arXiv:2611.31024v1 [math.DG] 23 Nov 2026

黎曼二维环面上第二拉普拉斯特征值的 KAO–LAI–OSTING 猜想

ALEXANDER PIGAZZINI

摘要。我们证明了 Kao–Lai–Osting 猜想关于黎曼二维环面的面积归一化拉普拉斯谱的 $k = 2$ 情形：

$$\sup_g \lambda_2(T^2, g)\,\mathrm{Area}(T^2, g) = \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}} + 8\pi,$$

其中上确界取遍所有光滑黎曼度量。没有任何光滑度量能够取得这一数值。该数值可由等边共形类中的一个形成圆形球面泡的序列逼近，并且等边共形类是唯一一个其共形上确界等于全局上确界的共形类。上界由球面折叠以及针对嵌入 S^5 的尖锐截断共形面积不等式推出。法向曲率和法弦估计给出了高帽区域面积控制，并在嵌套的高中心条带上结合了精确的初等估计。该证明部分借助计算机完成。有理多项式不等式处理低权重帽区域范围和整个剩余高帽区域，后者通过有理盒上的精确伯恩斯坦证书完成；这些证书还在球算术中进行了独立检验。剩余乘积不等式通过严格上界求积建立，并给出了两个可复现的独立证书，分别采用球算术和区间算术，同时进行了精确域覆盖检验。

目录

1. 引言 3
1.1. 环面上的第二特征值问题 3
1.2. 共形体积、折叠与剩余模空间 4
1.3. 截断单中心共形面积原理 4
1.4. 解析几何与有限参数步骤 5
1.5. 刚性与论证结构 6
2. 谱论断与证明架构 6
3. 折叠蕴含 8
4. 基本嵌入与一参数约化 10
4.1. 精确法曲率 11

日期：2026年11月23日。2020 数学主题分类。主要分类 58J50；次要分类 35P15、53C42、65G20。关键词和短语。Kao–Lai–Osting 猜想、拉普拉斯–贝尔特拉米特征值、二维环面、谱几何、共形折叠、刚性。

4.2. 全局法向弦估计 11 4.3. 高帽的面积密度 12 5. 截断共形面积的标量主控函数 14 6. 小共形中心的解析界 15 6.1. 一致小中心定理 16 7. 低权共形帽的解析控制 20 7.1. 四次厄米特估计 20 7.2. 帽核的精确积分 21 7.3. 对剩余低权帽的一致控制 22 7.4. 中间中心，
$17/40 \le s \le 149/200$ 237.5. 大型中间中心，
$149/200 \le s \le 19/20$ 248. 共形帽的解析高中心估计 25 8.1. 三个嵌套条带 26 8.2. 三个嵌套条带的证明 26 情形 I：
$0 \le e \le \delta^2/3$ 27情形 II：$\delta^2/3 \le e < t_0$ 29 8.3. 外权重高中心条带 30 9. 剩余高帽的精确有理控制 33 9.1. 单元、阈值与权重界 34 9.2. 直接单元 35 9.3. 二次单元 37 9.4. 有限证书与定理 9.1 的证明 39 10. 经认证的乘积不等式与截断定理的证明 40 11. 互补模空间与精确端点 42 12. 尖锐性、不取到性与唯一极大化类 43 13. 结束语 44 附录 A. 精确有理正性证书 45 A.1. 小中心的伯恩斯坦比较 45 A.2. 四次厄米特估计与矩包络恒等式 46 A.3. 中间中心有理符号 47 A.4. 大中间中心有理符号 47 附录 B. 乘积不等式：上求积与经认证的界 48 B.1. 上弦规则 48 B.2. 精确角表示 48 B.3. 球算术验证 49 B.4. 独立区间证书 53 附录 C. 剩余高帽证书 54 C.1. 单元、带与盒 54 C.2. 验证义务 55 C.3. 算术与执行 56 C.4. 球算术的第二次验证 57 附录 D. 证书义务、算术模型与可复现性 57

D.1. 有限证明义务 57D.2. 已完成的有限验证记录 58D.3. 已验证的算术与覆盖 58D.4. 源完整性与执行 59附录 E. 关于乘积条带的精确有理数检查 60E.1. 陈述与高阶机制 60E.2. 四次乘积条带 62E.3. 高阶双余弦界 66陈述与声明 69利益冲突 69数据与代码可用性 69资助 69人工智能工具的使用 69参考文献 69

1. 引言

1.1. 二维环面上的第二特征值问题。 设 (Σ, g) 是一个闭黎曼曲面。下文中，非负拉普拉斯–贝尔特拉米算子的特征值按其重数记为 $0 = \lambda_0(g) < \lambda_1(g) \le \lambda_2(g) \le \cdots$。在二维情形下，量$\lambda_k(g)$ 面积(Σ, g) 在度量的相似缩放下保持不变。因此，对它们的优化由共形几何、拉普拉斯算子的谱以及极大化序列可能失去紧性之间的相互作用所支配。球面上的第一正特征值由 Hersch [7]给出了尖锐上界；对于二维环面，尖锐的第一特征值不等式由 Nadirashvili [19], 获得，从而解决了 Berger 的等周问题。在这两种情形中，共形变换和取值于球面的测试映射都发挥着本质作用。对于第二特征值，Nadirashvili [20]证明了 $\Lambda_2(S^2) = 16\pi$，Petrides [23] 又给出了另一种证明；Nadirashvili 和 Penskoi [21] 证明了 $\Lambda_2(\mathbb{RP}^2) = 20\pi$；Karpukhin [11] 确定了对每个 k的 $\Lambda_k(\mathbb{RP}^2)$，而在球面上，$\Lambda_k(S^2) = 8\pi k$ 对每个k [13]均已知。对于高阶特征值，面积集中可能产生球面分量，相应的非紧序列不一定收敛到光滑的极大化度量。这一现象属于 Petrides [22], Karpukhin–Nadirashvili– Penskoi–Polterovich [12], 以及 Karpukhin–Stern [14]为共形极值度量所建立的框架。在第二特征值层面，共形集中已经改变了预期的极值度量：向一个第一特征值极大化环面添加一个圆球面，会得到候选值 $8\pi^2/\sqrt{3} + 8\pi$。

–

Kao、Lai和Osting [10] 研究了闭曲面上的拉普拉斯–贝尔特拉米特征值最大化问题，包括广泛的共形研究和数值研究。他们对二维环面的第二个正特征值的猜想

如下

$$\Lambda_2(T^2) := \sup_g \lambda_2(T^2, g)\,\mathrm{Area}(T^2, g) = \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}} + 8\pi. \tag{1}$$

上确界取遍光滑黎曼度量。预期的极大化序列存在于等边平坦环面的共形类中，并形成一个球形气泡。(1)中的等号是关于上确界的陈述，而不是说该上确界能由某个光滑度量取得。

1.2. 共形体积、折叠与剩余的模空间。 上界的出发点是共形体积，该概念由 Li 和 Yau [15] 提出，随后由 Montiel 和 Ros [17]在极小浸入和共形面积方面加以发展。Bryant 关于基本二维环面的共形体积的明确处理 [1]，为共形类与球面值测试映射之间搭建了一座异常具体且有效的桥梁。随着共形模变化，它能够提供精确估计，并且在适当的范围内确定完整的单映射共形体积。

对于第二特征值，需要构造同时与常数和第一特征函数正交的试验函数。折叠构造可追溯至 Nadirashvili [20]以及 Girouard、Nadirashvili 和 Polterovich [5]，并由 Karpukhin 和 Stern [14]，、Eddaoudi 和 Girouard [3] 以及 Kang [9]，将其与曲面上的共形体积结合，λ_2 通过在两个共形变换后的部分之间分配一个测试映射，恰好实现了这种正交性。Kang 建立了新的共形类界，并将 (1)中尚未证明的部分缩减为平坦环面的通常基本域中的一个紧致部分：

$$0 \le a \le \tfrac{1}{2}, \qquad \sqrt{1-a^2} \le b \le \tfrac{44}{25}, \tag{2}$$

其中 $a + ib$ 对格进行参数化。这种约化是严格的有限验证之所以可行的原因之一：剩余的共形类构成一个明确有界的参数区域。仅靠共形体积方法，在该区域内还不够精确；还需要进一步的估计，追踪两块折叠部分，同时避免将它们各自的全部共形面积重复计算。

1.3. 截断单中心共形面积原理。 我们的基本技术量是截断共形面积。设 $F_r : T^2 \to S^5$ 为带权重 $r = (r_1, r_2, r_3)$ 、诱导面积为 $A(r)$ 的平坦环面的标准基本共形嵌入。令

$$A_{\mathrm{eq}} = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}}, \qquad L = A_{\mathrm{eq}} - 4\pi.$$

对于 $v \in B^6$，记作 $k_v(F_r)$ ，表示目标空间上莫比乌斯变换的共形因子，约定见下文第2节。我们考虑

$$J(r, v) = \int_{T^2} \left(k_v(F_r)^2 - \frac{L}{A(r)} \right)_+ dA_r. \tag{3}$$

所需的单中心界为

$$J(r,v) \le 4\pi. \tag{4}$$

这比对总共形体积给出的界更强，但它与折叠恰好相契合：如果在互补的部分上使用两个共形映射，则逐点不等式

$$\max\{x,y\} \le c + (x-c)_+ + (y-c)_+$$

满足 $c = L/A(r)$ 可将它们的合并能量界定为 $L + 8\pi$。随后，利用瑞利商论证即可得到（1）的右侧。能够对这两部分分别采用 独立的截断能量，而无需要求它们的能量相等，这一点至关重要。

（4）背后的几何结构具有出人意料的刚性。基本浸入具有一个显式的法曲率常数，而关于其法弦的全局估计控制着高度函数超水平集的拓扑。高于一个显式阈值时，这些超水平集是圆盘。随后，平坦情形下的高斯–博内定理给出帽区域面积分布的精确估计。在这些高水平之外，凸性使得可以用双余弦平均替代三个彼此相关的傅里叶模态。这两种估计是证明中相辅相成的机制：直接的乘积估计处理高度分布的宽阔中段，而帽区域几何则控制其最大值附近的集中。

1.4. **解析几何与有限参数步骤**。 本文的结论是精确值（1），每个单独的光滑度量都满足严格不等式，并且在共形上确界达到 $\Lambda_2(T^2)$的所有共形类中，等边共形类是唯一的。该定理由几何估计、精确多项式正性恒等式以及紧参数集上的一个经验证的有限不等式步骤推出。

关键不等式是关于截断共形面积的一个尖锐上界。三个互补机制共同确立了这一结论。对于较小的共形中心，厄米特多项式主控函数与傅里叶矩给出显式的有理数比较。在帽区域中，同样的方法辅以单调几何帽核和精确初等积分。对于低权重以及整个剩余的高权重帽区域，所有所需的符号均可由有理伯恩斯坦恒等式推出；后一种情形是在有限个显式有理盒上完成的。该证书经过两次检验：一次使用精确有理数运算，另一次则独立地使用球算术。剩余的乘积区域通过凸求积处理；其严格不等式是在完整参数域上（而非在抽样点上）由两个独立程序认证的。补充材料提供了可执行证书、对常数与覆盖的精确检验，以及有理正性检验。

解析性估计还涵盖所有中心半径 $s \le 1/4$ 或 $s \ge 47/50$以及紧模空间区域之外的所有共形类。证明借助计算机完成：通过精确有理数运算，验证了小中心、低权重以及在 4439 个明确盒上针对

剩余高帽的伯恩斯坦证书，而验证数值计算仅用于乘积不等式。

1.5. **刚性与论证结构**。一旦已知（4），严格性与极值类的刻画仍需分别论证。单中心界只有一种等号构型：共形中心为零的等边基本环面。在折叠构造中，这种构型无法使所需的组合能量界取等。若要区分一个固定的非等边共形类中的上确界，还必须在共形中心趋近球面时控制双中心量。对于单个中心，这种边界极限的面积至多为 4π，且在其他每个共形类中都严格小于等边体积。最后，标准的共形泡化构造给出了等边类中相匹配的下界。全文所说的共形类唯一性，均指模去微分同胚后的唯一性，而非固定带标记环面下的唯一性。

第2 节陈述尖锐谱定理与截断原理。折叠论证、基本嵌入的几何性质及标量主控函数之后，依次给出关于小中心、低权重帽和大共形中心的解析界。第9 节将剩余高帽归结为有限多个盒上的精确有理正性。第10节将经认证的乘积不等式表述为一个精确引理，并在此完成截断定理。随后讨论互补模与共形刚性。附录 A–D 分别提供有理正性证书、乘积认证、高帽证书及完整的可复现性规范；附录E 则用精确有理数运算，在乘积域的三个子条带上检验界 $J < 4\pi$，并在其中部分子条带上检验乘积不等式本身；证明并未用到这些检验。

2. 谱论断与证明架构

我们从零开始，按重数计算特征值：

$$0 = \lambda_0(T^2, g) < \lambda_1(T^2, g) \le \lambda_2(T^2, g) \le \cdots .$$

对于共形类$\mathcal{C}$，记

$$\Lambda_2(T^2, \mathcal{C}) = \sup_{g \in \mathcal{C}} \lambda_2(T^2, g)\,\mathrm{Area}(T^2, g), \qquad \Lambda_2(T^2) = \sup_{\mathcal{C}} \Lambda_2(T^2, \mathcal{C}).$$

这些定义中的所有度量均为光滑且正定的。令

$$A_{\mathrm{eq}} = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}}, \qquad L = A_{\mathrm{eq}} - 4\pi, \qquad C_* = 2A_{\mathrm{eq}} + 8\pi.$$

关于共形类唯一性的陈述是在模空间中理解的：不同微分同胚拉回所得的类被视为相同。这里并未断言在固定参数化环面上标记共形类的唯一性。

定理 2.1。 对于环面上的任意光滑度量 g，

$$\lambda_2(T^2, g)\,\mathrm{Area}(T^2, g) < C_*.$$

然而 $\Lambda_2(T^2) = C_*$。此外，

$$\Lambda_2(T^2, \mathcal{C}) = C_* \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{C} = [g_{\mathrm{eq}}].$$

上确界可由等边共形类中的一列度量逼近，该列度量会形成一个圆形球形气泡。

定理 2.1 中的值是 $k = 2$ Kao–Lai–Osting 猜想的情形 [10, 9]。本文不对所有高阶特征值作出断言。Kang [9] 将尚未解决的模空间化为

$$\mathcal{K} = \{0 \le a \le 1/2, \quad \sqrt{1-a^2} \le b \le 44/25\}. \tag{5}$$

我们还在第 11 节为互补模给出了一个明确的有理端点证明，因此边界 $44/25$ 不依赖于对数值图进行舍入。

证明使用了下文所述的标准基本共形嵌入 F_r 到S^5。其面积为 $A(r)$。对于 $v \in B^6$ 定义

$$k_v(y) = \frac{1-|v|^2}{1+|v|^2+2v\cdot y}, \qquad J(r,v) = \int_{T^2} \left(k_v(F_r)^2 - \frac{L}{A(r)} \right)_+ dA_r.$$

此处 $x_+ = \max\{x, 0\}$。对目标空间作正交变换不会改变面积公式；经过这样的变换后， S^5 的每个共形变换都有这种形式的面积因子。

定理 2.2 (截断共形面积)。 对于每个模属于 K 的基本嵌入以及每个 $v \in B^6$,

$$J(r, v) \le 4\pi. \tag{6}$$

当且仅当 $r_1 = r_2 = r_3 = 1/3$ 且 $v = 0$时，等号成立。

该估计涵盖每个目标方向以及源环面上的所有共形密度。其证明划分为以下完备的参数域，其中 $R = r_1$、 $s = |v|$、 $R_* = 1936/2561$ 和 $\sigma(R) = (2 + 52R - 32R^2)/25$。

权重范围	中心范围	证明组件
$1/3 \le R \le R_*$	$0 \le s \le 1/4$	解析性（定理 6.2）
$1/3 \le R \le 7/20$	$1/4 \le s \le 19/20$	解析性（定理 7.6）
$7/20 \le R \le R_*$	$1/4 \le s \le \sigma(R)$	经认证的乘积不等式（引理 10.1）
$7/20 \le R \le R_*$	$\sigma(R) \le s < 1$	精确有理数证书和嵌套条带（定理 9.1）
$1/3 \le R \le R_*$	$47/50 \le s < 1$	解析性（第 8节）

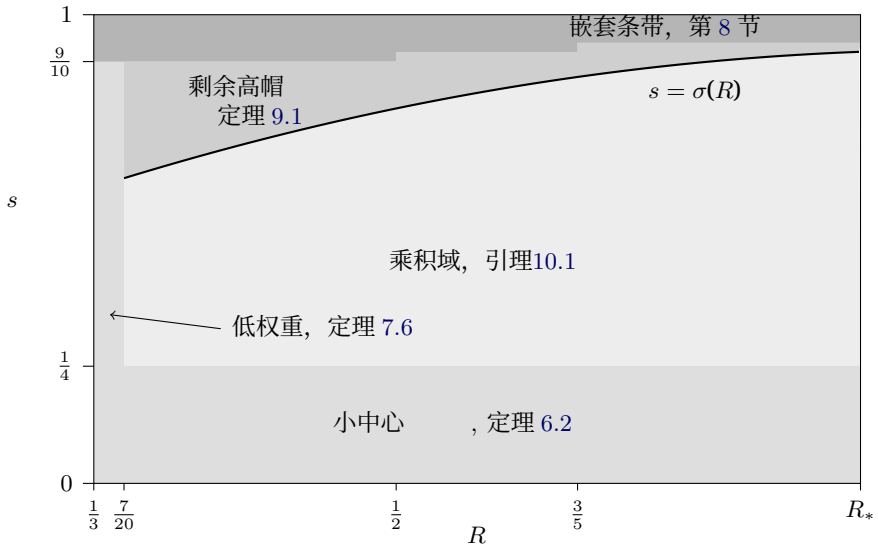

图 1。定理 2.2 在 $(R,\ s)$-矩形中的证明所对应的参数域。乘积域的上界为 $s = \sigma(R)$；剩余高帽位于 $\sigma(R)$ 与 $s_{\mathrm{top}}(R)$ 之间，即嵌套条带的下边缘。

图1 展示了这些参数域。低权重界在第 7 节中建立，嵌套高中心估计则在第 8 节中建立。定理 9.1通过精确有理数证书涵盖剩余高帽，该证书也通过球算术独立验证。引理 10.1涵盖乘积域；它由两份独立证书建立，这两份证书还涵盖略大的中心半径范围。有限验证对闭参数盒给出界限，其完整验证记录见附录 D。附录 E 在乘积域的三个子条带上以精确有理数运算证明 $J < 4\pi$，并且在其中一部分上证明引理 10.1 本身的界；这项独立检查未用于证明。

3. 折叠蕴含

对于闭球冠 $C \subset S^n$，令 ι_C 为关于球面 ∂C 对 S^n 的保角反射，并令 Fold_C 为如下映射：在 C 上等于恒等映射，在 $S^n \setminus C$ 上等于 ι_C。反射 ι_C 反转定向。S^n 的保角自同构 M 将闭球冠映射为闭球冠，并满足 $M \circ \iota_{M^{-1}(C)} = \iota_C \circ M$；因此

$$\mathrm{Fold}_C \circ M = M \circ \mathrm{Fold}_{M^{-1}(C)},$$

因此，折叠与和保角自同构的复合可以按任意顺序进行。

引理 *3.1*（共形折叠）。设 $F\colon T^2 \to S^n$ 是一个光滑嵌入，g 是一个光滑度量，并固定 g的第一特征函数 u_1 。存在 S^n 的一个保角自同构 M，使得 $G = M \circ F$，或对于某个闭球冠 C，$G = M \circ \mathit{Fold}_C \circ F$，是 $H^1(T^2, S^n)$ 中的一个映射，其坐标函数在 $L^2(g)$ 中与 1 和 u_1 均正交。在第二种情形下，G 在 $F^{-1}(C)$ 上与 $M \circ F$一致，而在其补集上与 $(M \circ \iota_C) \circ F$一致。

这是 Eddaoudi 和 Girouard 的折叠引理 [3, 引理 2.8], ，其形式见 Kang [9, 已发表论文中的引理 2.2]并在那里得到证明。该方法可追溯至 Nadirashvili [20] 以及 Girouard、Nadirashvili 和 Polterovich [5]；另见 [23]。Karpukhin 和 Stern [14,命题 1.20]采用同样的双部分构造：将一个共形伸缩与一个映射复合，该映射在一个帽上为恒等映射、在其补集上为保角反射，从而得到界 $\Lambda_2(\Sigma, [g]) \le 4V_c(\Sigma, [g])$。首先对 dA_g的推前进行共形平衡。若其与 u_1 的相关性已经为零，则第一种情形适用。否则，沿一个球形帽进行折叠，再次进行平衡，并通过帽子族上的度论证得到一个帽，使折叠后的映射与 u_1正交。在每一部分上，所得映射都是全局定义的共形映射的复合；在 $F^{-1}(C)$ 的补集上，施加于 F的共形映射为 $M \circ \iota_C$；当 M 保持定向时，该映射会反转定向。与 S^n的每个共形变换一样，它是一个共形伸缩后接一个正交变换，因此其面积因子再次具有 k_w的形式；这正是公式 (7) 所利用的性质。我们使用该引理关于正交性的结论，以及两个分别计算的能量积分；这些积分相等既未被假设，也不是必需的。

现在假设 F 是共形映射，并以 dA_F 表示其诱导面积元。二维狄利克雷能量的共形不变性给出

$$\mathcal{E}(M_v \circ F) := \frac{1}{2}\int |d(M_v \circ F)|_g^2 dA_g = \int k_v(F)^2\, dA_F.$$

对于由部分 D 和 D^c组成的折叠映射，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(G) &= \int_D k_v(F)^2\, dA_F + \int_{D^c} k_w(F)^2\, dA_F \\ &\le \int \max\{k_v(F)^2, k_w(F)^2\}\, dA_F. \end{aligned} \tag{7}$$

初等不等式

$$\max\{x, y\} \le c + (x-c)_+ + (y-c)_+$$

因此与定理2.2 结合可得

$$\mathcal{E}(G) \le L + 8\pi = A_{\mathrm{eq}} + 4\pi. \tag{8}$$

如果任一中心在（6）中满足严格不等式，则此界为严格界。唯一剩下的可能性是两个中心均为零的等边嵌入，此时 $\mathcal{E}(G) = A_{\mathrm{eq}}$ 且严格性再次成立。单映射情形可通过取两个相同的中心得到。

记作 $G=(G_1,\ \dots,\ G_{n+1})$，瑞利原理给出

$$\lambda_2(g)\int G_i^2\,dA_g \le \int |dG_i|_g^2\,dA_g.$$

求和并利用 $\sum G_i^2=1$ 可得

$$\lambda_2(g)\,\mathrm{Area}(g) \le 2\mathcal{E}(G) < 2A_{\mathrm{eq}}+8\pi = C_* \tag{9}$$

对 $\mathcal{K}$ 中的所有模空间均成立。即使 λ_1 具有重数，只需与选定的一个第一特征函数正交即可，因为特征值按重数排列。

4. 基本嵌入与一参数约化

设 $0\le a\le \frac{1}{2}$和 $b\ge \sqrt{1-a^2}$。令

$$d=a(1-a),\qquad D=1+b^2-d,\qquad r_1=\frac{D-1}{D},\quad r_2=\frac{1-a}{D},\quad r_3=\frac{a}{D}.$$

权重满足 $r_1\ge r_2\ge r_3\ge 0$ 且 $\sum r_i=1$。标准的基本浸入 [1], 在对一个复坐标取共轭的意义下为

$$F_r(\theta_1,\theta_2)=\left(\sqrt{r_1}e^{i\theta_1},\sqrt{r_2}e^{i\theta_2},\sqrt{r_3}e^{-i(\theta_1+\theta_2)}\right)\in S^5.$$

为确定源模数，取 $\theta_1=2\pi y/b$ 和 $\theta_2=2\pi(x-ay/b)$ 于$\mathbb{R}^2/\langle(1,0),\ (a,b)\rangle$。诱导度量为 $(4\pi^2/D)(dx^2+dy^2)$，因此这是模为 $a+ib$ 的环面的相似共形嵌入。其诱导度量是平坦的，面积为

$$A(r)=4\pi^2\sqrt{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}=\frac{4\pi^2 b}{D}.$$

当 $r_3=0$ 时，这些结论仍然成立：此时像是赤道 S^3中的嵌入的乘积环面。

记 $R=r_1$。对于固定的 R，初等不等式 $r_2r_3\le(1-R)^2/4$给出

$$A(r)\le \overline{A}(R):=2\pi^2\sqrt{(1-R)(1+3R)}\le A_{\mathrm{eq}}. \tag{10}$$

在剩余的模空间区域 $b\le 44/25$ 中，我们有

$$\frac{1}{3}\le R\le R_*:=\frac{1936}{2561}. \tag{11}$$

事实上，$D\le 1+b^2$和 $R=1-D^{-1}$。上界中的等号在 $a=0$、$b=44/25$ 处取得。

对于单位环境向量 p，令 $q=p\cdot F_r$。傅里叶正交性和恒定的诱导面积元意味着

$$\int q\,dA=0,\qquad \frac{1}{A(r)}\int q^2\,dA=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} r_i|p_i|^2\le\frac{R}{2}, \tag{12}$$

其中 p_i 是 p的三个复坐标分量。

4.1. **精确法曲率**。

引理 4.1。 若 II 表示 F_r的球面第二基本形式，则

$$\kappa_r := \max_{|X|=1} |\mathrm{II}(X,X)| = \sqrt{D-1} = \sqrt{\frac{R}{1-R}}.$$

证明。 在环面的平坦物理坐标中，与角度 ϑ 相对应的诱导单位切向量的三个方向频率为

$$\ell_1 = \sqrt{D}\,\frac{\sin\vartheta}{b},$$
$$\ell_2 = \sqrt{D}\left(\cos\vartheta - \frac{a\sin\vartheta}{b}\right), \quad \ell_3 = \sqrt{D}\left(\cos\vartheta + \frac{(1-a)\sin\vartheta}{b}\right).$$

它们的加权二阶矩为 1。因此，直接微分可得$|\mathrm{II}(X,X)|^2 = \sum r_i\ell_i^4 - 1$。令 $c = \cos\vartheta$, $s = \sin\vartheta$，展开可得

$$\sum r_i\ell_i^4 = D\left[c^4 + \frac{6d}{b^2}c^2s^2 + \frac{4d(1-2a)}{b^3}cs^3 + \frac{b^2-3d^2}{b^4}s^4\right].$$

从（c^2+s^2）中减去括号内的项，得到

$$s^2(A_0c^2 - B_0cs + C_0s^2),$$
$$A_0 = 2 - \frac{6d}{b^2}, \qquad B_0 = \frac{4d(1-2a)}{b^3}, \qquad C_0 = 1 - \frac{1}{b^2} + \frac{3d^2}{b^4}.$$

令 $u = b^2 - (1-a^2) \geq 0$。则 $A_0 \geq 0$，因为 $b^2 - 3d = u + (1-a)(1-2a)$。$C_0$ 的分子在 $u = 0$ 处等于 $2a^2(1-a)(1-2a)$，且随$b^2 \geq 3/4$递增。最后，

$$\frac{b^6}{2}\left(A_0C_0 - \frac{B_0^2}{4}\right) = u(u+1-2a)(u+1-a) \geq 0.$$

该二次型是非负的，从而证明了 $\sum r_i\ell_i^4 \leq D$。当 $\sin\vartheta = 0$时等号成立。□

4.2. **全局法向弦估计**。

引理 4.2。 对于像上的任意两点 F_0、 F ，

$$|\operatorname{proj}_{N_{F_0}} F| \leq \kappa_r(1 - F_0\cdot F),$$

其中 N_{F_0} 是球面中的法空间。球面法向单射半径至少为$\arctan(1/\kappa_r)$。

证明。 由齐次性，不妨取 $F_0 = F_r(0)$。首先假设所有权重均为正。记 $\theta_1+\theta_2+\theta_3 = 0$ 并令 $x_i = 1-\cos\theta_i$, $z = \sum r_ix_i = 1 - F_0\cdot F$, $P = \sum\sin\theta_i$, $S = \sum r_i^{-1}$. 三角恒等式

$$P^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2\sum x_i^2 = 2x_1x_2x_3$$

成立，因为 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=0$。将 $\mathbb{C}^3$ 与 $\mathbb{R}^6$ 等同。在 $F_0=(\sqrt{r_1},\sqrt{r_2},\sqrt{r_3})$ 处，切向量为 $i(\sqrt{r_j}\,a_j)_j$，其中 $\sum a_j=0$，因此球面法空间为

$$N_{F_0}=\Big\{(\xi_j+i\lambda r_j^{-1/2})_j:\ \sum_j \sqrt{r_j}\,\xi_j=0,\ \lambda\in\mathbb{R}\Big\}.$$

实部 $(\sqrt{r_j}\cos\theta_j)_j$ 投影为 $(\sqrt{r_j}\,(z-x_j))_j$，其长度的平方为 $\sum r_j x_j^2 - z^2$。虚部 $(\sqrt{r_j}\sin\theta_j)_j$ 投影到单位向量 $S^{-1/2}(r_j^{-1/2})_j$ 上，系数为 $P/\sqrt{S}$。因此

$$|\operatorname{proj}_{N_{F_0}} F|^2=\sum r_i x_i^2 - z^2 + \frac{P^2}{S} = x^{\mathsf T}M_r x - z^2,$$
$$M_r=\operatorname{diag}(r_i-2/S)+S^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf T}.$$

矩阵 M_r 是正定的。其缩放矩阵 SM_r 的对角线元素为正；其主二阶子式为 $Sr_ir_j/r_k>0$，且其行列式为4。

集合

$$\{x:\ r\cdot x=1,\ (\textstyle\sum x_i)^2\ge 2\sum x_i^2,\ \sum x_i\ge 0\}$$

是一个紧椭圆盘，是洛伦兹锥的一个截面。这个正向锥包含于非负卦限中。凸函数 $x\mapsto x^{\mathsf T}M_r x$ 在这个紧凸集上的最大值于某个极点处取得，因此在边界 $(\sum x_i)^2=2\sum x_i^2$ 上取得。这个边界方程等价于 $4x_1x_2=(x_3-x_1-x_2)^2$。对于一个非负解，令 $t_1=\sqrt{x_1}$、$t_2=\pm\sqrt{x_2}$ 取 $x_3-x_1-x_2$ 的符号，并令 $t_3=-t_1-t_2$；则 $x_i=t_i^2$、$\sum t_i=0$ 和 $\sum r_i t_i^2=1$，从而 $X=i(\sqrt{r_j}\,t_j)_j$ 是在 F_0 处的单位切向量。在边界上，$x^{\mathsf T}M_r x$ 的最后两项相互抵消，法向弦商为

$$\sum r_i t_i^4 - 1 = |\mathrm{II}(X,X)|^2 \le \kappa_r^2.$$

x 中的齐次性证明了所述不等式。由连续性可得情形 $r_3=0$；极限环面仍然是嵌入的。

对于 F_0 处的单位球面法向量 n，令 $p=\cos\eta\,F_0+\sin\eta\,n$。刚刚证明的估计给出

$$p\cdot F\le \cos\eta-(\cos\eta-\kappa_r\sin\eta)(1-F_0\cdot F).$$

若 $\eta<\arctan(1/\kappa_r)$，则 F_0 是该高度函数的唯一极大点。这证明了法向单射性断言，包括最近点的唯一性。□

4.3. 高帽的面积密度。

引理 4.3. *设 $q=p\cdot F_r$ and $m=$ 最大值 q。若 $\sqrt{R}<t<m$，则超水平集 $\{q>t\}$ 是一个圆盘，且其面积密度满足*

$$-\frac{d}{dt}\operatorname{Area}\{q>t\}\le\frac{2\pi(1-R)}{t-Rm-\sqrt{R(1-R)(1-m^2)}}. \tag{13}$$

证明。我们使用 F_r 的平坦诱导度量 g，其梯度为 ∇，Hessian 矩阵记为 Hess；法丛 F_r 在 S^5 中的法联络记为 $\nabla^\perp$，并记 $\kappa = \kappa_r$。在每一点，将固定向量分解为

$$p = q\,F_r + \nabla q + n,$$

其中 n 在 S^5中与 F_r 正交。沿切向量 X 求导，并分离切向与法向分量，得到

$$\operatorname{Hess} q(X,Y) = -q\langle X,Y\rangle + \langle \mathrm{II}(X,Y), n\rangle, \qquad \nabla^\perp_X n = -\mathrm{II}(X,\nabla q). \tag{14}$$

对于单位法向量 ν，对称型$\langle \mathrm{II}(\cdot,\cdot)\ \nu\rangle$ 满足 $|\langle \mathrm{II}(X,X)\ \nu\rangle| \le \kappa|X|^2$，因此其特征值位于 $[-\kappa,\kappa]$中；从而 $|\mathrm{II}(X,Y)| \le \kappa|X||Y|$。

临界点与拓扑。 由于 $|n|^2 = 1 - q^2 - |\nabla q|^2 \le 1 - q^2$，得到 (14)

$$-\operatorname{Hess} q \ge (q - \kappa\sqrt{1-q^2})g,$$

且当且仅当 $q^2 > \kappa^2/(1+\kappa^2) = R$。因此，$q$ 在 $\{q > \sqrt{R}\}$ 中的每个临界点都是非退化局部极大值。在这样的点x_0 处，有 $p = q\,F_r(x_0) + n$，即 $p = \cos\eta\,F_r(x_0) + \sin\eta\,\nu$，其中单位法向量为 ν，且 $\cos\eta = q > \sqrt{R}$，因此 $\eta < \arctan(1/\kappa)$；由引理 4.2，x_0 是唯一的全局极大值点。因此，对于 $\sqrt{R} \le t < m$，q 在 $\{q \ge t\}$ 中唯一的临界点是极大值点 x_m，而 $[t,m)$ 中的每个值都是正则值。在 x_m 附近，由 Morse 引理可知超水平集是小圆盘，而 $\nabla q/|\nabla q|^2$ 的流将每个水平集 $\{q = t'\}$ 微分同胚地映到 $\{q = t''\}$，其中 $t \le t' < t'' < m$。因此，$D_t = \{q \ge t\}$ 是一个边界光滑的闭圆盘 $\Gamma_t = \{q = t\}$，而 $\{q > t\}$ 是其内部。

法向分量。 令 $x \in \Gamma_t$ 并令 γ 为$\nabla q/|\nabla q|^2$ 经过 x的积分曲线。沿着 γ，函数 q 以单位速度递增，并且γ 趋于 x_m，当 $q \to m$时，因为 D_t 不包含其他临界点。由（14）可知，函数 $|n|$ 沿 γ是 Lipschitz 的，且

$$\left|\frac{d|n|}{dq}\right| \le |\nabla^\perp_{\gamma'} n| = |\mathrm{II}(\gamma', \nabla q)| \le \kappa|\gamma'||\nabla q| = \kappa,$$

并且 $|n| = \sqrt{1-m^2}$ 在 x_m处，其中 $\nabla q = 0$。从 $q = t$ 积分到 $q = m$，得到 $|n| \le \sqrt{1 - m^2 + \kappa(m-t)}$ 在 x处。

水平曲线的曲率。 将此上界代入（14），我们在 Γ_t

$$-\operatorname{Hess} q \ge \beta(t)\,g, \qquad \beta(t) = (1+\kappa^2)t - \kappa^2 m - \kappa\sqrt{1-m^2}.$$

函数 $\mu \mapsto \kappa^2\mu + \kappa\sqrt{1-\mu^2}$ 在 $\mu > \sqrt{R}$时递减，因此它在 m 处的值至多等于其在 t处的值，并且 $\beta(t) \ge t - \kappa\sqrt{1-t^2} > 0$。令 T为 Γ_t 的单位切向量，令 $\nu = \nabla q/|\nabla q|$ 为指向 D_t内部的法向量。沿着 Γ_t对 $\langle \nabla q,\ T\rangle = 0$ 求导，可知相对于 ν，Γ_t的测地曲率为 $k_g = -\operatorname{Hess} q(T,\ T)/|\nabla q| \ge \beta(t)/|\nabla q|$。

高斯–博内定理与余面积。 度量 g 是平坦的，因此圆盘的高斯–博内公式 D_t 给出 $\int_{\Gamma_t} k_g\,ds = 2\pi$，从而得到 $\int_{\Gamma_t} |\nabla q|^{-1} ds \le 2\pi/\beta(t)$。

$(\sqrt{R}, m)$ 中的所有值都是正则值，余面积公式给出

$$-\frac{d}{dt}\,\mathrm{Area}\{q > t\} = \int_{\Gamma_t} \frac{ds}{|\nabla q|} \le \frac{2\pi}{\beta(t)}.$$

最后 $1+\kappa^2 = 1/(1-R)$，$\kappa^2/(1+\kappa^2) = R$ 和 $\kappa/(1+\kappa^2) = \sqrt{R(1-R)}$构成 $2\pi/\beta(t)$，即（13）的右侧。□

5. 截断共形面积的标量主控函数

表1 汇总了全文使用的符号。

符号	含义
$r = (r_1, r_2, r_3)$，$R = r_1$	基本嵌入的权重 F_r 以及最大的权重（第4节）
R_*	$1936/2561$，R 在$\mathcal{K}$上的最大值
$A(r)$，$\overline{A}(R)$	F_r 的面积及其包络 $2\pi^2\sqrt{(1-R)(1+3R)} \ge A(r)$
A_{eq}，L	$4\pi^2/\sqrt{3}$ 和 $A_{\mathrm{eq}} - 4\pi$
$c(r)$，$\bar{c}(R)$	截断水平 $L/A(r) \ge L/A(\overline{R})$
p，v，s	一个单位向量、共形中心 $v = -sp$及其半径 $s = \lvert v\rvert$
q, m	高度 $p\cdot F_r$ 及其最大值
$k_s(q)$，$f_{R,s}(q)$	$(1-s^2)/(1+s^2-2sq)$和 $\big(k_s(q)^2 - \bar{c}(R)\big)_+$
κ_r	法曲率常数 $\sqrt{R}/(1-R)$ (引理 4.1)
$J(r, v) = J(r, s, p)$	截断共形面积（3）
$\mathcal{P}(R, s, \alpha)$	乘积上界函数（命题 5.1）
$\sigma(R)$，$s_{\mathrm{top}}(R)$	$(2+52R-32R^2)/25$，乘积区域的上边界定义域，以及嵌套高中心的下边界条带（第9节）
t	$s/(1+s^2)$ 见第6 节和第7 节，以及附录A 和E；其他地方则表示局部参数
$\overline{R}$	在第9节中，R 在一个盒上的有理上界

表1. 主要符号。

所有其他字母，如 x, z, b, B, D, H, K, M, N, P, Q, V以及希腊字母 β, γ, δ, η, ρ, τ, χ, ω，均表示辅助量，其含义仅限于引入它们的章节或证明。

Put

$$L = A_{\mathrm{eq}} - 4\pi, \quad c(r) = L/A(r), \quad \bar{c}(R) = L/\overline{A}(R),$$

$$k_s(q) = \frac{1-s^2}{1+s^2-2sq}.$$

对于 $v = -sp$，所需的单中心估计为

$$J(r, v) := \int \big(k_s(p\cdot F_r)^2 - c(r)\big)_+ \, dA \le 4\pi.$$

令 $f_{R,s}(q) = (k_s(q)^2 - \bar{c}(R))_+$。这是关于 q 的凸函数。不等式 $c(r) \ge \bar{c}(R)$ 允许将被积函数替换为$f_{R,s}$。

命题 5.1（乘积上界函数）。对于每个中心 $v = -sp$,

$$J(r,v) \le \sup_{0\le\alpha\le 1} \mathcal{P}(R,s,\alpha),$$

其中

$$\mathcal{P}(R,s,\alpha) = \frac{\overline{A}(R)}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{R,s}\big(\sqrt{R}\alpha\cos u + \sqrt{1-R}\sqrt{1-\alpha^2}\cos w\big)\,du\,dw.$$

证明。分离出第一坐标的贡献，其中 $\alpha = |p_1|$。固定u后，另外两项可合并为关于 w 的一个余弦函数，其振幅至多为

$$\sqrt{r_2}|p_2| + \sqrt{r_3}|p_3| \le \sqrt{1-R}\sqrt{1-\alpha^2}.$$

对于每个凸函数 f， $f(x + h$余弦 $w)$ 的圆周平均值关于 $h \ge 0$ 单调不减。这可以通过在其导数中配对相反的余弦值得到，也可以直接由凸序得到。诱导面积元为常数。最后用更大的 $A(R)$ 替代其总面积。□

命题 5.2（帽函数加二次上界）。取 $t > \sqrt{R}$， $\xi \in \mathbb{R}$，以及 $C \overline{\ge} 0$ 使得

$$f_{R,s}(q) \le Q(q) := C(q-\xi)^2 \qquad (-1 \le q \le t).$$

则 J（r， v）有界于

$$\mathcal{U}(R,s,m;t,\xi,C) = \overline{A}(R)C(R/2+\xi^2) + 2\pi(1-R)\int_t^m \frac{[f_{R,s}(q) - C(q-\xi)^2]_+}{q - Rm - \sqrt{R(1-R)(1-m^2)}}\,dq$$

当 $m = \max$（$p \cdot F_r$） $> t$ 时。如果 $m \le t$，仅第一项就是一个有效的上界。

证明。利用 Q 式（12）以及 A（r） $\le$ A（R)¯进行积分。其正超额支集位于 t之上，引理4.3适用于此处。□

6. 小共形中心的解析界

沿用第 4–5 节的记号，令 $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}A/A(r)$ 表示归一化面积测度， $c(R)$ $= L/A(R)$ $= \bar{c}(R)$, ¯ $f_s(h)$ $= k_s(h)^2$, 以及 $R_* = 1936/2561$。本节的解析定理涵盖完整条带 $s \le 1/4$。其有限系数不等式是关于 $\mathbb{Q}$ 的陈述，详见附录 A；证明不使用区间舍入或采样。

以下界由初等傅里叶恒等式和算术—几何平均不等式推出；它们对 $1/3 \le R \le 2/3$ 成立：

$$\mathbb{E}_\mu q = 0, \qquad \mathbb{E}_\mu q^2 \le R/2, \qquad |\mathbb{E}_\mu q^3| \le R/4, \qquad \mathbb{E}_\mu q^4 \le 5R^2/8. \tag{15}$$

事实上，吸收相位后，将 $q=\sum_{i=1}^{3}a_i$ 写为 $\cos\theta_i$，其中 $\theta_3=-\theta_1-\theta_2+\phi$、$a_i\ge 0$、$S=\sum a_i^2\le R$。于是

$$\mathbb{E}_\mu q^2=S/2,\quad \mathbb{E}_\mu q^3=\tfrac{3}{2}a_1a_2a_3\cos\phi,\quad \mathbb{E}_\mu q^4=\tfrac{3}{4}S^2-\tfrac{3}{8}\sum_i a_i^4,$$

以及 $a_1a_2a_3\le (S/3)^{3/2}$。

令 $t=s/(1+s^2)\in[0,1/2)$。由于 $(1-s^2)^2=(1+s^2)^2-4s^2$，有 $k_s(h)^2=(1-4t^2)/(1-2th)^2$；记作

$$f_t(h)=\frac{1-4t^2}{(1-2th)^2},$$

在下述四次构造中，每个量都视为 t 的函数。固定 $x=-1/5$、$y=1/4$ 和 $d=y-x=9/20$。定义

$$\begin{aligned}
u_2&=\frac{f_t(y)-f_t(x)-f_t'(x)d}{d^2},\\
u_3&=\frac{f_t'(y)-f_t'(x)-2u_2d}{d^2},\\
u_4&=\frac{f_t(1)-f_t(x)-f_t'(x)(1-x)-u_2(1-x)^2-u_3(1-x)^2(1-y)}{(1-x)^2(1-y)^2}
\end{aligned}$$

以及四次多项式

$$\begin{aligned}
H_t(h)&=f_t(x)+f_t'(x)(h-x)+u_2(h-x)^2\\
&\quad+u_3(h-x)^2(h-y)+u_4(h-x)^2(h-y)^2=\sum_{j=0}^{4}h_j(t)h^j.
\end{aligned}\tag{16}$$

当 $0<t<1/2$ 时，f_t 的五阶导数为正。厄米特余项给出

$$f_t(h)-H_t(h)=\frac{f_t^{(5)}(\xi_h)}{5!}(h-x)^2(h-y)^2(h-1)\le 0\qquad(-1\le h\le 1).$$

对于 $t=0$，该多项式恒为 1。

引理 6.1 (矩包络)。设 $1/3\le R\le 2/3$，并假设$h_2(t)\ h_3(t)\ h_4(t)\ \ge 0$。则

$$\mathbb{E}_\mu H_t(q)\le B(R,t):=h_0(t)+\left(\frac{h_2(t)}{2}+\frac{h_3(t)}{4}\right)R+\frac{5}{8}h_4(t)R^2.\tag{17}$$

证明。线性项消失，这是因为 $\mathbb{E}_\mu q=0$。矩界（15）以及 h_2、h_3、h_4 的符号界定了其余三项。□

6.1. **一致小中心定理**。

定理 6.2（一致解析小中心界）。对于所有满足 $1/3\le R\le R_*$ 的齐次基本环面、所有单位方向 p 以及所有 $0\le s\le 1/4$，都有

$$\boxed{J(r,s,p)\le 4\pi.}$$

对于 $0 \le t \le 4/17$，也就是说，对于 $0 \le s \le 1/4$，式（16）的 Hermite 插值多项式 H_t 在全局上有下界 $1/2$，该下界在 $[-1,1]$ 上成立，并且满足 h_2，h_3，$h_4 \ge 0$。附录 A中的精确六矩形伯恩斯坦证书证明了这一点；因此，引理 6.1 适用于这些 t值。

引理 6.3（小中心有理数比较）。 对于 $0 \le t \le 4/17$ ，以下结论成立。

(1) If $1/3 \le R \le 5/8$, *then*

$$B(R,t) \le 1 + \frac{9}{8}(R - 1/3)^2. \tag{18}$$

（2）如果 $5/8 \le R \le 2/3$ 且

$$U(R) = \frac{649}{625} - \frac{21}{25}\left(R - \frac{5}{8}\right),$$

then

$$U(R)\left(B(R,t) - \frac{49}{100}\right) \le \frac{7}{11}. \tag{19}$$

证明。 两个不等式都是精确有理正性陈述：将系数 $h_j(t)$ 的正的公分母 $D(t) = (2-t)^3(1-2t)(5+2t)^3$ 乘到两边后（每个 $D(t)h_j(t)$ 都是次数至多为 7 的多项式），其余式分别为

$$P_A = D(t)\left[1 + \frac{9}{8}(R - 1/3)^2 - B(R,t)\right],$$
$$P_B = D(t)\left[\frac{7}{11} - U(R)(B(R,t) - 49/100)\right].$$

在（1）的矩形上， P_A 是一个双次数为 $(7,\ 2)$的多项式；全部 24 个伯恩斯坦系数均为非负，其中 4 个为零，其余系数均大于 $1/2$。在（2）的矩形上， P_B 的双次数为 $(7,\ 3)$；全部 32 个系数均大于 $1/3$。这些系数由表3的有理形式和定义域代换得到；它们由补充程序 `small_centre_certificates.py`通过精确有理数运算计算得出，不涉及采样或舍入误差。□

定理 *6.2* 在 $R \le 2/3$时的证明。情形 I: $1/3 \le R \le 5/8$。我们有$c(R) \le c(5/8) < 1/2$。如需进行基本的严格有理数检验，请使用 $\sqrt{3} > 265/153$， $\pi < 22/7$ 以及 $\sqrt{69} > 83/10$ 以得到

$$c(5/8) = \frac{8}{\sqrt{69}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\pi}\right) < \frac{80}{83}\left(\frac{306}{265} - \frac{7}{11}\right) = \frac{24176}{48389} < \frac{1}{2}.$$

由于 $f_t \le H_t$ 和 $H_t \ge 1/2 > c$（R），且由于 $L/A \ge c$（R），

$$\left(f_t(q) - \frac{L}{A}\right)_+ \le H_t(q) - c(R).$$

积分并应用引理 6.1 可得 $J \le A(R)\,B(R,\ t)^{-} - L$。最后，由于

$$\frac{A_{\mathrm{eq}}}{\overline{A}(R)} = \left(1 - \frac{9}{4}(R-1/3)^2\right)^{-1/2} \ge 1 + \frac{9}{8}(R-1/3)^2 \ge B(R,t),$$

我们得到 $J \le A_{\mathrm{eq}} - L = 4\pi$。

情形 *II*: $5/8 \le R \le 2/3$。这里 $c(R) \ge c(5/8) > 49/100$。事实上，$\sqrt{3} < 26/15$、$\pi > 157/50$ 和 $\sqrt{69} < 25/3$ 蕴含

$$c(5/8) > \frac{24}{25}\left(\frac{15}{13} - \frac{100}{157}\right) = \frac{5064}{10205} > \frac{49}{100}.$$

由于 $H_t \ge 1/2 > 49/100$,

$$\left(f_t(q) - \frac{L}{A}\right)_+ \le H_t(q) - \frac{49}{100}, \quad \text{so} \quad J \le \overline{A}(R)\left(B(R,t) - \frac{49}{100}\right).$$

正函数 $\sqrt{(1-R)(1+3R)}$ 是凹函数。在 $R = 5/8$ 处，它是 $\sqrt{69}/8 < 649/625$，且导数为 $-7/\sqrt{69} < -21/25$。第二个比较由 $\sqrt{69} < 25/3$得出。因此，根据凹函数的切线不等式,

$$\sqrt{(1-R)(1+3R)} \le U(R) \qquad (5/8 \le R \le 2/3).$$

引理6.3 从而得到

$$J \le 2\pi^2\, U(R)\left(B(R,t) - \frac{49}{100}\right) \le \frac{14\pi^2}{11} < 4\pi,$$

其中最后一个不等式恰好就是 $\pi < 22/7$。 □

6.1.1. 关于 $2/3 \le R \le R_*$ 的二次证明。我们采用一个二次厄米特主控函数，从而避免处理更多的系数不等式。令$V = R/2 \in [1/3, R_*/2]$。记$H_{s,V}$为在 $-V$ 处与 f_s 相切、且在 1 处与 f_s 相等的二次厄米特多项式。f_s'''的正性使得$H_{s,V} \ge f_s$ 在 $[-1,1]$ 上成立。它在实数轴上的最小值可表示为

$$\min_{h\in\mathbb{R}} H_{s,V}(h) - \frac{1}{2} = \frac{N(s,V)}{2(1+s^2+2Vs)^3(3s^2+2Vs-4s+3)}, \tag{20}$$

with

$$\begin{aligned} N(s,V) &= 1 + a_7(s+s^7) + a_6(s^2+s^6) + a_5(s^3+s^5) + a_4 s^4 + s^8,\\ a_7 &= 4 - 4V, \quad a_6 = -20 + 8V - 40V^2,\\ a_5 &= 12 - 76V + 48V^2 - 48V^3,\\ a_4 &= -10 + 80V - 112V^2 + 32V^3 - 16V^4. \end{aligned}$$

对于 $1/6 \le V \le 19/50$ 和 $0 \le s \le 1/4$，界 $a_6 \le -98/5$、$a_5 \le 1$、$a_4 \le 23$、$a_7 \le 4$ 蕴含 $N_{ss} < -19$。此外

$$N_V \le -4s + 80s^4 \le -\frac{11}{4}s,$$

由于 $8-80V<0$、$-76+96V-144V^2<0$和 $a_4'\le 80$。因此，N关于 s 是凹的，并且关于 V是非递增的，而

$$N(s,V)\ge \min\{1,N(1/4,19/50)\}=\frac{173885049}{25600000000}>0. \tag{21}$$

因此 $H_{s,\ V}\ge 1/2$。

对于 $R\ge 2/3$，阈值满足

$$c(R)\ge c(2/3)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\pi}>\frac{15}{13}-\frac{20}{31}>\frac{1}{2},$$

利用 $\sqrt{3}<26/15$ 和 $\pi>31/10$。因此 $J\le A(\int H_{s,\ V}\,\mathrm{d}\mu-1/2)$。$H_{s,\ V}$ 中 h^2 的正系数以及矩界 $\int q^2\mathrm{d}\mu\le V$ 可得

$$\int H_{s,V}\,\mathrm{d}\mu\le F(s,V):=\frac{f_s(-V)+Vf_s(1)}{1+V}.$$

精确化简得

$$F(s,V)=1+\frac{4s^2Q(s,V)}{(1-s)^2(1+s^2+2Vs)^2},$$
$$Q(s,V)=(3V-1)(1+s^2)+(4V^2-2V+2)s.$$

对于 $V\ge 1/3$，Q 作为 s 的多项式时，其所有系数均为非负。此外

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(1-s)(1+s^2+2Vs)]=2V-1+(2-4V)s-3s^2\le -\frac{6}{25}+\frac{1}{6}<0$$

当 $V\le 19/50$且 $s\le 1/4$时。因此，$F(s,\ V)$随 $s\in[0,1/4]$增大，而

$$F(s,R/2)\le M(R):=F(1/4,R/2)=\frac{450/(17+4R)^2+25R/9}{2+R}.$$

直接微分可得

$$M'(R)=\frac{800(4R+35)}{9(4R+17)^3}\le M'(2/3)=\frac{90400}{205379}<\frac{1}{2}.$$

另一方面

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi\sqrt{(1-R)(1+3R)}}\right)$$
$$=\frac{6R-2}{\pi\big((1-R)(1+3R)\big)^{3/2}}\ge\frac{2}{\pi}>\frac{1}{2}\qquad(R\ge 2/3).$$

因此，所需的比较归结为 $R=2/3$，其中

$$M(2/3)=\frac{35425}{31329}<\frac{25}{22}<\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}.$$

由此可知

$$J\le \overline{A}(R)(M(R)-1/2)<4\pi,$$

证明定理 6.2中的最后一段范围。端点 $s=0$ 可由连续性得到，也可直接由 $J=(A-L)_+\le 4\pi$ 得到。

7. 低权共形帽的解析控制

设 $1/3 \le R \le 7/20$，$s \in [0, 19/20]$，以及 $q = p \cdot F_r$，其中 $d\mu = dA_r/A(r)$，并令 $c(R) = L/A(R)$ 如第 6 节所述。由于 $R \le 7/20 < 2/3$，矩界（15）成立。

7.1. 四次厄米特估计。我们使用(16)的四次厄米特插值多项式$H_t(h)$ $= \sum_{j=0}^{4} h_j(t)h^j$，其中 $t = s/(1+s^2)$，(17)的矩包络$B(R,t)$，以及在引理 6.3 的证明中引入的公分母 $D(t) = (2-t)^3(1-2t)(5+2t)^3$。对于 $0 \le t < 1/2$，厄米特余项公式给出，与第 6 节一样，

$$f_t(h) \le H_t(h) \qquad (-1 \le h \le 1). \tag{22}$$

定理 7.1。 对于满足 $1/3 \le R \le 7/20$的每个基本嵌入、每个单位环境方向 p以及每个 $1/4 \le s \le 17/40$，有

$$J(r, s, p) < 4\pi.$$

更确切地说，如果 $1/4 \le s \le 2/5$ 那么

$$J(r, s, p) \le 4\pi - \frac{3A_{\mathrm{eq}}}{3400}, \tag{23}$$

并且如果 $2/5 \le s \le 17/40$ 则

$$J(r, s, p) \le 4\pi - \frac{A_{\mathrm{eq}}}{14000}. \tag{24}$$

证明。首先，$A(R)$ 在 $R \ge 1/3$ 上递减，因此 $c(R) \le c(7/20)$。直接化简得到

$$c(7/20) = \frac{40}{\sqrt{533}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\pi}\right) < \frac{1000}{577}\left(\frac{153}{265} - \frac{7}{22}\right) = \frac{151100}{336391} < \frac{9}{20}.$$

这里仅需 $\sqrt{533} > 577/25$、$\sqrt{3} > 265/153$ 和 $\pi < 22/7$。中间的严格不等式和最后的整数比较都是初等的。

我们将使用以下精确的有理多项式不等式：

$$H_t(h) + \frac{(1-h)^2}{17} \ge \frac{9}{20}, \qquad B(R,t) \le \frac{93}{100}, \qquad \frac{4}{17} \le t \le \frac{10}{29}, \tag{25}$$

$$H_t(h) + \frac{(1-h)^2}{14} \ge \frac{9}{20}, \qquad B(R,t) \le \frac{229}{250}, \qquad \frac{10}{29} \le t \le \frac{680}{1889}. \tag{26}$$

两行对 $-1 \le h \le 1$ 和 $1/3 \le R \le 7/20$均成立h_2，h_3，$h_4 \ge 0$ 在这些区间内始终成立。系数不等式已在附录 A.2 中得到精确验证。这些断言未使用实参数采样或区间浮点计算。

选择 $\gamma = 1/17$ 作为第一条带中的元素，并选择 $\gamma = 1/14$ 作为第二条带中的元素。根据（22）、（25）–（26）以及 $c(R) < 9/20$，多项式

$$Q_t(h) = H_t(h) - c(R) + \gamma(1-h)^2$$

在 $[-1, 1]$ 上非负，并从上方界定 $f_t(h) - c(R)$。因此，

$$\left(k_s(h)^2 - c(R)\right)_+ \le Q_t(h) \qquad (-1 \le h \le 1).$$

由于 $A(r) \le \overline{A}(R)$，实际截断水平 $L/A(r) \ge c(R)$，因此

$$\begin{aligned} J(r,s,p) &\le A(r)\,\mathbb{E}_\mu Q_t(q) \\ &\le A(r)\left[B(R,t) - c(R) + \gamma\left(1+\frac{R}{2}\right)\right] \\ &\le \overline{A}(R)\left[B(R,t) + \gamma\left(1+\frac{R}{2}\right)\right] - L. \end{aligned}$$

对于第二个不等式，使用（15）以及 h_2、h_3、$h_4 \ge 0$。第三个不等式中的括号内表达式是非负的，因为它给出了非负多项式 Q_t的均值上界。

对于 $1/4 \le s \le 2/5$，由于 $R \le 7/20$,

$$B(R,t) + \frac{1}{17}\left(1+\frac{R}{2}\right) \le \frac{93}{100} + \frac{47}{680} = \frac{3397}{3400}.$$

对于 $2/5 \le s \le 17/40$,

$$B(R,t) + \frac{1}{14}\left(1+\frac{R}{2}\right) \le \frac{229}{250} + \frac{47}{560} = \frac{13999}{14000}.$$

最后，$\overline{A}(R) \le A_{\mathrm{eq}}$ 和 $L = A_{\mathrm{eq}} - 4\pi$ 给出（23）–（24，二者均严格低于4π。□

7.2. **帽核的精确积分**。这个原函数给出了帽上界函数的精确公式。设 $s > 0$, 并设 $c > 0$、$C \ge 0$、b 以及阈值 $T > \sqrt{R}$ 为常数；第7.4–7.5 小节和第 9 节会作出具体选择。置

$$P = 1 - s^2, \qquad B = 1 + s^2, \qquad \psi(q) = \frac{P^2}{(B-2sq)^2} - c - C(q+b)^2.$$

对于 $T \le m \le 1$ 集合

$$d = Rm + \sqrt{R(1-R)(1-m^2)}, \qquad D_d = B - 2sd.$$

基础帽估计为 $d \le \sqrt{R} < T$，因此每个分母均为正。令

$$A_0 = \frac{P^2}{D_d^2} - c - C(d+b)^2, \qquad E_0 = \frac{2sP^2}{D_d^2}, \qquad F_0 = \frac{2sP^2}{D_d}.$$

于是有精确恒等式

$$\frac{\psi(q)}{q-d} = \frac{A_0}{q-d} + \frac{E_0}{B-2sq} + \frac{F_0}{(B-2sq)^2} - C(q+d+2b).$$

因此：

命题 7.2。对于 $T \le m \le 1$,

$$\begin{aligned}\int_T^m \frac{\psi(q)}{q-d}\,dq = {} & A_0 \log\frac{m-d}{T-d} + \frac{E_0}{2s}\log\frac{B-2sT}{B-2sm} \\ & + \frac{F_0}{2s}\left(\frac{1}{B-2sm} - \frac{1}{B-2sT}\right) \\ & - C\left(\frac{m^2-T^2}{2} + (d+2b)(m-T)\right).\end{aligned} \tag{27}$$

因此，若 $c = \bar{c}(R)$、$f_{R,\ s} \le C(q+b)^2$ 在 $[-1,T]$ 上，而 $\psi \ge 0$ 在 $[T,1]$上，则命题 *5.2* 的界在 $t = T$ 和 $\xi = -b$ 下可写成闭式

$$\frac{J}{4\pi} \le \mathcal{U}(R,s,m) := \frac{\overline{A}(R)}{4\pi} C\left(\frac{R}{2} + b^2\right) + \frac{1-R}{2}\ \textit{the right-hand side of}\ (27). \tag{28}$$

因此，无需数值求积即可表达帽界义务。

证明。 逐项积分部分分式；由于 $d < T \le m$ 且 $B - 2sq > 0$ 对于 $q \le 1$，所有对数的真数均为正。该恒等映射在代数上关于 d 成立，因此对任意常数 $d < T$均成立；下文正是以这种方式，将 d替换为上界 $d(m)$后使用它。 □

7.3. **剩余低权帽的统一控制**。 以下有理代数论证涵盖整个低权重帽区域。结合定理 7.1 和 6.2，即可涵盖每个 $1/3 \le R \le 7/20$和 $0 \le s \le 19/20$。两个互补子范围采用共同的单调性原理。

引理 7.3（帽核的单调性）。 对于 $0 < R < 1$，令

$$d_R(m) = Rm + \sqrt{R(1-R)(1-m^2)}, \qquad m \in [-1,1].$$

每当 $d_R(m) < q \le m$ 时，均有

$$\frac{\partial}{\partial R}\frac{1-R}{q-d_R(m)} = \frac{m - q + \dfrac{1-R}{2\sqrt{R(1-R)}}\sqrt{1-m^2}}{(q-d_R(m))^2} \ge 0. \tag{29}$$

特别地，对于 $R \le 7/20$ 和 $q > \sqrt{7/20}$，帽密度核不大于与 $R = 7/20$相对应的帽密度核。

证明。 利用以下关系对商求导

$$\frac{d}{dR}\sqrt{R(1-R)} = \frac{1-2R}{2\sqrt{R(1-R)}}.$$

分子恰好化简为式 (29的分子。帽条件$q > d_R(m)$ 由 $q > \sqrt{7/20}$ 通过柯西–施瓦茨不等式□

我们将使用固定有理上界

$$\widehat{d}(m) = \frac{7}{20}m + \frac{12}{25}\sqrt{1-m^2} \ge d_{7/20}(m), \qquad \widehat{d}(m) \le \sqrt{\frac{3529}{10000}} < \frac{3}{5}. \tag{30}$$

事实上， $\sqrt{(7/20)(13/20)} = \sqrt{91}/20 < 12/25$。引理4.3的帽密度估计与引理7.3结合起来，现在给出标量界

$$\frac{J}{4\pi} \le \frac{A(r)}{4\pi}\,\mathbb{E}_\mu Q(q) + \frac{13}{40}\int_T^m \frac{\psi(q)}{q-\widehat{d}(m)}\,dq \tag{31}$$

每当 $Q \ge 0$ 是在$[-1,T]$上的非负截断的二次主控函数，且 ψ 是高于 $T > \sqrt{3529/100}$的非负超额；由（30），$\frown q - d\,(m) > 0$ 对于 $T \le q \le m$成立。省略了一个含有 $m \le T$ 的积分。

7.4. 中间中心， $17/40 \le s \le 149/200$。 在本小节余下部分，令

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{3}{5}, & \beta &= \frac{7}{24}, & c_0 &= \frac{4}{9},\\ P &= 1-s^2, & B &= 1+s^2, & & \\ C(s) &= \frac{P^2/(B-2s\tau)^2 - c_0}{(\tau+\beta)^2}. & & & & \end{aligned}$$

在所述区间 $C(s) > 0$ 中。设 $f_s(q) = (P^2/(B-2sq)^2 - c_0)_+$ 以及$Q_s(q) = C(s)(q+\beta)^2$。商 $f_s(q)/(q+\beta)^2$ 关于$q > q_0(s) := (5s^2-1)/(4s)$ 非递减。事实上，取 $z = B - 2sq$，其导数的符号与下式相同

$$c_0 z^3 - 2P^2 z + P^2(B + 2s\beta),$$

其在 $z \ge 0$ 上的最小值于 $z = P\sqrt{2/(3c_0)}$ 处取得，等于 $P^2(B+2s\beta - \frac{4}{3}\sqrt{2/(3c_0)}\,P)$。因此，对于 $c_0 = 4/9$，只要满足以下条件，三次式就是非负的：

$$B + 2s\beta \ge \frac{2\sqrt{6}}{3}\,P.$$

由于 $(49/30)^2 = 2401/900 > 8/3 = (2\sqrt{6}/3)^2$，只需满足 $g(s) = 1 + s^2 + \frac{7}{12}s - \frac{49}{30}(1-s^2) \ge 0$。函数 g 在 $s \ge 0$ 上递增，且 $g(17/40) = 4331/48000 > 0$。此外，在整个这一子区间内，$q_0(s) + \beta > 0$，并且 $q_0(s) < \tau$。因此，$f_s \le Q_s$ 在 $[-1,\tau]$ 上，而 $f_s \ge Q_s$ 在 $[\tau,1]$ 上。该处的帽超额为

$$\psi_s(q) = \frac{P^2}{(B-2sq)^2} - c_0 - C(s)(q+\beta)^2 \ge 0.$$

根据二阶矩估计 $\mathbb{E}q = 0$、$\mathbb{E}q^2 \le R/2$,

$$\frac{1}{4\pi}\int Q_s(q)\,dA_r \le \frac{\pi}{\sqrt{3}} C(s)\left(\frac{7}{40} + \beta^2\right) < \frac{363}{200}\frac{749}{2880}C(s).$$

这里 $\pi/\sqrt{3} < 363/200$ 可由经典有理数界 $\pi < 22/7$和 $\sqrt{3} > 265/153$推出。

^对于 $m \ge \tau$，令 $d = d\,(m)$，并引入

$$D = B - 2sd, \qquad T = B - 2s\tau, \qquad V = B - 2sm,$$
$$K = P^2/D^2, \qquad A_0 = K - c_0 - C(s)(d+\beta)^2 \le 0,$$
$$u = \frac{m-\tau}{m+\tau-2d}, \qquad v = \frac{s(m-\tau)}{B - s(m+\tau)}.$$

因此 $0 \le u,\ v < 1$。初等级数 $\log \frac{1+h}{1-h} = 2\sum_{k\ge 0} h^{2k+1}/(2k+1)$ 蕴含

(32)
$$\log \frac{m-d}{\tau-d} \ge 2\left(u + \frac{u^3}{3}\right), \qquad \log \frac{B-2s\tau}{B-2sm} \le 2\left(v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5(1-v^2)}\right).$$

根据原函数（27）、引理 7.3以及 $A_0 \le 0$，我们得到

$$\frac{J}{4\pi} \le W_{\mathrm{mid}}(s,y), \qquad m = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad 0 \le y \le \frac{1}{2}, \tag{33}$$

其中，下列表达式关于 s，y 是有理数：

$$W_{\mathrm{mid}} = \frac{363}{200}\frac{749}{2880}C(s) + \frac{13}{40}\Bigg\{2A_0\left(u + \frac{u^3}{3}\right) + 2K\left(v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5(1-v^2)}\right)$$
$$+ \frac{P^2}{D}\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{T}\right) - C(s)\left[\frac{m^2-\tau^2}{2} + (d+2\beta)(m-\tau)\right]\Bigg\}. \tag{34}$$

如果 $m < \tau$，则只需考虑第一项，该项等于 $W_{\mathrm{mid}}(s,\ 1/2)$，并且由同一个不等式控制。

引理 7.4（精确有理符号）。对于 $17/40 \le s \le 149/200$ 和 $0 \le y \le 1/2$,

$$W_{\mathrm{mid}}(s,y) < 1.$$

证明。精确有理正性证书，包括分母以及有理数矩形上的伯恩斯坦系数界，已在附录A.3中确立。□

7.5. 大型中间中心， $149/200 \le s \le 19/20$。根据 $c(R) \ge 1 - \sqrt{3}/\pi > 4/9$，正截断的支集位于

$$q > q_0(s) = \frac{5s^2-1}{4s}.$$

此阈值随 s 增大，并满足

$$q_0(s) \ge q_0(149/200) = \frac{14201}{23840} > \frac{\sqrt{3529}}{100} > \sqrt{7/20}.$$

^若 $m \le q_0$，则 $J = 0$。否则，令 $d = d(m)$，$D = B - 2sd$, $V = B - 2sm$, $K = P^2/D^2$,

$$u = \frac{m-q_0}{m+q_0-2d}, \qquad v = \frac{s(m-q_0)}{B - s(m+q_0)}, \qquad A_0 = K - \frac{4}{9} < 0.$$

再者 $0 \le u,\ v < 1$。由于 $B - 2sq_0 = 3P/2$，对帽密度直接积分、利用界 $\log((1+u)/(1-u)) \ge 2u$，以及将32式中的上界估计 τ 替换为 q_0，可得

$$\begin{aligned}\frac{J}{4\pi} &\le W_{\mathrm{end}}(s,m)\\ &:= \frac{13}{40}\Big\{2A_0u + 2K\left(v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5(1-v^2)}\right)\\ &\qquad + \frac{P^2}{D}\left(\frac{1}{V} - \frac{2}{3P}\right)\Big\}.\end{aligned} \tag{35}$$

设 $x = \sqrt{1-s}$ 和 $y = \sqrt{(1-m)/(1+m)} = xz$。则 $m = (1-x^2z^2)/(1+x^2z^2)$，且 $\sqrt{1-m^2} = 2xz/(1+x^2z^2)$。对于 $s \ge 149/200$，不等式 $5s^2 - s - 2 \ge 0$意味着 $0 \le y \le \sqrt{1-s} = x$。因此，实际参数域包含于有理矩形

$$\frac{1}{5} \le x \le \frac{101}{200}, \qquad 0 \le z \le 1.$$

这里 $1/5 < \sqrt{1/20}$ 和 $(101/200)^2 > 1 - 149/200$。代入后，$W_{\mathrm{end}}$是关于 $x,\ z$ 的有理函数。

引理 7.5 (精确有理符号)。在上述矩形上，有$W_{\mathrm{end}}(x, z) < 1$。

证明。 精确有理正性证书（包括分母以及有理矩形上的伯恩斯坦系数界）已在附录A.4中建立。□

定理 7.6 （整个低权重帽定义域）。 对于任意基本齐次环面、$1/3 \le R \le 7/20$、任意单位方向 p 以及任意$0 \le s \le 19/20$，都有

$$J(r,s,p) \le 4\pi,$$

等号仅在 $R = 1/3$ 和 $s = 0$时成立。该断言仅使用几何度量估计、初等积分，以及定理 *7.1*和引理 *7.4–7.5*中明确指定的有理多项式符号比较。

证明。 解析小中心定理（定理 6.2）涵盖 $0 \le s \le 1/4$及其尖锐等号情形。定理 7.1 严格涵盖 $1/4 \le s \le 17/40$。中间中心论证（33）和引理 7.4 严格涵盖 $17/40 \le s \le 149/200$。直接帽论证（35）和引理7.5 严格涵盖 $149/200 \le s \le 19/20$。这些区间在其有理数端点处相互重叠，因此没有遗漏任何参数。□

8. 共形帽的解析高中心估计

我们在最大权重和共形中心半径的嵌套条带上得到一致估计。记 $q = p \cdot F_r$ 和 $m = \max q$。帽密度

上界见引理 4.3。以下估计仅使用初等积分和有理不等式。为便于参考，我们设

$$A_{\mathrm{eq}} = \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}}, \qquad L = A_{\mathrm{eq}} - 4\pi, \qquad k_s(q) = \frac{1-s^2}{1+s^2-2sq},$$
$$J(r,s,p) = \int_{T^2} \left(k_s(q)^2 - \frac{L}{A(r)} \right)_+ dA_r.$$

普适阈值不等式 $L/A(r) \geq 1 - \sqrt{3}/\pi > 4/9$ 将在第8.1小节中始终使用。

8.1. 三个嵌套条带。

定理 8.1（三个嵌套高中心条带）。对于模属于 K 的每个基本环面以及每个单位方向 p，

$$J(r,s,p) < 4\pi$$

只要以下条件中至少有一个成立：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \leq R \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{9}{10} \leq s < 1; \\ &\frac{1}{3} \leq R \leq \frac{3}{5}, \quad \frac{23}{25} \leq s < 1; \\ &\frac{1}{3} \leq R \leq \frac{7}{10}, \quad \frac{47}{50} \leq s < 1. \end{aligned} \tag{36}$$

特别是，所述的三个条带既不需要区间证书，也不需要计算机代数。

8.2. 三个嵌套条带的证明。

定理 *8.1*的证明。 我们同时证明全部三种情形。令 $\delta = 1-s$，$h = 1-R$，以及 $\kappa^2 = R/(1-R)$。将真实截断水平替换为 $4/9$只会扩大 J。新被积函数的正部支集位于$q > q_0$，其中

$$t_0 = 1 - q_0 = \frac{\delta(6-5\delta)}{4(1-\delta)}. \tag{37}$$

对于定理中的三个有序对（R，δ_*），

$$(\overline{R}, \delta_*) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{25}\right), \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{50}\right) \right\},$$

$0 < \delta \leq \delta_*$ 蕴含 $q_0 > \sqrt{R} \overline{\geq} \sqrt{R_{\circ}}$事实上，在三个端点 q_0处，其值分别为 $61/72$、$101/115$和 $1709/1880$；它们的平方分别严格大于 $1/2$、$3/5$和 $7/10$。因此，式（13）适用于整个支集。

令 $e = 1 - m_{\circ}$ 如果 $e \geq t_0$，则 $J = 0$。否则令

$$a = \delta^2 + 2se, \qquad P_0 = \delta(2-\delta),$$
$$H = h\big(1 + \kappa^2 e - \kappa\sqrt{2e-e^2}\big), \quad \phi(t) = \frac{P_0^2}{(\delta^2+2st)^2} - \frac{4}{9}.$$

帽密度不等式和 $q = 1 - t$ 给出

$$\frac{J}{4\pi} \le \frac{h}{2} \int_e^{t_0} \frac{\phi(t)}{H - t}\, dt. \tag{38}$$

根据 $q_0 > \sqrt{R}$，分母为正。通过直接对单变量积分（无需任何数值求积）可得

$$I_0 := \int_e^{t_0} \phi(t)\, dt = \frac{(P_0 - 2a/3)^2}{2sa}, \tag{39}$$

$$I_1 := \int_e^{t_0} t\phi(t)\, dt \le I_1(0),$$

$$I_1(0) = \frac{\delta^2}{72(1-\delta)^2} \left[18(2-\delta)^2 \log \frac{3(2-\delta)}{2\delta} - 108 + 156\delta - 55\delta^2 \right]. \tag{40}$$

此外，由于 $a \le \delta^2 + 2st_0 = 3P_0/2$，$\phi \ge 0$ 在 $[e, t_0]$ 上，且 $0 \le P_0 - 2a/3 \le P_0$。

情形 I: $0 \le e \le \delta^2/3$。对于 $0 \le t \le t_0$,

$$\frac{1}{H - t} \le \frac{1}{H} + \frac{t}{H(H - t_0)}.$$

令 $x = \sqrt{2se}/\delta$ 和 $\alpha = \kappa\delta/\sqrt{s}$。则 $H/h \ge 1 - \alpha x + \alpha^2 x^2/2$，并且

$$\frac{aH}{\delta^2 h} \ge (1 + x^2) \left(1 - \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} \right) \ge 1 - \alpha x + \frac{x^2}{2} \ge 1 - \frac{\kappa^2 \delta^2}{2s}.$$

若 $R \le \overline{R}$ 且 $k_* = \overline{R}/(1 - \overline{R})$，(39) 从而得到

$$\frac{hI_0}{2H} \le U_0(\delta) := \frac{(2 - 5\delta/3)^2}{4(1-\delta) - 2k_*\delta^2}. \tag{41}$$

以下整系数多项式比较可通过展开正分母得出。对于 $R = 1/2$ 和 $0 \le \delta \le 1/10$,

$$(1 - \tfrac{3}{5}\delta)(4(1-\delta) - 2\delta^2) - (2 - 5\delta/3)^2 = \tfrac{\delta}{45}(54\delta^2 - 107\delta + 12) \ge 0.$$

对于 $\overline{R} = 3/5$ 和 $0 \le \delta \le 2/25$,

$$(1 - \tfrac{3}{5}\delta)(4(1-\delta) - 3\delta^2) - (2 - 5\delta/3)^2 = \tfrac{\delta}{45}(81\delta^2 - 152\delta + 12) \ge 0.$$

最后，对于 $\overline{R} = 7/10$ 和 $0 \le \delta \le 3/50$,

$$(1 - \tfrac{11}{20}\delta)(4(1-\delta) - \tfrac{14}{3}\delta^2) - (2 - 5\delta/3)^2 = \tfrac{\delta}{90}(231\delta^2 - 472\delta + 42) \ge 0.$$

对于中间的括号项，它在所述区间上递减，并在 $\delta = 2/25$ 处等于 $224/625 > 0$；另外两个括号项利用其区间端点显然为正。因此

$$U_0(\delta) \le 1 - \eta\delta, \qquad \eta = \begin{cases} 3/5, & \overline{R} = 1/2, 3/5, \\ 11/20, & \overline{R} = 7/10. \end{cases} \tag{42}$$

在相同的三个区间内，我们分别有

$$\kappa\sqrt{2e} \le \gamma\delta, \qquad (\gamma, h_*) = (1, \tfrac{1}{2}),\ (1, \tfrac{2}{5}),\ (\tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{10}),$$

由于 $\kappa\sqrt{2/3} \le \gamma$ 和 $h \ge h_* = 1 - \overline{R}$。因此 $H/h \ge K := 1 - \gamma\delta$，所以

$$\frac{hI_1}{2H(H - t_0)} \le \frac{I_1(0)}{2K(h_*K - t_0)}. \tag{43}$$

所有分母在其指定的区间内均为正。

为完整起见，无需进行任何符号正负性检查即可对这些最后的表达式进行界定。令

$$V(\delta) = \delta\left[18(2-\delta)^2 \log\frac{3(2-\delta)}{2\delta} - 108 + 156\delta - 55\delta^2\right].$$

对于 $0 < \delta \le 1/10$，对数大于 3，因为 $\frac{3(2-\delta)}{2\delta} \ge 57/2 > e^3$ 且 $e < 11/4$。微分得到

$$V'(\delta) = 18(2-\delta)(2-3\delta)\log\frac{3(2-\delta)}{2\delta} - 180 + 348\delta - 165\delta^2 > 36 - 84\delta - 3\delta^2 > 0.$$

由于 $I_1(0)/\delta = V(\delta)/[72(1-\delta)^2]$，该商递增。同时，$2K(h_*K - t_0)$ 随着 δ 增大而减小。其端点下界，以及相应的 $I_1(0)/\delta$ 的初等上界为

$\overline{R}$	δ_*	$2K(h_*K - t_0) \ge$	$I_1(0)/\delta <$
$1/2$	$1/10$	$107/200$	$1681/7290$
$3/5$	$2/25$	$1416/3125$	$26492/119025$
$7/10$	$3/50$	$129759/376000$	$143451/883600$

最后一列中的界在相应端点处分别使用了 $\log(57/2) < 7/2$、$\log(36) < 4$ 和 $\log(97/2) < 4$。这些结果由关于 e^x 的短正项泰勒和得到：例如，$e > 8/3$ 给出 $e^4 > (8/3)^4 > 97/2$，且 $e^{7/2} > (8/3)^3(1 + 1/2 + 1/8) > 57/2$。最后两列的三个比值分别为

$$\frac{33620}{78003}, \qquad \frac{827875}{1685394}, \qquad \frac{136620}{290413}, \quad \text{each strictly less than } \frac{1}{2}.$$

结合（38）、（42）和（43）可得

$$\frac{J}{4\pi} < 1 - (\eta - \tfrac{1}{2})\delta < 1. \tag{44}$$

情形 II： $\delta^2/3 \le e < t_0$。记 $x=\sqrt{e}$ 和 $A_x = 1+2sx^2/\delta^2$。由于 $\phi \ge 0$，（38）和（39）推出

$$\frac{J}{4\pi} \le \frac{(2-\delta-\frac{2\delta}{3}A_x)^2}{4sA_x\,(H-t_0)/h}. \tag{45}$$

对于每一对（R，δ_*），函数 $1+\kappa^2 e-\kappa\sqrt{2e-e^2}$ 关于 $0\le\kappa\le\sqrt{k_*}$ 是非递增的，当 $e\le t_0\le t_0$（δ_*）时：事实上，$e<2/$（$4k_*+1$），因此 $2\kappa e\le\sqrt{2e-e^2}$。分别使用 $\sqrt{2}<3/2$、$\sqrt{3}<7/4$ 和 $\sqrt{14/3}<13/6$，得到

$$\frac{H-t_0}{h} \ge G(x) := 1-\beta-a_*x+b_*x^2, \qquad \beta=\frac{t_0}{h_*},$$

其中常数为

R	a_*	b_*	$\beta\le$	$x<$
1/2	3/2	1	11/36	2/5
3/5	7/4	3/2	7/23	2/5
7/10	13/6	7/3	57/188	1/3

在每一行中，$G(x)>0$ 因为 $G\ge 1-1/3-a_*^2/(4b_*)>0$。式（45）的分子随 A_x 减小，因为平方之前它是非负的；见 $a\le 3P_0/2$ 上文。由于 $A_x\ge A_*$：$=1+2s/3=(5-2\delta)/3$，我们得到

$$\frac{J}{4\pi} \le \frac{Z(\delta)}{F_\delta(x)}, \quad Z(\delta) := \frac{(2-\delta-\frac{2\delta}{3}A_*)^2}{4s}, \quad F_\delta(x) := A_xG(x). \tag{46}$$

精确求导可得

$$F_\delta'(x) = -a_* + 2b_*x + \frac{2sx}{\delta^2}\big(2(1-\beta)-3a_*x+4b_*x^2\big).$$

导数在 $\delta/\sqrt{3}\le x\le\sqrt{t_0}$ 上为正。对于第一行，括号中的项在 $x\le 1/5$ 时至少为 $13/30$，在 $1/5\le x\le 2/5$ 时至少为 $13/75$；由于 $s/\delta\ge 9$，所示导数为正。对于第二行，该项在 $[0,2/5]$ 上至少为 $29/150$，因此由 $s/\delta\ge 23/2$ 可知其为正。对于第三行，该项在 $[0,1/3]$ 上至少为 $11/54$，而 $s/\delta\ge 47/3$ 已足够。在这三种情况下，我们都用到了 $x\ge\delta/\sqrt{3}>\delta/2$。

因此 $F_\delta(x)\ge F_\delta(\delta/\sqrt{3})$。初等不等式

$$\frac{3/2}{\sqrt{3}} < \frac{7}{8}, \qquad \frac{7/4}{\sqrt{3}} < \frac{21}{20}, \qquad \frac{13/6}{\sqrt{3}} < \frac{4}{3}$$

证明

$$F_\delta(x) \ge Y(\delta) := A_*\left(1-\beta-\mu\delta+\frac{b_*}{3}\delta^2\right), \qquad \mu=\frac{7}{8},\ \frac{21}{20},\ \frac{4}{3},$$

分别。直接展开 $Y-Z$ 可得以下三个四次多项式恒等式

$$\overline{R}=\tfrac{1}{2}:\quad Y-Z=\frac{112\delta^4-1658\delta^3+5101\delta^2-4329\delta+432}{648(1-\delta)},$$
$$\overline{R}=\tfrac{3}{5}:\quad Y-Z=\frac{920\delta^4-11278\delta^3+32723\delta^2-26640\delta+2160}{3240(1-\delta)},$$
$$\overline{R}=\tfrac{7}{10}:\quad Y-Z=\frac{152\delta^4-1624\delta^3+4469\delta^2-3492\delta+216}{324(1-\delta)}.$$

每个分子在其所述区间上都严格递减：其导数分别有上界

$$448(1/10)^3+10202(1/10)-4329<0,$$
$$3680(2/25)^3+65446(2/25)-26640<0,$$
$$608(3/50)^3+8938(3/50)-3492<0.$$

在右端点处，三个分子分别取严格为正的值

$$\frac{60579}{1250},\qquad \frac{18163324}{78125},\qquad \frac{34718103}{1562500}.$$

因此 $F_\delta(x)\ge Y(\delta)>Z(\delta)$ 以及 $J/(4\pi)<1$ 均属于情形 II。这就完成了定理 8.1的证明。□

8.3. **外权重高中心条带。**

定理 8.2。 对于每个具有

$$\frac{7}{10}\le R\le R_*:=\frac{1936}{2561},\qquad \frac{47}{50}\le s<1,$$

对于每个单位环境方向 p，都有 $J(r,\ s,\ p)<4\pi$。

证明。设 $\delta=1-s$、$h=1-R$ 和 $\kappa^2=R/h$。于是 $0<\delta\le 3/50$、$h\ge 625/2561>6/25$ 和 $\kappa^2\le 1936/625<19/6$。我们取固定的下截断 ρ^2，其中 $\rho=18/25$。它是可容许的，因为

$$\frac{L}{A(r)}\ge\frac{L}{\overline{A}(R)}\ge\frac{L}{\overline{A}(7/10)}=\frac{2}{\sqrt{93/100}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\pi}\right)>\frac{105500}{197977}>\left(\frac{18}{25}\right)^2.$$

严格的有理数比较使用 $\sqrt{93/100}<97/100$、$\sqrt{3}<26/15$ 和 $\pi>157/50$。阈值为 ρ^2 的正部支集位于 $q>q_0=1-t_0$ 的区域，其中

$$t_0=\frac{\delta[2-(1+\rho)\delta]}{2\rho(1-\delta)}. \tag{47}$$

该函数在 $\delta\in[0,3/50]$ 上递增，且 $1-t_0\ge 25829/28200>\sqrt{1936/2561}\ge\sqrt{R}$。因此，引理 4.3 适用于全支撑上。若$m=\max(p\cdot F_r)\le q_0$，则积分为零。否则，令 $e=1-m<t_0$并且

$$a=\delta^2+2se,\quad P_0=\delta(2-\delta),\quad H=1-Rm-\sqrt{R(1-R)(1-m^2)}.$$

令 $\phi(t) = P_0^2/(\delta^2 + 2st)^2 - \rho^2$。帽密度不等式给出

$$\frac{J(r,s,p)}{4\pi} \le \frac{h}{2}\int_e^{t_0} \frac{\phi(t)}{H-t}\,dt, \qquad H > t_0, \quad \phi(t) \ge 0. \tag{48}$$

经初等积分可得

$$I_0(e) := \int_e^{t_0} \phi(t)\,dt = \frac{(P_0 - \rho a)^2}{2sa}, \tag{49}$$

$$I_1(e) := \int_e^{t_0} t\phi(t)\,dt \le I_1(0),$$

$$I_1(0) = \frac{\delta^2}{8s^2}\left[2(2-\delta)^2 \log\frac{2-\delta}{\rho\delta} - 3(2-\delta)^2 + 4\rho\delta(2-\delta) - \rho^2\delta^2\right]. \tag{50}$$

情形 *1*: $e \le \delta^2/3$。由于 $t \le t_0 < H$，$(H-t)^{-1} \le H^{-1} + t/[H(H-t_0)]$。结合 $x = \sqrt{2se}/\delta$ 和 $\bar{\alpha} = \kappa\delta/\sqrt{s}$，$H$ 的精确表达式给出

$$\frac{H}{h} \ge 1 - \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2}, \qquad \frac{aH}{\delta^2 h} \ge 1 - \alpha x + \frac{x^2}{2} \ge 1 - \frac{\kappa^2\delta^2}{2s}.$$

这里，中间的不等式通过展开 $(1+x^2)(1 - \alpha x + \alpha^2 x^2/2)$ 得到，最后一个不等式则由配方得到。由于 $0 \le P_0 - \rho a \le P_0 - \rho\delta^2$，

$$\frac{hI_0(e)}{2H} \le \frac{[2-(1+\rho)\delta]^2}{4s - 2\kappa^2\delta^2} \le U_0(\delta) := \frac{(2-43\delta/25)^2}{4(1-\delta) - 19\delta^2/3}.$$

直接检验可得

$$(1 - 31\delta/50)\left[4(1-\delta) - 19\delta^2/3\right] - (2 - 43\delta/25)^2$$
$$= \frac{\delta}{3750}(14725\delta^2 - 25544\delta + 1500) > 0.$$

对于 $0 < \delta \le 3/50$：括号中的二次式在此区间上递减，且在 $3/50$ 处为正。因此 $U_0(\delta) < 1 - 31\delta/50$。

对于剩余项，令 $K(\delta) = 1 - 73\delta/50$。不等式 $\kappa\sqrt{2/3} < 73/50$ 以及 $e \le \delta^2/3$ 给出 $H/h \ge K(\delta)$。此外，$h \ge 6/25$，因此

$$\frac{hI_1(e)}{2H(H-t_0)} \le \frac{I_1(0)}{2K(\frac{6}{25}K - t_0)} < \frac{31}{50}\delta. \tag{51}$$

对于最后一个严格界，分母中的所有量均为正，并且t_0 随 δ增大。此外，$I_1(0)/\delta$ 随 δ增大。事实上，令 $V(\delta)$表示括号 (50中的方括号乘以 δ，微分得到

$$V'(\delta) = 2(2-\delta)(2-3\delta)\log\frac{2-\delta}{\rho\delta} - (\delta(1+\rho) - 2)(\delta(3\rho+9) - 10) > 0.$$

这里对数大于 3 在 $0 < \delta \le 3/50$，因此第一项大于$6(97/50)(91/50) > 20$，而最后一个乘积至多为 20。由于 $(1-\delta)^{-2}$递增，公式 $I_1(0)/\delta = V(\delta)/[8(1-\delta)^2]$ 证明了该结论。(51) 中间表达式的分母随 δ 减小。因此它

只需检查右端点 $\delta = 3/50$。在那里， $K = 2281/2500$、$t_0 = 2371/28200$, 并且

$$\log \frac{2-\delta}{\rho\delta} = \log \frac{2425}{54} < \frac{381}{100};$$

最后一个不等式由有理泰勒和推出 $\sum_{j=0}^{10} (381/100)^j/j!$ $>2425/54$。代入（50）得到

$$\frac{I_1(0)}{2K(\frac{6}{25}K - t_0)} \leq \frac{37380651525}{1019571589756} < \frac{31}{50} \cdot \frac{3}{50}.$$

最后一个严格比较中的差为 $\frac{171066129351}{318616121798750} > 0$。结合（$I_0$ 中的界48可证明 $J/(4\pi) < 1$ 在情形 1 中成立。

情形 2： $\delta^2/3 \leq e < t_0$。令 $x = \sqrt{e}$ 和 $A_x = 1 + 2sx^2/\delta^2$, 则 $a = \delta^2 A_x$。由于 $t_0 \leq 2371/28200 < (29/100)^2$, , 我们有 $\delta/\sqrt{3} \leq x < 29/100$。令

$$b_* := \frac{1936}{625}, \quad a_* := \frac{249}{100}, \quad h_* := \frac{625}{2561}, \quad \beta := \frac{t_0}{h_*}.$$

函数 $1 + \kappa^2 x^2 - \kappa x\sqrt{2 - x^2}$ 在 $\kappa \in [0, \sqrt{b_*}]$ 中对于 $0 \leq x < 29/100$递减: $4b_*(29/100)^2 < 2 - (29/100)^2$。由于 $a_* > \sqrt{2b_*}$, 可得

$$\frac{H - t_0}{h} \geq G(x) := 1 - \beta - a_* x + b_* x^2 > 0.$$

确实 $\beta \leq 6072131/17625000$, 并且 $G(x) \geq 1 - 6072131/17625000 - a_*^2/(4b_*) = 42334881947/272976000000 > 0$。利用（49）并将 $(H-t)^{-1}$ 替换为 $(H - t_0)^{-1}$,

$$\frac{J}{4\pi} \leq \frac{[2 - \delta - \rho\delta A_x]^2}{4sA_x G(x)} \leq \frac{Z_*(\delta)}{F_\delta(x)},$$

$$F_\delta(x) = A_x G(x), \qquad Z_*(\delta) = \frac{[2 - \delta - \rho\delta A_*]^2}{4s}.$$

其中 $A_* := 1 + 2s/3 = (5 - 2\delta)/3$。第二个不等式成立是因为$A_x \geq A_*$ 以及 $2 - \delta - \rho\delta A_x \geq 0$。计算显式导数可得

$$F'_\delta(x) = -a_* + 2b_* x + \frac{2sx}{\delta^2}\left[2(1-\beta) - 3a_* x + 4b_* x^2\right].$$

括号内的表达式在 $0 \leq x \leq 29/100$ 上递减，并且至少为

$$2\left(1 - \frac{6072131}{17625000}\right) - 3a_* \frac{29}{100} + 4b_* \left(\frac{29}{100}\right)^2 = \frac{164526289}{881250000} > \frac{9}{50}.$$

由于 $x \geq \delta/\sqrt{3} > \delta/2$ 和 $s/\delta \geq 47/3$,

$$F'_\delta(x) > -\frac{249}{100} + \frac{47}{3}\frac{9}{50} > 0.$$

因此 $F_\delta(x) \geq F_\delta(\delta/\sqrt{3})$。由于 $a_*/\sqrt{3} < 36/25$, 我们得到

$$F_\delta(x) \geq Y_*(\delta) := A_*\left(1 - \beta - \frac{36}{25}\delta + \frac{b_*}{3}\delta^2\right).$$

直接展开可得以下单变量恒等式：

$$Y_*(\delta) - Z_*(\delta) = \frac{21288\delta^4 - 206015\delta^3 + 540300\delta^2 - 405625\delta + 22500}{33750(1-\delta)}.$$

分子在 $[0, 3/50]$ 上递减，因为其导数的上界为 $4\cdot 21288(3/50)^3 + 2\cdot 540300($ $3/50) - 405625 < 0$。在 $\delta = 3/50$ 处，其值为 $197989539/3125000 > 0$。因此 $F_\delta(x) \geq Y_*(\delta) > Z_*(\delta)$，且 $J(r,\ s,\ p) < 4\pi$，在情形 2 中成立。□

推论 8.3。对于每个 $1/3 \leq R \leq R_*$、每个单位方向 p 以及每个 $47/50 \leq s < 1$，截断共形面积满足 $J(r, s, p) < 4\pi$。

证明。对于 $R \leq 7/10$，定理 8.1 的前三个条带覆盖所述范围；而对于 $R \geq 7/10$，结论为定理 8.2。□

9. 剩余高帽的精确有理控制

在本节中，$R = r_1$ 是最大权重，$R_* = 1936/2561$、$\sigma\ (R)\ = \ (2 + 52R - 32R^2)$ $/25$、$P = 1 - s^2$、$B = 1 + s^2$、$q = p\cdot F_r$ 且$m =$ 最大。令

$$s_{\mathrm{top}}(R) = \begin{cases} 9/10, & R \leq 1/2, \\ 23/25, & 1/2 < R \leq 3/5, \\ 47/50, & 3/5 < R \leq R_*. \end{cases}$$

根据定理8.1 和推论8.3，$J(r,\ s,\ p) < 4\pi$ 只要 $s \geq s_{\mathrm{top}}(R)$。剩余的紧致高帽区域为

$$\mathcal{D}_{\mathrm{hi}} = \Big\{ \frac{7}{20} \leq R \leq R_*, \qquad \sigma(R) \leq s \leq s_{\mathrm{top}}(R) \Big\}. \tag{52}$$

它通过第7.4 节和第7.5节的机制处理：利用引理7.3的单调核进行帽密度估计、命题7.2的精确原函数以及初等对数不等式。在此处，常数针对参数域的小单元进行调整，由此得到的每个符号条件都是定义在有理矩形上的有理系数多项式不等式，并通过精确的伯恩斯坦展开（64）判定。

定理 9.1 (剩余高帽)。对于模属于 K 的每个基本嵌入和 $7/20 \leq R \leq R_*$、每个单位向量 p，以及每个$\sigma(R) \leq s < 1$，

$$J(r, s, p) < 4\pi.$$

这里使用两个上界函数。在$\mathcal{D}_{\mathrm{hi}}$ 的上部，被积函数的正部位于水平面 $\sqrt{R}$之上，帽密度估计适用于其整个支集（直接单元，参见第7.5小节）。在 $s = \sigma(R)$ 附近，被积函数分成二次部分（由高度矩控制）和帽超额（二次单元，参见第7.4小节）。

9.1. 单元、阈值与权重界。 一个单元由一个区间$[R_{\mathrm{lo}},R_{\mathrm{hi}}]\subset[7/20,R_{*}]$和一个有理数$\rho\in(0,1)$组成，满足

$$\rho^{2}<\bar{c}(R_{\mathrm{lo}})=\frac{2(1/\sqrt{3}-1/\pi)}{\sqrt{(1-R_{\mathrm{lo}})(1+3R_{\mathrm{lo}})}}. \tag{53}$$

表达式$\bar{c}=L/A$由$A_{\mathrm{eq}}=4\pi^{2}/\sqrt{3}$和$A(R)=2\pi^{2}\sqrt{(1-R)(1+3R)}$得到。由于$\sqrt{3}<97/56$和$\pi>333/106$，分子超过$16732/32301$，且（53）可通过这一有理数上界以及平方根的有理上界得到验证。

引理 9.2。 *在一个单元上，$f_{R,s}(q)\le f_{\rho}(q):=(k_{s}(q)^{2}-\rho^{2})_{+}$对于$R_{\mathrm{lo}}\le R\le R_{\mathrm{hi}}$、$0<s<1$和$-1\le q\le 1$成立。此外，$f_{\rho}(q)>0$当且仅当$q>q_{\rho}(s):=(B-P/\rho)/(2s)$，并且$q_{\rho}$在$0<s<1$上递增。最后，$A(R)\preceq A(R_{\mathrm{lo}})$在该单元上成立。*

证明。函数$(1-R)(1+3R)$在$[1/3,1)$上递减。因此A递减而$\bar{c}$在此处递增，从而对于$R\ge R_{\mathrm{lo}}$，$\rho^{2}<\bar{c}(R_{\mathrm{lo}})\le\bar{c}(R)$。由于$k_{s}$在$q$中递增，且$k_{s}(q_{\rho}(s))=\rho$，第二个断言得证；并且$q_{\rho}(s)=\frac{1+\rho^{-1}}{2}s-\frac{\rho^{-1}-1}{2s}$递增，因为$\rho<1$。□

参数化。我们将$s=(1-x^{2})/(1+x^{2})$写成$0<x<1$；因此s在x中递减，并且当$X=x^{2}$时，

$$s=\frac{1-X}{1+X},\qquad P=\frac{4X}{(1+X)^{2}},\qquad q_{\rho}(s)=\frac{\rho(1+X^{2})-2X}{\rho(1-X^{2})},$$
$$B-2sq=\frac{2\big[(1+X^{2})-(1-X^{2})q\big]}{(1+X)^{2}}. \tag{54}$$

对于区间$[x_{a},x_{b}]\subset(0,1)$，我们使用有理常数$R$和$\omega$，满足

$$0<\overline{R}\le R_{\mathrm{hi}},\qquad \overline{R}=R_{\mathrm{hi}}\ \text{ or }\ \sigma(\overline{R})\ge s(x_{a}),$$
$$\omega>0,\qquad \omega^{2}\ge\overline{R}(1-\overline{R}), \tag{55}$$

并令$\widehat{d}(m)=Rm+\omega\sqrt{1-m^{2}}$。

引理 9.3。 *假设 (55)。若$R_{\mathrm{lo}}\le R\le R_{\mathrm{hi}}$，$x_{a}\le x\le x_{b}$且$s(x)\ge\sigma(R)$，则$R\le\overline{R}$。若进一步$T>0$且$T^{2}>R^{2}+\omega^{2}$，则$\widehat{d}(m)<T$且*

$$\frac{1-R}{q-d_{R}(m)}\le\frac{1-\overline{R}}{q-\widehat{d}(m)}\qquad(T\le q\le m\le 1). \tag{56}$$

证明。如果$R<R_{\mathrm{hi}}$和$R>\overline{R}$，那么由于σ在$[0,\overline{13}/16]\supset[0,R_{*}]$上递增，$\sigma(R)>\sigma(R)\ge s(x_{a})\ge s(x)$；这与$s(x)\ge\sigma(R)$矛盾。接下来，$R^{2}+\omega^{2}\ge R$，因此$T>\sqrt{R}$。由柯西–施瓦茨不等式，对于$R\le R'\le R$，有$d_{R'}(m)\le\sqrt{R'}<T\le q$，并且$d_{R}(m)\le\widehat{d}(m)\le\sqrt{R^{2}+\omega^{2}}<T$。将引理 7.3应用于$[R,R]$，得到$(1-R)/(q-d_{R}(m))\le(1-R)/(q-d_{R}(m))$，而最后的 Fraction 至多为$(1-R)/(q-d(m))$。□

引理 9.4（对数界）。 对于 $0 \le u < 1$， $Y \ge 0$ 和 $w \ge w_0 > 0$,

$$\log\frac{1+u}{1-u} \ge 2\Big(u + \frac{u^3}{3}\Big), \qquad \log(1+Y) \le Y,$$
$$\log\frac{w}{w_0} \ge 2\Big(v + \frac{v^3}{3}\Big), \qquad v = \frac{w-w_0}{w+w_0}.$$

证明。 第一和第三个不等式由前面引用的级数（32）推出，因为 $w/w_0 =$（$1+v$）/（$1-v$） 其中 $0 \le v < 1$。第二个不等式是初等的。

□

该证书为每个盒附加一个有理数 Θ，其分母至多为 10^{30}, ，该有理数从上方界定一个对数。对于带有有理数 $\theta > 0$ 的不等式 $e^{\Theta} \ge \theta$，可以进行精确验证：当 $\Theta \ge 0$ 时通过 $e^{\Theta} \ge \sum_{k<120} \Theta^k/k!$ ，当 $-1 < \Theta < 0$ 时通过 $e^{|\Theta|} \le \sum_{k<120} |\Theta|^k/k! \ + 2|\Theta|^{120}/120!$ 。

9.2. **直接单元**。

命题 9.5。 考虑一个单元、一个区间 $[x_a, x_b]$ 以及常数 R、ω满足 （55），并假设

$$q_\rho(s(x_b)) > 0, \qquad q_\rho(s(x_b))^2 > \overline{R}^2 + \omega^2. \tag{57}$$

设 $R_{\mathrm{lo}} \le R \le R_{\mathrm{hi}}$、 $x_a \le x \le x_b$ 和 $s = s$（x） $\ge \sigma$（R）。若 $m \le q_\rho$（s），则 J（r、 s、 p） $= 0$。若 $m > q_\rho$（s），则

$$\frac{J(r,s,p)}{4\pi} \le \frac{1-\overline{R}}{2}\Big[A_0 \log\frac{m-\widehat{d}}{q_\rho - \widehat{d}} + K\log\frac{N}{V} + \frac{P^2}{D}\Big(\frac{1}{V} - \frac{1}{N}\Big)\Big], \tag{58}$$

其中 $q_\rho = q_\rho$（s） 、 $\widehat{d} = \widehat{d}$（$m$） 、 $D = B - 2s\widehat{d}$、 $K = P^2/D^2$、 $A_0 = K - \rho^2 < 0$、$N = P/\rho$ 以及 $V = B - 2sm$。

证明。由引理 9.2 和引理 9.3， $q_\rho(s) \ge q_\rho(s(x_b)) > \sqrt{\underline{R}^2 + \omega^2} \ge \sqrt{\underline{R}} \ge \sqrt{\underline{R}}$, 且 f_R在 $[-1, q_\rho]$上$s \le f_\rho = 0$ 。若 $m \le q_\rho$, 则在整个环面上 $k_s(q)$ $^2 \le \rho^2 < c(r)$, 并且 $J = 0$。否则，应用命题 5.2（取 $C = 0$ 和 $t = q_\rho$）、引理 9.2 以及取 $T = q_\rho$ 的式（56），得到

$$\frac{J}{4\pi} \le \frac{1-R}{2}\int_{q_\rho}^{m} \frac{f_{R,s}(q)}{q - d_R(m)}\,dq \le \frac{1-\overline{R}}{2}\int_{q_\rho}^{m} \frac{k_s(q)^2 - \rho^2}{q - \widehat{d}(m)}\,dq;$$

最后一个被积函数是非负的。应用命题 7.2，其中取 $c = \rho^2$、$\asymp C = 0$、 $T = q_\rho$ 和 d 均替换为常数 $d < q_\rho$, 可计算出最后一个积分；此处 $B - 2sq_\rho = P/\rho = N$、 $E_0/(2s) = K$以及 $F_0/(2s) = P^2/D$。 ^最后， $k_s(d) < k_s(q_\rho) = \rho$, 因此 $A_0 < 0$。 □

有理形式。 选择一个有理数 $\chi > 0$ ，满足

$$\rho > x_b^2, \qquad \chi^2 \ge \frac{1-\rho x_b^2}{\rho - x_b^2}, \tag{59}$$

并对 $0 \le z \le 1$，令

$$y = \chi x z, \qquad Y = y^2, \qquad m = \frac{1-Y}{1+Y}, \qquad w = X + \chi^2 z^2,$$

使得 $X^2 + Y = Xw$。定义

$$\ell = \overline{R}(1-Y) + 2\omega y, \qquad D_n = (1+X^2)(1+Y) - (1-X^2)\ell,$$
$$K_n = 4X^2(1+Y)^2, \qquad Q_n = \rho(1+X^2) - 2X, \qquad Q_d = \rho(1-X^2),$$
$$N_u = (1-Y)Q_d - (1+Y)Q_n, \qquad D_u = (1-Y)Q_d + (1+Y)Q_n - 2Q_d\ell.$$

引理 9.6。假设 (59) 且 $x_a \le x \le x_b$。每个 $m \in [q_\rho(s), 1]$ 都由某个 $z \in [0,1]$ 取到。此外 $\widehat{d} = \ell/(1+Y)$，$D = 2D_n/((1+X)^2(1+Y))$，$K = K_n/D_n^2$，

$$\frac{m - q_\rho}{m + q_\rho - 2\widehat{d}} = \frac{N_u}{D_u}, \qquad \frac{N}{V} = \frac{1+Y}{\rho w},$$
$$\frac{P^2}{D}\Big(\frac{1}{V} - \frac{1}{N}\Big) = \frac{2X(1+Y)(1+Y-\rho w)}{D_n w}.$$

证明。映射 $z \mapsto m$ 连续且递减，并且 $m = 1$ 在 $z = 0$处。于 $z = 1$，$m = (1-\chi^2 X)/(1+\chi^2 X)$，由 (54)

$$\frac{1-q_\rho}{1+q_\rho} = \frac{X(1-\rho X)}{\rho - X}.$$

因此，当且仅当 $\chi^2 \ge (1-\rho X)/(\rho - X)$ 时，$m \le q_\rho$在 $z = 1$。右侧随 $X \in [0, \rho$ 增大，其导数为 $(1-\rho^2)/(\rho - X)^2$, ，故 (59) 已足够。这些恒等式由 $\sqrt{1-m^2} = 2y/(1+Y)$、$q_\rho = Q_n/Q_d$、(54) 以及 $B - 2s\overline{m} = 4(X^2+Y)/((1+X)^2(1+Y))$ 推出。□

命题 9.7。假设命题*9.5* 和 (59)的条件成立。令$0 \le z_a < z_b \le 1$、$w_0 = x_a^2 + \chi^2 z_a^2$，并令 Θ 为有理数，满足 $e^\Theta \ge 1/(\rho w_0)$。令 $\Xi = 3(w-w_0)(w+w_0)^2 + (w-w_0)^3$，置

$$\mathcal{M} = 3D_n^2 D_u^3 (w+w_0)^3 w,$$
$$\mathcal{M}_1 = 2(K_n - \rho^2 D_n^2)(3N_u D_u^2 + N_u^3)(w+w_0)^3 w,$$
$$\mathcal{M}_2 = K_n\big(3(Y+\Theta)(w+w_0)^3 - 2\Xi\big)D_u^3 w,$$
$$\mathcal{M}_3 = 6X(1+Y)(1+Y-\rho w)D_n D_u^3 (w+w_0)^3,$$

以及 $\mathscr{F} = 2\mathcal{M} - (1-\overline{R})(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3)$，这是一个关于 (x, z) 的有理系数多项式。如果 D_n、D_u 和 $\mathscr{F}$ 在盒 $[x_a, x_b] \times [z_a, z_b]$ 上均为正，则对于命题 *9.5* 中所述、且参数 (x, z) 位于该盒内的每个 (R, s, p)，$J(r, s, p) < 4\pi$。

证明。我们可以假设 $m > q_\rho$。那么 $u = N_u/D_u \in [0,1)$，因为 $d < q_\rho \le m$，且 $v = (w-w_0)/(w+w_0) \in [0,1)$ 在盒上。由引理 9.4 以及

$A_0<0$,

$$A_0\log\frac{m-\widehat{d}}{q_\rho-\widehat{d}}\le 2A_0\Big(u+\frac{u^3}{3}\Big),$$

$$\log\frac{N}{V}=\log(1+Y)-\log(\rho w_0)-\log\frac{w}{w_0}\le Y+\Theta-2\Big(v+\frac{v^3}{3}\Big).$$

将这些界代入（58），使用引理 9.6 和 $K>0$，并乘以$2\mathcal{M}>0$。由于 $A_0=(K_n-\rho^2D_n^2)/D_n^2$ 以及 $\Xi=(w+w_0)^3(3v+v^3)$，所以（58）括号中的三项分别至多为 $\mathcal{M}_1/\mathcal{M}$、$\mathcal{M}_2/\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}_3/\mathcal{M}$；因此

$$2\mathcal{M}\,\frac{J}{4\pi}\le(1-\overline{R})(\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2+\mathcal{M}_3)=2\mathcal{M}-\mathscr{F}<2\mathcal{M}.$$

□

9.3. **二次单元。**

引理 9.8（二次主控函数）。设 $0<\tau<1$ 和 $b>0$，令 $K>0$ 为有理数，满足 $\widehat{K}^2\rho^2\ge 32/27$，并假设

$$q_\rho(s)<\tau,\qquad q_\rho(s)+b>0,\qquad B+2sb\ge\widehat{K}P. \tag{60}$$

于是 $C:=f_\rho(\tau)/(\tau+b)^2>0$，$f_\rho(q)\le C(q+b)^2$ 对于 $-1\le q\le\tau$，以及

$$\psi(q):=k_s(q)^2-\rho^2-C(q+b)^2\ge 0\qquad(\tau\le q\le 1).$$

证明。与第 7.4 小节中一样，对于 $q>q_\rho$，其中 $q+b>0$，$f_\rho(q)/(q+b)^2$ 的导数与 $\rho^2z^3-2P^2z+P^2(B+2sb)$ 同号，其中 $z=B-2sq$。它在 $z\ge 0$ 上的最小值为 $P^2\big(B+2sb-\frac{4}{3}\sqrt{2/3}\,P/\rho\big)\ge P^2(B+2sb-\widehat{K}P)\ge 0$，因为根据关于 $\widehat{K}$ 的假设，$\widehat{K}\rho\ge\frac{4}{3}\sqrt{2/3}$。因此，$f_\rho/(q+b)^2$ 在 $(q_\rho,1]$ 上非递减。由于 $f_\rho=0$ 在 $[-1,q_\rho]$ 上且 $f_\rho(\tau)>0$，所有结论均得证。□

Put $a_R=\overline{A}(R)/(4\pi)=\frac{\pi}{2}\sqrt{(1-R)(1+3R)}$.

命题 9.9。考虑一个单元，其中有一个有理数 $\bar{a}\ge a_{R_{\rm lo}}$、一个区间 $[x_a,x_b]$，其常数 R,ω 满足 (55)，以及常数 τ, b, K，它们对每个 $s(x_b)\le s\le s(x_a)$ 都满足引理 9.8 的假设，并且还满足 $\tau^2>R^2+\omega^2$。设 $R_{\rm lo}\le R\le R_{\rm hi}$, $x_a\le x\le x_b$，且 $s=s(x)\ge\sigma(R)$。则

$$\frac{J(r,s,p)}{4\pi}\le\bar{a}\Big(\frac{\overline{R}}{2}+b^2\Big)C+\frac{1-\overline{R}}{2}\,I(m), \tag{61}$$

其中，当 $I(m)=0$ 时为 $m\le\tau$，否则为 $d=d(m)$，$D=B-2sd$ 且$K=P^2/D^2$,

$$I(m)=A_0'\log\frac{m-\widehat{d}}{\tau-\widehat{d}}+K\log\frac{B-2s\tau}{B-2sm}+\frac{P^2}{D}\Big(\frac{1}{B-2sm}-\frac{1}{B-2s\tau}\Big)$$
$$-C\Big(\frac{m^2-\tau^2}{2}+(\widehat{d}+2b)(m-\tau)\Big),$$

以及 $A_0' = K - \rho^2 - C\,(\widehat{d}+b)^{\,2} \le 0$。

证明。根据引理 9.2 和 9.8，$f_{Rs} \le f_\rho \le C(q+b)^2$ 在 $[-1,\tau]$ 上，以及 $[f_{R,s} - C(q+b)^2]_+ \le \psi$ 在 $[\tau,1]$ 上。根据引理 9.3，$R \le R$ 和 $\tau > \sqrt{R} \ge \sqrt{R_\circ}$ 命题 5.2 中取 $\tau = \tau$ 和 $\xi = -b$，结合 $A(R) \le A(R_{\mathrm{lo}}) = 4\pi a_{R_{\mathrm{lo}}} \le 4\pi\bar{a}$ 以及取 $T = \tau$ 的式 (56)，得到取 $I(m) = \int_\tau^m \psi(q)/(q - \widehat{d}\,(m))\,dq$ 的式 (61)。命题 7.2 中将 $c = \rho^2$、$T = \tau$ 和 d 替换为常数 $\widehat{d} < \tau$，即可得到闭式。

最后，A_0' 是 $k_s(q)^2 - \rho^2 - C(q+b)^2$，在 $q = d \in [0,\tau)$ 处的值，至多为 $f_\rho(\widehat{d}\,) - C(\,\widehat{d}+b)^{\,2} \le 0$。□

有理形式。取 $\tau = (1-H)/(1+H)$，其中 $H = \eta^2$ 且有理数 $\eta \in (0,1)$，并对 $0 \le z \le 1$，令，

$$y = \eta z, \qquad Y = \eta^2 z^2, \qquad m = \frac{1-Y}{1+Y}, \qquad w = X^2 + Y.$$

那么 $z \in [0,1]$ 恰好对应于 $\tau \le m \le 1$。令 $\ell = R(1-Y) + 2\overline{\omega}\eta z$，其中 D_n 且 K_n 由引理 9.6之前给出的公式确定，适用于当前的 Y 和 ℓ，并且

$$N_u = H - Y, \qquad D_u = 1 - HY - (1+H)\ell, \qquad \ell_b = \ell + b(1+Y),$$
$$G = 1 - HY + (1+H)(\ell + 2b(1+Y)),$$
$$C_N = X^2(1+H)^2 - \rho^2(X^2+H)^2, \qquad C_D = (X^2+H)^2(\tau+b)^2,$$

有 $\widehat{d} = \ell/(1+Y)$、$D = 2D_n/((1+X)^2(1+Y))$、$K = K_n/D_n^2$、$C = C_N/C_D$、$d+b = \ell_b/(1+Y)$、$(m-\tau)/(m+\tau-2d) = N_u/D_u$，以及

$$\frac{B - 2s\tau}{B - 2sm} = \frac{(X^2+H)(1+Y)}{(1+H)w},$$
$$\frac{P^2}{D}\Big(\frac{1}{B-2sm} - \frac{1}{B-2s\tau}\Big) = \frac{2X^2(1+Y)(H-Y)(1-X^2)}{D_n w(X^2+H)},$$
$$C\Big(\frac{m^2-\tau^2}{2} + (\widehat{d}+2b)(m-\tau)\Big) = \frac{2C_N(H-Y)G}{C_D(1+Y)^2(1+H)^2}.$$

这些结论由 (54)、$k_s(\tau) = X(1+H)/(X^2+H)$、$m - \tau = 2(H-Y)/((1+H)(1+Y))$ 和 $m + \tau = 2(1-HY)/((1+H)(1+Y))$ 得出。用这种记号，关于 $[x_a, x_b]$ 的假设 (60) 表示为：$X(1+H) - \rho(X^2+H) > 0$，这是关于 X 的凹函数，在 $X = x_a^2$ 和 $X = x_b^2$ 处（即 $C_N > 0$，也就是 $q_\rho < \tau$）；$\rho(1+X^2) - 2X + b\rho(1-X^2) > 0$ 在 $X = x_b^2$ 处（即 $q_\rho + b > 0$，因为 q_ρ 随着 X 减小）；以及 $(2-2b)X^2 - 4\widehat{K}X + 2 + 2b \ge 0$ 对于 $x_a^2 \le X \le x_b^2$（其中 $\widehat{\ }$ 即 $B + 2sb \ge KP$）。

命题 *9.10*。假设命题 *9.9* 的假设成立。令 $0 \le z_a < z_b \le 1$，$w_0 = x_a^4 + Hz_a^2$，并令 Θ 为有理数，满足 $e^\Theta \ge (x_b^4 + H)/((1+H)w_0)$。令 $\Pi = (w+w_0)^3$，$c_1 = (1+H)^2$ 和 $n_1 = 4X^2(1+Y)^4 C_D - \rho^2 D_n^2(1+$

$Y)^2C_D - C_N\ell_b^2 D_n^2$，令

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= 3C_D D_n^2(1+Y)^2 D_u^3\,\Pi\, w(X^2+H)c_1,\\
\mathcal{N}_0 &= 3\bar{a}\big(\tfrac{\overline{R}}{2}+b^2\big)C_N D_n^2(1+Y)^2 D_u^3\,\Pi\, w(X^2+H)c_1,\\
\mathcal{N}_1 &= 2n_1(3N_u D_u^2 + N_u^3)\,\Pi\, w(X^2+H)c_1,\\
\mathcal{N}_2 &= 4X^2(1+Y)^4 C_D D_u^3 w(X^2+H)c_1\big(3(Y+\Theta)\Pi - 2\Xi\big),\\
\mathcal{N}_3 &= 6X^2(1+Y)^3(H-Y)(1-X^2)C_D D_n D_u^3\,\Pi\, c_1,\\
\mathcal{N}_4 &= 6C_N(H-Y)\,G\,D_n^2 D_u^3\,\Pi\, w(X^2+H),
\end{aligned}$$

沿用之前的 $\Xi = 3(w-w_0)(w+w_0)^2 + (w-w_0)^3$，并令 $\mathscr{F} = 2\mathcal{N} - 2\mathcal{N}_0 - (1-R)(\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2+\mathcal{N}_3-\mathcal{N}_4)$。若 D_n、D_u 和 $\mathscr{F}$ 在盒 $[x_a,x_b]\times[z_a,z_b]$ 上均为正，则对于命题 9.9 中的每个 (R,s,p)，只要满足以下任一条件，便有 $J(r,s,p) < 4\pi$：$m \ge \tau$ 且 (x,z) 位于盒内；或 $m < \tau$ 且 $z_b = 1$。

证明。先令 $m \ge \tau$。于是 $u = N_u/D_u \in [0,1)$，因为 $d < \tau \le m$，且 $v = (w-w_0)/(w+w_0) \in [0,1)$。由引理 9.4 和 $A_0' \le 0$，A_0' 对数——$\frac{m-d}{\tau-d} \le 2A_0'(u+u^3/3)$，并且，由于 $X^2 \le x_b^4$ 和 $w \ge w_0$，

$$\log\frac{B-2s\tau}{B-2sm} = \log(1+Y) + \log\frac{X^2+H}{(1+H)w_0} - \log\frac{w}{w_0} \le Y + \Theta - 2\Big(v + \frac{v^3}{3}\Big).$$

我们有 $A_0' = n_1/(C_D D_n^2(1+Y)^2)$。将这些上界及上述恒等式代入（61），利用 $K > 0$，再乘以 $2\mathcal{N} > 0$，即可得到

$$2\mathcal{N}\,\frac{J}{4\pi} \le 2\mathcal{N}_0 + (1-\overline{R})(\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2+\mathcal{N}_3-\mathcal{N}_4) = 2\mathcal{N} - \mathscr{F} < 2\mathcal{N}.$$

若 $m < \tau$，则 $J/(4\pi) \le \bar{a}(\overline{R}/2 + b^2)C$。在 $z = 1$ 处，刚得到的上界函数化简为这一项加上 $\frac{1-R}{2}K(Y + \Theta - 2(v+v^3/3))$；后者非负，因为它是 $\frac{1-R}{2}K\log 1 = 0$ 的上界。因此，在这种情况下 $J/(4\pi) < 1$ 也成立。□

9.4. 有限证书与定理 9.1 的证明。

命题 9.11 (有限证书)。共有 44 个单元，其中 8 个为直接型，36个为二次型；每个单元都带有一个 x 值区间和一个有限的盒集 $[x_a,x_b]\times[z_a,z_b]$，共计 4439 个盒，详见附录 C，并具有以下性质。

(i) 对于每个 $(R,s) \in D_{\mathrm{hi}}$，都有某个单元在其权重区间内包含 R，并且在其 x 的取值区间内包含 x，其中 $\underline{s} = s(x)$。*(ii)* 每个盒都带有有理常数 R_-、ω_- 和 χ（直接单元），以及 R_-、ω_-、η_-、b（二次单元），并附有命题 9.7 和 9.10 中的 w_0 和 Θ。以盒的 x-区间作为 $[x_a,x_b]$ 时，命题 9.7 或命题 9.10 的所有假设均成立；特别是 (53) 和 (55)。

(iii) 单元各盒的端点 x_a、x_b 将其 x 的取值区间划分为连续的闭子区间。对于每个这样的子区间I，该单元中所有 x-区间包含 I 的盒都带有相同的常数 ~~R~~、ω、χ，或 R、~~ω~~、η、b，并且它们的 z-区间覆盖 $[0,1]$。*(iv)* 在每个盒上，D_n、D_u 和 $\mathscr{F}$ 的所有张量伯恩斯坦系数 *(64)* 均为正。

证明。 所有断言都是关于有理数和有理系数多项式的有限命题。按照附录 C 中的说明，它们均通过精确有理数运算验证。 □

定理 9.1 的证明。若 $s \geq s_{\mathrm{top}}(R)$，则该断言是定理 8.1 或推论 8.3。设 $(R,s) \in \mathsf{D}_{\mathrm{hi}}$，且 p 是一个单位向量。按命题 9.11(i) 选取一个单元，并写作 $s = s(x)$。按 (iii) 选取一个子区间 I，使得 $x \in I$；若 x 是两个子区间的公共端点，则任取其一即可。令 R、ω、χ 分别为其 x-区间包含 I 的各个盒的共同常数，令 R、ω、η、b 也分别为这些盒的共同常数；每个盒的 x-区间都包含 x。在直接单元中，若 $m \leq q_\rho(s)$，则由命题 9.5 得 $J(r,s,p) = 0$；否则，引理 9.6 给出 $z \in [0,1]$，使得 $m = (1-\chi^2x^2z^2)/(1+\chi^2x^2z^2)$。在二次单元中，若 $m \geq \tau$，令 $z \in [0,1]$ 由 $m = (1-\eta^2z^2)/(1+\eta^2z^2)$ 定义；若 $m < \tau$，则令 $z = 1$。根据 (iii)，点 (x,z) 位于某个盒中，且该盒的 x-区间包含 I。根据 (ii) 和 (iv)，命题 9.7 和命题 9.10 分别适用于该盒，并给出 $J(r,s,p) < 4\pi$。□

注 9.12。 该证书是一个有理数数据的有限列表；验证程序使用自身的精确算术，根据上述公式重新构造每个多项式。定理 9.1 还由第二个独立程序进行验证，该程序不使用命题 9.7 和 9.10：它重新检查命题 9.11 的 (58) 和 (61) 的第 (i)–(iii) 部分，并在每个盒上使用球算术将带有精确对数的右侧括在内（第 C.4 节）。仅为说明之用，且不用于证明，在盒的角点和中心处，(58) 和 (61) 右侧的最大值约为 0.998，出现在二次单元中，取值为 $81/200 \leq R \leq 41/100$ 接近$s = \sigma(R)$；在直接单元中约为 0.98。

10. 经认证的乘积不等式与截断定理的证明

乘积上界函数的一条有限不等式涵盖乘积区域$7/20 \leq R \leq R_*$，$1/4 \leq s \leq \sigma(R)$。这里记录了其精确的参数域；上界的构造、算术模型、完整的验证记录以及源文件标识符见附录B和D，以及随附的补充材料。

引理 10.1（乘积不等式）。设 $R_* = 1936/2561$ 和 $\sigma(R) = (2 + 52R - 32R^2)/25$。对于每一个

$$\frac{7}{20} \le R \le R_*, \qquad \frac{13}{100} \le s \le \sigma(R), \qquad 0 \le \alpha \le 1,$$

命题 *5.1* 的乘积上界函数 $\mathcal{P}(R, s, \alpha)$ 满足

$$\mathcal{P}(R, s, \alpha) < 4\pi.$$

证明。该不等式通过第 B.3 节的有限验证得以确立。对每个参数盒，它采用一个凸上界函数，其关于一个余弦变量的平均值可显式计算；利用凸性将盒内的振幅约化为两段椭圆弧；通过上弦规则界定关于另一个余弦变量的平均值；并使用 Arb 球算术计算所有界。第 B.4 节的区间证书又独立地对该不等式进行了第二次验证：它在向外舍入的 binary64 区间算术中，以精确有理数检验核查所有超越常数，同时用上弦求积界定两个余弦平均值，并用外接多边形界定振幅。每份证书所覆盖的定义域均已通过精确有理数运算核查；严格界及可复现性记录见附录 D。□

对于该定义域的三个子条带，附录 E 通过精确矩和有理伯恩斯坦正性检验再次核查了结论$J < 4\pi$，且未使用区间算术或浮点算术；在这些条带的一部分上，它还证明了$\mathcal{P} < 4\pi$ 本身。该检验不用于证明。

定理 2.2 的证明。第 2 节表格中列出的闭定义域范围涵盖所有 $1/3 \le R \le R_*$ 和 $0 \le s < 1$。定理 6.2 从解析性上解决了$s \le 1/4$。在 $R \le 7/20$上，定理 7.6 控制整个区间$0 \le s \le 19/20$。在 $R \ge 7/20$上，引理 10.1 和命题 5.1 控制 $1/4 \le s \le \sigma(R)$（该引理为更大的区间 $13/100 \le s \le \sigma(R)$提供了证书），而定理 9.1 控制 $\sigma(R) \le s < 1$。推论 8.3 为每个权重下的 $s \ge 47/50$ 提供了解析性界。这些定义域在边界处重叠，因此不存在未覆盖的参数或极限值。

乘积证书、剩余高帽界、远离 $s = 0$时的低权重论证，以及大中心界都是严格的。小中心比较在远离等边零中心构型时也同样严格：对于 $R > 1/3$，其面积包络比较是严格的；而对于$R = 1/3$ 和 $0 < t \le 4/17$，引理 6.3 中的比较是严格的：经过精确化简可得 $1 - B(1/3, t) = 2t^2 N_5(t)/(9(2 - t)^3(1 - 2t)(5 + 2t)^3)$，其中 $N_5(t) = 844t^5 - 23756t^4 - 19549t^3 + 38870t^2 - 32700t + 9000$，且$N_5(t) \ge 9000 - 32700t - 19549t^3 - 23756t^4 > 0$ 在 $[0, 4/17]$上成立。在 $s = 0$处，

$$J(r, 0) = (A(r) - L)_+ \le A_{\mathrm{eq}} - L = 4\pi,$$

等号仅在等权基本环面处成立。在那里，$s = 0$确实给出 $J = 4\pi$。这证明了截断面积定理，包括其等号情形。□

11. 互补模，带有精确端点

设 $0 \le a \le 1/2$ 和 $b \ge 44/25$。在模为 $a+ib$ 的平坦环面上，使用到 S^3 的嵌入

$$\Psi_\rho(x,y) = \left(\sqrt{\rho}\, e^{2\pi i y/b}, \sqrt{1-\rho}\, e^{2\pi i (x - a y/b)} \right), \qquad \rho = 1 - \frac{1}{b^2 + 8/3} > \frac{2}{3}.$$

其狄利克雷能量密度和诱导面积密度均为常数，其中

$$E_0 = \frac{2\pi^2}{b}\{\rho + (a^2+b^2)(1-\rho)\}, \qquad A_0 = 4\pi^2 \sqrt{\rho(1-\rho)}.$$

尽管对于所选源模数而言，此映射不一定是共形的，但在任意目标共形变换之后，这两个密度仍保持成比例。Ψ_ρ 的像是 Bryant基本浸入 [1, 第 3] 节中矩形模 $i\sqrt{\rho}/(1-\rho)$ 所对应的像，其权重为 $r = (\rho,\ 1-\rho,\ 0)$。由于 $r_1 = \rho > 2/3$，这超出了 [1, 定理 2]中的 Montiel–Ros范围。在此范围内，共形体积等于 [1, 备注 5]中给出的值；其证明是在 [1] 的2025年修订版中补充的，并依赖于计算机代数（MAPLE）计算。已发表论文 [9, 引理 2.3] 中，对于模为 $i\beta$ 且满足 $\beta > \sqrt{2}$的矩形环面，也出现了同一个值；此处 $\beta = \sqrt{\rho}/\sqrt{1-\rho}$，而 $\beta > \sqrt{2}$ 表示 $\rho > 2/3$。相应的最大化在 [9, 引理2.4], 中完成，依据的是 [1] 给出的不等式以及在参数域边界上的直接计算。对于 $r_3 = 0$，共形体积等于 $8\pi^2/(3\sqrt{3}\sqrt{\rho}) = A_0 \cdot 2/(3\sqrt{3}\,\rho\sqrt{1-\rho})$。该值是本文唯一取自文献的计算性输入；它仅用于 $b \ge 44/25$，并且也是 Kang 在 [9,推论1.3]中的约化所依据的基础。补充材料中还包括了对本文所用范围的数值检验，该检验不属于证明的一部分：对于 $44/25 \le b \le 10$，它确定共形面积的上确界位于较大圆的方向上，并将该值复现到约二十位数字。因此

$$\sup_{M} \mathcal{E}(M \circ \Psi_\rho) = E_0 \frac{2}{3\sqrt{3}\,\rho\sqrt{1-\rho}}.$$

折叠和瑞利和给出 λ_2 面积 ≤ 4上确界$_M\, \mathcal{E}(M \circ \Psi_\rho)$，因为两部分的能量均不超过完整的单映射上确界。因此，令 $B = b^2$，

$$\lambda_2 \,\mathrm{Area} \le \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}}\, H(B), \qquad H(B) = \frac{(2B + 23/12)\sqrt{(B+8/3)/B}}{B + 5/3}.$$

对数导数为

$$\frac{H'(B)}{H(B)} = \frac{17/12}{(2B+23/12)(B+5/3)} - \frac{8/3}{2B(B+8/3)}.$$

乘以正的公分母后，其分子为$-(5/2)B^2 - (58/9)B - 230/27$。因此，$H$ 在 $B > 0$ 上递减。还需

界定 $B_0 = 1936/625$处的值。此时

$$\sqrt{\frac{B_0 + 8/3}{B_0}} = \sqrt{\frac{1351}{726}} < \frac{6821}{5000}.$$

有理不等式 $333/106 < \pi < 22/7$ 和 $265/153 < \sqrt{3} < 97/56$给出

$$\frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} H(B_0) < \frac{16(22/7)^2}{3(265/153)} \frac{2B_0 + 23/12}{B_0 + 5/3} \frac{6821}{5000} < \frac{707}{10},$$
$$C_* > \frac{8(333/106)^2}{97/56} + 8\frac{333}{106} > \frac{707}{10}.$$

应用给定的 π 和 $\sqrt{3}$界后，所展示的端点比较即为精确的有理不等式。补充脚本提供了独立验证（附录 D）。因此，外部区域具有一个统一的严格上界，低于 C_*。

12. 尖锐性、不取到性与唯一极大化类

前几节证明了对每个光滑度量都成立的严格上界。对于下界，标准的共形泡化构造给出

$$\Lambda_2(T^2, \mathcal{C}) \geq \Lambda_1(T^2, \mathcal{C}) + 8\pi; \tag{62}$$

参见 [2, 12]。等边嵌入的面积为 A_{eq}，其第一正特征值为 2，这可由直接的傅里叶计算得出。因此，式（62）给出$\Lambda_2\left(T_{\mathrm{eq}},\ [g_{\mathrm{eq}}]\right) \geq 2A_{\mathrm{eq}} + 8\pi$。等价地，保留这个平坦环面，并通过共形集中嵌入一个单位圆形球面泡。总面积趋于 $A_{\mathrm{eq}} + 4\pi$，而 $\lambda_1 \to 0$ 和 $\lambda_2 \to 2$。这证明了尖锐性，以及光滑度量不取到该值。

为完整起见，我们证明不存在其他具有相同上确界的固定共形类。对于一个固定的基本嵌入，定义

$$V_2(r) = \sup_{v,w \in B^6} \int \max\{k_v(F_r)^2, k_w(F_r)^2\}\, dA_r.$$

对于每一对内部中心，第 3 节中的论证将定义 V_2（r）的积分严格置于 $A_{\mathrm{eq}} + 4\pi$之下；还需要进一步的边界论证，才能得出上确界的严格性。

首先，定理 2.2 本身就意味着

$$\limsup_{|v| \to 1} \int k_v(F_r)^2\, dA_r \leq 4\pi. \tag{63}$$

事实上，

$$\int k_v^2\, dA_r = J(r, v) + \int \min\{k_v^2, L/A(r)\}\, dA_r.$$

对于任意一个趋近边界的中心序列，先选取一个实现上极限的子列，再选取一个方向收敛的子列。第二

被积函数在球面上某一点的原像之外趋于零。由于 F_r 是一个嵌入，该原像的面积为零。由控制收敛定理可得（63）。

记 $V_c(F_r) = \sup_{w\in B^6}\int k_w(F_r)^2\,dA_r$ 为基本嵌入的共形面积。定理 2.2 也控制这一量。对于每个$w \in B^6$,

$$\int k_w^2\,dA_r = J(r,w) + \int \min\{k_w^2, L/A(r)\}\,dA_r \le J(r,w) + L.$$

若 $R > 1/3$，则 $J(r, w) < 4\pi$ 对每个 w均成立，因此在每个内部中心处，该积分都严格小于 $L + 4\pi = A_{\mathrm{eq}}$。沿着中心的极大化序列，要么某个子列收敛到一个内部点，此时该积分是连续的；要么 $|w| \to 1$，此时（63）给出上界 $4\pi < A_{\mathrm{eq}}$。因此

$$V_c(F_r) < A_{\mathrm{eq}} \qquad (R > 1/3),$$

无需借助显式的共形体积公式。因此，如果一个中心趋于边界，则双中心积分的上极限至多为 $4\pi + V_c(F_r) < A_{\mathrm{eq}} + 4\pi$。如果两个中心都趋于边界，则其至多为$8\pi < A_{\mathrm{eq}} + 4\pi$。 $B^6 \rtimes B^6$ 的紧性现表明

$$V_2(r) < A_{\mathrm{eq}} + 4\pi \qquad (R > 1/3).$$

否则，趋近于所声称的更大上确界的序列要么具有一个内部极限，这将与内部的严格界矛盾；要么具有一个边界极限，这将与前述的 limsup 界矛盾。由于 $R = 1/3$ 只在等边模处出现，折叠得到 $\Lambda_2(T^2, \mathcal{C}) \le 2V_2(r) < C_*$ 对于 $\mathcal{K}$ 中的每一个其他类均成立。第 11 节涵盖了每一个外部类。定理 2.1 得证。

13. 总结性说明

从文献中引入的结果包括一致化、球面帽折叠引理 [9, 引理 2。2]（另见 [3, 14]）、 S^3 第 11 [1], [9, 2.3 节和第 2 节中使用的乘积环面的共形体积4] （其$r_1 > 2/3$ 证明 [1] 依赖于 MAPLE 计算），以及共形起泡下界 [2, 12]。新的要素是尖锐的截断面积估计（6）。法曲率与法弦分析控制高帽，并在四个权重中心条带中采用直接解析估计；低权重区域则通过四次矩不等式、帽核的单调性、初等对数界和有理伯恩斯坦正性处理，而剩余的高权重帽则在有限个明确的有理盒上，使用相同的帽核、对数界和伯恩斯坦正性处理。在互补的紧乘积域上，乘积上界函数通过经验证计算得以确立。其余所有正负号判断均为解析的，或是精确的有理多项式比较。唯一通过经验证数值计算得到证书的不等式是引理 10.1，它分别在 Arb 球算术和 binary64 区间算术中独立验证了两次；精确的高帽

命题 9.11 的证书也在球算术中进行了独立检查。其推导和有限验证记录在附录及随附的源代码补充材料中。这些证书构成证明的一部分。没有推导出关于高阶特征值的任何结论。

附录 A. 精确有理数正性证书

A.1. 小中心伯恩斯坦比较。此处所有断言均在$\mathbb{Q}$上成立；它们由初等多项式展开推出，并通过 `small_centre_certificates.py`在精确有理数运算中得到验证。对于一个$P(u,\ v)\ =\sum a_{k\ell}u^{k}v^{\ell}$双次数至多为$(n,\ m)$的多项式，其在张量伯恩斯坦基下的系数为

$$b_{ij}=\sum_{k=0}^{i}\sum_{\ell=0}^{j}a_{k\ell}\frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}}\frac{\binom{j}{\ell}}{\binom{m}{\ell}},\quad 0\le i\le n,\quad 0\le j\le m. \tag{64}$$

这些基函数均为非负函数，且总和为 1，因此 $P(u,\ v)\ \ge\min\ b_{ij}$on $[0,1]^{2}$。限制到一个仿射子矩形时，在进行仿射代换后应用相同的公式。这定义了下面的所有证书，且不依赖于符号代数软件包。

$u=17t/4$	$v=(h+1)/2$ 伯恩斯坦系数的下界	
$[0,1/2]$	$[0,1]$	>187
$[1/2,3/4]$	$[0,1/4]$	>51
$[1/2,1]$	$[1/4,1/2]$	>24
$[1/2,1]$	$[1/2,1]$	>265
$[3/4,1]$	$[0,1/8]$	>19
$[3/4,1]$	$[1/8,1/4]$	>2

表 2。使用 64 个双次数为 (7,4)的 $P=2D(t)(H_{t}(h)-1/2)$所得伯恩斯坦系数的精确下界。六个矩形构成单位正方形的精确划分。

多项式及归一化矩形	双次数	零点	最小正值系数
$D(t)h_{2}(t)$，$u=17t/4\in[0,1]$	7	2	>31
$D(t)h_{3}(t)$，相同	7	3	>11
$D(t)h_{4}(t)$，相同	7	4	>7
P_{A}、$u=17t/4$、$R=1/3+7v/24$	(7，2)	4	$>1/2$
P_{B}、$u=17t/4$、$R=5/8+v/24$	(7，3)	0	$>1/3$

表 3. 完整单位区间/矩形上的精确有理伯恩斯坦系数界。这些多项式 P_{A}，P_{B} 和 D 定义于引理 6.3的证明中。

作为独立的算术检查， P_A 的精确最小 正系数以及 P_B 的最小系数分别为

$$\frac{17052549075}{26261675072} > \frac{1}{2}, \qquad \frac{882755069353}{2256862701500} > \frac{1}{3}.$$

P_A 的四个零系数对应于其在 $t = 0, R = 1/3$ 处的边界等式。对于单变量的 Dh_j 证书，最小的正伯恩斯坦系数精确为

$$\frac{64000}{2023}, \qquad \frac{409600}{34391}, \qquad \frac{4096000}{584647} \quad (j = 2, 3, 4).$$

这些分数以及表格 2–3 给出了简短、有限且可手工复核的有理正性证书。它们并非对连续体进行数值采样。

A.2. 四次 Hermite 与矩包络恒等式。 令 $I_1 = [4/17, 10/29]$，$I_2 = [10/29, 680/1889]$。对于任意一个 $I = [t_0, t_1]$，将其分成两半 $I_i = [t_0 + i(t_1 - t_0)/2, t_0 + (i + 1)(t_1 - t_0)/2]$，$i = 0, 1$，并将 $[-1, 1]$ 分成八个区间 $J_j = [-1 + j/4, -1 + (j + 1)/4]$，$0 \le j < 8$。定义二元多项式

$$P_{1,1}(t, h) = D(t)\left[H_t(h) + \frac{(1 - h)^2}{17} - \frac{9}{20}\right],$$

$$P_{1,2}(t, h) = D(t)\left[H_t(h) + \frac{(1 - h)^2}{14} - \frac{9}{20}\right].$$

这些多项式的双次数至多为 $(7, 4)$。下表列出了每个矩形上其 40 个伯恩斯坦系数中最小值的严格整数下界 $I_i \times J_j$；这些下界由将有理数端点数据代入式（64）得出。

	i	$j=0$	1	2	3	4	5	6	7
$P_{1,1}$	0	**114**	**47**	**40**	**54**	100	**178**	**328**	**629**
	1	129	28	2	6	36	90	219	552
$P_{1,2}$	0	**215**	**34**	4	6	32	**81**	**205**	**541**
	1	230	34	0	2	25	70	191	529

每个数值都严格小于实际的最小系数。对于最后一行中记为 0 的数值，其精确最小值为

$$\frac{453066687288041190235175}{480630948788577613399122 4} > \frac{1}{12} > 0.$$

因此，指定矩形上的每个伯恩斯坦系数都严格为正。对于矩包络，引入

$$P_{2,1}(t, R) = D(t)\left[\frac{93}{100} - B(R, t)\right], \quad P_{2,2}(t, R) = D(t)\left[\frac{229}{250} - B(R, t)\right].$$

在完整矩形区域 $I_1 \times [1/3, 7/20]$ 和 $I_2 \times [1/3, 7/20]$上，它们的双次数分别不超过 $(7, 2)$。它们的最小伯恩斯坦系数为：

分别为：

$$\frac{426653190}{410338673} > 1, \qquad \frac{23681895118301658281116}{85826955140817430964129} > \frac{1}{4}.$$

最后， $D(t)h_j(t)$、 $j = 2$、3、4均为次数至多为七的一元多项式。它们在 I_1 上的最小伯恩斯坦系数均超过127，而在I_2 上的最小伯恩斯坦系数均超过97。直接验证使用了(64)的一元版本。这些精确比较确立了定理7.1证明中所使用的每个多项式符号断言。

A.3. **中间中心有理符号。**

引理*7.4*的证明。在（34）中通分，使用以下指定的正整数分母：

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathrm{mid}} = {} & 111284280(1+y^2)^2(5s^2-6s+5)^2(5y^2-32y+15)^3 \\ & \times \big((1-s)^2+(1+s)^2y^2\big)\big(5s^2-8s+5+(5s^2+2s+5)y^2\big)^3 \\ & \times \big(50s^2y^2+50s^2+35sy^2-96sy-35s+50y^2+50\big)^2,\end{aligned}$$

可得$\mathcal{N}_{\mathrm{mid}} := \mathcal{D}_{\mathrm{mid}}(1 - W_{\mathrm{mid}})$ 是一个双次数为 (16,22) 的整系数多项式。$\mathcal{D}_{\mathrm{mid}}$ 的每个显式因子在所述矩形区域上都严格为正。最后一个因子是 $B - 2sd$ 的正倍数。

为完整起见，下表给出了$\mathcal{N}_{\mathrm{mid}}$ 在每个所列有理矩形上的最小张量伯恩斯坦系数的严格整数下界；其转换依据是二项式恒等式（64），并采用双次数 (16,22)。

s-区间	y-区间最小系数大于	
$[17/40, 117/200]$	$[0, 1/2]$	1045937920126
$[117/200, 149/200]$	$[0, 1/4]$	40254425419694
$[117/200, 149/200]$	$[1/4, 1/2]$	1488390323358

所有条目均可通过展开显式因式分解的有理表达式（34）并应用（64）得到；特别是，未使用浮点数值评估。因此，在完整矩形区域上 $\mathcal{N}_{\mathrm{mid}} > 0$ 和 $W_{\mathrm{mid}} < 1$ 。 □

A.4. **大中间中心有理符号。**

引理的证明*7.5*。 分母可以选为整数多项式

$$\mathcal{D}_{\mathrm{end}} = -72F_1F_2^3F_3^2F_4,$$

其中

$$\begin{aligned}F_1 &= x^4z^2 - 4x^2z^2 + x^2 + 4z^2, \\ F_2 &= x^4z^2 + 2x^2z^2 + x^2 - 8z^2 - 6, \\ F_3 &= 50x^6z^2 - 135x^4z^2 + 50x^4 + 96x^3z + 135x^2z^2 - 65x^2 - 96xz + 65, \\ F_4 &= 125x^6z^2 - 220x^4z^2 + 125x^4 + 192x^3z \\ &\qquad + 70x^2z^2 - 280x^2 - 192xz + 130.\end{aligned}$$

多项式 $\mathcal{N}_{\mathrm{end}} := \mathcal{D}_{\mathrm{end}}(1 - W_{\mathrm{end}})$ 的双次数为 $(34,\ 14)$，且具有整数系数。在完整矩形区域上，具有该双次数的 $\mathcal{D}_{\mathrm{end}}$ 的最小伯恩斯坦系数大于 $102300857 > 0$。对于 $\mathcal{N}_{\mathrm{end}}$，将两个坐标区间分别二等分，可得到以下关于最小伯恩斯坦系数的严格整数下界（使用（64））：

x-区间	z-区间最小系数大于	
$[1/5, 141/400]$	$[0, 1/2]$	1611848
$[1/5, 141/400]$	$[1/2, 1]$	4699163158
$[141/400, 101/200]$	$[0, 1/2]$	14479899
$[141/400, 101/200]$	$[1/2, 1]$	102060289

因此，在这个更大的矩形中处处有$\mathcal{N}_{\mathrm{end}}$，$\mathcal{D}_{\mathrm{end}} > 0$，从而有 $W_{\mathrm{end}} < 1$。□

附录 B。乘积不等式：上求积与经认证的界

这里使用的乘积区域为

$$\frac{7}{20} \le R \le \frac{1936}{2561}, \qquad \frac{13}{100} \le s \le \sigma(R), \qquad \sigma(R) = \frac{2 + 52R - 32R^2}{25}. \tag{65}$$

互补高权重参数区域由定理9.1控制，而低权帽则由定理 7.6覆盖。该区域上的不等式通过第 B.3节中的球算术验证得到确立，并由第 B.4节的区间证书独立地进行了第二次验证。两者均使用第 B.1节的上弦规则。完整的执行记录汇总于附录 D。

B.1. 上弦规则。 设 $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$。对于定义在 $[-1, 1]$上的凸函数，其在这些节点处的分段仿射插值函数位于该函数之上。将该插值函数对反正弦分布$dx/(\pi\sqrt{1 - x^2})$进行积分；该分布是均匀角度 u下 $\cos u$ 的分布，从而得到一个正原子上求积公式。在 $[x_j, x_{j+1}]$ 上，该分布的质量和一阶矩为

$$\mu_j = \frac{\arcsin x_{j+1} - \arcsin x_j}{\pi}, \qquad \nu_j = \frac{\sqrt{1 - x_j^2} - \sqrt{1 - x_{j+1}^2}}{\pi},$$

及其对 x_j 和 x_{j+1} 权重的贡献分别为 $(x_{j+1}\mu_j - \nu_j)/(x_{j+1} - x_j)$ 和 $(\nu_j - x_j\mu_j)/(x_{j+1} - x_j)$；两者均为非负，因为 $\nu_j/\mu_j \in [x_j, x_{j+1}]$。对于切比雪夫节点 $x_j = -\cos(j\pi/N)$，所有质量均为 $1/N$。不能根据收敛推断求积误差估计。

B.2. 精确角表示。 乘积上函数还可将二重积分精确地化为单重积分。令

$$a = \sqrt{R}\,\alpha, \quad b = \sqrt{1 - R}\sqrt{1 - \alpha^2}, \quad P = 1 - s^2,\ B = 1 + s^2,\ \nu = \frac{P}{\sqrt{c(R)}}.$$

固定 u，令 $z = B - 2sa\cos u$ 和 $\beta = 2sb$。$B - 2s(a+b)$ 的正性 $\geq (1-s)^2$ 意味着 $z > \beta$。如果 $\beta > 0$，则定义 $\vartheta \in [0,\pi]$ 为

$$\vartheta = \begin{cases} 0, & z - \beta \geq \nu, \\ \pi, & z + \beta \leq \nu, \\ \arccos((z-\nu)/\beta), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

引入

$$I_1(\vartheta; z, \beta) = \frac{2}{\sqrt{z^2 - \beta^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{z+\beta}{z-\beta}} \tan\frac{\vartheta}{2}\right),$$
$$I_2(\vartheta; z, \beta) = \frac{z I_1(\vartheta; z, \beta) + \beta \sin\vartheta/(z - \beta\cos\vartheta)}{z^2 - \beta^2}.$$

在 $\vartheta = \pi$ 处将这些表达式作连续解释；对于 $\beta = 0$，使用 $I_2 = \vartheta/z^2$。对余弦变量直接积分可得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\frac{P^2}{(z - \beta\cos w)^2} - c(R)\Big)_+ dw = \frac{1}{\pi}\big(P^2 I_2(\vartheta; z, \beta) - c(R)\vartheta\big).$$

由此可得

命题 B.1。命题 *5.1* 的乘积上界函数满足精确恒等式

$$\mathcal{P}(R, s, \alpha) = \frac{\overline{A}(R)}{\pi^2}\int_0^\pi \left[P^2 I_2(\vartheta; z, \beta) - c(R)\vartheta\right] du.$$

第 B.3 节的验证将同一个原函数应用于参数盒上均匀的上界函数；第 B.4节的区间证书不使用该原函数。

B.3. **球算术中的验证**。此验证在每个参数盒上使用被积函数的单个凸上界函数，利用第 B.2 节的原函数对第二个余弦变量进行积分，通过凸性将整个盒的振幅归结为两段椭圆弧，并使用 Arb 的球算术计算每个界。

在盒上统一的上界函数。对于 $0 < s < 1$，令 $q_s = 2s/(1+s^2)$，使得$k_s(q_s)^2 = (1 - q_s^2)^{-1}$。由于

$$\partial_s k_s(q) = \frac{2\big((1+s^2)q - 2s\big)}{(1 + s^2 - 2sq)^2}$$

且 q_s 随 s 增大，对于固定的 q，函数 $s \mapsto k_s(q)$ 在$q_s < q$ 时递增，而在 $q_s > q$时递减。

引理 B.2。令 $0 < s_0 < s_1 < 1$、$q_i = q_{s_i}$ 和 $v_i = (1 - q_i^2)^{-1}$，并令 ℓ 为满足 $\ell(q_0) = v_0$ 且 $\ell(q_1) = v_1$ 的仿射函数。在 $(-\infty, 1/q_1)$ 上定义 F，定义方式如下：

$$F = k_{s_0}^2 \ on\ (-\infty, q_0], \qquad F = \ell \ on\ [q_0, q_1], \qquad F = k_{s_1}^2 \ on\ [q_1, 1/q_1).$$

则 F 是连续、凸且非递减的，并且对于 $s_0 \le s \le s_1$ 和 $q < 1/q_1$，有 $k_s(q)^2 \le F(q)$。

证明。对于 $s \le s_1$，函数 k_s^2 在 $(-\infty, 1/q_s) \supset (-\infty, 1/q_1)$ 上是凸且递增的。由 s 中的单调性，函数 $M(q) = \max_{s_0 \le s \le s_1} k_s(q)^2$ 等于 $k_{s_0}(q)^2$（当 $q \le q_0$ 时），$(1-q^2)^{-1}$（当 $q_0 \le q \le q_1$ 时），以及 $k_{s_1}(q)^2$（当 $q_1 \le q < 1/q_1$ 时）。作为凸函数的上确界，M 是凸的，而 ℓ 是其在 $[q_0, q_1]$ 上的弦。因此，$M \ge \ell$ 在 $[q_0, q_1]$ 之外，而 $M \le \ell$ 在 $[q_0, q_1]$ 上，从而 $F = \max(M, \ell)$ 是凸的，并且支配 M。其三个分段均为非递减的，因为 $0 < q_0 < q_1$ 给出 $v_0 < v_1$。□

参数框。考虑一个满足 $7/20 \le R_0 < R_1 \le R_*$ 的盒 $[R_0, R_1] \times [s_0, s_1]$。由于 $(1-R)(1+3R)$ 在 $R > 1/3$ 上递减，函数 A 在 $[7/20, R_*]$ 上递减，而 $\bar{c}$ 在 $[7/20, R_*]$ 上递增，并且 $\bar{c}(R_*) < 1$。固定满足 $0 < c \le \bar{c}(R_0)$ 和 $A \ge A(R_0)$ 的 c 与 A；则 $c < 1 \le v_0$。令 F 为引理 B.2 中的函数，并令 $F_c = (F - c)_+$。于是，当 $R_0 \le R \le R_1$、$s_0 \le s \le s_1$ 和 $|q| \le 1$ 时，$f_{R,s}(q) \le F_c(q)$，且 $A(R) \le A$。置

$$\Phi(a,b) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi F_c(a\cos u + b \cos w)\, du\, dw \qquad \big(|a| + |b| < 1/q_1\big).$$

由于 $\sqrt{R}\alpha + \sqrt{1-R}\sqrt{1-\alpha^2} \le 1 < 1/q_1$ 根据柯西–施瓦茨不等式，命题 5.1 的上界函数满足

$$\mathcal{P}(R, s, \alpha) \le A\, \Phi\big(\sqrt{R}\alpha, \sqrt{1-R}\sqrt{1-\alpha^2}\big) \tag{66}$$

对于 $R_0 \le R \le R_1$、$s_0 \le s \le s_1$ 和 $0 \le \alpha \le 1$。函数 Φ 是凸的，因为它是关于 $(a,\ b)$ 的凸函数的平均值；由于 $\cos u$ 和 $-\cos u$ 具有相同的分布，因此它在每个变量上都是偶函数。因此，Φ 关于 $a \ge 0$ 和 $b \ge 0$ 均为非递减。

振幅弧。对于 $0 < R < 1$，令 E_R 为弧

$$\theta \mapsto (\sqrt{R}\sin\theta, \sqrt{1-R}\cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le \pi/2.$$

它由（66）中的振幅对组成，其中 $\alpha =$ 正弦 θ，且与直线 $a + b = 1$ 在 $(R,\ 1-R)$ 处相切，其中 正弦 $\theta = \sqrt{R}$。令 E_R^- 和 E_R^+ 分别为其满足 正弦 $\theta \le \sqrt{R}$ 和 正弦 $\theta \ge \sqrt{R}$ 的子弧。

引理 B.3。设 $0 < R_0 \le R \le R_1 < 1$。$E_R$ 中的每个点都在坐标意义上被凸包 $E_{R_0}^- \cup E_{R_1}^+$ 中的某个点支配。因此

$$\sup_{E_R} \Phi \le \max\Big(\sup_{E_{R_0}^-} \Phi,\ \sup_{E_{R_1}^+} \Phi\Big).$$

证明。弧 E_R 是 $[0, \sqrt{R}]$ 上的 $e_R(a) = \sqrt{(1-R)(1-a^2/R)}$ 的图像，并且

$$e_{R'}(a)^2 - e_R(a)^2 = (R - R')\Big(1 - \frac{a^2}{RR'}\Big).$$

子弧 $E_{R_0}^-$ 是 $[0, R_0]$ 上函数 e_{R_0} 的图像，而 $E_{R_1}^+$ 是 $[R_1, \sqrt{R_1}]$ 上函数 e_{R_1} 的图像。如果 $a \le R_0$，则 $a^2 \le R_0 R$，因此 $e_R(a) \le e_{R_0}(a)$。如果 $a \ge R_1$，

那么 $a^2 \geq R_1 R$，因此 $e_R(a) \leq e_{R_1}(a)$。如果 $R_0 \leq a \leq R_1$，那么根据柯西–施瓦茨不等式，$e_R(a) \leq 1-a$，并且 $(a,\ 1-a)$ 位于从 $(R_0,\ 1-R_0) \in E_{R_0}^-$ 到 $(R_1,\ 1-R_1) \in E_{R_1}^+$的线段上。凸包包含于 $\{a,\ b \geq 0,\ a+b \leq 1\}$中，因此第二个断言由 Φ的凸性和单调性得出。□

弧的片段。对于 $t = \tan(\theta/2)$，有 $(\sin\theta,\ \cos\theta) = \big(2t/(1+t^2),\ (1-t^2)/(1+t^2)\big)$，当 t 为有理数时，该式为有理数。子弧 E_R^- 和 E_R^+分别对应 $0 \leq t \leq t_*(R)$ 和 $t_*(R) \leq t \leq 1$，其中 $t_*(R) = \sqrt{R}/(1+\sqrt{1-R})$。令 $0 \leq t_0 < t_1 \leq 1$ 对应于 $\theta_0 < \theta_1$。在单位圆上，从 θ_0 到 θ_1 的弧被角点 $(\sin\theta_1,\ \cos\theta_0)$ 支配，并且包含在以 $(\sin\theta_i,\ \cos\theta_i)$ 和

$$\frac{1}{\sin(\theta_1-\theta_0)}\big(\cos\theta_0-\cos\theta_1,\ \sin\theta_1-\sin\theta_0\big),$$

其端点处切线的交点为顶点的三角形中。映射 $(x,\ y) \mapsto (\sqrt{R}x,\ \sqrt{1-R}\,y)$ 保持这两种性质。因此，在 E_R 对应的片段上，函数 Φ 的值不超过角点像处的函数值；此外，只要这些点满足 $a+b < 1/q_1$，其值也不超过三角形三个顶点像处的最大值。

第二个余弦变量。设 $b > 0$ 和 $|y| + b < 1/q_1$。数$q_c = \big(1+s_0^2-(1-s_0^2)c^{-1/2}\big)/(2s_0)$ 满足 $k_{s_0}(q_c)^2 = c$和 $q_c < q_0$，因为$v_0 > c$。因此，F_c在 $(-\infty, q_c]$ 上为零，并在 $(q_c,\ 1/q_1)$上等于 $F - c > 0$。令 $\operatorname{clip}(x) = \min\{1, \max\{-1, x\}\}$ put

$$\omega_i = \arccos\operatorname{clip}\Big(\frac{q_i - y}{b}\Big) \quad (i = 0, 1), \qquad \omega_c = \arccos\operatorname{clip}\Big(\frac{q_c - y}{b}\Big).$$

由于 $w \mapsto y + b\cos w$在 $[0,\pi]$上递减，被积函数 $F_c(y+b\cos w)$在端点为 $0 \leq \omega_1 \leq \omega_0 \leq \omega_c \leq \pi$的连续区间上分别等于$k_{s_1}^2 - c$、$\ell - c$、$k_{s_0}^2 - c$ 和 0。令 $P_i = 1 - s_i^2$、$z_i = 1 + s_i^2 - 2s_i y$ 和 $\beta_i = 2s_i b$；则 $z_i > \beta_i > 0$，因为 $y + b < 1/q_1 \leq 1/q_i$。B.2 节中的函数 I_2给出 $\int_0^\omega k_{s_i}(y + b\cos w)^2\,dw = P_i^2 I_2(\omega;\ z_i,\ \beta_i)$。因此，设 ℓ'为 ℓ的斜率，平均值 $G(y, b) = \pi^{-1}\int_0^\pi F_c(y + b\cos w)\,dw$ 为

(67)
$$\begin{aligned}\pi\,\mathcal{G}(y,b) = {} & P_1^2 I_2(\omega_1; z_1, \beta_1) - c\,\omega_1 + \big(\ell(y) - c\big)(\omega_0 - \omega_1) + \ell' b\,(\sin\omega_0 - \sin\omega_1) \\ & + P_0^2\big(I_2(\omega_c; z_0, \beta_0) - I_2(\omega_0; z_0, \beta_0)\big) - c\,(\omega_c - \omega_0).\end{aligned}$$

对于 $b = 0$，我们有 $\mathcal{G}(y,\ 0) = F_c(y)$。

第一个余弦变量。对于 $a,\ b \geq 0$ 当 $a + b < 1/q_1$时，函数$x \mapsto \mathcal{G}(ax,\ b)$ 在 $[-1, 1]$上是凸函数。对于节点 $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$，按照 B.1 节中的方法将其替换为弦，B.1 可得

$$\Phi(a,b) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathcal{G}(a\cos u, b)\,du \leq \sum_{j=0}^{N} W_j\,\mathcal{G}(ax_j, b),$$

其中 $W_j \geq 0$ 是针对这些节点的 B.1 节上弦规则的权重。B.1 。

证书。该证书列出 5400 个具有有理数端点的盒。对于每个盒，它将一个区间 $[0, t_L]$ with $t_L > t_*(R_0)$ 划分为 $E^-_{R_0}$，并将一个区间 $[t_R, 1]$ with $t_R < t_*(R_1)$ 划分为 $E^+_{R_1}$；总共得到 30051 个具有二进端点的片段。每个片段标记为角点或三角形，并带有六个节点集之一，$N \in \{16, 32, 64, 128, 256, 512\}$，其内部节点是分母为 2^{24} 的二进有理数，且接近 $-\cos(j\pi/N)$，中间节点为 0。验证器检查以下义务。

(i) 这些盒位于 $7/20 \leq R \leq R_*$, $0 < s < 1$ 中，并覆盖定义域 (65)。由于 σ 在 $[7/20, R_*]$ 上递增，只需检查：对于盒的连续 R 端点之间的 203 个条带中的每一个，包含该条带的盒的 s 区间覆盖 $[13/100, \sigma(\rho)]$,where ρ 是该条带的右端点。这通过精确有理数运算进行检查。(ii) 每个划分中的片段彼此相邻且包含于 $[0, 1]$, 中，并且不等式 $t_L > t_*(R_0)$ 和 $t_R < t_*(R_1)$ 成立。节点列表从 -1 到 1 严格递增。(iii) $0 < c < v_0$，且每个角点或三角形顶点 (a, b) 都满足 $1 + s_1^2 - 2s_1(a + b) > 0$, 也就是说，$a + b < 1/q_1$。(iv) 在每个这样的顶点处，$A \sum_j W_j \mathsf{G}(^{ax_j}, b) < 4\pi$，其中 G 由 (67) 给出。

这些条件推出引理 10.1。事实上，由 (i) 可知，每个可行的 (R, s) 都落在某个盒中；由 (66) 和引理 B.3，只需证明 $A\,\Phi < 4\pi$ on$E^-_{R_0}$ and on $E^+_{R_1}$。根据 (ii)，这些子弧由各个片段覆盖；根据 (iii) 以及关于弧片段的段落，Φ 在每个片段上的界由该片段各顶点处的取值给出；而在每个顶点处，$\Phi(a, b) \leq \sum_j W_j \mathsf{G}(^{ax_j}, b)$，因此 (iv) 给出 $A\,\Phi(a, b) < 4\pi$。

计算使用 Arb 的球算术（该算术包含于 FLINT 3.6.0），通过 python-flint 0.9.0 以 96 位工作精度进行。每个实数都由一个包含它的球表示：c和 A是包含 $\bar{c}(R_0)$ 和 $A(R_0)$的球的下端点和上端点；对 ω_0,ω_1, ω_c 中的截断操作作用于包含这些商的球的两个端点；并且只有当不等式对涉及的球内所有点都成立时，才接受该不等式。Arb 使用自身的任意精度算术和严格误差界进行计算，因此此验证不使用第B.4节的 binary64 模型。所有条件均成立；经认证的顶点界中最大值为 $12.566357268 < 4\pi$。证书由浮点搜索找到，但该搜索与验证无关。在补充材料文件夹中，通过以下命令运行验证：

```
python3 reproduce.py --product-ball
```

并且在两个处理器核心上运行约需一分钟。文件夹 `diagnostics`中的两个程序并非证明的一部分，它们将 (67) 与定义积分的数值求积结果进行比较（结果一致至 10^{-26}），并且

检查验证器是否会拒绝损坏的证书：缺少一个盒、顶部盒降低、盒扩大、弧分割未延伸至 $t_*(R_0)$ 或在各部分之间留下$[0,1]$, 间隙、顶点超出极点、节点列表不单调，以及阈值略低于某个盒的最大界。

B.4. **一份独立的区间证书。** 引理 10.1 通过一个与第B.3 节的代码和数据均毫无关联的程序再次验证。该程序使用向外舍入的 binary64 区间算术，并对两个余弦变量分别应用第 B.1节的上弦规则，采用切比雪夫节点，从而得到张量上界；振幅则按如下方式处理。

乘积平均值关于两个振幅也联合凸。将四分之一单位圆替换为其外接多边形，该多边形由轴顶点和切线交点顶点构成

$$\sec\frac{\pi}{4M}\left(\cos\frac{(j+1/2)\pi}{2M},\sin\frac{(j+1/2)\pi}{2M}\right),\qquad 0\le j<M.$$

将其坐标分别按 $\sqrt{R}$、$\sqrt{1-R}$缩放后，这些 $M+2$个顶点处的最大值即为命题 5.1 中振幅上确界的上界。并明确检查了扩大后的多边形上每个分母的正性。

该实现使用 $M=256$。帽子规则依次细化至阶数 $N=32$、64、128、256 和 512。每个已接受盒都界定其包含的所有 $(R,\ s)$。对于固定的求积原子，其高度形式为$A\sqrt{R}+B\sqrt{1-R}$。它在一个 R 区间上的最大值出现在端点处；若 A、$B>0$，则出现在 $R=A^2/(A^2+B^2)$ 处，此时其值为 $\sqrt{A^2+B^2}$。 $k_s(q)^2$ 在一个 s 区间上的最大值同样出现在端点处，或出现在其唯一的临界半径处；在后者处，其值为 $(1-q^2)^{-1}$。

常数、三角函数节点、正帽子权重和多边形顶点均由 `mpmath.iv` 以 70 位小数位包围，并向外舍入为 IEEE754 binary64。基本运算和平方根使用 `nextafter`向外舍入。含有 n 项的正和通过 $1/(1-n2^{-53})$增加。以此生成的实际 binary64 界随后通过精确有理数运算独立检查：32 项交错马钦公式包围π，24 项交错泰勒多项式包围所有正弦和余弦值，整数平方包围 $\sqrt{3}$。该检查验证了全部 258 个多边形顶点区间、每个求积节点、全部 351173 个张量权重、标量常数，以及已接受盒所使用的 115 个不同面积包络界。因此，该证明不假设 `mpmath.iv` 的超越函数输出正确。证明明确保留了 IEEE754 基本运算和平方根正确舍入这一假设。不接受任何基于容差的相等判定，也不接受未经验证的网格最大值。当临界高度候选值的范数平方下界非正时，防御性分支会将其纳入，包括恰好为零的求积原子。

主运行检查了 3106 个盒，并接受了 1530 个盒，没有未解决的盒。通过 115 个垂直方向

由其端点确定的薄层验证了这些盒覆盖整个弯曲定义域。一次独立的9-盒运行包含 5 个已接受盒，覆盖了 13/100 与其 binary64 字面值之间的微小区间；因此（65）恰好具有上面显示的有理数端点。

所接受的最大主上界为

$$12.566370563416791 < 12.56637061435917 < 4\pi.$$

边界带上界为 12.540953041914735。每个所接受的主盒都会由一个独立于搜索过程的重放程序再次进行评估，该程序调用相同的上界例程，包括防御性分支；每个盒都会再次被接受。重放记录、精确覆盖检查器、源代码和 SHA-256 校验和均属于补充材料。在补充材料文件夹中，复现驱动程序会运行乘积重放、端点带、精确常数检查和覆盖检查：

```
python3 reproduce.py --product
```

该驱动程序会创建一个全新的工作目录，其中包含脚本所需的相对路径。

乘积证书标识符。重放程序和数值生成器读取的主证书具有以下 SHA-256摘要

```
product_certificate_largeR.json:
1ff9f59f70686cb71ea48e4ce7effe6ce404789498579e2028b9f182cb879069
product_interval_certificate.py:
606b8650fe9faa263511006166fc493954bc7fdf49f1a44bb85c56484c9ed73c
```

重放程序会再次评估该证书中的每个盒，并写入记录 `product_certificate_largeR_rechecked.json`。该记录还会存储运行时间，因此其摘要会因运行而异。参考运行的记录、摘要 `product_certificate_summary.json` 以及独立的常数检查 `product_constants_exact_audit.json` 均包含在补充材料中。

附录 C。剩余高帽证书

本附录介绍命题 9.11的有限证书及其两种验证方式。该证书仅包含有理数数据；第一种验证全过程使用精确有理数运算，第二种独立验证方式将在第 C.4节中介绍。

C.1. 单元、带和盒。补充材料的 `highcap_certificate` 文件夹中，每个 44 个单元都以一个文件的形式存储。所有数字都是以整数商表示的精确有理数。直接单元记录 R_{lo}、 R_{hi}、 ρ以及一个中心半径的区间 $[s_{\mathrm{lo}}, s_{\mathrm{hi}}]$ ；二次单元记录 R_{lo}、 R_{hi}、 $\frown\!\rho$、 K、 $\bar{a}$ 以及一个区间 $[x_{\mathrm{lo}}, x_{\mathrm{hi}}]$ ，其中 $s(x_{\mathrm{hi}}) \le \sigma(R_{\mathrm{lo}})$。每个盒都记录$x_a$、 x_b、 z_a、 z_b、常数 R、 ω 和 χ （直接单元），或 R、 ω、 η、 b （二次单元），以及 w_0、 Θ。具有共同常数的盒构成一个带。

直接单元	ρ	中心半径	带	盒
$7/20 \le R \le 19/50$	$6697/10^4$	$s(37/100) \le s \le 9/10$	24	211
$19/50 \le R \le 41/100$	$1341/2000$	$s(179/500) \le s \le 9/10$	22	195
$41/100 \le R \le 11/25$	$6719/10^4$	$s(173/500) \le s \le 9/10$	20	179
$11/25 \le R \le 47/100$	$337/500$	$s(167/500) \le s \le 9/10$	18	163
$47/100 \le R \le 1/2$	$6769/10^4$	$s(161/500) \le s \le 9/10$	16	147
$1/2 \le R \le 53/100$	$1361/2000$	$s(311/1000) \le s \le 23/25$	18	171
$53/100 \le R \le 3/5$	$137/200$	$\sigma(53/100) \le s \le 23/25$	19	178
$3/5 \le R \le R_*$	$139/200$	$\sigma(3/5) \le s \le 47/50$	16	163

每个二次单元都有一个长度为 $1/200$ 的权重区间。位于同一个直接单元下方的二次单元共享左端点 x_{lo}；该点是该直接单元的 x 区间的右端点：

权重	x_{lo}	ρ 的范围	单元	带	盒
$7/20 \le R \le 19/50$	$37/100$	$[6697, 6703]/10^4$	6	28	825
$19/50 \le R \le 41/100$	$179/500$	$[6705, 6716]/10^4$	6	28	711
$41/100 \le R \le 11/25$	$173/500$	$[6719, 6736]/10^4$	6	27	567
$11/25 \le R \le 47/100$	$167/500$	$[6740, 6763]/10^4$	6	27	442
$47/100 \le R \le 1/2$	$161/500$	$[6769, 6799]/10^4$	6	27	311
$1/2 \le R \le 53/100$	$311/1000$	$[6805, 6842]/10^4$	6	22	176

在每个单元中，ρ 是一个至多有四位小数、略小于 $\sqrt{\bar{c}}$（R_{lo}）的有理数；在每个二次单元中，$\widehat{K}$ 和 $\bar{a}$ 是分别略大于 $\sqrt[4]{2/3}/\rho$ 和 $a_{R_{\mathrm{lo}}}$的有理数。常数 Θ 的分母至多为 10^{30}。在直接单元中，$\mathscr{F}$关于（x，z）的双次数为（38，20），且 D_n，D_u的双次数为（6，2）；在二次单元中，$\mathscr{F}$的双次数为（36，24），D_n的双次数为（4，2），而 D_u的双次数为（0，2）。这些盒和带常数由自适应细分搜索得出；以下内容仅涉及证明中的验证。

C.2. 验证义务。 程序 `highcap_exact_verify.py`读取这44个文件，并使用精确有理数运算检查以下陈述。

(a) 单元常数。 $7/20 \le R_{\mathrm{lo}} < R_{\mathrm{hi}} \le R_*$，$0 < \rho < 1$，以及（53），至2（$56/97 - 106/333$）$> \rho^2 U$对于一个有理数 $U \ge \sqrt{(1 - R_{\mathrm{lo}})\,(1 + 3R_{\mathrm{lo}})}$。在二次单元中，$\widehat{K} > 0$，$\widehat{K}^2\rho^2 \ge 32/27$ 和 $\bar{a}^2 \ge (\pi_+/2)^2 (1 - R_{\mathrm{lo}})\,(1 + 3R_{\mathrm{lo}})$，其中 $\pi_+ > \pi$ 是通过 Machin公式及交错级数余项得到的有理上界。

（b）盒常数。对于每个盒，55) 及其自身的 x_a；在直接单元中，59) 和 57) 及其自身的 x_b；在二次单元中，$0 < \eta < 1$，$b > 0$，$\tau^2 > R^2 + \omega^2$，这三个条件等价于命题60之前所述的（9.10，其中 X 中的二次不等式需在两个端点处检验；若顶点位于区间内，还需在顶点处检验。

(c) 对数常数。 $w_0 = x_a^2 + \chi^2 z_a^2$，分别为 $w_0 = x_a^4 + \eta^2 z_a^2$，以及 $e^{\Theta} \ge 1/(\rho w_0)$，分别为 $e^{\Theta} \ge (x_b^4 + \eta^2)\,/\,((1 + \eta^2)\,w_0)$，根据引理 9.4 后所述的指数级数计算得到。

(d) 多项式符号。多项式 D_n、 D_u 和 $\mathscr{F}$ 根据第 9 节中的公式在单项式基下展开；对每个变量进行仿射代换， $x = x_a + (x_b - x_a)t$ 和 $z = z_a + (z_b - z_a)t'$，并计算 $[0,1]^2$ 上的所有张量伯恩斯坦系数 (64)，结果均为正。缺失的单项式计为零系数，因此该检验至多只会保守地失败。(e) 带。设 $x_0 < x_1$ 是单元所有盒的端点 x_a、 x_b中的相邻点。 x区间包含$[x_0, x_1]$ 的单元内所有盒都带有相同的带常数，并且它们的 z区间无间隙地覆盖$[0,1]$ 。(f) 单元。在直接单元中，盒的 x区间覆盖区间 $[x_-, x_+]$ ，其中 $s(x_-) \geq s_{\mathrm{hi}}$ 且 $s(x_+) \leq s_{\mathrm{lo}}$；在二次单元中，它们恰好覆盖 $[x_{\mathrm{lo}}, x_{\mathrm{hi}}]$。(g) D_{hi}的覆盖。设 $7/20 = \varrho_0 < \cdots < \varrho_N = R_*$是单元的权重区间的所有端点，连同 $1/2$ 和 $3/5$。对于每个 $[\varrho_{j-1}, \varrho_j]$，其权重区间包含该点的单元的中心半径区间，即直接单元的 $[s_{\mathrm{lo}}, s_{\mathrm{hi}}]$ 和二次单元的 $[\sigma(R_{\mathrm{lo}})\ s(x_{\mathrm{lo}})]$ ，覆盖 $[\sigma(\varrho_{j-1})\ s_{\mathrm{top}}]$，其中 s_{top} 是在该区间上 $s_{\mathrm{top}}(R)$的最大值。由于 σ 递增，这覆盖了每个 $(R, s) \in \mathsf{D}_{\mathrm{hi}}$。

(a)–(c) 项和 (e)–(g) 项验证了命题9.11的 (i)–(iii) 部分，而 (d) 项验证了 (iv) 部分。

C.3. **算术与执行**。所有计算均使用 Python 标准库中的精确有理数类型 `Fraction` 。如果安装了可选软件包 `python-flint` ，伯恩斯坦转换会使用其中的精确有理数类型 `fmpq` 以提高速度；结果不受此选择影响。任何断言都不会涉及浮点数。命令

```
python3 reproduce.py --high-cap
```

会验证全部 44 个单元；如果可以，则通过并行进程运行，并且只有在检查完上述所有义务后才会输出 `PASS` 。使用 `python-flint`时，在两个处理器核心上大约需要二十分钟。

文件夹中的另外两个程序 `diagnostics` 不属于证明的一部分。第一个程序以六十位有效数字计算命题9.5和9.9的闭式在所有盒的角点和中心处的值，将其与定义积分的数值求积结果进行比较（一致到 10^{-25}），检查对数主上界是否支配这些值且小于1，并将该上界函数分别与验证器构造的多项式的 $1 - \mathscr{F}/(2\mathcal{M})$和 $1 - \mathscr{F}/(2\mathcal{N})$进行比较（一致到 10^{-40}）。第二个程序检查验证器是否会拒绝损坏的证书：缺失一个盒、阈值 ρ过大、常数 $\bar{a}$ 或 Θ 过小、修改 τ、 χ 或 R、不一致的带常数、夸大的中心半径范围，以及在一对数主上界最大的单元中将主体项扩大百分之一。

C.4. **球算术中的第二次验证**。该程序 `highcap_ball_verify.py` 独立于上述验证验证定理9.1 。它与上述验证不共享任何代码，并且既不使用命题 D_n、D_u、 $\mathscr{F}$ 9.7和9.10中的多项式，也不使用对数级数界和常数w_0、 Θ。它读取相同的单元和盒，并检查以下陈述。

(a′) 单元常数和盒常数满足引理 9.2、9.3 和 9.8 以及命题 9.5 和 9.9 的假设，其中包括用于引理 9.6 参数化的 (59)：有理条件均经过精确检验，而涉及 π 和 $\sqrt{3}$ 与 Arb 球的条件则通过区间算术处理。关于中心半径区间的条件，借助 q_ρ（引理 9.2）以及 $B+2sb-KP=(1+\widehat{K})$ $s^2+2bs+1-\widehat{K}$关于 $s>0$的单调性，将其归约为端点$\widehat{\ }$处的条件。(b′) 第 C 节的带状区域与覆盖陈述 (e)–(g)，使用独立的代码。(c′) 对每个盒 $[x_a,x_b]\times[z_a,z_b]$，将直接单元中的 (58) 右侧或二次单元中的 (61) 右侧，通过第 9 节的参数化写成 (x,z) 的函数，并使用精确对数，在通过二分法得到的子盒上用球算术进行包围，直到每个包围区间均低于 1。在直接单元中，若某个子盒上 $m\le q_\rho(s)$ 始终成立，则将其舍弃，因为根据命题 9.5， $J=0$在那里；在二次单元中， $z=1$ 处的值也覆盖 $m<\tau$的情形，因为 $I(\tau)=0$。

根据命题9.5 和9.9，陈述（a′）–（c′）蕴含定理9.1。计算采用 Arb，并使用96位精度，如附录D.3所述；4439 个盒被划分为679475 个子盒，且每项检查均通过。文件夹 `diagnostics` 中的程序会检查该验证器是否拒绝损坏的证书，其中包括缺失一个盒、阈值 ρ 过大、一个$\widehat{\ }$常数 $\bar{a}$ 低于 $a_{R_{\mathrm{lo}}}$、不允许的常数 R 或 χ、负常数 K、夸大的中心半径范围、缺失一个单元，以及在一个二次单元中将一个常数 $\bar{a}$ 扩大百分之五。命令

```
python3 reproduce.py --high-cap-ball
```

在两个处理器核心上运行该程序约需十秒。

附录 D。证书义务、算术模型和可复现性

D.1. **有限证明义务**。经验证数值方法认证的唯一输入是乘积不等式

$$\mathcal{P}(R,s,\alpha)<4\pi \qquad \Big(\frac{7}{20}\le R\le R_*,\quad \frac{13}{100}\le s\le \sigma(R),\quad 0\le\alpha\le 1\Big)$$

在整个闭参数集上；这是一个适用于完整实数域的不等式，而不是针对网格采样点的不等式。该结论通过第 B.3 节中的球算术验证得到，该验证通过一个.....对每个参数盒给出界

凸上界函数，并结合显式的余弦平均和对振幅弧的精确覆盖进行验证。第 B.4 节的区间证书再次对其进行验证：该证书使用正上界求积和振幅方向的外接多边形，只有在严格控制整个参数盒的取值范围，或将其约化为有充分依据的最大化面之后，才接受该参数盒。这两个程序互不共享代码或数据，两个证书都覆盖整个定义域（这一点已通过精确有理数运算检查），且每个程序都独立证明了引理 10.1。定理 E.1 的条带位于此定义域内；附录 E 在其中给出了对所得界的第三次精确检验 $J < 4\pi$，并检验了其中一部分区域上的乘积不等式本身。

定理 9.1的低权重区域与剩余高帽无需经验证数值计算来认证：第 7 节和第 9 节中的量均转换为其中指定的显式有理多项式，其符号可由伯恩斯坦基和精确的有理数比较得出。补充材料中的有理数检查器提供了这些多项式恒等式的机器可读展开。对于剩余高帽，附录 C 中所述的精确验证是证明的一部分，而第 C.4 节中采用球算术进行的验证则是独立的第二次检查。

D.2. **已完成的有限验证记录**。 第 B.3 节和第 C.4 节中采用球算术进行的验证使用 Python 3.13.18 和 python- flint 0.9.0（FLINT 3.6.0）运行；第 B.3 节的证书由 NumPy 2.5.3 进行浮点搜索生成，该搜索不属于证明的一部分。第 B.4 节的区间证书使用 Python 3.12.14、NumPy 2.3.5 和 mpmath 1.3.0 生成，并对其超越函数界进行了独立的有理数检查；对每个已接受盒的重放以及补充材料中记录的精确审计，均使用 Python 3.13.18、NumPy 2.5.3 和 mpmath 1.3.0 完成。已接受盒和最大严格上界如下：

定义域	已评估盒	已接受叶节点	已认证上界
乘积 ，球算术	5400	5400	$J < 12.566357268$
乘积 ，区间 ，main	3106	1530	$J < 12.566370564$
乘积、区间、端点带	9	5	$J < 12.540953042$

该表记录了向上取整的显示界。的精确有理下界 4π 超过12。566370614。两个乘积覆盖检验在曲线参数域上均为精确检验。剩余高帽证书由 44 个单元和 4439 个盒组成；在每个盒上，第 9 节多项式的所有伯恩斯坦系数均为正，$\mathcal{D}_{\mathrm{hi}}$ 的覆盖经过精确检验（附录 C），第二次验证将下述闭式上界包围在 1 个679475个子盒中（第 C.4节）。低权帽通过第 7节的有理恒等式进行处理。

D.3.经验证的算术与覆盖。球算术验证使用 Arb [8], ，该库包含于 FLINT 3.6.0 [4], ，通过 python-flint 0.9.0 [24], 运行，工作精度为 96 位：包括平方根、对数和反三角函数在内的每项运算都会返回一个包含精确结果的球

，且只有当不等式在整个球上都成立时才予以接受。这些验证不依赖浮点模型。区间证书通过正的上弦求积界定圆周平均值，并用外部凸多边形控制振幅四分之一圆。不使用数值网格最大值。其包围界假设采用 IEEE-754 binary64 算术，并使用正确舍入的基本运算和平方根；每项初等运算都会向外扩展一个相邻的可表示数。其三角函数和求积常数通过 mpmath [18], 给出的包围界，再利用基于 Machin公式、泰勒多项式和整数平方界的精确有理数界进行核验。NumPy [6] 用于区间证书以及生成证书的搜索，SymPy [16] 则用于对附录E中的乘积条带进行第二次核验。所有定义域覆盖均通过精确有理数运算进行检查，而剩余高帽的精确验证仅使用精确有理数运算。

D.4. 源完整性与执行。 补充材料是随本文一同提供的文件夹 `Pigazzini_KLO_Supplement` ；在本文的 arXiv 版本中，它以附属文件的形式分发。其清单文件包含除清单文件本身之外所有文件的 SHA-256摘要。主要源标识符为

```
product_ball_verify.py:
   c51433da7aee06f255fc4a4a0a8dce48aed9c086fa86530fc007191338f64ffc

   product_ball_certificate.json:
   ada644ca8f798ee0e965be75dcd85131884f681e3bebef6eee943c6e6fec6314

   product_interval_certificate.py:
   606b8650fe9faa263511006166fc493954bc7fdf49f1a44bb85c56484c9ed73c

   highcap_exact_verify.py:
   f3b9b6136e618862d1b9a7e8cfa7dfeaa2ef35f05a665e9b074d6c73030d239f

   highcap_ball_verify.py:
   289baa191551cb62b2b308e9a409ee4cebd35684558850261c1366c566149737
```

在补充材料文件夹中，验证命令为

```
python3 reproduce.py --verify-files
python3 reproduce.py --rational
python3 reproduce.py --product-ball
python3 reproduce.py --product
python3 reproduce.py --high-cap
python3 reproduce.py --high-cap-ball
```

复现程序每次运行都会创建一个新的工作目录，且不使用检查点。完全成功意味着两个乘积证书均被接受，且不存在未解决的盒；附录 C 中的义务在两次验证中均得到满足，并且所有记录的有理不等式和定义域覆盖检查均通过。证书代码和数据作为证明的一部分随本文一并提供。程序是在人工智能工具的帮助下编写的（参见“声明与陈述”）。证明仅依赖这些程序所检查的内容，而不依赖程序的编写方式：每次比较都是

精确有理不等式，或是在经过验证的球算术或区间算术中进行；两个主要的计算机辅助步骤均由两个独立程序验证，而文件夹 `diagnostics` 中的负向测试证实，扰动证书会被拒绝。

注记 D.1（裕量大小）。 在第 B.3 节的球算术验证中，盒不断细分，直到其上界低于 4π，约为 10^{-5}，最小裕量为 $1.33\cdot\ 10^{-5}$。区间证书中的盒一旦其向外取整上界严格低于 4π，便停止细分，因此其最小叶节点裕量可能达到 10^{-8} 的量级。这些裕量并不反映几何估计本身的强度；第 10 节的经认证界在完整连续定义域上成立，与数值优化无关。仅供参考且不用于证明，浮点最大化给出 上确界$\mathcal{P} \approx 12.518$（在乘积区域上），相比之下 $4\pi \approx 12.566$。在高帽证书中，每一项比较都是精确有理不等式；其上界函数的采样值记录在定理 9.1 证明后的注记中。附录 E 精确检验中各界的量级，将在 E.2 和 E.3 节讨论。

附录 E. 乘积条带上的精确有理数检验

引理 10.1 覆盖整个乘积域，并通过命题 5.1，在那里给出 $J < 4\pi$。本附录通过另一种方法——精确矩和有理伯恩斯坦正性——在该定义域的三个子条带上证明 $J < 4\pi$；这种方法不使用区间或浮点算术；在这些条带的部分区域上，它还直接证明了乘积界 $\mathcal{P} < 4\pi$。这是对这些条带的独立检验，并未用于定理2.2的证明。

E.1. **陈述与高阶机制**。 在本附录中，$R = r_1$ 是最大权重，$t = s/(1+s^2)$，并且

$$f_t(q) = \frac{1-4t^2}{(1-2tq)^2}, \qquad Q = \sqrt{R}\,\alpha\cos u + \sqrt{1-R}\sqrt{1-\alpha^2}\cos w,$$

其中，u，w 是相互独立的均匀角度，且 $0 \le \alpha \le 1$。上界函数恰好是

$$\mathcal{P}(R,s,\alpha) = \overline{A}(R)\mathbb{E}\big(f_t(Q) - \bar{c}(R)\big)_+, \qquad \bar{c}(R) = L/\overline{A}(R).$$

定理 E.1（有理代数乘积界）。 对于最大权重 R 和中心半径 s 位于以下区域之一的每个基本环面，以及每个单位方向 p，严格不等式 $J(r、\ s、\ p) < 4\pi$ 成立：

$$\begin{aligned}
&\frac{7}{20} \le R \le R_*, && \frac{1}{4} \le s \le \frac{3}{10};\\
&\frac{7}{20} \le R \le \frac{2}{5}, && \frac{3}{10} \le s \le \frac{7}{20};\\
&\frac{9}{20} \le R \le R_*, && \frac{3}{10} \le s \le \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

在最后一个区域中，更强的不等式

$$\mathcal{P}(R,s,\alpha)<4\pi \qquad (0\le\alpha\le 1)$$

成立。第一个区域对 $R\ge 9/20$ 也满足这一更强的乘积界。

前两个区域可由四次插值、三频矩以及在较大 R时的双余弦四阶矩推出；精确的有理数比较见第E.2节。这里我们描述适用于 $3/10\le s\le 1/2$的通用高阶机制。

令 $V=\{v_1,\ldots\ldots,\ v_k\}\subset(-1,\ 1)$ 为互不相同的有理数，并令$p_t=1/(2t)>1$ 且 $W_V(q)=(q-1)\prod_{v\in V}(q-v)^2$。定义

$$H_{V,t}(q)=f_t(q)\left[1-\frac{W_V(q)}{W_V(p_t)}\left(1+(p_t-q)\frac{W_V'(p_t)}{W_V(p_t)}\right)\right]. \tag{68}$$

引理 E.2。对于 $0<t<1/2$, $H_{V,\ t}$ 是关于 q 的次数至多为$2k$的多项式，满足 $H_{V,\ t}(q)\ge f_t(q)$ 对每个 $q\in[-1,1]$ 均成立。

证明。在（68）中，分子在除以 $(1-2tq)^2$ 之前，在 $q=p_t$处有一个二重零点，因此可被 $(1-2tq)^2$整除。所得商的次数至多为$2k$。对于 $q\le 1$，$W_V(q)\le 0$，而 $W_V(p_t)>0$ 并且

$$\frac{W_V'(p_t)}{W_V(p_t)}=\frac{1}{p_t-1}+2\sum_{v\in V}\frac{1}{p_t-v}>0.$$

因此，由（$f_t-H_{V,\ t}$）根据（68）得到的恒等式是非正的。 □

取 $x=\alpha^2$ 时，偶阶矩可以明确写出：

$$M_{2j}(R,x)=\mathbb{E}Q^{2j}=\sum_{i=0}^{j}\frac{\binom{2j}{2i}\binom{2i}{i}\binom{2j-2i}{j-i}}{4^j}(Rx)^i((1-R)(1-x))^{j-i}. \tag{69}$$

所有奇数阶矩均为零。因此，每个多项式 $H_{V,\ t}$ 都可以对双余弦分布进行精确积分。取

$$V=\left\{-\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right\}\quad\left(\frac{3}{10}\le s\le\frac{9}{20}\right)$$

and

$$V=\left\{-\frac{9}{10},-\frac{3}{5},-\frac{3}{10},\frac{3}{10},\frac{3}{5},\frac{9}{10}\right\}\quad\left(\frac{9}{20}\le s\le\frac{1}{2}\right)$$

由此得到十次和十二次多项式界。一个非负二次修正项 $\gamma(t,\ R)(1-q)^2$ 使每个多项式都大于正截断水平。利用（69），全局不等式可归结为固定紧致盒上的两个明确且严格为正的有理多项式；其精确定义、比较以及有理伯恩斯坦数据见第E.3节。

定理 *E.1* 的证明。第 E.2 节的四次比较覆盖了前两个条带。在最后一个条带中，引理 E.2 和精确的偶阶矩，结合第 E.3 节的有理正性引理，得出 $\mathcal{P}(R,s,\alpha)<4\pi$ 对 $0\le\alpha\le 1$一致成立。命题 5.1 进而给出 $J(r,s,p)<4\pi$。 □

E.2. **四次乘积条带。**

E.2.1. 四次厄米特上界函数与有理数比较。在本小节中，记 $c(R) = L/A(R)$。令 $t = s/(1+s^2)$ 和 $f_t(h) = (1-4t^2)/(1-2th)^2$。在 $x=-1/5$ 和 $y=1/4$ 处，令 $d=y-x$ 和

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{f_t(y) - f_t(x) - f_t'(x)d}{d^2}, \\ U_3 &= \frac{f_t'(y) - f_t'(x) - 2U_2 d}{d^2}, \\ U_4 &= \frac{N_4}{(1-x)^2(1-y)^2}, \\ N_4 &= f_t(1) - f_t(x) - f_t'(x)(1-x) - U_2(1-x)^2 \\ &\quad - U_3(1-x)^2(1-y). \end{aligned}$$

定义四次多项式

$$\begin{aligned} H_t(h) &= f_t(x) + f_t'(x)(h-x) + U_2(h-x)^2 \\ &\quad + U_3(h-x)^2(h-y) + U_4(h-x)^2(h-y)^2 \\ &= \sum_{j=0}^{4} h_j(t) h^j. \end{aligned} \tag{70}$$

f_t 的五阶导数在 $0<t<1/2$上为正。其在重节点 x，y 和单节点 1 处的厄米特余项为

$$f_t(h) \le H_t(h) \quad (-1 \le h \le 1). \tag{71}$$

引入正多项式

$$D(t) = (2-t)^3(1-2t)(5+2t)^3.$$

表达式 $d_j(t) := D(t)h_j(t)$是关于 $\mathbb{Q}[t]$的≤ 7 次多项式。以下有限次符号验证使用精确的伯恩斯坦恒等式：对于双次数至多为（n，m）的多项式 P，将矩形仿射变换到 $[0,1]^2$,之后

$$\beta_{ij} = \sum_{k=0}^{i}\sum_{\ell=0}^{j} \frac{\binom{i}{k}\binom{j}{\ell}}{\binom{n}{k}\binom{m}{\ell}} a_{k\ell}, \qquad P(U,V) = \sum_{k,\ell} a_{k\ell} U^k V^\ell. \tag{72}$$

由于伯恩斯坦基是非负的，且总和为 1，因此在矩形上有 $P \ge \min \beta_{ij}$。下文中的所有量均为有理数；不会使用浮点不等式。

引理 E.3（有限精确比较）。对于 $4/17 \le t \le 140/449$，有 d_2、d_3、$d_4 > 0$；对于 $4/17 \le t \le 30/109$，同样具有正性。此外：

(a) *For* $4/17 \le t \le 140/449$ *and* $-1 \le h \le 1$,

$$H_t(h) + \frac{1}{40}(1-h)^2 > \frac{23}{50}, \qquad h_0 + \frac{1}{5}h_2 + \frac{1}{10}h_3 + \frac{1}{10}h_4 < \frac{969}{1000}.$$

（b）对于 $4/17 \le t \le 30/109$ 和 $-1 \le h \le 1$，

$$H_t(h) > \frac{23}{50}, \qquad h_0 + \frac{9}{40}h_2 + \frac{9}{80}h_3 + \frac{81}{640}h_4 < \frac{1999}{2000}.$$

(c) 对于 $4/17 \le t \le 30/109$ 和 $-1 \le h \le 1$，

$$H_t(h) + \frac{1}{200}(1-h)^2 > \frac{47}{100}.$$

(d) 对于 $4/17 \le t \le 30/109$、$1/2 \le R \le R_*$ 和 $-1 \le h \le 1$，有

$$\gamma(R) = \frac{R}{4} - \frac{3}{25}, \qquad c_{\mathrm{lin}}(R) = \frac{47}{100} + \frac{R-1/2}{2},$$

有 $H_t(h) + \gamma(R)(1-h)^2 > c_{\mathrm{lin}}(R)$。

下表给出了清分母后的有理多项式的伯恩斯坦系数的精确下界；最后一列中的正整数是严格下界，除非该项为 *Fraction*。

清分母后的差	有理数划分	下界
(a) $D\,(H_t + \,(1-h)^{\,2}/40 - 23/50)$	两个相等的 t半；八个相等的 h区间，其中 $[-1/2, -1/4]$ 在上部再细分一次 t半	> 1
(a) $D(969/1000 - B_{2/5})$	完整的 t区间	> 1
(b) $D(H_t - 23/50)$	两个相等的 t半；八个相等的 h区间	> 1
(b) $D(1999/2000 - B_{9/20})$	完整的 t-区间	> 0
(c) $D(H_t + (1-h)^2/200 - 47/100)$	下文指定的六个 h-区间	> 1
(d) $D(H_t + \gamma(R)(1-h)^2 - c_{\mathrm{lin}}(R))$	相同的六个 h-区间；在以下位置验证 $R = 1/2$ 和 $R = R_*$	> 1

(*c*) – (*d*) 中的六个 h-区间的端点为 -1、$-1/2$、$-3/8$、$-1/4$、*0*、$1/2$、*1*。这里 $B_R = h_0 + (h_2/2 + h_3/4)R + (5h_4/8)R^2$，而在（*a*）和（*b*）中，最后几项分别表示 $B_{2/5}$ 和 $B_{9/20}$。在（*a*）中，最后一个系数为 $h_4/10$，因为 $(5/8)(2/5)^2 = 1/10$。在（*b*）中，最后一个系数为 $(5/8)(9/20)^2 = 81/640$。公式（*72*）、（*70*）以及所列的有理数细分，明确规定了每一项有限比较，无需进行未明确说明的数值搜索。

E.2.2. 较小权重的一致四次估计。 原始三模高度函数 $q = p \cdot F_r$ 的傅里叶矩在 $R \le 2/3$时满足，

$$\mathbb{E}q = 0, \quad \mathbb{E}q^2 \le R/2, \quad |\mathbb{E}q^3| \le R/4, \quad \mathbb{E}q^4 \le 5R^2/8. \tag{73}$$

如果 $Q_\gamma(h) = H_t(h) + \gamma(1-h)^2 \ge c(R)$，则（71）得到

$$\big(f_t(h) - c(R)\big)_+ \le H_t(h) + \gamma(1-h)^2 - c(R).$$

右侧处处非负，因此 $A(r) \le A(R)$ 和（73）给出

$$J(r,s,p) \le \overline{A}(R)\,(B_R + \gamma(1 + R/2)) - L. \tag{74}$$

$c(R)$ 和 B_R 都随 $R \ge 1/3$ 增大，因为 $A(R)$ 递减，而 h_2，h_3，$h_4 > 0$。初等有理数界 $\sqrt{3} > 265/153$、$\pi < 22/7$ 和 $\sqrt{517/20} > 113/100$ 蕴含

$$c(R) \le c(9/20) < \frac{30220}{65879} < \frac{23}{50} \quad (1/3 \le R \le 9/20).$$

对于 $7/20 \le R \le 2/5$ 和 $1/4 \le s \le 7/20$，选择 $\gamma = 1/40$。引理E.3(a)给出

$$B_R + \gamma(1 + R/2) < \frac{969}{1000} + \frac{3}{100} = \frac{999}{1000}.$$

因此 $J < \frac{999}{1000} A(R) - L < 4\pi$。对于 $7/20 \le R \le 9/20$，$1/4 \le s \le 3/10$，选择 $\gamma = 0$。引理E.3(b)给出

$$J < \frac{1999}{2000} A(R) - L < 4\pi.$$

这些是原始三模态高度分布的界；未使用乘积证书。

E.2.3. 精确四阶矩界。暂且令 $1/2 \le R \le R_*$，并保留双余弦随机变量 $Q = a$ 余弦 $u + b$ 余弦 w，其中 $a^2 = R\alpha^2$ 和 $b^2 = (1 - R)(1 - \alpha^2)$。它的奇数阶矩均为零，且

$$\mathbb{E}Q^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \qquad \mathbb{E}Q^4 = \frac{3}{8}(a^4 + b^4) + \frac{3}{2}a^2 b^2. \tag{75}$$

对 $x = \alpha^2 \in [0, 1]$ 中的四次表达式取最大值，可得在整个 $9/20 \le R \le R_*$范围内，

$$\mathbb{E}Q^4 \le M_4(R) := \begin{cases} \dfrac{9R^2(1-R)^2}{8(6R(1-R)-1)}, & 9/20 \le R \le 2/3, \\ \dfrac{3R^2}{8}, & 2/3 \le R \le R_*. \end{cases} \tag{76}$$

事实上，$\mathbb{E}Q^4$ 是关于 x的二次式，其系数为$3\,8(6R^2 - 6R + 1)$，顶点为$x = (R - 1)(3R - 1)/(6R^2 - 6R + 1)$，该顶点位于 $[0, 1]$ 至 $R = 2/3$之间；此后最大值在 $x = 1$ 处取得。此外，当$R \le 1/2$ 时，$\mathbb{E}Q^2 \le (1 - R)/2$，而当 $R \ge 1/2$时，$\mathbb{E}Q^2 \le R/2$。

引理 E.4（双余弦有理不等式）。对于 $4/17 \le t \le 30/109$，以下严格不等式成立：

$$h_0 + \frac{1 - R}{2} h_2 + M_4(R) h_4 + \frac{1}{200}\left(1 + \frac{1 - R}{2}\right) < 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8}, \tag{77}$$

$$h_0 + \frac{R}{2} h_2 + M_4(R) h_4 + \gamma(R)\left(1 + \frac{R}{2}\right) < 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8}. \tag{78}$$

第一个不等式对 $9/20 \le R \le 1/2$ 成立，第二个对 $1/2 \le R \le R_*$ 成立；其中 $u = \frac{9}{4}(R - \frac{1}{3})^2$。将其乘以 $D(t)$，并且对于 $R \le 2/3$，乘以正分母 $6R(1 - R) - 1$ 后，它们就变成了有理多项式正性命题。它们的张量伯恩斯坦系数具有如下严格的有理下界：

R-区间	双次数 $(t,\ R)$	最小系数 $>$
$[9/20, 1/2]$	$(7,\ 6)$	2
$[1/2, 2/3]$	$(7,\ 6)$	4
$[2/3, R_*]$	$(7,\ 4)$	12

这三项比较均使用完整的 t区间 $[4/17, 30/109]$ 和完整的相应 R区间，未进行细分。它们仅由 （72）和 （70）决定。

E.2.4. 较大权重下的四次双余弦界。 由于

$$\frac{A_{\mathrm{eq}}}{\overline{A}(R)} = (1-u)^{-1/2} \geq 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8}, \qquad u = \frac{9}{4}\left(R - \frac{1}{3}\right)^2 < 1,$$

引理E.4 可推出所需的严格面积比较。

对于 $9/20 \leq R \leq 1/2$，截断阈值满足 $c(R) < 47/100$。事实上， c 递增，$\sqrt{5} > 223/100$ 并且上述关于 $\sqrt{3}$， π 的界给出

$$c(1/2) < \frac{1511}{2915}\frac{200}{223} < \frac{47}{100}.$$

因此，引理 E.3(c)，结合 $\gamma = 1/200$，保证 $H_t(h)+\gamma(1-h)^2-c(R) \geq 0$处处成立。

对于 $1/2 \leq R \leq R_*$， $c(R)$ 是凸函数：它是 $(1 + 2R - 3R^2)^{-1/2}$ 的正倍数，其二阶导数严格为正。其端点界为

$$c(1/2) < 47/100, \qquad c(R_*) < \frac{1511}{2915}\frac{8}{7} < \frac{47}{100} + \frac{R_* - 1/2}{2};$$

第二个不等式成立是因为 $(1 - R_*)(1 + 3R_*) > 49/64$。因此，由凸性可得 $c(R)$ $< c_{\mathrm{lin}}(R)$ 处处成立。引理 E.3(d)证明了 $H_t + \gamma(R)(1 - h)^2 - c(R) > 0$ 处处成立。

对于任一权重范围，由于（75）中的奇数阶矩消失、 h_2、 h_4的正性，以及刚刚证明的逐点界，

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(R, s, \alpha) &\leq \overline{A}(R)\left[\mathbb{E}H_t(Q) + \gamma(1 + \mathbb{E}Q^2) - c(R)\right] \\ &\leq \overline{A}(R)\left[h_0 + h_2\, V_2(R) + h_4 M_4(R) + \gamma(1 + V_2(R))\right] - L < 4\pi,\end{aligned}$$

其中 $V_2(R) = (1 - R)/2$ 对于 $R \leq 1/2$ ，而 $R/2$ 对于 $R \geq 1/2$。最后的严格不等式使用了引理 E.4。随后，乘积主控约化给出$J(r, s, p) \leq$上确界α $\mathsf{P}(R, s, \alpha) < 4\pi$。结合低权重范围，即得定理 E.1。

四次间隙的大小。四次条带中认证的间隙是明确的。上述界给出 $J < \frac{999}{1000}A(R)$ $- L$ 对于 $R \leq 2/5$, $s \leq 7/20$;—以及 $J < \frac{1999}{2000}A(R) - L$ 对于 $R \leq 9/20$, $s \leq 3/10$，也就是说，分别至少比 4π低 $A_{\mathrm{eq}}/1000$ 和$A_{\mathrm{eq}}/2000$ ，约占 4π的 0.18% 和 0.09%。这些间隙很小，是因为在等号构型 $R = 1/3$,$s = 0$ 附近，截断面积接近 4π ；仅供参考，不用于证明，乘积上界函数的浮点数值评估给出 $\sup \mathsf{P} \approx 12.40$ ，位于

定理 E.1 第一条带以及 上确界$\mathcal{P}\approx 12.45$ 第二条带上，约 低 **1%** 于$4\pi\approx 12.566$。所有比较都是精确的有理不等式，因此间隙大小既不影响其有效性，也不影响其可复现性。

E.3. 高阶双余弦界。 保留 Q, t, f_t, $H_{V,t}$，以及 M_{2j}（见第 E.1 节）。记 $H_{V,t}(q)=\sum_{j=0}^{2k}h_{V,j}(t)q^j$，并令

$$P_V(t)=(1-2t)\prod_{v\in V}(1-2tv)^2,\qquad E_V(t)=P_V(t)^2. \tag{79}$$

则 $E_V(t)>0$，且 $E_V(t)h_{V,j}(t)$ 属于 $\mathbb{Q}[t]$。令 $u(R)=\frac{9}{4}(R-\frac{1}{3})^2$，并令

$$B_K(R)=\sum_{j=0}^{K}\binom{2j}{j}4^{-j}u(R)^j\le (1-u(R))^{-1/2}=\frac{A_{\mathrm{eq}}}{\overline{A}(R)}. \tag{80}$$

其中整数截断阶数 $K\ge 0$ 的选取独立于 $k=|V|$。若 $\hat{c}(R)\ge c(R):=L/\overline{A}(R)$ 且 $\gamma(t,R)\ge 0$，则只需在所述参数盒上证明

$$S(t,R,q):=H_{V,t}(q)+\gamma(t,R)(1-q)^2-\hat{c}(R)>0, \tag{81}$$

$$T(t,R,x):=B_K(R)-\sum_{j=0}^{k}h_{V,2j}(t)M_{2j}(R,x) -\gamma(t,R)(1+M_2(R,x))>0. \tag{82}$$

这些不等式对所有 $-1\le q\le 1$ 和 $0\le x\le 1$ 均须成立。

事实上，引理 E.2，$\gamma\ge 0$, and $S>0$ 蕴含

$$\big(f_t(q)-c(R)\big)_+\le H_{V,t}(q)+\gamma(1-q)^2-c(R).$$

因此，精确的偶阶矩给出

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(R,s,\alpha)&\le\overline{A}(R)\Big(\sum_{j=0}^{k}h_{V,2j}(t)M_{2j}(R,\alpha^2)+\gamma(1+M_2)-c(R)\Big)\\&<\overline{A}(R)B_K(R)-L\le A_{\mathrm{eq}}-L=4\pi.\end{aligned}$$

下面检验的多项式为 E_VS 和 E_VT；所有比较均在$\mathbb{Q}$上进行。

E.3.1. 十次埃尔米特比较。取

$$V_{10}=\Big\{-\tfrac{4}{5},-\tfrac{2}{5},0,\tfrac{2}{5},\tfrac{4}{5}\Big\},\qquad \frac{30}{109}\le t\le\frac{180}{481}\quad\Big(\frac{3}{10}\le s\le\frac{9}{20}\Big).$$

设 $d=t-30/109$、$e=R-9/20$，并定义

$$\gamma_{10}=\frac{13}{250}+\frac{2}{5}d+\frac{12}{125}e+\frac{21}{20}de+\frac{11}{4}d^2,\qquad \hat{c}_{10}(R)=\frac{9}{20}+\frac{R-7/20}{3}. \tag{83}$$

于是 $\gamma_{10}\ge 0$，且 $\hat{c}_{10}(R)\ge c(R)$。为证明后一个不等式，注意到

$$c(R)=2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\pi}\right)\big[(1-R)(1+3R)\big]^{-1/2}$$

在 $[9/20, R_*]$ 上是凸函数。其端点值严格受到仿射函数 $\hat{}c_{10}$ using 的界定

$$\sqrt{3} > \frac{265}{153}, \quad \pi < \frac{22}{7}, \quad \sqrt{517} > \frac{227}{10}, \quad \sqrt{\frac{5230625}{6558721}} > \frac{89}{100}.$$

特别地， $c(9/20) < 60440/132341 < 29/60$ 和 $c(R_*) < 30220/51887 < 1499/2561$。相关的分子多项式为

$$S_{10}^* = E_{V_{10}} S, \qquad T_{10}^* = E_{V_{10}} T \quad \text{with } \hat{c} = \hat{c}_{10},\ \gamma = \gamma_{10},\ k = 5,\ K = 4.$$

它们关于 $(t、\ R、\ q)$ 和 $(t、\ R、\ x)$ 的次数至多分别为 $(21、1、10)$ 和 $(21、8、5)$。第 E.3.3 节中规定的精确有理数计算给出 $S_{10}^*、\ T_{10}^* > 0$。

E.3.2. 十二次 *Hermite*比较。取

$$V_{12} = \left\{-\tfrac{9}{10}, -\tfrac{3}{5}, -\tfrac{3}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10}\right\}, \qquad \frac{180}{481} \le t \le \frac{2}{5} \quad \left(\frac{9}{20} \le s \le \frac{1}{2}\right).$$

令 $d = t - 180/481$ 和 $e = R - 9/20$，则

$$\gamma_{12} = \frac{101}{1000} + d + \frac{6}{25}e + 2de + 10d^2. \tag{84}$$

对于截断水平，取连续分段仿射函数

$$\hat{c}_{12}(R) = \begin{cases} \dfrac{457}{1000} + \dfrac{34}{150}\left(R - \dfrac{9}{20}\right), & \frac{9}{20} \le R \le \frac{3}{5}, \\ \dfrac{491}{1000} + \dfrac{\frac{583}{1000} - \frac{491}{1000}}{R_* - \frac{3}{5}}\left(R - \dfrac{3}{5}\right), & \frac{3}{5} \le R \le R_*. \end{cases} \tag{85}$$

端点有理估计

$$c(9/20) < 457/1000, \qquad c(3/5) < 491/1000, \qquad c(R_*) < 583/1000$$

由上一节的界和 $\sqrt{28/25} > 1057/1000$ 得出。 c 的凸性给出在这两个区间内处处成立的 $c(R) < \hat{}c_{12}(R)$。现在令

$$S_{12}^* = E_{V_{12}} S, \qquad T_{12}^* = E_{V_{12}} T, \quad \hat{c} = \hat{c}_{12},\ \gamma = \gamma_{12},\ k = K = 6.$$

这些在每个仿射分支上都是多项式。它们在 (t, R, q) 中的次数至多为 $(28, 1, 12)$，在 (t, R, x) 中的次数至多为 $(28, 12, 6)$。它们在所述定义域上的正性由下面的显式有限比较得出。

E.3.3. 高阶乘积界的有理正性证书。对于一个多项式 $F(U_1, \dots, U_m) = \sum_{\boldsymbol{\ell}} a_{\boldsymbol{\ell}} U^{\boldsymbol{\ell}}$，其多重次数至多为 $\boldsymbol{n}$，其张量伯恩斯坦系数为

$$\beta_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{\ell} \le \boldsymbol{i}} a_{\boldsymbol{\ell}} \prod_{j=1}^{m} \frac{\binom{i_j}{\ell_j}}{\binom{n_j}{\ell_j}}. \tag{86}$$

在 $[0,1]^m$ 上有 $F \ge \min \beta_{\boldsymbol{i}}$。对于任意有理盒，我们对 $[0,1]^m$ 应用仿射代换。下表中的每一项都是指定多项式在指定盒上的每一个伯恩斯坦系数的严格下界：

多项式	盒 / 区间	严格下界
S_{10}^{*}	$R = 9/20,\ \ R_{*};\ \ q \in [-1,-1/2],\ \ [-1/2,0],\ \ [0,1]$; 全文	10^{-5}
T_{10}^{*}	t-条带 $R \in [9/20, R_m],\ \ [R_m, R_{*}];\ \ x \in [0,1/2],\ \ [1/2,1]$; 完整的	10^{-5}
S_{12}^{*}	t-条带 $R = 9/20, R_{*}$; $q \in [-1,-1/2],\ \ [-1/2,-1/4],\ \ [-1/4,0],\ \ [0,1]$; 全文	10^{-7}
S_{12}^{*}	t-条带 $R = 3/5$; $q \in [-1,-1/2], [-1/2,0], [0,1]$; 全部 t-条带	10^{-7}
T_{12}^{*}	$(R,\ \ x) \in [9/20, R_{*}] \times [0,1/2]$, 或 $[9/20, R_m] \times [1/2,1]$, 或 $[R_m, R_{*}] \times [1/2,1]$; 完整 t-条带	10^{-7}

其中， $R_m = (9/20 + R_{*})/2 = 61769/102440$。由于 S_{10}^{*} 关于 R是仿射的，在所述两个端点处为正，即可证明它在整个 R-区间上均为正。同样，在 (85) 的每个分支上， S_{12}^{*} 关于 R是仿射的；检验三个端点便已足够。

所列下界的尺度。表中的下界对应消分母多项式 $E_V S$和 $E_V T$，而因子 E_V在这些条带上很小：在十次条带上为 $7{\cdot}10^{-3} < E_{V_{10}}(t) < 8{\cdot}10^{-2}$，在十二次条带上为 $5{\cdot}10^{-4} < E_{V_{12}}(t) < 2{\cdot}10^{-3}$。向下取整后，精确的最小系数分别为： S_{10}^{*}对应 $2.47\cdot 10^{-5}$， T_{10}^{*}对应 $6.12\cdot 10^{-5}$， S_{12}^{*} 对应 $8.28\cdot 10^{-7}$，以及 T_{12}^{*}对应 $1.72\cdot 10^{-6}$。仅供了解定向之用，且证明中未使用浮点数值评估；该评估在十次条带上给出 $\min S \approx 7.0\cdot 10^{-3}$和 $\min T \approx 1.4\cdot 10^{-2}$，在十二次条带上给出 $\min S \approx 1.4\cdot 10^{-3}$ 和 $\min T \approx 9.7\cdot 10^{-3}$。由此得到的 P 上界分别至少比 4π 低4π的 2.5% 和 1.4%；而在整个区域 $9/20 \le R \le R_{*}$上， $\sup \mathrm{P} \approx 10.96$,$3/10 \le s \le 1/2$。最小相对裕度出现在逐点条件 $S > 0$中：系数 γ 取值接近其最小可取值，因为它也通过项 $\gamma(1 + M_2)$进入 T。所有比较都是精确的有理不等式，因此这些数值的大小不会影响其有效性或可复现性。

每个多项式都由（68）–（80）、（83）和（84）–（85）明确确定；不存在未指定的多项式或数值极值。具体而言，所列有理区间盒包括用于十次估计的六个逐点盒和四个矩区间盒，以及用于十二次估计的十一个逐点盒和三个矩区间盒。公式（86）证明了所有要求的符号。补充程序 `verify_exact_rational.py`（十次和十二次）以及 `verify_quartic_product_rational_only.py`（第 E.2 节中的四次比较）直接根据这些公式重建插值多项式和系数，并使用 Python 的标准库整数算术和 $\mathbb{Q}$ 计算每个系数 `fractions.Fraction`。它们不需要符号代数软件包、区间算术软件包、浮点运算或数值优化器；这些程序由复现者的有理数检查运行（附录 D）。另一个独立程序 `independent_product_strip_check.py`使用 SymPy 根据

四次插值函数的牛顿形式以及闭式公式（68）构造相同的多项式，检查埃尔米特插值条件，并通过独立程序重新计算所有伯恩斯坦系数；它确认了上表中的每个界、本附录所列的精确最小值，以及所述的E_V范围。这项检查是一份有限的精确有理代数证书。上述程序通过精确有理数运算验证了所有断言的伯恩斯坦系数不等式，其运行记录属于补充材料（附录D）。

声明与陈述

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

数据和代码可用性。 本研究未使用外部实验数据集或观测数据集。计算机辅助证明部分所需的所有计算证书、验证脚本和支持文件均包含在补充档案 `Pigazzini_KLO_Supplement`中，并随本文的 arXiv 版本作为附属文件一同发布（另请参见 Zenodo：https://doi.org/10.5281/zenodo.24473074）。该档案包含精确有理数证书、经验证的数值验证程序、可复现性说明、参考日志以及 SHA-256 文件校验和。计算流程和软件要求详见附录D。

资助。 作者未从任何组织获得这项投稿工作的资助。

人工智能工具的使用。 人工智能助手（Claude，Anthropic；GPT，OpenAI）用于本工作的计算机辅助部分：编写和测试验证程序、生成证书，以及起草描述这些内容的附录部分。它们也用于协助编辑和修订文本。论文正文中的数学结果、证明策略和解析性论证均出自作者。计算机辅助步骤的有效性不依赖这些工具：证书由附录 D中所述的开源程序以精确有理数或经验证的算术进行检查，而两个主要的计算机辅助步骤均由两个独立程序验证。作者对本文内容承担全部责任。

参考文献

[1] R. L. Bryant, 《关于2-环面的共形体积》，预印本，arXiv:1507.01485（2015）；第二版（2025）补充了备注5中所述数值的证明。[2] B. Colbois 和 A. El Soufi, 《度量的共形类中的拉普拉斯算子极值特征值：“共形谱”》，Ann. Global Anal. Geom.**24**，337 2003 349（），第–号。[3] M. Eddaoudi 和 A. Girouard, 《通过折叠和共形体积给出拉普拉斯算子第二个非零特征值的上界》，预印本，arXiv:2501.08761（2025）。

[4] FLINT团队，《FLINT：快速数论库》，版本 3 6 0 https:。。，。//flintlib.org
[5] A. Girouard、N. Nadirashvili 和 I. Polterovich，《平面域第二个正诺伊曼特征值的最大化》，J. Differential Geom. 83 3，637 2009 661（），第–号。[6] C. R. Harris 等，《使用 NumPy 进行数组编程》，Nature 585（2020），357–362；doi:10.1038/s41586-020-2649-2。[7] J. Hersch，《均匀球面膜的四个等周性质》，C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 270（1970），A1645–A1648。[8] F. Johansson，《Arb：高效的任意精度中点半径区间算术》，IEEE Trans. Comput. 66（2017），第8期，1281–1292；doi:10.1109/TC.2017.2690633。[9] F. Kang，《环面上第二特征值的改进上界》，Differential Geom. Appl. 104（2026年），102428；doi:10.1016/j.difgeo.2026.102428；arXiv:2506.05846（编号与2026年第3版相同）。[10] C.-Y. Kao、R. Lai 和 B. Osting，《闭黎曼曲面上拉普拉斯–贝尔特拉米特征值的最大化》，ESAIM Control Optim. Calc. Var. 23 2，685 2017 720 10 1051 2016008（），第–号；doi:。/cocv/。[11] M. Karpukhin，《极小球面的指标与等周特征值不等式》，Invent. Math. 223（2021），第1期，335–377；doi:10.1007/s00222-020-00992-5。[12] M. Karpukhin、N. Nadirashvili、A. V. Penskoi 和 I. Polterovich，《曲面上拉普拉斯特征值的共形极值度量》，Surveys in Differential Geometry 24（2019），205–256；doi:10.4310/SDG.2019.v24.n1.a6。[13] M. Karpukhin、N. Nadirashvili、A. V. Penskoi 和 I. Polterovich，《球面上拉普拉斯特征值的一个等周不等式》，J. Differential Geom. 118（2021），第2期，313–333；doi:10.4310/jdg/1622743142。[14] M. Karpukhin 和 D. Stern，《极小极大调和映射与共形特征值的新刻画》，J. Eur. Math. Soc. 26（2024），第11期，4071–4129；doi:10.4171/JEMS/1401。[15] P. Li 和 S.-T. Yau，《新的共形不变量及其在威尔莫尔猜想和紧曲面第一特征值中的应用》，Invent. Math. 69（1982），269–291；doi:10.1007/BF01399507。[16] A. Meurer 等，《SymPy：Python中的符号计算》，PeerJ Comput. Sci. 3（2017），e103；doi:10.7717/peerj-cs.103。[17] S. Montiel 和 A. Ros，《利用第一特征函数对曲面的极小浸入与共形面积》，Invent. Math. 83（1986），153–166。[18] mpmath开发团队，《mpmath：用于任意精度浮点算术的Python库》，版本1.3.0（2023），https://mpmath.org。[19] N. Nadirashvili，《Berger等周问题与曲面的极小浸入》，Geom. Funct. Anal. 6（1996），第5期，877–897；doi:10.1007/BF02246788。[20] N. Nadirashvili，《球面第二特征值的等周不等式》，J. Differential Geom. 61（2002），第2期，335–340；doi:10.4310/jdg/1090351388。[21] N. Nadirashvili 和 A. V. Penskoi，《射影平面上拉普拉斯算子第二个非零特征值的等周不等式》，Geom. Funct. Anal. 28（2018），第5期，1368–1393；doi:10.1007/s00039-018-0458-7。[22] R. Petrides，《曲面上第一拉普拉斯特征值极值度量的存在性与正则性》，Geom. Funct. Anal. 24（2014），第4期，1336–1376；arXiv:1310.4697。[23] R. Petrides，《球面第二共形特征值的最大化》，Proc. Amer. Math. Soc. 142（2014），第7期，2385–2394。[24] python-flint，《FLINT的Python绑定》，版本 0 9 0 https://github.com/。。，。flintlib/python-flint