 的连通 *Stein* 流形，其上有一个由 $A = \mathbb{R}^p,\ p \geq \max\{1, n-1\}$给出的真全纯作用。假设Ω 或者具有负 *Einstein* 常数的完备 *Kähler–Einstein* 度量，或者具有处处不为零的 *Bergman*核形式 B_Ω 和正定 *Bergman*度量。在 *Kähler–Einstein* 这一情形下，若 $p = n-1$，还需假设 B_Ω 处处不为零。对于每个非零的 $v \in \mathbb{R}^p$ 和 $K > 0$，分别存在光滑、正、闭的实$(1,1)$-形式，它们在每一点的秩均为一，并分别属于 $T_{X_v,K}(\Omega)$ 和 $T_{-X_v,K}(\Omega)$。

证明。在 Kähler–Einstein 情形下，命题 5.1 给出 $p \leq n$。在 Bergman 情形下，由定理 4.4]可知 P是豪斯多夫的。与定理 5.7 的证明一样，命题 5.3 和引理 5.5 给出 P 上的延拓截面$S_{\sigma,\theta}$，且它们没有公共零点。引理 5.6 的第一个断言表明，复化作用是自由的，且对 p没有任何限制。对于每个 $z \in P$，轨道映射在零点处的微分

$$f_z : \mathbb{C}^p \longrightarrow P, \qquad \zeta \longmapsto \Phi_\zeta(z),$$

因此是单射。由于 $\dim_{\mathbb{C}} P = n$，我们得到 $p \leq n$。结合 $p \geq \max\{1,\ n-1\}$，可得 $p \in \{n-1,\ n\}$ 当 $n \geq 2$ 时，以及 $p = 1 = n$ 当 $n = 1$时。根据推论 5.8，商映射

$$\pi : P \longrightarrow S = P/\mathbb{C}^p$$

是一个全纯主 $\mathbb{C}^p$-丛。如果 $p = n$，则 S 是一个点；而如果 $p = n-1$，则 S 是一个连通的黎曼曲面。固定 $v \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$，并选取一个复线性泛函 $\alpha\colon\ \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$，使得 $\alpha(v) = K/2$。

定义全纯特征 $\chi\colon\ \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^*$，其定义为 $\chi(\zeta) = e^{\alpha(\zeta)}$。相应的全纯线丛 $L_\chi \to S$ 是商空间

$$L_\chi = (P \times \mathbb{C})/\!\sim,$$

其中

$$(\Phi_\zeta(q), w) \sim (q, \chi(\zeta)w), \qquad q \in P, \quad \zeta \in \mathbb{C}^p, \quad w \in \mathbb{C}.$$

我们将 $[q, w]$ 记作 $(q,\ w)$ 的等价类。丛投影为 $[q \qquad\qquad w] \mapsto \pi(\ q)$.

选取 S的一个开覆盖 $\{V_i\}$ 以及全纯截面 $s_i\colon\ V_i \to P$的 π。对于 $x \in V_i \cap V_j$，我们有 $\pi(s_i(x))$ $= \pi(s_j(x)) = x$。由于 $S = P/\mathbb{C}^p$ 且作用是自由的，存在唯一的 $g_{ij}(x) \in \mathbb{C}^p$使得

$$s_j(x) = \Phi_{g_{ij}(x)}(s_i(x)).$$

主丛的全纯局部平凡化表明，g_{ij} 是全纯的。在三重交集上，群律和自由性给出 $g_{ij} + g_{jk} = g_{ik}$。因此， L_χ 的局部全纯标架$e_i(x) = [s_i(x), 1]$ 满足

$$e_j = e^{\alpha(g_{ij})} e_i.$$

因此， L_χ 的转移函数为 $e^{f_{ij}}$，其中 $f_{ij}=\alpha(g_{ij})$ 是一个全纯加性上循环。由于

$$f_{ij}+f_{jk}-f_{ik}=0,$$

通过在指数正合列中取对数所得到的整数值上循环是

$$\frac{f_{ij}+f_{jk}-f_{ik}}{2\pi\sqrt{-1}}=0.$$

因此， $c_1(L_\chi)=0$。

如果 S 是一个点，则该线丛是平凡的。如果 S 是非紧的，Behnke–Stein [4] 和 Cartan 定理 B[18, 第四章] 给出 $H^1(S,\mathcal{O})=0$。因此，经过细化，可写成 $f_{ij}=b_j-b_i$，其中 $b_i\in\mathcal{O}(V_i)$。局部标架 $e^{-b_i}e_i$ 在交叠区域上一致，并将 L_χ平凡化。在这两种情况下，该平凡化都给出一个平坦 Hermitian 度量。

如果 S 是一个紧黎曼曲面，在 L_χ上选取一个光滑 Hermitian 度量 h_0。在全纯标架 e下，其实曲率为 $\Theta_0=-\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\log|e|^2_{h_0}$。设 $\overline{\Theta_0}=f\eta$为 S上的一个 Kähler 形式 η。由于 $c_1(L_\chi)=0$,

$$\int_S f\,\eta=\int_S\Theta_0=0.$$

式 (14) 的算子 Δ_η 是自伴椭圆算子。它在连通紧曲面上的核仅由常数组成，因此 $\Delta_\eta u=-f$有一个光滑实解。由于 $\dim_{\mathbb{C}}S=1$, $\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial u=(\Delta_\eta u)\eta$，故

$$\Theta(e^{-u}h_0)=\Theta_0+\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial u=(f+\Delta_\eta u)\eta=0. \tag{83}$$

因此，在所有情况下， L_χ 都有一个平坦 Hermitian 度量 h。

拉回丛 π^*L_χ 有一个处处不为零的全纯截面 σ，定义如下:

$$\sigma(q)=(q,[q,1])\in\pi^*L_\chi.$$

定义

$$U(q)=|\sigma(q)|^2_{\pi^*h}=|[q,1]|^2_h>0.$$

由于 $\pi(\Phi_\zeta(q))=\pi(q)$，向量 $[\Phi_\zeta(q),1]$ 和 $[q,1]$属于 L_χ 的同一纤维。根据定义的等价关系,

$$[\Phi_\zeta(q),1]=[q,\chi(\zeta)]=\chi(\zeta)[q,1].$$

取范数平方得

$$U(\Phi_\zeta(q))=e^{2\Re\alpha(\zeta)}U(q),\qquad q\in P,\quad \zeta\in\mathbb{C}^p. \tag{84}$$

特别地，由于 $\alpha(v)=K/2$,

$$U\circ\Phi_{tv}=e^{Kt}U,\qquad t\in\mathbb{R}. \tag{85}$$

令 $\rho=\log U$。由于 σ是 π^*L_χ的处处不消失的全纯标架，拉回度量 π^*h 的陈曲率为 $-\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\rho$。由于 h的曲率为零，$\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\rho=0$。对$U=e^\rho$ 求导并结合 $U^{-1}=e^{-\rho}$，得

$$\begin{aligned}T_+&:=\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial U=U\sqrt{-1}\,\partial\rho\wedge\bar\partial\rho\ge0,\\ T_-&:=\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial U^{-1}=U^{-1}\sqrt{-1}\,\partial\rho\wedge\bar\partial\rho\ge0.\end{aligned} \tag{86}$$

因此， T_+和 T_-是 P上的光滑正闭实 (1，1)-形式。在 $t=0$处对 (85) 求导，得 $X_v\rho=K$。由于 ρ 是实数且 $K>0$，由此可得处处成立的 $\partial\rho\neq0$。由 (86)， $T_+|_\Omega$ 和$T_-|_\Omega$ 处处都具有秩一。最后，由于 Φ_{tv} 是全纯的，由 (85) 得

$$\begin{aligned}\Phi^*_{tv}T_+&=\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(U\circ\Phi_{tv})=e^{Kt}T_+,\\ \Phi^*_{-tv}T_-&=\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial(U^{-1}\circ\Phi_{-tv})=e^{Kt}T_-,\qquad t\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{87}$$

将（87）限制在 Ω 上，即可证明由 X_v 和 $-X_v$分别生成的流满足（6）。 □

5.5. **对紧子群取平均**。在 $G \simeq \mathbb{R}^p \times C$ 中， $X_v + W$ 的流是由 X_v 和 $W \in$Lie(C) 产生的交换流之积。我们对 C 取平均，以保持第一条流的特征。

命题 5.10. 设 Φ_t 与由自同构构成的紧群 H 可交换，并设 T 是一个非零正闭$(1,1)$-流，满足 $\Phi_t^* T = e^{Kt} T$。对于 H中的任意单参数子群 c_t，流 $c_t \circ \Phi_t$ 具有一个特征为 e^{Kt}的非零正闭流。当T 光滑时，该流也是光滑的。

证明。 对于归一化的Haar测度 dh，定义

$$\overline{T}(\beta) = \int_H T((h^{-1})^* \beta)\, dh.$$

对于支撑在紧集 Q中的测试形式，所有变换后的形式都支撑在紧集$H \cdot Q$中，且其导数具有一致的界。因此，该积分定义了一个流，并且与 d可交换。它是正的；若 $T(\beta) > 0$ 对于某个强正测试形式 β成立，则其被积函数在单位元的某个邻域内仍为正。因此 $T \neq 0$。Haar测度的右不变性以及与 Φ_t 的可交换性给出

$$c^* \overline{T} = \int_H (hc)^* T\, dh = \overline{T}, \qquad \Phi_t^* \overline{T} = \int_H h^* (\Phi_t^* T)\, dh = e^{Kt} \overline{T}.$$

由此得到 $(c_t \circ \Phi_t)^* \overline{T} = e^{Kt} \overline{T}$。若 T光滑，则同样的紧性界允许在积分号下求导，且 T 光滑。□

在分解 $G \simeq \mathbb{R}^p \times C$ 中，根据引理 4.3，当且仅当其生成元具有非零的 $\mathbb{R}^p$ 分量时，流才是真流。若对于 X_v 和 $-X_v$ 的两个锥都包含非零流，则命题 5.10 对任意 $W \in$ Lie(C) 给出了关于 $X_v + W$ 和 $-X_v - W$ 的相同断言。

定理 *1.2* 的证明。 在第 4 节建立的将 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 与全纯向量场对应的识别下，算子 ad_Y 的作用为 $W \mapsto [Y^{1,0}, W]$。因此，命题 4.4 给出了 (i) 中关于特征值和 Jordan 块的结论。对于 (ii)，命题 4.5 给出了 (7) 及逐点线性无关性。当 Ω 为 Stein 时，$\mathcal{B}_\Omega$ 处处不为零，Bergman度量为正定，并且 $p \geq n-1$，取一个满足 $v \neq 0$ 和 $W \in$ Lie(C) 的向量场 $Y = X_v + W$。将定理 5.9 应用于 X_v 和 $-X_v$。根据命题 5.10 对这两个形式取平均，即可得到 Y 和 $-Y$ 所需的形式。

对于最后一个断言，进一步假设 $\Omega \Subset Z$ 是 Stein，且 Ω 的某个邻域可以全纯浸入到 $\mathbb{C}^N$中。每当 (i) 或 (ii) 给出$\mathcal{T}_{Y,\ K}(\Omega)$中的非零流时， [16, 定理 1.2] 便给出一个完备非平凡膨胀子，其孤子场为 Y，膨胀常数为 K。□

推论 *1.3* 的证明。 根据引理 4.1，Ω 上的有界全纯函数可以分离切向方向，并且 $G =$Aut$_0(\Omega)$ 适当作用。由于 G 是非紧的，引理 4.3 给出了一个适当的真实全纯流。

固定 $K > 0$。如果某个适当生成元的伴随算子具有实部非零的特征值，或具有对应于纯虚特征值的非平凡 Jordan块，则定理 1.2 (i) 对该生成元的至少一个定向给出一个非零齐次流。

否则，对于每个适当生成元，其伴随算子在 $\mathbb{C}$ 上可对角化，并且具有纯虚谱。根据定理 1.2 (ii),

$$G \simeq \mathbb{R}^p \times C, \qquad 1 \leq p \leq n,$$

其中 C 是紧致且连通的。排除 $1 \leq p \leq n-2$ 的假设迫使 $p \geq n-1$.

引理 4.1 表明，$\mathcal{B}_\Omega$ 处处不为零，且 Bergman度量是正定的。因此，定理 1.2(ii) 对中心实因子的一个非零生成元给出了一个非零齐次流。

在这两种情况下， [16, 定理 1.2] 都会产生一个带有完备孤子场且膨胀常数为 K的完备非平凡膨胀子。□

推论 *1.4* 的证明。 由引理 4.1，Aut(Ω) 的作用是适当的。设 Ω 是 Stein，且 Y 的流具有非紧闭包。由引理 4.3，该流定义了一个适当的 $\mathbb{R}$ 作用。浸入假设还给出一个完备凯勒–爱因斯坦度量 ω_E，其归一化满足 Ric$_{\omega_E} = -\omega_E$

[16, 注 3.6(2)]。此外，推论 5.4 的证明给出了一个有限族的平方可积全纯 n 形式，它们在 Ω 上没有公共零点。由于 $p = 1 = n - 1$，定理 5.9 对每个 $K > 0$ 都给出 $\mathcal{T}_{Y,K}(\Omega)$ 和 $\mathcal{T}_{-Y,K}(\Omega)$ 中的秩一形式。 [16, 定理 1.2] 进而给出这两个孤子。若 $\mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 是非紧的，引理 4.3 会提供一个适当实流。

反之，根据 [16, 注 3.6(2)]，完备非平凡膨胀子使 Ω 成为 Stein 域。由 [16, 引理 3.1], 可知，其流的闭包是非紧的，因此单位分支是非紧的。□

6. 自同构的边界极限

我们研究 Z 中 Ω 的全纯自映射的局部一致极限 $\Subset Z$。下文建立的关于常值边界极限的判据将在第 7 节中使用。

6.1. 全纯自映射的极限。 对于 $\Omega \Subset Z$上的全纯流 Φ，令 $\mathscr{N}_{\pm}(\Phi)$ 表示如下映射 $g\colon \Omega \to Z$，其中存在某个序列 $t_j \to \pm\infty$，使得 $\Phi_{t_j} \to g$ 在 Z中局部一致地成立。

引理 6.1。 *设 $\Omega \Subset Z$ 为一个域，且 d 为由 Z上的光滑 Hermitian 度量诱导的距离。假设对于每个 $b > 0$，存在 $\delta_b > 0$，使得*

$$k_\Omega(z, w) \geq \delta_b \qquad (z, w \in \Omega,\ d(z, w) \geq b). \tag{88}$$

Ω 上的任意全纯自映射序列都存在一个子序列，在 Z 中局部一致地收敛于一个全纯映射 $F_\infty : \Omega \to Z$，且满足 $F_\infty(\Omega) \subset \Omega$。若 Ω 的某个邻域存在到 $\mathbb{C}^N$ 的全纯浸入 ι，或若 Kobayashi 双曲域 Ω 满足相对于某个 $\kappa_0 > 0$ 的 $(1, \kappa_0)$-可见性，则条件 (88) 成立。

证明。设 $B_{2r} \Subset \Omega$ 是一个坐标球，其坐标映射为 z，且 $x, y \in B_r$。与球度量比较，并利用 $F\colon \Omega \to \Omega$ 下的压缩性，可得

$$k_\Omega(Fx, Fy) \leq k_\Omega(x, y) \leq k_{B_{2r}}(x, y) \leq C_r|z(x) - z(y)|. \tag{89}$$

对每个 $b > 0$，当 $C_r|z(x) - z(y)| < \delta_b$ 时，(88) 给出 $d(Fx, Fy) < b$。将此估计应用于覆盖 Ω 的每个紧子集的有限个坐标球，可得在该紧子集上的等度连续性。

设 (F_j) 是 Ω 的全纯自映射序列。由于这些映射的像都落在紧集 Ω 中，利用上述得到的等度连续性以及紧耗尽上的阿尔泽拉–阿斯科利定理，可取一个子序列 (F_{j_ℓ})，使其在 Z 中局部一致地收敛于连续映射 $F_\infty : \Omega \to \Omega$。

固定 $a \in \Omega$，并选取一个包含 $F_\infty(a)$ 的 Z 全纯坐标图 (W, w)。由连续性可知，存在 a 的开邻域 $U \Subset \Omega$，使得 $F_\infty(U)$ 是 W 的紧子集。因此，在 U 上一致收敛可得，对所有充分大的 ℓ，$F_{j_\ell}(U) \subset W$。于是，$w \circ F_\infty$ 是 U 上全纯映射 $w \circ F_{j_\ell}$ 的局部一致极限，因此是全纯的。由于 a 任意，F_∞ 在 Ω 上全纯。

首先，假设在 Ω 的某个邻域上存在浸入 ι。取一个包含 $\iota(\Omega)$ 的欧氏球 B。存在 $c_1,\ c_2 > 0$，使得 $\kappa_B(\zeta; \xi)$ 在这个紧致像上成立，并且 $|d\iota_x u| \geq c_2|u|_Z$ 在 Ω 上成立。对于每个全纯圆盘 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$，

$$\kappa_{\mathbb{D}}(\zeta; v) \geq \kappa_B(\iota(f(\zeta)); d(\iota \circ f)_\zeta v) \geq c_1 c_2 |df_\zeta v|_Z.$$

沿着从 α 到 β 的庞加莱测地线积分，得到 $k_{\mathbb{D}}(\alpha,\ \beta) \geq c_1 c_2 d(f(\alpha),\ f(\beta))$。对连接 $x,\ y$ 的圆盘链求和并取下确界，得到

$$k_\Omega(x, y) \geq c_1 c_2 d(x, y). \tag{90}$$

特别地，Ω 是双曲的，并满足（88）。对于有界欧氏域，可以取恒等浸入和 d 欧几里得。

现在假设 Kobayashi 双曲 Ω 具有相对 $(1,\ \kappa_0)$-可见性。如果（88）不成立，则存在$z_j \to z$、$w_j \to w$，使得 $z \neq w$ 位于紧致闭包中，并且 $k_\Omega(z_j,\ w_j) \to 0$。如果 $z \in \Omega$，那么 $k_\Omega(z,\ w_j) \leq k_\Omega(z,\ z_j) + k_\Omega(z_j,\ w_j) \to 0$。由于 Ω 是 Kobayashi 双曲的，根据 [2]，由 k_Ω 诱导的拓扑与 Ω 的原拓扑重合。因此 $w_j \to z$，这与 $w \neq z$ 矛盾。同样的论证排除了 $w \in \Omega$ 的可能性。因此，z 和 w 都位于 $\partial_Z\Omega$ 中。

对于 $(1,\ \kappa)$-拟测地线 $\gamma\colon [0, T] \to \Omega$，令 $x = \gamma(0)$、$y = \gamma(T)$ 和 $y_0 = \gamma(u)$。由（22）可得，

$$k_\Omega(x, y_0) \leq u + \kappa, \quad k_\Omega(y_0, y) \leq T - u + \kappa, \quad T \leq k_\Omega(x, y) + \kappa.$$

相加得

$$k_\Omega(x, y_0) + k_\Omega(y_0, y) \leq k_\Omega(x, y) + 3\kappa. \tag{91}$$

选择连接 z_j 与 w_j 的 (1，κ_j)-拟测地线，其中 $0 < \kappa_j \le \kappa_0$ 和 $\kappa_j \to 0$ [27, 命题 2.8]。这些曲线中的每一条也是 (1，κ_0)-拟测地线。由于 $z_j \to z$ 和 $w_j \to w$，且 z，w 是 $\partial_Z\Omega$ 中的不同点，相对可见性提供了一个紧集 $Q \Subset \Omega$，对于所有充分大的 j，该紧集都与每一条所选曲线相交。在每条这样的曲线上选择一个交点 $y_j \in Q$ 。取一个子序列后，不妨设 $y_j \to y_* \in Q$。于是 (91) 给出

$$k_\Omega(z_j, y_j) + k_\Omega(y_j, w_j) \le k_\Omega(z_j, w_j) + 3\kappa_j \longrightarrow 0.$$

由于 $y_j \to y_* \in \Omega$，Kobayashi距离的连续性给出 $k_\Omega(y_j, y_*) \to 0$。因此，三角不等式得到

$$k_\Omega(z_j, y_*) \le k_\Omega(z_j, y_j) + k_\Omega(y_j, y_*) \longrightarrow 0,$$
$$k_\Omega(w_j, y_*) \le k_\Omega(w_j, y_j) + k_\Omega(y_j, y_*) \longrightarrow 0.$$

由 [2], 关于 k_Ω 的收敛$z_j \to y_*$ 蕴含在 Ω 的原拓扑中收敛。因此，$z_j \to y_*$ 以及 $w_j \to y_*$ 在 Ω 中。由于包含映射 $\Omega \to Z$ 是连续的，两个序列都在 Z中收敛到 y_*，这与 $z_j \to z$和 $w_j \to w$在 Z中矛盾，其中 z，$w \in \partial_Z\Omega$。□

引理 6.2。 设$\Omega \Subset Z$ 是一个域，使得每个 Ω 的全纯自映射序列 都存在一个子序列，在 Z 中局部一致地收敛到一个映入Ω的全纯映射，如引理 *6.1* 所述。假设 $F_j \in$Aut(Ω) 满足

$$F_j(E) \cap L = \varnothing$$

对所有充分大的 j，以及每一对紧集 E、$L \Subset \Omega$。

若 F_j 的某个子序列在 Z 中局部一致地收敛到 $g : \Omega \to \Omega$，则

$$g(\Omega) \subset \partial_Z\Omega, \qquad \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} dg < n \quad on\ \Omega.$$

此外，g 为常数，如果满足以下任一条件：

(i) $\partial_Z\Omega$ 不包含非恒定解析圆盘；(ii) Ω 是 *Kobayashi* 双曲的，并且满足相对$(1, \kappa_0)$-可见性，其中某个 $\kappa_0 > 0$。

证明。 取一个子序列后，不妨设 $F_j \to g$ 在 Z 中局部一致地。设对于某个 $a \in\Omega$，有 $g(a) \in \Omega$。取 $L \Subset \Omega$ 为 $g(a)$ 的一个紧邻域。由于 $F_j(a) \to g(a)$，对于所有充分大的 j，都有 $F_j(a) \in L$ 。这与假设矛盾，其中 $E = \{a\}$。因此

$$g(\Omega) \subset \partial_Z\Omega.$$

若 dg_a 在某个 $a \in\Omega$ 处的秩为 n ，则全纯逆函数定理意味着 $g(\Omega)$ 包含 Z 的一个非空开子集。这不可能，因为 $\partial_Z\Omega$ 的内点为空。因此，$\operatorname{rank}_{\mathbb{C}} dg < n$ 在整个 Ω 上成立。

假设边界不包含非常值解析圆盘。如果 g 不是常值，则存在 $a \in \Omega$ 和 $v \in T^1_{\,a}{}^0\Omega$，使得 $dg_a(v) \ne 0$。在 a附近选取全纯坐标 z 。对于充分小的 $\varepsilon > 0$，映射

$$\zeta \longmapsto g\big(z^{-1}(z(a) + \varepsilon\zeta\, dz_a(v))\big), \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

将是包含在 $\partial_Z\Omega$ 中的非常值全纯圆盘，矛盾。因此 g 是常值。

现在假设 Ω 满足条件（ii）。如果 g 不是常值，我们可以选取 a，$b \in \Omega$，使得$g(a) \ne g(b)$。根据 [27, 命题 2.8],，存在一条 (1，κ_0)-拟测地线 $\gamma : [0, T] \to \Omega$，连接 a与 b。

令 $\gamma_j = F_j \circ \gamma$。由于 F_j 是自同构，Kobayashi距离和无穷小度量的不变性给出

$$k_\Omega(\gamma_j(s), \gamma_j(t)) = k_\Omega(\gamma(s), \gamma(t)),$$
$$\kappa_\Omega(\gamma_j(t); \dot\gamma_j(t)) = \kappa_\Omega(\gamma(t); \dot\gamma(t)) \le 1$$

对于 s，$t \in [0, T]$，其中第二个等式对几乎处处的 t成立。因此，每个 γ_j 都是一条 (1，κ_0)-拟测地线。

由于

$$\gamma_j(0) = F_j(a) \longrightarrow g(a), \qquad \gamma_j(T) = F_j(b) \longrightarrow g(b),$$

且 $g(a)$ $g(b)$ 是不同的边界点，相对于 (1，κ_0)-可见性，可得一个紧集 $Q \Subset \Omega$，使得

$$\gamma_j([0, T]) \cap Q \ne \varnothing$$

对于所有充分大的 j。等价地，

$$F_j(\gamma([0,T])) \cap Q \neq \varnothing,$$

这与关于 $E = \gamma([0,T])$ 和 $L = Q$ 的假设相矛盾。因此， g 是常数 . □

注 6.3。设 $\Omega \Subset Z$ 是一个域，Ω 的每个全纯自映射序列都存在一个子序列，使其在 $\underline{Z}$ 中局部一致收敛于一个全纯映射 $\Omega \to \Omega$；并设 Φ_t是 Ω 上的真实全纯流，其生成元为 Y。

假设 Ω 的一个邻域 U 上存在一个有界非负函数 $\beta \in \mathrm{PSH}(U)$，使得 $\beta|_\Omega \not\equiv 0$ 且

$$\beta|_{g(\Omega)} = 0 \qquad \text{for every } g \in \mathscr{N}_-(\Phi).$$

Then

$$\beta \circ \Phi_t \longrightarrow 0 \quad \text{locally uniformly as } t \to -\infty,$$

且 $\mathcal{T}_{Y,\,K}(\Omega)$ 对每个 $K > 0$ 都包含一个非零流。

事实上，若收敛不成立，则存在 $\varepsilon > 0$、Ω 的一个紧集 $L \Subset$以及序列$t_j \to -\infty$ 和 $z_j \in L$，使得

$$\beta(\Phi_{t_j}(z_j)) \geq \varepsilon.$$

取一个子序列后，对于某个$g \in \mathscr{N}_-(\Phi)$，我们在 Z中有 $z_j \to z \in L$ 和 $\Phi_{t_j} \to g$ 局部一致地成立。特别地， $\Phi_{t_j}(z_j) \to g(z)$。由 β 的上半连续性可得

$$\varepsilon \leq \limsup_{j\to\infty} \beta(\Phi_{t_j}(z_j)) \leq \beta(g(z)) = 0,$$

矛盾。

选取 $q \in \Omega$，使得 $\beta(q) > 0$ 且 $0 < \delta < \beta(q)$。则

$$b = (\beta|_\Omega - \delta)_+$$

非零并满足（31）。因此，根据引理 3.4，对于每个$K > 0$，在$\mathcal{T}_{Y,\,K}(\Omega)$中都有一个非零流。

6.2. **弱可见域上的迭代**。

引理 6.4。设$\Omega \Subset Z$ 是满足相对$(1,\ \kappa_0)$-可见性的 ***Kobayashi*** 双曲域，其中 $\kappa_0 > 0$，并设 $F \in \mathrm{Aut}(\Omega)$。假设对于$\Omega$中的任意一对紧集 E、$L \Subset \Omega$，

$$F^m(E) \cap L = \varnothing \qquad \textit{for all sufficiently large } m. \tag{92}$$

于是存在 $q \in \partial_Z\Omega$，使得 $F^m \to q$在 Ω 上局部一致地成立，当 $m \to \infty$时。

证明。根据引理 6.1 和 6.2，每个正迭代序列都存在一个子序列，在 Z 中局部一致地收敛于一个映入 $\partial_Z\Omega$ 的常值映射。特别地，设 $r_j \to \infty$ 且 $F^{r_j}(a) \to \xi$对于某个 $a \in \Omega$。(F^{r_j}) 的每个子序列都存在一个局部一致收敛的进一步子序列，其极限为常值映射，并且通过在 a处取值可知该极限必等于 ξ。因此，$F^{r_j} \to \xi$ 局部一致地成立。剩下需要证明的是，不同的正迭代序列不可能趋近于不同的边界点。关于 taut 弱可见域上的相关迭代结果，参见 [27, 定理 6.2]。

固定 Z上的光滑 Hermitian 度量 h，并令 $d = d_h$ 为诱导距离。根据引理 6.1，对于该距离，条件 (88) 成立。固定 $o \in \Omega$，并令

$$d_m = k_\Omega(o, F^m(o)), \qquad m \geq 0.$$

我们首先为趋近于不同边界点的点建立一个估计。对于不同的 ξ，$\eta \in \partial_Z\Omega$，可见性给出邻域 U_ξ，U_η以及一个紧集 Q，该紧集与连接这些邻域的（1，κ_0）-拟测地线相交。对于任意一对 $x \in U_\xi \cap \Omega$、$y \in U_\eta \cap \Omega$，[27, 命题 2.8] 保证存在这样一条曲线。取其上的 $y_0 \in Q$。由（91）以及 o处的三角不等式，令 $C = 2$为$\max_Q k_\Omega(o, \cdot) + 3\kappa_0$，可得

$$k_\Omega(x,y) \geq k_\Omega(o,x) + k_\Omega(o,y) - C, \qquad x \in U_\xi \cap \Omega, \quad y \in U_\eta \cap \Omega. \tag{93}$$

首先假设（d_m）无界。选取递增的整数 n_i，使得

$$d_{n_i} = \max_{0 \leq r \leq n_i} d_r \to \infty.$$

特别地，$d_r \leq d_{n_i}$只要 $0 \leq r \leq n_i$。取一个子序列后，$F^{n_i} \to \xi \in \partial_Z\Omega$ 局部一致地。假设存在 $r_j \to \infty$，满足 $d_{r_j} \to \infty$ 且 $F^{r_j} \to \eta \neq \xi$ 局部一致地。对于

所有充分大的 j，我们有 $F^{r_j}(o) \in U_\eta$。选择 $i = i(j)$充分大，使得 $n_i > r_j$且$F^{n_i}(o) \in U_\xi$。由 Kobayashi距离的不变性以及 n_i的选择，

$$k_\Omega(F^{n_i}(o), F^{r_j}(o)) = d_{n_i - r_j} \leq d_{n_i},$$

而（93）给出

$$k_\Omega(F^{n_i}(o), F^{r_j}(o)) \geq d_{n_i} + d_{r_j} - C.$$

因此 $d_{r_j} \leq C$，这与 $d_{r_j} \to \infty$ 矛盾。根据引理 6.1，对于满足 $d_{r_j} \to \infty$ 的每个序列 $r_j \to \infty$，映射 F^{r_j} 因而局部一致地收敛于 ξ。

(d_m) 的无界性并不意味着 $d_m \to \infty$。因此，我们必须排除沿着与 o 的距离保持有界的迭代序列趋于另一个边界极限的可能性。假设 $F^{m_j} \to \eta \neq \xi$ 局部一致地。选择 U 的一个邻域，使其闭包不包含 ξ。那么

$$M := \sup\{d_m : m \geq 0,\ F^m(o) \in U\} < \infty.$$

事实上，否则将存在 $r_j \to \infty$ 使得 $F^{r_j}(o) \in U$ 且 $d_{r_j} \to \infty$。前面的结论将推出 $F^{r_j}(o) \to \xi$，这与 $\xi \notin U$ 矛盾。对于每个固定的 i，我们有

$$F^{m_j - n_i}(o) = F^{m_j}(F^{-n_i}(o)) \to \eta \qquad (j \to \infty),$$

其中，对于所有充分大的 j，$m_j \geq n_i$。因此，对于充分大的 j，$F^{m_j - n_i}(o)$ 和 $F^{m_j}(o)$ 均属于 U。根据三角不等式和 Kobayashi距离的不变性，

$$d_{n_i} = k_\Omega(F^{m_j}(o), F^{m_j - n_i}(o)) \leq d_{m_j} + d_{m_j - n_i} \leq 2M.$$

由于 i 是任意的，这与 $d_{n_i} \to \infty$ 矛盾。

现在考虑 $R := \sup_{m \geq 0} d_m < \infty$ 的情形。我们将 [5，对定理 1.8 的证明中情形 2] 的论证改用于当前情形。反设存在序列 n_i，$m_j \to \infty$，使得 $F^{n_i} \to \xi$ 和 $F^{m_j} \to \eta$ 在 Ω 上局部一致地成立，且有不同的点 ξ，$\eta \in \partial_Z\Omega$。

相对可见性给出 ξ 和 η 的邻域，以及一个与 Ω 相交的紧集 $Q \Subset$，它与连接这些邻域中点的每条 $(1, \kappa_0)$-拟测地线相交。对于 a，$b \in Q$ 和 $\delta > 0$，定义

$$\begin{aligned} H_\delta(a,b) &= \inf_{\substack{r \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ d(F^r(a), \xi) < \delta}} k_\Omega(F^r(a), b), \\ H(a,b) &= \lim_{\delta \downarrow 0} H_\delta(a,b). \end{aligned} \tag{94}$$

由于 $F^{n_i}(a) \to \xi$，对每个 $\delta > 0$，都存在一个整数 $r \geq 1$，使得 $d(F^r(a)\ \xi) < \delta$。此外，由三角不等式和 Kobayashi距离的不变性，

$$k_\Omega(F^r(a), b) \leq k_\Omega(a, o) + d_r + k_\Omega(o, b) \leq R + 2 \max_{z \in Q} k_\Omega(o, z).$$

因此，定义 $H_\delta(a,\ b)$ 时所取下确界的整数集合非空，且前述估计对 $a,\ b \in Q$ 和 $\delta > 0$ 一致地限制了 $H_\delta(a,\ b)$。由于 $\delta \downarrow 0$，此下确界是非递减的。因此，$H(a,\ b)$ 存在且有限。

令 $\rho = \inf_{y \in Q} d(\eta,\ y) > 0$。由于在 Q 上 $F^{m_j} \to \eta$ 一致，当 j 足够大时，我们有

$$d(F^{m_j}(b), \eta) < \rho/2 \qquad (b \in Q).$$

因此，对于每个 y，$b \in Q$,

$$d(y, F^{m_j}(b)) \geq d(y, \eta) - d(F^{m_j}(b), \eta) \geq \rho/2.$$

于是，根据 (88) 中的 $\varepsilon := \delta_{\rho/2} > 0$，

$$k_\Omega(y, F^{m_j}(b)) \geq \varepsilon \qquad (y, b \in Q) \tag{95}$$

对于所有足够大的 j。在有界欧几里得情形下，(90) 给出了选择 $\varepsilon = c_1 c_2 \rho/2$。选择满足以下条件的 a，$b \in Q$

$$H(a,b) < \inf_{x,y \in Q} H(x,y) + \varepsilon/2. \tag{96}$$

对于每个整数 $s \geq 1$，$H_{1/s}(a,\ b)$ 的定义涉及满足以下条件的非空正整数集r

$$d(F^r(a), \xi) < 1/s.$$

因此，我们可以选择 $p_s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 使得

$$d(F^{p_s}(a), \xi) < 1/s,$$
$$H_{1/s}(a,b) \leq k_\Omega(F^{p_s}(a), b) < H_{1/s}(a,b) + 1/s \leq H(a,b) + 1/s.$$

由于 $H_{1/s}(a,\ b) \to H(a,\ b)$，当 $s \to \infty$ 时，因此

$$k_\Omega(F^{p_s}(a), b) \longrightarrow H(a,b).$$

此外，$F^{p_s}(a) \to \xi \in \partial_Z\Omega$，因此 $p_s \to \infty$。根据证明的第一段，$F^{p_s} \to \xi$ 在 Ω 上局部一致地成立。因此，对于每个固定的 j，

$$F^{p_s+m_j}(a) = F^{p_s}(F^{m_j}(a)) \to \xi \qquad (s \to \infty).$$

选取 $s(j) \geq j$ 充分大，使得

$$d(F^{p_{s(j)}+m_j}(a), \xi) < 1/j,$$

并令 $r_j = p_{s(j)}$。那么 $F^{r_j+m_j}(a) \to \xi$。由于 $s(j) \to \infty$，我们还有

$$k_\Omega(F^{r_j}(a), b) \to H(a,b). \tag{97}$$

令 $A_j = F^{r_j+m_j}(a)$ 且 $B_j = F^{m_j}(b)$。由于 $A_j \to \xi$ 且 $B_j \to \eta$，当 j 充分大时，端点均位于用于选取 Q 的邻域内。根据命题 2.8]，选取连接 A_j 与 B_j 的 $(1,\ \kappa_j)$-近似测地线，其中 $\kappa_j \downarrow 0$ 且 $\kappa_j \leq \kappa_0$。每条曲线也是一条 $(1,\ \kappa_0)$- 近似测地线，因此与 Q 相交。选取交点 $y_j \in Q$，并取一个子序列，使得 $y_j \to y \in Q$。由 (91)，

$$k_\Omega(A_j, B_j) \geq k_\Omega(A_j, y_j) + k_\Omega(y_j, B_j) - 3\kappa_j. \tag{98}$$

由于 $A_j = F^{r_j+m_j}(a) \to \xi$，对于每个固定的 $\delta > 0$，方程 (94) 给出

$$k_\Omega(A_j, y) \geq H_\delta(a,y)$$

对于所有充分大的 j。

由于 $y_j \to y \in \Omega$，Kobayashi距离的连续性 [2] 给出 $k_\Omega(y_j,\ y) \to 0$。于是，由三角不等式可得

$$k_\Omega(A_j, y_j) \geq k_\Omega(A_j, y) - k_\Omega(y_j, y).$$

因此，

$$\liminf_{j\to\infty} k_\Omega(A_j, y_j) \geq H_\delta(a,y).$$

令 $\delta \downarrow 0$，我们得到

$$\liminf_{j\to\infty} k_\Omega(A_j, y_j) \geq H(a,y).$$

由于 $k_\Omega(A_j,\ B_j) = k_\Omega(F^{r_j}(a)\ b)$，由方程 (97) 和 (98)，以及 (95)，可得

$$H(a,b) \geq H(a,y) + \varepsilon \geq \inf_{x,z\in Q} H(x,z) + \varepsilon,$$

与（96）矛盾。因此，Z 中（F^m）的所有局部一致子序列极限都等于取值为 $q \in \partial_Z\Omega$的同一个常值映射。根据引理 6.1，每个迭代序列都有一个局部一致收敛的子序列。其极限的唯一性现在意味着，整个序列 F^m在 $m \to \infty$下局部一致收敛于 q。□

7. 膨胀孤子几何判据

7.1. 边界极限与位移函数。 我们首先由位移 $f \circ \Phi_\tau - f$构造齐次流，而不假设存在环境全纯浸入。

命题 7.1。 设$\Omega \Subset Z$ 满足以下条件之一：

（i）相对边界 $\partial_Z\Omega$ 不包含非常值解析圆盘，且（88）成立。（ii）域Ω 是 *Kobayashi* 双曲的，并且对于某个 $\kappa_0 > 0$具有相对（$1,\ \kappa_0$）-可见性。

设 Y 生成$\Omega\Omega$上的真真实全纯流 Φ_t。假设 $f \in O$（Ω）$\cap C$（Ω）在某个实轨道上非常值。

那么，对于每个 $K > 0$，在 $T_{Y,\ K}(\Omega)$ 和 $T_{-Y,\ K}(\Omega)$ 中分别存在非零光滑正的闭实 $(1,\ 1)$-形式。

证明。 根据假设，存在 $z_0 \in \Omega$ 和 $\tau \in \mathbb{R}$，使得 $f(\Phi_\tau(z_0)) \neq f(z_0)$。因此

$$h_\tau = f \circ \Phi_\tau - f \tag{99}$$

是 Ω 上的非零全纯函数。

设 $L \Subset \Omega$，并令 $|s_j| \to \infty$。实作用的真性意味着序列 Φ_{s_j} 是紧致发散的。根据引理 6.1 和 6.2，经过取子序列，存在 $q \in \partial_Z\Omega$，使得 $\Phi_{s_j} \to q$ 在 Z 中局部一致地成立。

令 $L_\tau = L \cup \Phi_\tau(L)$。集合 L_τ 是 Ω 中的紧集，而 f 在 Ω 上的连续性给出

$$\sup_{w \in L_\tau} |f(\Phi_{s_j}(w)) - f(q)| \longrightarrow 0.$$

利用群律 (17)，我们得到

$$\begin{aligned} \sup_{z \in L} |h_\tau(\Phi_{s_j}(z))| &= \sup_{z \in L} |f(\Phi_{s_j}(\Phi_\tau(z))) - f(\Phi_{s_j}(z))| \\ &\leq 2 \sup_{w \in L_\tau} |f(\Phi_{s_j}(w)) - f(q)| \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{100}$$

假设 $h_\tau \circ \Phi_s$ 在 $|s| \to \infty$时不局部一致地收敛于零。那么存在 $L \Subset \Omega$、 $\varepsilon > 0$以及一个序列 $|s_j| \to \infty$，使得

$$\sup_{z \in L} |h_\tau(\Phi_{s_j}(z))| \geq \varepsilon \qquad (j \geq 1).$$

Pas取一个边界极限为常数的子序列，与（100）矛盾。因此

$$h_\tau \circ \Phi_s \longrightarrow 0 \quad \text{locally uniformly as } s \to \pm\infty. \tag{101}$$

由于 $h_\tau \not\equiv 0$，引理 3.8 给出了所断言的非零光滑正闭形式 . □

若 Ω 双全纯等价于一个相对紧 Stein 域，且其闭包的某个邻域可全纯浸入欧氏空间，则将流和形式传输到该实现中。由 [16, 定理 1.2], ，那里存在完备非平凡膨胀子。通过拉回，可得到 Ω 上的 Y 和 $-Y$ 的膨胀子。

定理 *1.6* 的证明。 设 $\iota = (f_1, \ldots\ldots, f_N)$ 是定义在 Ω 的某个邻域上的全纯浸入。由于 Ω 是紧的，每个 f_j 都属于 $\mathcal{O}(\Omega) \cap \overline{C}(\Omega)$。

在假设 (i) 下，由引理 6.1，浸入给出（88）。在假设 (ii) 下，可见性假设恰好就是命题 7.1(ii) 中的假设。

我们证明，至少有一个分量 f_j 沿某个实轨道非常数。固定 $x \in \Omega$，并定义

$$E_x = \overline{\Omega} \cap \iota^{-1}(\iota(x)). \tag{102}$$

集合 E_x 是紧的。由全纯常秩定理， ι 在 E_x的每个点的某个邻域内都是单射。因此， E_x 是离散且有限的。

假设

$$\iota \circ \Phi_1 = \iota.$$

由群律 (17),

$$\iota(\Phi_m(x)) = \iota(x) \qquad (m \in \mathbb{Z}).$$

Thus

$$\{\Phi_m(x) : m \in \mathbb{Z}\} \subset E_x.$$

真 $\mathbb{R}$-作用具有紧稳定子。由于 $\mathbb{R}$ 没有非平凡紧子群，该作用是自由的。因此，点 $\Phi_m(x)$、 $m \in \mathbb{Z}$两两不同，这与 E_x有限矛盾。

因此，存在 $j_0 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$f_{j_0} \circ \Phi_1 - f_{j_0} \not\equiv 0.$$

特别地， f_{j_0} 沿某个实轨道不是常数。命题 7.1 现在给出了每个 $K > 0$ 下 $\mathcal{T}_{Y,K}(\Omega)$ 和 $\mathcal{T}_{-Y,K}(\Omega)$ 中非零、光滑、正的、闭的实 (1,1)-形式。

对于每个 $1 \leq j \leq N$，估计式 (100) 和 (101) 适用于 $f = f_j$ 和 $\tau = 1$，即使当$f_j \circ \Phi_1 - f_j \equiv 0$ 时也是如此。因此

$$\iota \circ \Phi_{s+1} - \iota \circ \Phi_s \longrightarrow 0 \qquad (s \to \pm\infty) \tag{103}$$

在 Ω 上局部一致地。

定义

$$u(z) = |\iota(\Phi_1(z)) - \iota(z)|^2, \\ u(\Phi_s(z)) = |\iota(\Phi_{s+1}(z)) - \iota(\Phi_s(z))|^2. \tag{104}$$

由于 $\iota(\overline{\Omega})$ 是紧集，u 有界。由于取值于 $\mathbb{C}^N$的全纯映射的平方范数 u 非负且为多重次调和函数。选择 j_0 可知 $u \not\equiv 0$，尽管 u 可能在某些点取零，因为 ι不一定是单射。

由 (103) 和 (104),

$$u \circ \Phi_s \longrightarrow 0 \quad \text{locally uniformly as } s \to \pm\infty.$$

因此，若 Ω 是 Stein 域，则定理 1.5 适用于 u 的 Φ_s 以及反 向流 Φ_{-s}。

特别地，当 $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ 且 $\iota = \mathrm{id}_\Omega$时，(104) 中的函数化简为

$$u(z) = |\Phi_1(z) - z|^2 > 0.$$

严格正性源于实作用的自由性，并且

$$u(\Phi_s(z)) = |\Phi_{s+1}(z) - \Phi_s(z)|^2 \longrightarrow 0 \qquad (s \to \pm\infty)$$

由 (103)，在 Ω 上局部一致地成立。

现在假设 Ω 是 Stein。上述得到的非零齐次形式与 [16,定理 1.2], 共同为每个 $K > 0$给出完备非平凡膨胀子，其孤子场为 Y 和 $-Y$。

若 $\mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 非紧，则引理 4.1 和 4.3 可提供一个真实全纯流。因此，齐次流构造给出一个完备非平凡膨胀子。

反过来，由 [16, 评注 3.6(2)]可知，完备非平凡膨胀子的存在意味着 Ω 是 Stein。由 [16, 引理 3.1]，孤子流在 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 中的闭包非紧。由于孤子流包含于 $\mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 中，群 $\mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 非紧。□

推论 *1.7* 的证明。有限 D'Angelo 1-型排除了边界中存在非恒定解析圆盘。由浸入假设和引理 4.1，$\mathrm{Aut}(\Omega)$ 的作用是真值李群作用。因此，由引理 4.3，具有非紧流闭包的完备向量场生成适当作用。应用定理 1.6(i)。反向结论见 [16,引理 3.1]。□

对于 Kobayashi 双曲域，局部弱可见性和双曲嵌入蕴含相对弱可见性 [27, 定理 1.6]。

如果 $\Omega \Subset Z$，其中 Z 是 Stein 或 Kobayashi 双曲域，那么如果点集 $p \in \partial_Z\Omega$ 在其附近 Ω 按照 [27, 定义 1.9] 的意义并非弱可见的点是全不连通的，也可推出相对弱可见性 [27, 定理 1.10(ii)]。

注记 7.2。设 $\Omega \Subset Z$ 满足某个 $\kappa_0 > 0$下的相对 $(1, \kappa_0)$-可见性，并设 Φ_t 是一个生成元为 Y的真实全纯流。在 Z 上固定一个距离为 d的光滑 Hermitian 度量。对于$F = \Phi_1$，真性给出 F和 F^{-1}的 (92)。引理 6.4 给出了当 $m \to \pm\infty$时，整数映射 Φ_m 的 Ω 极限 $q_\pm \in \partial_Z$。对于 $L \Subset \Omega$，集合 $L' = \bigcup_{0 \le r \le 1} \Phi_r(L)$ 是紧的。对于 $t = m + r$，取$m \in \mathbb{Z}$ 和 $0 \le r < 1$，我们有

$$\sup_{z \in L} d(\Phi_t(z), q_\pm) \le \sup_{w \in L'} d(\Phi_m(w), q_\pm) \longrightarrow 0 \qquad (t \to \pm\infty). \tag{105}$$

如果 Ω 的某个邻域允许浸入欧氏空间，则令 f 为该浸入的一个非常值分量，并令

$$u_-(z) = |f(z) - f(q_-)|^2, \qquad u_+(z) = |f(z) - f(q_+)|^2.$$

这两个函数在 Ω 上都是有界、非负、非零且多重次调和的。由（105）可得,

$$u_- \circ \Phi_s \longrightarrow 0, \qquad u_+ \circ \Phi_{-s} \longrightarrow 0 \quad \text{locally uniformly as } s \to -\infty.$$

因此，如果 Ω 是 Stein，则定理 1.5 对每个 $K > 0$ 分别给出具有场 Y 和 $-Y$ 的完备非平凡膨胀子。

注 7.3。令 $\Omega \Subset Z$ 满足：Ω 的每个全纯自映射序列都有一个子序列在 $\overline{Z}$ 中局部一致地收敛于一个映入 Ω 的全纯映射，如引理 6.1 所述。令 Φ_t为真全纯流。假设对某个 $\tau \neq 0$、$g \circ \Phi_\tau = g$，对每个 $g \in \mathcal{N}_-(\Phi)$ 都成立。若 $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C(\Omega)$ 且 $f \circ \Phi_\tau \not\equiv f$，令 $u = |f \circ \Phi_\tau - f|^2$。则 u是有界、非负、多重次调和且非零的。

如果 $u\circ\Phi_s$ 不随 $s\to-\infty$局部一致地趋于零，那么将存在一个紧集 $L\Subset\Omega$、$\varepsilon>0$，以及 $z_j\in L$、$s_j\to-\infty$，使得 $u(\Phi_{s_j}z_j)\geq\varepsilon$。取一个满足 $z_j\to z\in L$ 且$\Phi_{s_j}\to g\in\mathscr{N}_-(\Phi)$局部一致收敛的子序列。在 $L\cup\Phi_\tau(L)$ 上利用收敛性，

$$u(\Phi_{s_j}z_j)=|f(\Phi_{s_j}(\Phi_\tau z_j))-f(\Phi_{s_j}z_j)|^2\longrightarrow|f(g(\Phi_\tau z))-f(g(z))|^2=0.$$

因此，当 $s\to-\infty$时，$u\circ\Phi_s\to0$局部一致地成立。在某个 a 点选择 $0<\delta<u(a)$，使得 $u(a)>0$。于是，$(u-\delta)_+$ 满足（31），而引理 3.4 对每个 $K>0$ 都给出了 $\mathcal{T}_{Y,K}(\Omega)$ 中的非零流，其中 Y 生成 Φ_t。正向版本对 $-Y$ 作出相同断言。

对于 Ω 附近的全纯浸入，与时刻一映射相同的有限纤维论证表明，某个分量 f 会被 Φ_τ 移动：否则轨道 $\{\Phi_{m\tau}(z):\ m\in\mathbb{Z}\}$ 将位于同一个有限纤维中。在有界欧氏域上，也可以改用 $u_\tau(z)=|\Phi_\tau(z)-z|^2$。自由性使该函数严格为正，逐分量应用上述论证便得到$u_\tau\circ\Phi_s\to0$ 在 $s\to-\infty$ 时局部一致地成立。

回忆一下，复流形 U 的子集 E 称为完全多重极性集，如果对于某个 $\psi\in\mathrm{PSH}(U)$，有 $E=\{\psi=-\infty\}$。

推论 7.4。设 $\Omega\Subset Z$ 是一个域，并且 Ω 的每个全纯自映射序列都存在一个子序列，在 Z 中局部一致地收敛于一个从 Ω 到 Ω 的全纯映射；设 Φ_t 是 Ω 上的一个真实全纯流。假设 Ω 的某个邻域 U 包含一个完全多重极性集 E，该集合与 Ω 不相交，并且包含对每个 $g\in\mathscr{N}_-$ 的每个像 $g(\Omega)$ Φ)。那么，对每个 $K>0$，都存在一个非零流，属于 $\mathcal{T}_{Y,K}(\Omega)$，其中 Y 是 Φ_t 的生成元。此外，如果 Ω 是 *Stein* 的，并且 Ω 的某个邻域可以全纯浸入欧氏空间，那么 Ω 具有一个完备非平凡膨胀 *Kähler–Ricci* 孤立子，其孤子场为 Y，膨胀常数为 K。

证明。取 $\psi\in\mathrm{PSH}(U)$，使得 $E=\{\psi=-\infty\}$，并取一个开集 U_0，满足 $\Omega\subset\overline{U_0}\Subset U$。取$c$，使得 $\psi\leq c$ 在 U_0上成立。则 $\beta=e^{\psi-c}\in\mathrm{PSH}(U_0)$ 有界，在极限像上消失，并在 Ω 上为正。因此，注 6.3 表明，对于每个 $K>0$，在 $\mathcal{T}_{Y,K}(\Omega)$ 中都存在一个非零流。在额外满足 Stein 条件和浸入假设的情况下，[16, 定理 1.2] 继而给出一个完备非平凡膨胀子，其孤子场为 Y，膨胀常数为 K。□

关于 $\mathbb{C}^n$ 中有界 Stein 域上的相关离散商判据，参见 [9, 定理 5]。该判据使用一个负连续多重次调和函数，该函数在基本域中各点的轨道聚簇集之并处趋于 $-\infty$。

7.2. 有界凸域与齐性域。有界凸域 Ω 的支撑超平面控制其对角 Bergman 核 $K_\Omega(z,z)$ 关于 Kobayashi距离的变化。

引理 7.5。设$\Omega\Subset\mathbb{C}^n$ 是一个有界凸域，并令 k_Ω 表示其*Kobayashi*距离。则

$$|\log K_\Omega(z,z)-\log K_\Omega(w,w)|\leq4n\,k_\Omega(z,w)\qquad(z,w\in\Omega).\tag{106}$$

因此，每个 $F\in\mathrm{Aut}(\Omega)$ 都满足

$$\Big|\log|\det_{\mathbb{C}}DF(z)|-\log|\det_{\mathbb{C}}DF(w)|\Big|\leq4n\,k_\Omega(z,w).\tag{107}$$

证明。设 ℓ是 $\mathbb{C}^n$上的一个非零实线性泛函，并令

$$h(\ell)=\sup_{\zeta\in\Omega}\ell(\zeta),\qquad d_\ell(z)=h(\ell)-\ell(z).$$

由于Ω是有界开集且 ℓ 非零，对于每个 $z\in\Omega$，我们都有 $0<d_\ell(z)<\infty$。取一个复线性泛函 L 使得 $\mathrm{Re}\ L=\ell$，并令 $\mathbb{H}=\{\zeta\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,\zeta>0\}$。全纯映射 $f=h(\ell)-L$ 将Ω映入 $\mathbb{H}$，且$\mathrm{Re}\,f=d_\ell$。Kobayashi度量的距离递减性质给出

$$k_{\mathbb{H}}(f(z),f(w))\leq k_\Omega(z,w).$$

对于 Cayley变换 $C(\zeta)=(\zeta-1)/(\zeta+1)$，有 $C'(\zeta)=2/(\zeta+1)^2$ 且 $1-|C(\zeta)|^2=$4实数集 $\zeta/|\zeta+1|^2$。因此，[23, 第 1] 章中圆盘规范化下的 Poincaré度量为

$$\kappa_{\mathbb{H}}(\zeta;v)=\frac{|C'(\zeta)v|}{1-|C(\zeta)|^2}=\frac{|v|}{2\Re\zeta}.$$

因此，沿 $\mathbb{H}$ 中的分段光滑曲线积分可得

$$k_{\mathbb{H}}(\zeta_1,\zeta_2) \geq \frac{1}{2}\left|\log \operatorname{Re}\zeta_1 - \log \operatorname{Re}\zeta_2\right|.$$

因此，

$$|\log d_\ell(z) - \log d_\ell(w)| \leq 2k_\Omega(z,w).$$

写作 $d = k_\Omega(z,\ w)$，我们得到

$$e^{-2d} d_\ell(z) \leq d_\ell(w) \leq e^{2d} d_\ell(z). \tag{108}$$

由于 Ω 是开凸集，根据支撑超平面定理可得

$$\Omega = \bigcap_{\ell\neq 0}\{u\in\mathbb{C}^n : \ell(u) < h(\ell)\},$$

其中，交集取遍所有非零实线性泛函 ℓ。对于每个 $u\in\Omega$ 以及任意这样的 ℓ，

$$\ell(w + e^{-2d}(u-z)) = \ell(w) + e^{-2d}(\ell(u) - \ell(z)) < \ell(w) + e^{-2d} d_\ell(z) \leq \ell(w) + d_\ell(w) = h(\ell).$$

因此，$e^{-2d}(\Omega - z) \subset \Omega - w$。交换 z 和 w 可得

$$e^{-2d}(\Omega - z) \subset \Omega - w \subset e^{2d}(\Omega - z). \tag{109}$$

前述的　　域包含下伯格曼核的包含关系和单调性给出

$$K_{e^{2d}(\Omega-z)}(0,0) \leq K_{\Omega-w}(0,0) \leq K_{e^{-2d}(\Omega-z)}(0,0).$$

回顾一下，对于双全纯映射 $\Psi\colon U\to V$，平方可积典范形式的变量替换给出

$$K_V(\Psi(\zeta),\Psi(\zeta))\left|\det_{\mathbb{C}} D\Psi(\zeta)\right|^2 = K_U(\zeta,\zeta). \tag{110}$$

对于 $\Psi(\zeta) = r(\zeta - z)$，(110) 给出 $K_{r(\Omega-z)}(0,\ 0) = r^{-2n}K_\Omega(z,\ z)$，而平移不变性给出$K_{\Omega-w}(0,\ 0) = K_\Omega(w,\ w)$。因此，前述不等式变为

$$e^{-4nd} K_\Omega(z,z) \leq K_\Omega(w,w) \leq e^{4nd} K_\Omega(z,z).$$

取对数，得到

$$|\log K_\Omega(z,z) - \log K_\Omega(w,w)| \leq 4nd = 4n\, k_\Omega(z,w),$$

这就证明了 (106)。对于 $F\in\mathrm{Aut}(\Omega)$，(110) 给出

$$K_\Omega(F(z),F(z))\left|\det_{\mathbb{C}} DF(z)\right|^2 = K_\Omega(z,z).$$

将 (106) 应用于 $(z,\ w)$ 和 $(F(z)\ F(w))$，并利用 Kobayashi距离在F下的不变性，即可证明 (107)。□

定理 *1.9* 的证明。令 $F\colon M\to D$ 为给定的双全纯映射。共轭流 $\Psi_t = F\circ\Phi_t\circ F^{-1}$ 是适当的，其生成元为 F_*Y。固定 $K>0$。

If D 是凸的，令 j_t 为引理 3.9 中从 Ψ_t 得到的对数雅可比。对于 $a\in D$,

$$|\Re(j_t(z) - j_t(a))| \leq 4n\, k_D(z,a) \qquad (z\in D,\ t\in\mathbb{R})$$

由 (107) 得。这对 Ψ_t 和 Ψ_{-t}中的每一个都给出了 (43)。应用命题 3.12，结合坐标标架和 Bergman核形式，得到 $\mathcal{T}_{F_*Y,\ K}(D)$ 和 $\mathcal{T}_{-F_*Y,\ K}(D)$ 中的非零光滑形式。

如果 D 是齐性的，则根据 [28, 命题 2.7 和定理 2.8]，它是 Stein。子群 $\langle\Psi_1\rangle$包含于 $\mathrm{Aut}_0(D)$ 中且是离散的，因为它是一个适当实作用的整数子群。根据定理 6.5]，其商空间是 Stein。令 H 为命题 3.5 针对 Ψ_t给出的时间函数。由 (34) 可知，形式$\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial e^{\pm K\Re H}$ 具有所需的特征。

在这两种情况下，D 都是 Stein。[16, 定理 1.2] 在 D 上给出了带有向量场F_*Y和 $-F_*Y$的完备非平凡膨胀子。通过 F拉回，可得到 M 上带有向量场 Y和 $-Y$的形式及完备孤子。

通过 F 共轭以及引理 4.1，$\mathrm{Aut}(M)$ 成为一个适当作用的李群。若 $\mathrm{Aut}_0(M)$ 非紧，则引理 4.3 给出一个适当实流，而刚刚证明的构造即可适用。反之，完备非平凡膨胀子的孤子流由 [16, 引理 3.1] 可知具有非紧闭包；该流属于 $\mathrm{Aut}_0(M)$。□

8. 一致化与有限型域

设 $\Omega \Subset Z$ 具有一个 C^2 强拟凸边界轨道累积点，且 $\dim_{\mathbb{C}} Z = n \geq 2$。根据 [17, 定理 1]，，存在一个双全纯映射 $F : \Omega \to \mathbb{B}^n$。若 Y 是 Ω 上的完备实全纯向量场，且其流具有非紧闭包，则由引理 4.1 和 4.3，F_*Y 的流是适当的。对于每个 $K > 0$，定理 1.9 给出非零光滑形式 $T_\pm \in \mathcal{T}_{\pm F_*Y,\, K}(\mathbb{B}^n)$ 以及带有向量场 $\pm F_*Y$的完备非平凡膨胀子。通过 F 拉回得到

$$F^*T_\pm \in \mathcal{T}_{\pm Y, K}(\Omega)$$

以及带有向量场 $\pm Y$ 的完备非平凡膨胀子。

8.1. 复曲面上的有限型点。 以下给定向量场的结果强化了 [16, 推论 5.2] 的虚平移构造；另请参见 [16,推论 5.3]。

定理 8.1。 设 $\Omega \Subset Z$ 是复曲面中的一个域，并设 Ω 的某个邻域 可全纯浸入 $\mathbb{C}^N$。假设 Ω 具有一个边界轨道累积点 $p \in \partial_Z\Omega$，在该点附近边界是 C^∞-光滑的、伪凸的，并且具有有限 *D'Angelo* 1-型。那么 Ω 双全纯于

$$M_H = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \Re w + H(z, \bar{z}) < 0\}, \tag{111}$$

其中 H 是一个偶数次数的非零实齐次次调和多项式 $2m$，且不含调和项。此外，

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Aut}(\Omega) \in \{2, 3, 4, 8\}. \tag{112}$$

对于每个流具有非紧闭包的完备实全纯向量场 Y 以及每个 $K > 0$，锥 $\mathcal{T}_{Y,\, K}(\Omega)$ 和 $\mathcal{T}_{-Y,\, K}(\Omega)$ 在每一点都包含秩一的非零光滑正闭实 $(1, 1)$-形式。Y 和 $-Y$ 都作为膨胀常数为 K 的完备非平凡膨胀子的向量场出现。反之，如果 Y 是一个完备非平凡膨胀子的向量场，或者对于某个 $K > 0$，$\mathcal{T}_{Y,\, K}(\Omega)$ 包含一个非零流，则其流具有非紧闭包。

证明。 根据 [33, 定理 1, 1], Ω 双全纯同构于 $\{(z,\ w)\colon 2Rw + H(z,\ \bar{z}) < 0\}$，其中 H 如陈述中所述。对 w 坐标进行缩放即可得到（111）。根据 [16, 推论 5 的证明, 2] 该模型是 Stein 的。

这些自同构

$$\delta_t(z, w) = (e^{t/(2m)}z, e^t w)$$

满足 $\delta_t(0,\ -1) \to (0,\ 0)$（当 $t \to -\infty$ 时）。令 $\rho = Rw + H(z,\ \bar{z})$。由于 H 是次调和的，∂M_H 光滑且伪凸。对于在 $(0,\ 0)$ 处的非常值全纯曲线芽 $\gamma = (z,\ w)$，其中$z \not\equiv 0$ 且 $w \not\equiv 0$，记 $k = \mathrm{ord}_0 z$ 和 $\ell = \mathrm{ord}_0 w$。$H(z(\zeta)\ z(\zeta)^-)$ 中次数为 $2mk$ 的项是 $\zeta,\ \zeta$ 中的混合单项式，而 $Rw(\zeta)$ 中次数为 ℓ 的项是调和的。由于 H 没有调和项，它们不可能相互抵消。因此

$$\frac{\mathrm{ord}_0(\rho \circ \gamma)}{\mathrm{ord}_0 \gamma} = \frac{\min\{\ell, 2mk\}}{\min\{k, \ell\}} \leq 2m. \tag{113}$$

对于 $z \equiv 0$，该商等于 1；对于 $w \equiv 0$，它等于 $2m$。因此，曲线 $\gamma(\zeta) = (\zeta,\ 0)$ 表明 $\Delta_1(\partial M_H,\ 0) = 2m$。由 [13, 定理 6.5], 和 [36, 推论 1] 可知，原点附近的类型局部有界，从而得到 (112)。

由于 Ω 是 Stein，推论 1.4 给出了每个具有非紧流的闭包的 Y 的秩一形式和完备膨胀子。对于非平凡的孤子场，非紧性由 [16, 引理 3.1]推出。

最后，假设 $0 \neq T \in \mathcal{T}_{Y,\, K}(\Omega)$，且 Y 的流 Φ_t 具有紧致闭包。根据 [16, 引理 3.1], 的证明中的论证，存在 $s_j \to +\infty$，使得 $\Phi_{s_j} \to \mathrm{id}_\Omega$ 属于 $\mathrm{Aut}(\Omega)$。由于 $\Phi_{-s_j} \to \mathrm{id}_\Omega$ 在紧集上光滑，并且任意固定的紧支撑测试形式的拉回支集都包含在某个共同的紧集中，因此有 $\Phi_{s_j}^* T \rightharpoonup T$。选取一个紧支撑光滑测试形式 β，使得 $T(\beta) \neq 0$。于是

$$T(\beta) = \lim_{j\to\infty} (\Phi_{s_j}^* T)(\beta) = \lim_{j\to\infty} e^{Ks_j} T(\beta),$$

矛盾。 □

推论 8.2。 设 $\Omega \Subset Z$ 是复曲面中的一个域，其具有边界轨道累积点 $p \in \partial_Z\Omega$，且在该点的边界在某个邻域内是 C^∞-光滑、伪凸的，并具有有限的 *D'Angelo* 1 型。那么，Ω 与 $\mathbb{R}^4$ 微分同胚。特别地，Ω 是可缩的。

证明。 根据 [33, 定理 1.1], , 对 w坐标进行重新缩放后，Ω 与 (111) 中的 M_H 双全纯。该映射

$$\mathbb{C}\times(-\infty,0)\times\mathbb{R}\longrightarrow M_H,\qquad (z,r,t)\longmapsto(z,r-H(z,\bar z)+\sqrt{-1}t) \tag{114}$$

是一个微分同胚，其逆映射为（z， w） ↦ （z， $Rw+H$（z， $\bar z$）， Iw）。 □

8.2. **蛋域**。

推论 *1.10* 的证明。 假设 Ω 具有一个带完备孤立子向量场的完备非平凡膨胀子。由 [16, 定理 1.1], , Ω 是伪凸的；由 [16, 引理 3.1], , Aut(Ω) 是非紧的。D'Angelo型的局部有界性 [13, 定理 6.5] 以及 Ω 的紧致性 ∂ 给出 $M<\infty$，其中

$$\Delta_1(\partial\Omega,p)\le M\qquad(p\in\partial\Omega). \tag{115}$$

如果解析集 V在 $p\in\partial\Omega$ 处具有正维数，并且对于局部定义函数 ρ满足 $|\rho(z)|\le C|z-p|^q$， 则选取一个非常数全纯映射 γ：（Δ， 0） →（V， p）。令 $\nu=\mathrm{ord}_0(\gamma-p)>0$，我们得到

$$q\nu\le \mathrm{ord}_0(\rho\circ\gamma)\le\Delta_1(\partial\Omega,p)\nu\le M\nu. \tag{116}$$

因此，接触阶一致有界。 [3] 的主定理给出 Ω $\simeq E_m$ ，其中存在某个$m\ge 1$。

反过来，设 F: Ω $\to E_m$ 是一个双全纯映射，并记 $z'=$（z_2、.....、 z_n）。定义

$$C(w,z_1,z')=\left(\sqrt{-1}\frac{1+w}{1-w},\ \frac{z_1}{(1-w)^{1/m}},\ \frac{z'}{1-w}\right)=:(\zeta,q_1,q'). \tag{117}$$

.....的分支 $(1-w)^{1/m}$ 利用 $1-w$ 在 $|w|<1$上的全纯对数定义。我们有 e

$$\Im\zeta=\frac{1-|w|^2}{|1-w|^2},\qquad |q_1|^{2m}+|q'|^2=\frac{|z_1|^{2m}+|z'|^2}{|1-w|^2}. \tag{118}$$

因此， C 将 E_m 映入

$$\mathcal{S}_m=\{(\zeta,q_1,q'):\Im\zeta>|q_1|^{2m}+|q'|^2\}.$$

对于 (ζ， q_1， q') $\in\mathcal{S}_m$，逆映射为

$$w=\frac{\zeta-\sqrt{-1}}{\zeta+\sqrt{-1}},\qquad z_1=(1-w)^{1/m}q_1,\qquad z'=(1-w)q'.$$

不等式 $I\zeta>0$ 给出 $|w|<1$ ，而（118）给出了 E_m的定义不等式。因此 C： $E_m\to\mathcal{S}_m$ 是一个双全纯映射。

这些平移

$$\Phi_t(\zeta,q_1,q')=(\zeta+t,q_1,q') \tag{119}$$

在 $\mathcal{S}_m$上定义了一个真全纯 $\mathbb{R}$-作用：如果 x_j 和 $\Phi_{t_j}(x_j)$ 保持在固定的紧集内，那么$R\zeta(x_j)$ 和 $R\zeta(x_j)+t_j$ 有界，因此（ t_j ）有界。对于 $K>0$， 令

$$T_{K,\pm}=\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial e^{\pm K\Re\zeta}=\frac{K^2}{4}e^{\pm K\Re\zeta}\sqrt{-1}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta. \tag{120}$$

这些光滑正闭形式的秩为一，并且

$$\Phi_t^*T_{K,+}=e^{Kt}T_{K,+},\qquad \Phi_t^*T_{K,-}=e^{-Kt}T_{K,-}. \tag{121}$$

令 $G=C\circ F$ 以及 $Y_0=G^*(\partial/\partial R\zeta)$，则（121）给出

$$G^*T_{K,+}\in\mathcal{T}_{Y_0,K}(\Omega),\qquad G^*T_{K,-}\in\mathcal{T}_{-Y_0,K}(\Omega).$$

根据 [16, 定理 1.2]， Y_0 和 $-Y_0$ 对于每个 $K>0$都是完备非平凡膨胀子的孤子场。如果 Y 是 Ω 上任意一个具有非紧流闭包的完备实全纯向量场，则根据引理 4.1 和 4.3， F_*Y在 E_m 上的流是真作用。由于 E_m 是凸的，定理 1.9 给出了 Y 和 $-Y$的齐次形式与完备膨胀子。□

在 $\mathbb{C}^2$ 中，推论 1.10 适用于具有光滑有限型边界的有界域，无需 Levi 秩假设。

8.3. **加权多项式模型。**

命题 8.3。 设$\Omega \Subset Z$ 是一个复维数为 $n \geq 2$ 的域，使得Ω 的某个邻域可全纯浸入 $\mathbb{C}^N$。假设 $F\colon \Omega \to M_P$ 是一个双全纯映射，其中

$$M_P = \{(z,w) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} : \rho(z,w) := \Re w + P(z,\bar{z}) < 0\}, \tag{122}$$

P 是一个实值拟亚纯次调和多项式，并且

$$P(e^{\lambda_1 t} z_1, \dots, e^{\lambda_{n-1} t} z_{n-1}) = e^t P(z), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{123}$$

对于某些 λ_1、...、$\lambda_{n-1} > 0$。定义

$$\begin{aligned} \delta_t(z,w) &= (e^{\lambda_1 t} z_1, \dots, e^{\lambda_{n-1} t} z_{n-1}, e^t w), \\ \tau_t(z,w) &= (z, w + \sqrt{-1}t). \end{aligned} \tag{124}$$

令 D 和 A 分别表示 δ_t 和 τ_t 的实无穷小生成元。对于 a、$b \in \mathbb{R}$，其中$(a,b) \neq (0,0)$，以及每个 $K > 0$，$T^{F^*(aD+bA)}_K(\Omega)$ 都包含一个非零的正闭实$(1,1)$-流，并且 $F^*(aD+bA)$ 是一个完备非平凡膨胀子的向量场，其膨胀常数为 K。此外，Ω 与 $\mathbb{R}^{2n}$ 微分同胚。

证明。由 (123) 可得，

$$\rho \circ \delta_t = e^t \rho, \qquad \rho \circ \tau_t = \rho. \tag{125}$$

在带有 $w' = w + \sqrt{-1}r$ 的坐标中，$(\tau_r)_* D$ 的 (1，0) 部分具有 w' 系数 $w' - \sqrt{-1}r$，而 A 的 (1，0) 部分具有系数 $\sqrt{-1}$。因此，

$$(\tau_r)_*(aD + bA) = aD + (b - ar)A. \tag{126}$$

若 $a \neq 0$，则 $aD + bA$ 的流经 $\tau_{b/a}$ 共轭于 δ_{as}；若 $a = 0$，则该流为 τ_{bs}。对于紧集 C_1，$C_2 \Subset M_P$、$x \in C_1$ 以及 $\delta_{as}(x) \in C_2$ 蕴含

$$\frac{\min_{C_2}(-\rho)}{\max_{C_1}(-\rho)} \leq e^{as} \leq \frac{\max_{C_2}(-\rho)}{\min_{C_1}(-\rho)}.$$

因此，δ_{as} 对 $a \neq 0$ 是真映射。通过对 Iw 进行平移，流 τ_{bs} 对 $b \neq 0$ 是真映射。对于 $K > 0$，令

$$u_{a,b,K}(z,w) = \begin{cases} |z_1|^{K/(a\lambda_1)}, & a > 0, \\ (-\rho(z,w))^{K/a}, & a < 0, \\ e^{(K/b)\Im w}, & a = 0,\ b \neq 0. \end{cases} \tag{127}$$

特征恒等式为

$$\begin{aligned} u_{a,b,K} \circ \delta_{as} &= e^{Ks} u_{a,b,K} \quad (a \neq 0), \\ u_{0,b,K} \circ \tau_{bs} &= e^{Ks} u_{0,b,K} \quad (b \neq 0). \end{aligned} \tag{128}$$

对于 $a > 0$，若 $\gamma = K/(a\lambda_1) > 0$，则 $|z_1|^\gamma$ 是多重次调和的，并且

$$\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}|z_1|^\gamma = \frac{\gamma^2}{4}|z_1|^{\gamma-2}\sqrt{-1}\,dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \qquad (z_1 \neq 0). \tag{129}$$

该系数可穿过 $z_1 = 0$ 局部可积，因为 $\int_0^\varepsilon r^{\gamma-1}\,dr < \infty$。因此，正闭流 $\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}|z_1|^\gamma$ 非零。

对于 $a < 0$，令 $q = -K/a > 0$。由于 $\rho < 0$ 和 $\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\rho = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}P \geq 0$，

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}(-\rho)^{-q} &= q(-\rho)^{-q-1}\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\rho \\ &\quad + q(q+1)(-\rho)^{-q-2}\sqrt{-1}\,\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho \geq 0. \end{aligned} \tag{130}$$

第二项处处非零，因为 $\partial\rho/\partial w = 1/2$。对于 $a = 0$ 和 $b \neq 0$，

$$\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}e^{(K/b)\Im w} = \frac{K^2}{4b^2}e^{(K/b)\Im w}\sqrt{-1}\,dw \wedge d\bar{w}. \tag{131}$$

因此 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u_{a,\,b,\,K}$ 在三种情况下均为正的、闭且处处非零。

对于 $a \neq 0$，设 $T = (\tau_{b/a} \circ F)^*(\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}u_{a,\,b,\,K})$；对于 $a = 0$，设 $T = \overline{F^*}(\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}u_{0,\,b,\,K})$。由 (126) 和 (128)，

$$\Phi_s^* T = e^{Ks} T,$$

其中 Φ_s 是 $F^*(aD+bA)$ 的流。因此 $0 \neq T \in \mathcal{T}_{F^*(aD+bA)}\ K(\Omega)$。由于 P 是多重次调和的，M_P 是 $\mathbb{C}^n$ 中的伪凸域，并且是 Stein [19]。根据 [16, 定理 1.2]， $F^*(aD+bA)$ 是一个具有膨胀常数 K 的完备非平凡膨胀子的场。

最后，映射

$$\mathbb{C}^{n-1} \times (-\infty, 0) \times \mathbb{R} \longrightarrow M_P, \quad (z, r, t) \longmapsto (z, r - P(z, \bar{z}) + \sqrt{-1}t) \tag{132}$$

是一个微分同胚。 □

推论 8.4。 设 $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ 为有界伪凸域，且具有 C^∞ 有限 ***D'Angelo*** 型的边界。若 (Ω) 的边界轨道聚集集 $L\mathrm{Aut}(\Omega)$ 包含两个不同的点，则 Ω 双全纯于 M_P，如 (122)–(123) 所示，并且微分同胚于 $\mathbb{R}^{2n}$。若 $F : \Omega \to M_P$ 是这样的一个双全纯映射，则 $F^*(aD+bA)$ 对每个$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 以及 $K > 0$ 都是一个完备非平凡膨胀子的流，其中 D, A 是 (124) 中各流的生成元。

证明。 根据 [38, 定理 1.2(1)], , Ω 双全纯于一个加权齐次模型 $\{(z, \zeta) : I\zeta > P(z, \bar{z})\}$, 其权重取自 [38, 定义 1.1]。坐标变换 $w = \sqrt{-1}\zeta$ 给出了 (122) 和 (123)。

Ω 的伪凸性蕴含 M_P 的伪凸性。固定 $z,\ v \in \mathbb{C}^{n-1}$ 并选取 $(z,\ w) \in \partial M_P$。由于 $V = (v,\ -2\partial P_z(v))$ 与 ∂M_P 相切，

$$0 \leq -\sqrt{-1}(\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\rho)(V, \bar{V}) = \sum_{j,k=1}^{n-1} P_{j\bar{k}}(z) v_j \bar{v}_k. \tag{133}$$

因此， P 是多重次调和的。命题 8.3 给出了微分同胚，以及对于每个 $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$ 和 $K > 0$，具有向量场 $F^*(aD+bA)$ 的膨胀子。□

推论 8.5。 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 1$ 是具有 C^∞ 边界的伪凸域，并且 $p \in \partial\Omega$ 是有限 ***Catlin*** 多重型 $(1, m_1, \ldots, m_n)$ 的 h- 可延拓的。假设 $x_j = F_j(q) \to p$，其中 $q \in \Omega, F_j \in \mathrm{Aut}(\Omega)$，且对于某个 $C > 0$,

$$|x_j - p| \leq C\ \mathrm{dist}(x_j, \partial\Omega) \qquad (j \gg 1). \tag{134}$$

那么Ω 双全纯映射于

$$M_P = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \Re w + P(z, \bar{z}) < 0\},$$

其中， P 是一个不含拟调和单项式的实值多重次调和多项式，满足

$$P(e^{t/m_1} z_1, \ldots, e^{t/m_n} z_n) = e^t P(z).$$

特别地，Ω 与 $\mathbb{R}^{2n+2}$ 微分同胚。若Ω 有界，则对于任意双全纯映射 $F : \Omega \to M_P$，每个 $F^*(aD+bA)$ 满足$(a, b) \neq (0,\ 0)$，对每个$K > 0$都是一个完备非平凡膨胀子的场，其中 D、 A 是式(124)中流的生成元。

证明。 设 χ 是 p 处的特征坐标映射，该映射来自 [35, 第 3 节。2], 满足 $\chi(p) = 0$ 且$\chi(x_j) = (\alpha_j,\ \beta_j)$。记 $d_j = \mathrm{dist}(x_j,\ \partial\Omega)$，并令 δ_j 表示从 $\chi(x_j)$ 到该坐标图中边界像的欧几里得距离。将其分别与 p 和 0 比较可知，在两个坐标系中最近的边界点分别趋于 p 和 0。这一坐标图及其逆映射在这些点的更小邻域上均为利普希茨映射，因此对于较大的 j，有 $cd_j \leq \delta_j \leq Cd_j$，其中 $c,\ C > 0$。

由于 $\chi(p) = 0$，利普希茨界和 (134) 给出 $|\alpha_j| + |\beta_j| = O(d_j) = O(\delta_j)$。由于 $m_k \geq 2$和 $\alpha_j \to 0$,

$$|\Im\beta_j| + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{j,k}|^{m_k} = O(\delta_j). \tag{135}$$

取 $\Lambda = (1/m_1,\ \ldots\ldots,\ 1/m_n)$，这就是 Λ-非切向条件，即 [35, 定义 3.4]。根据 [35,定理 1.1], Ω 与 M_P 双全纯，正如所述。

坐标 $(z,\ Rw + P(z,\ \bar{z}),\ Iw)$ 给出 $M_P \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$ 的微分同胚。对于有界 Ω，命题 8.3 给出了所要求的完备非平凡膨胀子。□

致谢

作者感谢 Max Hallgren 和 Yuan Yuan 就本文主题进行的有益讨论，也感谢 Peter Ebenfelt 和 Ming Xiao 给予的鼓励与支持。

人工智能使用声明

作者使用 OpenAI 的 ChatGPT 协助查找相关文献、翻译非英语数学文献来源中的段落，并改进稿件的语法、结构和表达。作者对本文内容承担全部责任。

参考文献

1. Marcos M. Alexandrino 和 Renato G. Bettiol，《李群与等距作用的几何方面》，Springer，Cham，2015 3362465 2。MR。Theodore J. Barth，《Kobayashi距离诱导标准拓扑》，Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972)，439–441。MR 306545 3. Eric Bedford 和 Sergey Pinchuk，《具有非紧自同构群的 $\mathbb{C}^{n+1}$ 域》，J. Geom. Anal. 1 (1991 1120679 4 3, 165 191)，no. –。MR。Heinrich Behnke 和 Karl Stein，《黎曼曲面上解析函数的发展》，Math. Ann. 120 29997 5 1949 430 461 ( )，–。MR。Gautam Bharali 和 Anwoy Maitra，《可见性的一种弱概念、一个例子族及 Wolff–Denjoy定理》，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5 4288653 6 22 2021 1, 195 240) ( )，no. –。MR。Gautam Bharali 和 Andrew Zimmer，《Goldilocks 域、可见性的一种弱概念及其应用》，Adv. Math. 310 3620691 7 2017 377 425 ( )，–。MR。Enrico Casadio Tarabusi、Andrea Iannuzzi 和 Stefano Trapani，《整体化、纤维丛与全纯包络》，Math. Z. 233 1750936 8 2000 3, 535 551 ( )，no. –。MR。Vikramjeet Singh Chandel、Anwoy Maitra 和 Amar Deep Sarkar，《相对于 Kobayashi距离的可见性概念：比较与应用》，Ann. Mat. Pura Appl. (4) 203 (2024)，no. 2，475–498。MR 4715308 9. Bo-Yong Chen，《有界域上的适当不连续作用》，预印本，arXiv:0804.0493，2008。10. Shiu Yuen Cheng 和 Shing Tung Yau，《关于非紧复流形上完备 Kähler度量的存在性及 Fefferman 方程的正则性》，Comm. Pure Appl. Math. 33 575736 11 1980 4, 507 544 ( )，no. –。MR。Ronan J. Conlon、Alix Deruelle 和 Song Sun，《膨胀型与收缩型梯度 Kähler–Ricci 孤子的分类结果》，Geom. Topol. 28 4711837 12 2024 1, 267 351 ( )，no. –。MR。John P. D'Angelo，《实超曲面、接触阶及其应用》，Ann. of Math. (2 3, 615 115 1982 637 657241) ( )，no. –。MR 13. John P. D'Angelo 和 Joseph J. Kohn，《次椭圆估计与有限型》，《多复变量》（伯克利，CA，1995–1996），Math. Sci. Res. Inst. Publ.，第37卷，Cambridge Univ. Press，Cambridge，1999，199–232页。MR 1748604 14. Jean-Pierre Demailly，《复分析与微分几何》，2012，在线专著，Institut Fourier，Université de Grenoble I，2012年6月21日版本。15. Lawrence C. Evans，《偏微分方程》，Graduate Studies in Mathematics，第19卷，American Mathematical Society，Providence，RI，1998 1625845 16。MR。Soumya Ganguly，《Stein性与完备膨胀型 Kähler–Ricci 孤子》，预印本，arXiv:2611.25227，2026。17. Hervé Gaussier、Kang-Tae Kim 和 Steven G. Krantz，《关于复流形中的 Wong-Rosay定理的注记》，Complex Var. Theory Appl. 47 1925173 18 2002 9, 761 768 ( )，no. –。MR。Hans Grauert 和 Reinhold Remmert，《Stein空间理论》，数学经典，Springer-Verlag，Berlin，2004，由 Alan Huckleberry 翻译；1979年版本的重印本。19. Lars Hörmander，《多复变量复分析导论》，第三版，North-Holland Mathematical Library，第7卷，1045639 20 1990 North-Holland Publishing Co.，Amsterdam，。MR。Xiaojun Huang 和 Ming Xiao，《Bergman–Einstein度量、Kerner定理的推广及具有球面边界的 Stein空间》，J. Reine Angew. Math. 770 4193467 21 2021 183 203 ( )，–。MR。Andrea Iannuzzi、Andrea Spiro 和 Stefano Trapani，《全纯作用的复化与 Bergman度量》，Internat. J. Math. 15 2097017 22 2004 8, 735 747 ( )，no. –。MR。Anthony W. Knapp，《李群：超越入门》，第二版，Progress in Mathematics，第140卷，Birkhäuser Boston, Inc.，Boston，MA，2002 1920389 23。MR。Steven G. Krantz，《复分析：几何视角》，第二版，Carus Mathematical Monographs，第23卷，Mathematical Association of America，Washington，DC，2004 2047863 24。MR。Henrik Kratz，《具有数值有效余切丛的紧复流形》，Doc. Math. 2 (1997)，183–193。MR 1464070 25. Serge Lang，《复分析》，第四版，Graduate Texts in Mathematics，第103卷，Springer-Verlag，New York，1999。MR 1659317 26. Andrea Loi 和 Roberto Mossa，《到齐性有界域中的全纯等距映射》，Proc. Amer. Math. Soc. 151 4607641 27 2023 9, 3975 3984 ( )，no. –。MR。Rumpa Masanta，《复流形中相对于 Kobayashi距离的可见域》，Trans. Amer. Math. Soc. 379 5000560 28 2026 1, 511 542 ( )，no. –。MR。Christian Miebach，《循环群作用下有界齐性域的商空间》，Osaka J. Math. 47 2, 331 2010 352 2722364 ( )，no. –。MR

29. Christian Miebach 和 Karl Oeljeklaus，《关于真 $\mathbb{R}$-作用于双曲的 *Stein* 曲面》，Doc. Math. **14** (2009)，673–689。MR 2578807 30. Ngaiming Mok 和 Shing-Tung Yau，《有界域上 *Kähler-Einstein* 度量的完备性及通过曲率条件刻画全纯域》，《亨利·庞加莱的数学遗产》，第1部分（印第安纳州布卢明顿，1980），Proc. Sympos. Pure Math.，第39卷，Amer. Math. Soc.，Providence，RI，1983，41 720056 31 59–页。MR。Raghavan Narasimhan，《全纯完备复空间的嵌入》，Amer. J. Math. **82**(1960)，917–934。MR 148942 32. Michael Reed 和 Barry Simon，《现代数学物理方法。*II.* 傅里叶分析、自伴性》，Academic Press [ ], 1975 493420 Harcourt Brace 33 Jovanovich，Publishers，纽约-伦敦，。MR。Harish Seshadri 和 Kaushal Verma，《具有非紧自同构群的复曲面中的域》，J. Math. Anal. Appl. **337** 2386376 34 2008 2, 1273 1283 ( )，no. –。MR。Elias M. Stein 和 Guido Weiss，《欧几里得空间上的傅里叶分析导论》，Princeton Mathematical Series，第 32, 1971 304972 卷，Princeton University Press, 35 Princeton，NJ，。MR。Ninh Van Thu 和 Nguyen Quang Dieu, h《关于中的某些 -可延拓域的性质》，J. Math. Anal. Appl. **485** 4050680 36 2020 2, 123810, 14 ( )，no.。MR。Ninh Van Thu 和 Mai Anh Duc，《关于中模型的自同构群》，Acta Math. Vietnam.**41**(2016)，no. 3，457–470。MR 3534543 37. Shing-Tung Yau，《问题部分》，《微分几何研讨会》（Shing-Tung Yau 编），Annals of Mathematics Studies，第102卷，Princeton University Press，1982，669–706页。38. Andrew Zimmer，《有界域的自同构群与极限集 *I*：有限型情形》，Adv. Math. **366** (2020)，107085，42。MR 4070309

数学系，罗格斯大学新布朗斯维克分校，110 Frelinghuysen Rd，皮斯卡塔韦，NJ 08854，美国电子邮箱地址：soumya.ganguly@rutgers.edu