arXiv:2611.31031v1 [math.AT] 23 Nov 2026

驯性同伦论与恒等映射的 Goodwillie 塔

NICOLAS GUÈS

摘要。本文旨在对 Dwyer 的温和同伦论作现代阐述，并将其推广至非单连通空间，同时利用该理论与 Heuts 关于恒等函子的 Goodwillie 塔的研究之间的联系。作为应用，我们构造了 Hess 的 r-温和同伦论的谱 Lie 代数模型。

目录

1. 引言 1
2. Lazard 代数与谱 Lazard 代数 3
3. ∞-范畴 $\mathbb{S}$-温和空间 6
4. 恢复温和与驯性同伦论 11
5. $\mathbb{S}$-驯化对基本群所保留的信息 12
参考文献 14

1. 引言

1979 年，Dwyer [Dwy79] 将 Quillen 的有理同伦论方法推广到一种更精细的弱等价概念。固定一个连通性 $r \geq 3$，我们称连续映射 $f\colon X \to Y$ 是 r-驯弱等价，若它定义在 $(r-1)$-连通空间之间，且对于每个 $n \geq r$，$\pi_n f$ 在将每个满足 $r+2p-3 \leq n$ 的素数 p 求逆后都是同构。将 $(r-1)$-连通带基点空间关于 r-驯弱等价局部化，得到一个反射子范畴 $\mathcal{S}_*^{r\text{-tame}}$，其中包含满足以下条件的空间 X：对于驯范围 $r+2p-3 \leq n$ 中的每个 p，$\pi_n X$ 中的乘法 p 都是可逆的。类似地，定义 r-驯 dg Lie 代数为一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的 $(r-1)$-约化 dg Lie 代数 L，即对于 $i < r-1$，$L_i = 0$，并且对于每个满足 $r+2p-3 \leq n+1$ 的 p，$H_n L$ 都是一个 $\mathbb{Z}[1/p]$-模（在 Quillen 的约定中，$H_n L$对应于空间的 π_{n+1}）。用现代语言重新表述，Dwyer 证明了以下 ∞-范畴之间的等价。

定理 1.1。 [Dwy79] 对于 $r \geq 3$，存在一个等价

$$\mathcal{S}_*^{r\text{-tame}} \simeq \mathrm{DGL}_{\mathbb{Z}}^{r\text{-tame}}$$

其中 $\mathrm{DGL}_{\mathbb{Z}}^{r\text{-tame}}$是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的 DG Lie 代数范畴，并将 r-温和等价局部化。类似地，r-温和同伦型可以通过温和交换 dg-代数的代数 homotopy 范畴来描述 [Sch88、BKM+86、CP84a]，，本文不对此进行探讨。本文的目标之一是对温和同伦论作出符合当代发展的论述，并借此拓展其应用范围。首先

结果如下。我们称单连通空间之间的映射 f 为 2-温和等价，若它在将 $(k-1)!$ 求逆后，在 π_k 上诱导出一个同构。

定理 A。 单连通空间模去 2-温和等价与整数李运算子上的 1-连通代数之间存在一个 ∞-范畴等价 $\mathbb{L}(\mathbb{Z}) = H\mathbb{Z} \otimes \mathbb{L}$，其中其 π_k 对于每个 k都是一个 $\mathbb{Z}[\frac{1}{(k-1)!}]$-模：

$$\mathcal{S}_*^{2\text{-tame}} \simeq \mathrm{Alg}(\mathbb{L}(\mathbb{Z}))^{2\text{-tame}}$$

这恢复了 Scheerer 在 [Sch88], 中构造的交换代数模型的一个“余 Koszul”版本，参见他的注记 2。该理论可以扩展到单连通空间，这一点在 Dwyer 的原始论文 [Dwy79，第 1 节5]中已经有所暗示：“显然，只要将注意力限制在具有比温和环系统更多可除性的环系统上，这些问题似乎就可以避免；例如，限制于满足 R_* 使得 $\frac{1}{p} \in R_{p-2}(p \geq 2)$ 的系统。”另一个推广是 Hess 的温和 homotopy 理论。对于参数 $r \geq 2$，定义一个r-温和 homotopy 等价 [Hes93] 为一个映射 f，它作用于 $(r-1)$-连通空间之间，并且在 p处局部化后，在 π_k 上诱导同构，直至 $k = p(r-1)$。注意，这一概念比温和等价更精细（如果一个映射是 r-温和等价，那么它就是 r-温和等价）。本文的第二个定理是，我们可以将 Dwyer 的理论范围扩展到温和 homotopy 理论，但代价是从 $\mathbb{Z}$ 转到 $\mathbb{S}$。

定理 B。 对于任意 $r \geq 2$，$(r-1)$-连通空间范畴模去 r-温和等价后，等价于$(r-1)$-连通谱李代数范畴模去r-温和同伦等价：

$$\mathcal{S}_*^{r\text{-mild}} \simeq \mathrm{Alg}(\mathbb{L})^{r\text{-mild}}$$

本文的主要思想可以概括为以下格言：在 Dwyer 的温和同伦理论中，从一个空间 X 可以恢复其 Postnikov 截断的集合$t_n X$，并对其进行适当的局部化（将不超过温和界的素数求逆），同时保留相容性。一个更为根本、而且我们认为更强大的方法，是将空间 n阶 Postnikov 截断替换为该空间的 n阶 *Goodwillie* 逼近 $\mathcal{P}_n X$ X，并对其进行适当的局部化。于是可以定义一个抽象的 ∞-范畴，该范畴只记住这些局部化 Goodwillie 逼近的集合（这与温和同伦论不同，它不是空间的局部化）。我们将此称为 $\mathbb{S}$-温和同伦论，并构造出它与一个由代数对象组成的 ∞-范畴之间的等价；我们将这些代数对象称为 谱 *Lazard* 代数。定理 A和B 可由截断以下结构性结果得到。

定理 C。 存在一个 ∞-范畴之间的等价

$$\mathcal{FT} \simeq \mathrm{LazAlg}(\mathbb{S})$$

在 ∞-范畴 $\mathbb{S}$-温和空间（定义 3.9）与 ∞-范畴的谱 Lazard 代数（定义 2.6）之间。

由于恒等函子的 Goodwillie 塔对单连通空间收敛，空间的 $\mathbb{S}$-温和同伦型使我们能够恢复其温和同伦型（按 Dwyer 的意义），从而得到上述定理。与 Dwyer 的概念相比，这一概念的优势在于，它对非单连通空间同样有意义。这种方法使我们能够提出将温和同伦论推广到非单连通空间的设想，具体体现为下面这个定理 C 的推论；第 5 节将对此作出更精确的阐述。

推论 D。存在一个映射

$$\mathcal{L} : \mathcal{S}_*^{\geq 1} \to \mathrm{LazAlg}(\mathbb{S})$$

从带基点连通空间到谱 Lazard 代数，并记住以下信息：

（1）命题 $\mathcal{P}^n X[\frac{1}{n!}]$ 给出的 3.7-李模型，它们是 $\mathcal{L}X$ 的阶段，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立；

（2）基本群的 Lazard 完备化（见 [Laz54]） X。

1.1. **概述**。 在第 2 节和第 3 节中，我们研究 $\mathbb{S}$-温和同伦论，并说明它如何与一种称为 *谱 Lazard 代数* 的代数对象相关联；其名称源自经典的 Lazard 代数概念 [Laz54]。特别地，谱 Lazard 代数的 π_1 是按照 Lazard 原始意义定义的 Lazard 代数。在第 4 节中，我们说明截断后，该理论可以轻松得到定理 A和定理 B。最后，在第 5 节中，我们探讨 $\mathbb{S}$-温和同伦论对非单连通空间的启示。所有这些构造还将进一步用于构造 [Guè26] 中构形空间和结空间的代数模型。

1.2. 约定。我们称空间、谱或链复形之间的映射 $X \to Y$ 为 n-连通的，若其同伦纤维是 $(n-1)$-连通的。谱 E 是 k-连通的，若$\pi_i E = 0$ 对 $i < k$成立。我们用 t_n 表示将 $> n$次的同伦群消去的 Postnikov 截断，并用 τ_nO 表示将元数为$> n$的运算消去后对运算子 O 作出的截断。我们用 $\mathbb{L}$ 表示谱李运算子，即恒等映射的导数的 Ching 运算子 ∂_*(id)，并且 $\mathbb{L}(\mathbb{Z}) = H\mathbb{Z} \otimes \mathbb{L}$。按此约定，不存在移位：空间 X 的李模型 L(X) 满足 π_kL(X) $\cong \pi_k X$（命题 3.7）；而在 Quillen 和 Dwyer 的微分分次李代数模型中，k 次同调对应于 π_{k+1}。

1.3. **致谢**。 感谢我的导师 Geoffroy Horel，感谢他提出许多富有洞见的讨论并给予不可或缺的指导。感谢 Gregory Arone 在证明命题 5.2方面提供帮助。

1.4. **生成式人工智能的使用**。 作者确认在撰写和校对本手稿时使用了大语言模型协助。数学创作过程中未使用任何生成式人工智能工具。

2. Lazard 代数与谱 Lazard 代数

我们将按照 [CP84b], 的称呼，将一类群称为 Lazard 群；该类群由 Lazard [Laz54]引入。它是使 Baker–Campbell–Hausdorff 公式有意义的自然群族。

对每个群 G，我们都可以关联其 Lazard 完备化 G，它是映射到 G 的初始 Lazard 群。Lazard 完备化是一种比 Malcev 完备化更强的不变量，因为它包含了关于挠元的部分信息。关于这一主题的详细论述，请参阅 [CP84b，第 1]，[Laz54，第 II 章，第 § 4] 节。接下来，我们定义处理 Lazard 群和 Lazard 代数所需的概念。对于 L 上的李代数 $\mathbb{Z}$，在 F 上 L的下降滤子是一个递减序列

$$L = F_1 L \supset F_2 L \supset \cdots$$

使得 $[F_iL, F_jL] \subset F_{i+j}L$。因此，伴随分次对象 $\mathrm{gr}(L) = \bigoplus F_iL/F_{i+1}L$ 具有李代数结构。群 G 的下降滤子是一个类似的递减序列$F_\bullet G$，且满足 $[F_iG, F_jG] \subset F_{i+j}G$。对于 i这个整数，记作 $Q_i = \mathbb{Z}[\frac{1}{i!}]$。

定义 2.1。 A*Lazard* 代数 是一个李代数 L，其上赋予了一个滤子 $F_\bullet L$，满足：

(1) 对每个 $i \geq 1$，F_iL 是一个 Q_i-模。(2) 对每个 $i \geq 1$，幂零李代数 $\mathrm{gr}(L/F_{i+1}L) \otimes Q_i$ 由 $(L/F_2L)\otimes Q_i$ 生成。(3) L 关于滤子 $F_\bullet L$ 是完备的。

定义 2.2。 A *Lazard* 群 是一个群 G，其上赋予了一个下降滤子 $F_\bullet G$，满足：

(1) 对每个 $i \geq 1$，$F_iG/F_{i+1}G$ 是一个 Q_i-模。(2) 对每个 $i \geq 1$，幂零李代数 $\mathrm{gr}(G/F_{i+1}G)\otimes Q_i$ 由 $(G/F_2G)\otimes Q_i$ 生成。(3) G 关于滤子 $F_\bullet G$ 是完备的。

Lazard 代数（分别地，Lazard 群）构成一个范畴，其态射是保持滤子的李代数（分别地，群）同态。Lazard [Laz54]证明 BCH公式诱导出 Lazard 代数范畴与 Lazard 群范畴之间的等价。

定义 2.3。 [CP84b, §1], 另见 [Laz54, 第II章，定理3。10] 对于每个群 G，都存在一个 Lazard 群 G 以及一个映射 $G \xrightarrow{g} \overline{G}$，使得若 G 由其下中心列子群构成滤子，则 g 保持滤子，且诱导的映射

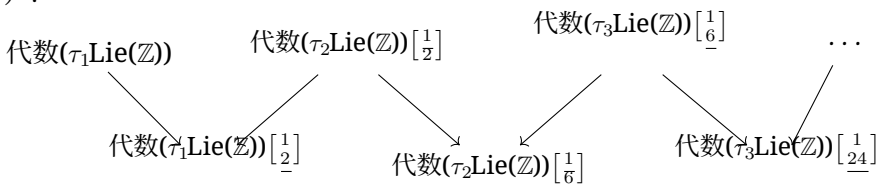
$$\bigoplus (F_iG/F_{i+1}G) \otimes Q_i \to \mathrm{gr}(\overline{G})$$

是一个同构。 G 称为群 G的 Lazard 完备化。

存在类似的、由泛性质定义的 $\mathbb{Z}$ 上李代数的 Lazard 完备化。

备注 2.4。 请注意，若在这些定义中将环 Q_i 替换为有理数 $\mathbb{Q}$，便可得到 Malcev完备李代数和 Malcev完备群的概念，以及 Malcev 完备化。

命题2.5。 Lazard 代数的范畴等价于以下 1-范畴图表的极限（取于（(∞,1)-范畴）的（(∞,1)-范畴）中）：



这里，Lie($\mathbb{Z}$)表示（1-范畴意义下的）李运算子，而 τ_n 表示将元数为 $> n$的运算消去后的截断。因此，τ_nLie($\mathbb{Z}$)上的代数范畴就是 n-幂零李代数范畴。

证明。 暂且将上文的极限范畴记作 M ，将 Lazard 代数范畴记作 Laz。我们将构造函子 $M \leftrightarrows$Laz。M 的一个对象是一个序列$(L_n)_{n\geq 1}$，其中 L_n 是一个在 Q_n上的 n-幂零李代数，并配有同构

$$\theta_n \colon L_{n+1}/\Gamma^{n+1}L_{n+1} \xrightarrow{\simeq} L_n \otimes Q_{n+1}.$$

反复迭代后，它们诱导出同构

$$L_k/\Gamma^j L_k \cong L_{j-1} \otimes Q_k \qquad (j \leq k). \tag{1}$$

我们将使用以下观察：如果 $0 \to K \to A \to B \to 0$ 是阿贝尔群的正合序列，且 K 是一个 Q_n-模，那么

$$A \cong (A \otimes Q_n) \times_{B\otimes Q_n} B, \tag{2}$$

因为 $A \to B$和 $A \otimes Q_n \to B \otimes Q_n$ 都是满射，且具有相同的核 K。

从 Laz 到 M。 设 L是一个 Lazard 代数，并令 $E_n = L/F_{n+1}L$和 $L_n = E_n \otimes Q_n$。由于 $\Gamma^{n+1}L \subset F_{n+1}L$，这是一个在 Q_n上的 n-幂零李代数。根据$i = n + 1$的条件 (2)，$E_{n+1} \otimes Q_{n+1}$ 的伴随分次对象由次数 1 的元素生成；对 j作下降归纳可得，对于所有 j，$F_j(E_{n+1}\otimes Q_{n+1}) = \Gamma^j(E_{n+1}\otimes Q_{n+1})$。对于 $j = n+1$，我们得到

$$L_{n+1}/\Gamma^{n+1}L_{n+1} = (E_{n+1}/F_{n+1}E_{n+1}) \otimes Q_{n+1} = E_n \otimes Q_{n+1} = L_n \otimes Q_{n+1},$$

其定义了 θ_n。此构造是函子性的。

从 M**到** Laz。 令（L_n， θ_n）为 M 的一个对象。通过 $E_1 = L_1$ 定义李环 E_n，并且

$$E_{n+1} = L_{n+1} \times_{L_n\otimes Q_{n+1}} E_n,$$

其中 $E_n \to L_n$ 是第一投影。明确地说， E_n 是由满足 $x_k \in L_k$的序列（x_n，…， x_1）组成的集合，其中 x_{k+1} 和 x_k 在 $L_k \otimes Q_{k+1}$中具有相同的像。投影 $E_{n+1} \to E_n$ 是满射，其核为 $\Gamma^{n+1}L_{n+1}$；由于局部化与纤维积交换，$E_n \otimes Q_n \cong L_n$ 由归纳得到。令 $L = \lim_n E_n$ ，且令 $F_{n+1}L = \ker($ $L \to E_n)$。于是 L 是完备的，并且 $F_iL/F_{i+1}L = \Gamma^i L_i$ 是一个 Q_i-模，因此 F_iL 是一个 Q_i-模。根据（1），元素 x 属于 F_jL 当且仅当对于 $k < j$ 有 $x_k = 0$ ，并且对于 $k \geq j$ 有 $x_k \in \Gamma^j L_k$ 。因此 $[F_iL, F_jL] \subset F_{i+j}L$，而（$L/F_{i+1}L$）上由此诱导的滤子 $\otimes Q_i \cong L_i$ 就是下中心列，其伴随分次对象由次数 1 生成。因此， L 是一个 Lazard 代数，并且关于（L_n， θ_n）是函子性的。

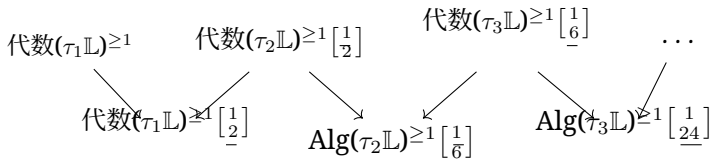
现在来证明这两个函子互为逆函子。从 $(L_n$， $\theta_n)$出发，并记 L 为之前构造的 Lazard 代数，我们有 $(L/F_{n+1}L)\otimes Q_n = E_n\otimes Q_n \cong L_n$，并且与 θ_n相容。反过来，设 L 是一个 Lazard 代数，且 $E_n = L/F_{n+1}L$，$L_n = E_n \otimes Q_n$ 如上所述。将（2）应用于扩张 $0 \to F_{n+1}L/F_{n+2}L \to E_{n+1} \to E_n \to 0$，其核是一个 Q_{n+1}-模，我们得到

$$E_{n+1} \cong (E_{n+1} \otimes Q_{n+1}) \times_{E_n\otimes Q_{n+1}} E_n = L_{n+1} \times_{L_n\otimes Q_{n+1}} E_n.$$

因此，李环 E_n 正是由（L_n， θ_n）构造的那些李环，而 $L \cong \lim_n E_n$ 及其滤子也是如此，因为 L是完备的。□

这一结果启发了下面的定义。

定义 2.6. 谱 Lazard 代数的范畴 LazAlg(𝕊) 是以下 ∞-范畴的极限。



此处 $\mathrm{Alg}(\tau_k\mathbb{L})$ 表示 ∞-范畴，即在 $\tau_k\mathbb{L}$上的谱中的代数范畴，而在命题 2.5 Alg 表示普通代数范畴。上标 ≥ 1 表示底层谱是 1-连通的。按照我们的约定（无移位），一个$\mathbb{L}$-代数的括号 A 诱导出映射 $\pi_a A \otimes \pi_b A \to \pi_{a+b-1}A$；特别地，$\pi_1 A$ 是一个李代数，处于1度，而不是像命题 0中的 2.5那样处于 0 度。

3. ∞-范畴中的 $\mathbb{S}$-tame 空间

本节的要点是，$\mathbb{S}$-tame 空间范畴可以用第 2 节的谱 Lazard 代数来建模。在 [Heu 21], Heuts 为任意带基点的可呈现 ∞-范畴 $\mathcal{C}$构造了一座伴随塔（我们只写出左伴随）

$$\mathcal{C} \to \cdots \to \mathcal{P}_n\mathcal{C} \to \cdots \to \mathcal{P}_0\mathcal{C} = *$$

其中 $\mathcal{P}_n\mathcal{C}$ 在某种精确意义下是“$\mathcal{C}$ 的普适 n-可切除逼近”。特别地，$\mathcal{C}$ 的恒等函子的 Goodwillie 塔的 n 阶段可以表示为伴随的单位：

$$\mathcal{C} \underset{\Omega^\infty_n}{\overset{\Sigma^\infty_n}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}_n\mathcal{C}$$

这些 $\mathcal{P}_n$ 逼近是利用 ∞-运算子的工具定义的。在本节中，为了与 Heuts 的工作保持一致，这一概念将采用 Lurie 在 [Lur15第 2 章定义 2.1.1 中的定义。10]让我们回顾 Heuts 意义下一个 n-截断的 ∞- 运算子$\mathcal{O}$ 的概念。非正式地说，$\tau_n\mathcal{O}$ 是一个 ∞-运算子，其底层对称序列定义为

$$\tau_n\mathcal{O}(k) = \begin{cases} \mathcal{O}(k) & \text{if } 1 \leq k \leq n, \\ * & \text{if } k > n. \end{cases}$$

在 $\tau_n\mathcal{O}$ 上的运算子结构以显然的方式从 $\mathcal{O}$继承而来，即简单地将元数大于 n 的运算设为零。存在一个显然的截断映射 $\mathcal{O} \to \tau_n\mathcal{O}$；参见 [Heu21，第 4 节。1]有关更严格的构造。为了构造 $\mathbb{S}$-温和同伦论，我们还需要了解一些关于 ∞-运算子的背景知识。下面简要总结 [Heu21]中发展的一些工具。

全文中，$\mathsf{O}^\otimes$ 表示 Heu21], 意义下的非幺稳定 ∞-运算子，其底层稳定 ∞-范畴为 O。此类运算子配备 k 重张量积 $\otimes^k\colon \mathsf{O}^k \to \mathsf{O}$（$k \geq 1$）；对于 $X \in \mathsf{O}$，我们将 $X^{\otimes k}$ 记作 $\otimes^k(X, \ldots, X)$，它带有 Σ_k的作用。我们关心的例子是 $\mathrm{Sp}^\otimes$，其中 $X^{\otimes k} = X^{\wedge k}$。

定义 3.1. $\mathcal{O}^\otimes$ 中的一个余代数 是一个对象 $X \in \mathcal{O}$，并配备一族相容的余乘法

$$\delta_k\colon X \longrightarrow (X^{\otimes k})^{h\Sigma_k}, \qquad k \geq 2,$$

参见 [Heu21，定义 4。14]，其中给出了精确定义。我们将 $\mathrm{coAlg}(\mathcal{O}^{\otimes})$ 记作 ∞-范畴中的余代数，并将 $\mathrm{coAlg}^{\mathrm{ind}}(\mathcal{O}^{\otimes})$ 记作其 ind-完备变体 [Heu21，定义 4。21]。由于 $\mathcal{O}$ 是稳定的，每个 $X \in \mathcal{O}$ 都具有平凡的余代数结构，其中所有 δ_k 均为零。

备注 3.2. 函子 $\Sigma^{\infty}_{n}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}_n\mathcal{C}$ 在稳定化上诱导一个等价 [Heu21，引理 2。11]。对于 $\mathcal{C} = \mathcal{S}_*$，这将 $\mathrm{Sp}(\mathcal{P}_n\mathcal{S}_*) \simeq \mathrm{Sp}$相识别，而在此识别下，其底层的谱为 $\Sigma^{\infty}_{n}X \quad \Sigma^{\infty}X$。

固定 $n \geq 1$。截断 $\tau_n\mathrm{O}^{\otimes}$ 具有相同的底层 ∞-范畴 O，但张量积不同，我们将其记为 $\odot^k$。它们配有自然变换 $\otimes^k \to \odot^k$，当 $k \leq n$ 时这些自然变换是等价。对于 $k > n$，$\odot^k$ 是一个迭代张量积的极限，其指标由偏序集 $\mathrm{NPart}_n(k)$ 的神经给出；该偏序集由分拆链构成，记录了如何将元数为 k 的运算由元数为 $\leq n$ [的运算构造出来（Heu21，第 4.1 节，命题 4.10]）。对于 $\mathrm{O}^{\otimes}$ =$\mathrm{Sp}^{\otimes}$，所有这些迭代张量积都是 $X^{\wedge k}$ 的副本。我们所需的这一描述的唯一性质是，$\mathrm{NPart}_{k-1}(k)$ 的非退化单纯形维数至多为 $k-3$（见 Heu21，引理 6.17] 的证明）。

引理 3.3. 设 $k \geq 2$，并赋予 $X \in \mathrm{O}$ 平凡的 $\tau_{k-1}\mathrm{O}^{\otimes}$-余代数结构。将这一结构扩张为 X 上的 $\tau_k\mathrm{O}^{\otimes}$-余代数结构，相当于沿着 $(X^{\otimes k})^{h\Sigma_k} \to (X^{\odot k})^{h\Sigma_k}$ [提升零映射 $X \to (X^{\odot k})^{h\Sigma_k}$（Heu21，引理 4.23]）。若 Σ_k 的 Tate 构造在 O 中消失（例如当 $k!$ 可逆时），则范数映射将同伦不动点与同伦轨道等同起来，而这些扩张由空间 $\mathrm{Map}_{\mathcal{O}}(X, F)$ 分类，其中 $F = \mathrm{fib}\big(X^{\otimes k} \to X^{\odot k}\big)_{h\Sigma_k}$ [（Heu21，推论 4.32]）。平凡扩张对应于零映射。特别地，若每个映射 $X \to F$ 都是零伦的，则所有这类扩张都等价于平凡扩张。

定理 3.4。 [Heu21，推论 1.26 和 6。15]。将 $(n-1)!$ 取逆后，存在一个 ∞-范畴的等价

$$\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{S}_* \simeq \mathrm{coAlg}^{\mathrm{ind}}(\tau_{n-1}\mathrm{Sp}^{\otimes})$$

固定一个整数 n。考虑带基点空间范畴的 $(n-1)$ 阶 Goodwillie 逼近 $\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{S}_*$。

定义 3.5。 将 $\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{S}_*^{\geq 1}$称为由$\Sigma^{\infty}_{n-1}S^1$在余极限下生成的$\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{S}_*$ 的子范畴。

我们回顾一下，对于谱中的任意 n-截断运算子 $\mathcal{O}$，存在一个函子

$$\mathbf{bar}_{\mathcal{O}}\colon \mathrm{Alg}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{coAlg}_{\mathrm{dp}}(B(\mathcal{O}))$$

到除幂余代数 [Heu21, §6.1, Prop. 6.1]，其定义于 bar 构造 B(O) 上，而后者是一个余运算子。在底层谱上，$\mathrm{bar}_{\mathcal{O}}(A)$ 是导出不可分解元 $1 \circ_{\mathcal{O}} A$ 的谱，而 $\mathrm{bar}_{\mathcal{O}} \circ \mathrm{free}_{\mathcal{O}}$ 是平凡余代数函子。这是 Quillen 关于 dg Lie 代数与余交换微分分次余代数之间对应关系的谱运算子类比。基于这一类比，bar 应被视为 Chevalley–Eilenberg 复形。函子 $\mathrm{bar}_{\mathcal{O}}$ 是全忠实的，其本质像为余幂零余代数 [Heu21, Prop. 6.9]。对于 $\mathrm{O} = \tau_{n-1}\mathbb{L}$，bar 构造 $B(\tau_{n-1}\mathbb{L}) \simeq \tau_{n-1}B(\mathbb{L})$ 是 $(n-1)$- 截断的余交换余运算子，其余代数是 $\tau_{n-1}\mathrm{Sp}^{\otimes}$ 中的余代数；当 $k \leq n-1$ 时，若 Σ_k 的 Tate 构造消失，则除幂余代数就是普通余代数。因此，在将 $(n-1)!$ 逆化之后，我们得到一个全忠实函子

$$\mathbf{bar}_{\tau_{n-1}\mathbb{L}}\colon \mathrm{Alg}(\tau_{n-1}\mathbb{L}) \longrightarrow \mathrm{coAlg}^{\mathrm{ind}}(\tau_{n-1}\mathrm{Sp}^{\otimes}).$$

参见 [Heu21，§6.1 和 Cor. 6.16] 了解更多详情。

引理 3.6。 映射 $\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{S}_*^{\geq 1} \to$余代数$^{\mathrm{ind}}$($\tau_{n-1}$谱$^{\otimes}$)落在函子 $\mathbf{bar}^{\tau_{n-1}\mathbb{L}}$的本质像中。

证明。由于上面的函子保持余极限，只需对 $\Sigma^\infty_{n-1}S^1$ 证明即可。我们改编 [Heu21, 引理 6.17]的证明。我们通过对 $1 \leq k \leq n-2$进行归纳，证明 $\Sigma^\infty_{n-1}S^1$ 是τ_{n-1}谱$^{\otimes}$中的平凡余代数。这里， $\odot^{k+1}$ 现在是由 τ_k谱$^{\otimes}$定义的 $(k+1)$ 重张量积。我们断言， $\Sigma^\infty S^1$ 到 τ_{k+1}谱$^{\otimes}$ 的任何提升都由其唯一确定，并且是平凡提升。这样的提升是 $\delta_{<k+1}$的一个分解；根据归纳假设，该映射经过 $\left((\Sigma^\infty S^1)^{\otimes k+1}\right)^{h\Sigma_{k+1}} \to \left((\Sigma^\infty S^1)^{\odot k+1}\right)^{h\Sigma_{k+1}}$ （引理 3.3）为零，因此只需证明该映射的纤维 F 满足 $\pi_1 F = 0$。由于 $k+1 \leq n-1$， Σ_{k+1}的阶整除 $(n-1)!$ 且为可逆元，因此范数映射 $(-)_{h\Sigma_{k+1}} \to (-)^{h\Sigma_{k+1}}$ 是一个等价，并且同伦不动点保持连通性。由于当 $k \geq$1时，$(\Sigma^\infty S^1)^{\otimes k+1}$ 是 2-连通的，因此 $\left((\Sigma^\infty S^1)^{\otimes k+1}\right)^{h\Sigma_{k+1}}$也是如此。此外，$(\Sigma^\infty S^1)^{\odot k+1}$ 是由 $\mathrm{NPart}_k(k+1)$索引的、$(k+1)$-连通的谱 $(\Sigma^\infty S^1)^{\wedge k+1}$ 的多个副本的一个极限；其非退化单纯形的维数至多为 $k-2$，因此它是 3-连通的， $\left((\Sigma^\infty S^1)^{\odot k+1}\right)^{h\Sigma_{k+1}}$也是如此。因此 F 是 2-连通的，而零映射的唯一提升就是平凡提升。□

命题 3.7。 在将 $(n-1)!$ 取逆后，有一个 ∞-范畴的等价

$$\mathcal{L} : \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{S}_*^{\geq 1} \simeq \mathrm{Alg}(\tau_{n-1}\mathbb{L})^{\geq 1}$$

此外，对于 $X \in \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{S}_*^{\geq 1}$，若记 $\pi_k X = \pi_0\mathrm{Map}_{\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{S}_*}(\Sigma^\infty_{n-1}S^k,\ X)$，则有 $\pi_k X \simeq \pi_k(\mathcal{L}(X))$。对于 $k=1$，该同构仅是集合论意义下的同构；而若 $k \geq 2$ ，则它是阿贝尔群同构。

证明。按构造，函子 L 有一个右伴随 R。我们来证明 L 是全忠实的。有一个等价 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{S}_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{coAlg}^{\mathrm{ind}}(\tau_{n-1}\mathrm{Sp}^{\otimes})$。限制到 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{S}_*^{\geq 1}$后，该映射经过 $\mathrm{Alg}(\tau_{n-1}\mathbb{L})$，我们可以通过 bar 构造和 [Heu21，推论 6.16] 将其识别为 $\mathrm{coAlg}^{\mathrm{ind}}(\tau_{n-1}\mathrm{Sp}^{\otimes})$ 的一个满子范畴。因此 L 是全忠实的。现在证明 L 是本质满的。但 L 保持余极限，且其本质像包含连通自由截断李代数（它们是球面 $\Sigma^\infty_{n-1}S^k$ for $k \geq 1$ 的像）。$\mathrm{Alg}(\tau_{n-1}\mathbb{L})$ 中的任意连通代数 L 都是这类自由代数的余极限，例如可利用巴分解以及如下事实：在 1-连通谱上的自由 $\tau_{n-1}\mathbb{L}$-代数是 1-连通的。由于 L 是全忠实的，这样的自由代数图表可提升为 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{S}_*^{\geq 1}$ 中的图表；又由于 L 保持余极限，它会将所提升图表的余极限映射到原图表的余极限。现在解释同伦群的识别。固定 $k \geq 1$。如上所证，$\mathrm{L}(\Sigma^\infty_{n-1}S^k)$ 是自由 $\tau_{n-1}\mathbb{L}$-代数 $\mathrm{free}(\Sigma^\infty S^k)$。由于 L 是全忠实的，我们得到自然双射

$$\pi_k X = \pi_0\text{映射}(\Sigma^\infty_{n-1}S^k, X) \cong \pi_0\text{映射}_{\mathrm{Alg}}(\text{自由对象}(\Sigma^\infty S^k), \mathcal{L}X) \cong \pi_0\text{映射}_{\mathrm{Sp}}(\Sigma^\infty S^k, U\mathcal{L}X) = \pi_k\mathcal{L}(X),$$

其中， U 表示底层谱。 $\pi_k X$ 上的群结构由夹断映射 $S^k \to S^k \vee S^k$诱导。由于$\mathcal{L}$ 保余积，夹断映射在$\mathcal{L}$ 下对应于一个代数映射

$$\mathrm{free}(\Sigma^\infty S^k) \longrightarrow \mathrm{free}(\Sigma^\infty S^k \vee \Sigma^\infty S^k),$$

根据伴随关系，它由 $\pi_k U\mathrm{free}(\Sigma^\infty S^k \vee \Sigma^\infty S^k)$ 中的一个类决定。记 e_1， e_2为该群中由 $\Sigma^\infty S^k$ 的两个副本的包含映射给出的类，并记 e为上述映射的

类。free(e_1, e_2) 的元数为 j 的直和项是 ($j(k-1)+1$)-连通的。因此，对于 $k \geq 2$，只有元数为 1 的直和项对 π_k free(e_1, e_2) 有贡献，所以它由 e_1 和 e_2 生成，而与两个坍缩映射 $S^k \vee S^k \to S^k$ 的相容性迫使$e = e_1 + e_2$：这证明了 $\pi_k X$ 上的群运算由 $\pi_k \mathcal{L}X$ 中的加法给出。□

注意，当 $k=1$ 时，群同构不再成立，因为所有阶数都会对 π_1 free(e_1, e_2) 作出贡献；它是由 e_1 和 e_2 生成的自由（$n-1$）幂零李代数，而 e 的像是一个普适李级数 e_1+e_2+（括号）。因此，在这种情况下，$\pi_1 X$ 上的群运算应对应于 $\pi_1 \mathcal{L}(X)$ 上截断的 Baker–Campbell–Hausdorff 群运算，而不是其加法。

在 $2p-3$ 以下截断后，我们得到一个以 $\mathbb{Z}$ 为底的李代数模型。

推论 3.8。将 $(p-1)!$ 求逆后，存在一个 ∞-范畴的等价

$$\mathcal{P}_{p-1}\mathcal{S}_*^{[1,2p-3]} \simeq \mathrm{Alg}(\tau_{p-1}\mathbb{L}(\mathbb{Z}))^{[1,2p-3]}$$

这里，$\mathcal{P}_{p-1}\mathcal{S}_*^{[1,2p-3]}$ 表示由满足 $\pi_k X = 0$（对 $k > 2p-3$）的对象 X 张成的 $\mathcal{P}_{p-1}\mathcal{S}_*^{\geq 1}$ 满子范畴；而 Alg($\tau_{p-1}\mathbb{L}(\mathbb{Z})$)$^{[1,2p-3]}$ 是谱中运算子 $\tau_{p-1}\mathbb{L}(\mathbb{Z}) = H\mathbb{Z} \otimes \tau_{p-1}\mathbb{L}$ 上代数的 ∞-范畴，等价地说，是 $H\mathbb{Z}$-模中的 $\tau_{p-1}\mathbb{L}$-代数范畴，其底层谱的同伦群集中在次数 $[1, 2p-3]$。

证明。在全文中，$(p-1)!$ 均已求逆。由命题 3.7 应用于 $n = p$，它给出了同伦群之间的对应，可知左侧等价于代数($\tau_{p-1}\mathbb{L}$)$^{[1,2p-3]}$。我们不能直接截断运算子 $\tau_{p-1}\mathbb{L}$：它的各项并非连通的，$\mathbb{L}(k)$ 从度数 $1-k$ 开始，而 Postnikov 截断仅在连通谱上与楔积相容。因此，我们先进行移位。对于谱中的运算子 O，令 sO 表示其拟运算悬挂，并令sO(k) $\simeq \Sigma^{k-1}$ O(k)，其中对称群 Σ_k 也作用于悬挂坐标；函子 $A \mapsto \Sigma^{-1}A$ 诱导出等价 Alg(O) $\simeq$ Alg(sO)。由于 $\mathbb{L}(k)$ 在非等变意义下是若干个 S^{1-k} 的楔和，运算子 $s\tau_{p-1}\mathbb{L}$ 是连通的，其各项在非等变意义下均为若干个 $\mathbb{S}$ 的楔和，并且

$$\mathrm{Alg}(\tau_{p-1}\mathbb{L})^{[1,2p-3]} \simeq \mathrm{Alg}(s\tau_{p-1}\mathbb{L})^{[0,2p-4]}.$$

在连通谱上，t_{2p-4} 是对称幺半局部化 [Lur15, §2.2.1]。因此，$t_{2p-4}s\tau_{p-1}\mathbb{L}$ 是一个取值于（$2p-4$）截断连通谱中的运算子；又由于同伦群属于 $[0, 2p-4]$ 的代数是局部对象，Alg($s\tau_{p-1}\mathbb{L}$)$^{[0,2p-4]} \simeq$ Alg($t_{2p-4}s\tau_{p-1}\mathbb{L}$)$^{[0,2p-4]}$。连通运算子 $H\mathbb{Z} \otimes s\tau_{p-1}\mathbb{L}$也同样如此。对于 $0 < j \leq 2p-4$，有限群 $\pi_j\mathbb{S}$ 的阶仅能被满足 $2q-3 \leq j$的素数 q 整除，因此 $q < p$；故一旦将（$p-1$）! 取逆，$t_{2p-4}\mathbb{S} \simeq H\mathbb{Z}$。由于 $s\tau_{p-1}\mathbb{L}$ 的各项在非等变意义下都是 $\mathbb{S}$的若干个副本的楔和，单位映射 $\mathbb{S} \to H\mathbb{Z}$ 便诱导出一个运算子的等价

$$t_{2p-4}s\tau_{p-1}\mathbb{L} \xrightarrow{\sim} t_{2p-4}(H\mathbb{Z} \otimes s\tau_{p-1}\mathbb{L}).$$

将这些结果综合起来并移回原位，我们得到

$$\mathrm{Alg}(\tau_{p-1}\mathbb{L})^{[1,2p-3]} \simeq \mathrm{Alg}(t_{2p-4}s\tau_{p-1}\mathbb{L})^{[0,2p-4]} \simeq \mathrm{Alg}(t_{2p-4}(H\mathbb{Z}\otimes s\tau_{p-1}\mathbb{L}))^{[0,2p-4]} \simeq \mathrm{Alg}(\tau_{p-1}\mathbb{L}(\mathbb{Z}))^{[1,2p-3]}.$$

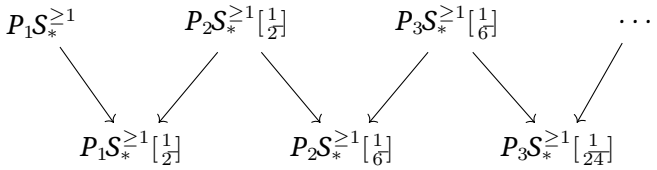
□

这一结果可结合以下内容来理解：[Wu22，引理 3.7。13]。

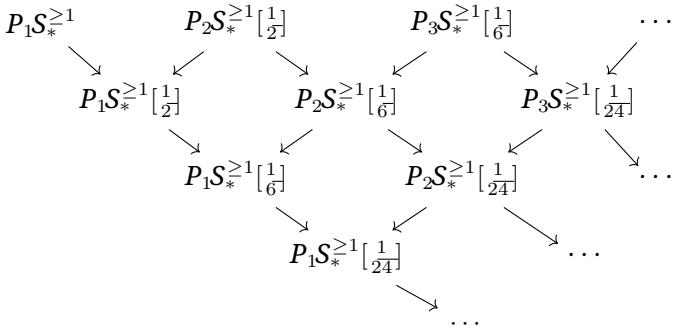
对于 $n \geq 1$，我们将 $\mathcal{P}_n\mathcal{S}_*^{\geq 1}[\frac{1}{k}!]$ 记作在由局部对象 X 所定义的等价下，对范畴 $\mathcal{P}_n\mathcal{S}_*^{\geq 1}$进行局部化所得的结果，其中 $\pi_* X$ 是唯一 k可除的。

非正式地说， $\mathbb{S}$-驯顺空间是一个序列 (X_n)，满足 $X_n \in \mathcal{P}_n \mathcal{S}_*^{\geq 1}[\frac{1}{n!}]$，并带有一个指定等价 $X_n[\frac{1}{n+1}] \simeq \mathcal{P}_n X_{n+1}$。

定义 3.9。 $\mathbb{S}$-tame 空间的$\mathcal{FT}$范畴是以下∞-范畴图表的极限：

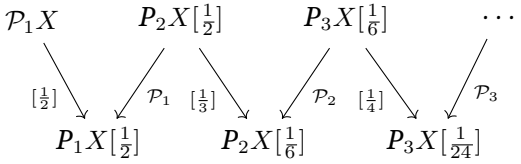


注记 3.10。 可以考虑另一个或许更自然的图表来取其极限：



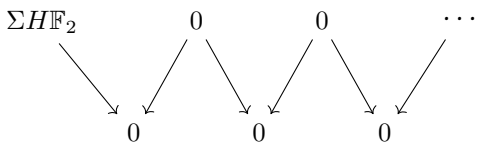
不过，前者到后者的包含是（∞）-初始的，因此这两个定义是一致的，我们决定沿用第一个定义。

存在一个自然的 $\mathbb{S}$-驯化函子 $\mathcal{S}_*^{\geq 1} \to \mathcal{FT}$，它将带基点连通空间映射为图表



也就是说， $X_n = \mathcal{P}_n X[\frac{1}{n!}]$，其中的等价 $X_n[\frac{1}{n+1}] \simeq \mathcal{P}_n X[\frac{1}{(n+1)!}] \simeq \mathcal{P}_n X_{n+1}$ 由 $\mathcal{P}_n \mathcal{P}_{n+1} \simeq \mathcal{P}_n$ 诱导。我们将这个函子 $(-)^{\mathbb{S}\text{-tame}}$ 记作。

注 3.11. 请注意， $\mathbb{S}$-驯化函子不是局部化。实际上，它甚至不是本质满的，例如



是一个 $\mathbb{S}$-驯化空间，但不属于驯化函子的像。

现在我们可以证明定理 C。这只是命题 3.7的直接推论。唯一尚待核实的是，在按照命题 3.7作出识别后，函子$\mathcal{P}_{n-1}$: $\mathcal{P}_n\mathcal{S}_*^{\geq 1} \to \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{S}_*^{\geq 1}$相当于从 n-幂零李代数到$(n-1)$-幂零李代数的自然映射，即左伴随

$$\mathrm{Nil}_{n-1}\colon \mathrm{Alg}(\tau_n\mathbb{L})^{\geq 1} \to \mathrm{Alg}(\tau_{n-1}\mathbb{L})^{\geq 1}$$

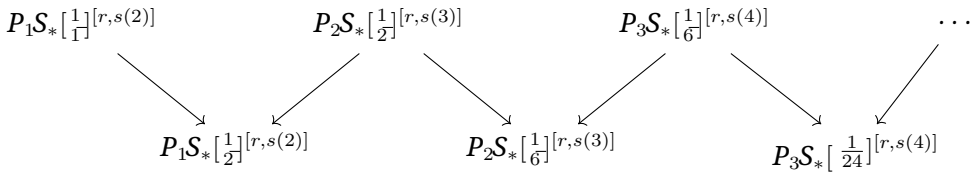
对截断 $\tau_n\mathbb{L} \to \tau_{n-1}\mathbb{L}$ 的限制，并且局部化 $\left[\frac{1}{k}!\right]$ 在两侧相对应，且这种对应关于 n 是相干的。第二点很容易。对于第一点，在将 $n!$ 求逆后， Σ_k 的 Tate 构造对 $k \leq n$ 消失，因此，根据 $k \leq n$ [Heu21, Cor. 1.25], $\mathrm{Sp}^{\otimes}$ 的 k-阶段空间是可缩的。由于 P_{n-1} 将一个 n-阶段映射到一个 $(n-1)$-阶段， [Heu21, Cor. 1.26] 中的等价 $\mathrm{P}_k\mathrm{S}_* \simeq \mathrm{coAlg}^{\mathrm{ind}}(\tau_k \mathrm{Sp}^{\otimes})$ 与左侧的 P_{n-1} 以及右侧遗忘 n 重余代数结构的函子 $\mathrm{coAlg}^{\mathrm{ind}}(\tau_n\mathrm{Sp}^{\otimes}) \to \mathrm{coAlg}^{\mathrm{ind}}(\tau_{n-1}\mathrm{Sp}^{\otimes})$ 相容，且这种相容性选择构成一个可缩空间（参见 [Heu21, Lemma 4.31], 的证明，其中 Tate 项现在消失了）。在代数侧，根据 [Heu21, 命题 6.5、6.6 和 6.9], , 函子 $\mathrm{bar}_{\tau_n\mathbb{L}}$ 将 $\mathrm{Alg}(\tau_n\mathbb{L})$ 的 Goodwillie 塔（其阶段由函子 Nil_k 给出）与 ∞-范畴 $\mathrm{coAlg}^{\mathrm{ind}}_{\mathrm{dp}}(B(\tau_k\mathbb{L})) \simeq \mathrm{coAlg}^{\mathrm{ind}}(\tau_k\mathrm{Sp}^{\otimes})$ 的塔相对应；最后一个等价成立是因为相关的 Tate 构造消失。因此， n 和 $n-1$ 的命题 3.7 中的等价将 P_{n-1} 与 Nil_{n-1} 联系起来。于是，逐层等价汇集成定义 3.9 中的图表与定义 2.6 中的图表之间的等价；取极限后得到 FT $\simeq$LazAlg($\mathbb{S}$)。

4. 恢复温和与驯性同伦论

通过适当地截断，可以在整数上定义李代数模型。

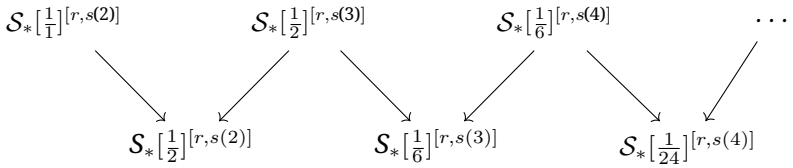
定义 4.1。 固定一个整数 $r \geq 1$ 和一个非递减函数 $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \infty$。按照惯例，我们称 t_∞ 为恒等函子。若映射 $f\colon X \to Y$ 在 $(r-1)$- 连通同伦型之间，则称其为 $(r,\ s)$- 驯性 等价，如果对于每个整数 $n \geq 2$， $t_{s(n)}\mathcal{P}_{n-1}f$ 在将 $(n-1)!$ 取逆后是一个等价，其中$\mathcal{P}_{n-1}$ 是恒等函子的 Goodwillie 塔的第 $(n-1)$ 阶。我们将 1-驯性等价简称为 $(1,\ s)$-驯性等价，其中 s 是取值为 ∞ 的常值函数。

定义 4.2。 固定一个非递减函数 $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 并且一如既往地固定一个参数 $r \geq 1$。$(r,\ s)$-驯性空间的范畴是以下 ∞-范畴的极限：在阶段$\mathcal{P}_{n-1}$中，将 $(n-1)!$ 取逆，并保留次数为 $[r, s(n)]$ 的同伦群：

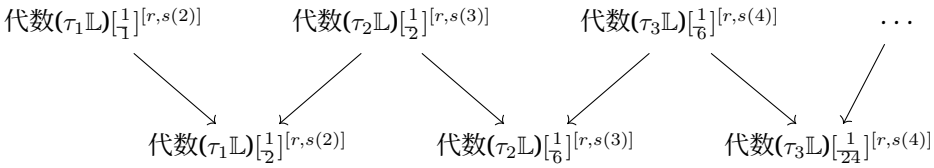


令 X 为 $(r-1)$-连通。根据 [Goo03，定理 1。13], 映射 $X \to \mathcal{P}_{n-1}X$ 在 π_i 上诱导同构，其中 $i \leq n(r-1)$ (另见 [Heu21，§6。3])。我们得到如下描述。

引理 4.3。 如果对所有 $n \geq 2$ 都有 $s(n) \leq n(r-1)$，则（r， s）-温和空间的范畴等价于以下图表的极限。



此外，该范畴等价于由极限定义的 $(r,\ s)$-驯性谱 Lazard 代数范畴



这里，代数$(\tau_k\mathbb{L})[\frac{1}{m}]^{[a,b]}$ 表示由底层谱为 m-局部且同伦群集中在 $[a,b]$度的 $\tau_k\mathbb{L}$代数组成的 ∞-范畴。

引理 4.4. 假设对所有 $n \geq 2,\ \ r \geq 2$ 和 $s(n) \leq n(r-1)$。

(1) (r,s)-驯化空间的范畴等价于满足以下条件的$(r-1)$-连通空间满子范畴：若 $k > s(p)$，则 p 在 $\pi_k X$ 中可逆。(2) (r,s)-驯化谱 Lazard 代数与满足以下条件的$(r-1)$-连通谱李代数之间存在等价：若 $k > s(p)$，则 p 在 $\pi_k L$ 中可逆。(3) 此外，若对所有 $n \geq 2,\ \ s(n) \leq r+2n-4$，则$(r,s)$-驯化谱 Lazard 代数可简单描述为满足相同的 π_k整除条件的、在整数李运算子$\mathbb{L}(\mathbb{Z})$上的$(r-1)$-连通代数。

证明。 第 1) 点是直接的。对于第二点，注意到

$$\mathrm{Alg}(\tau_{n-1}\mathbb{L})^{[r,s(n)]} \simeq \mathrm{Alg}(\mathbb{L})^{[r,s(n)]}$$

根据 [Heu21，定理 0 的证明。4]这仅仅是因为， n个下中心列中的项，对于一个 $(r-1)$-连通代数而言是 $n(r-1)$-连通的。最后，第三点可由推论3.8同理得到，见 [Wu22，引理 3.7。13]这本质上是因为 p-局部地，$t_{2p-4}\mathbb{S} \simeq H\mathbb{Z}_{(p)}$而在阶段 $\mathcal{P}_{n-1}$ 第一个未被逆化的素数至少为 n。 □

现在，定理A和定理B都是引理 4.3与引理 4.4的直接推论。

5. $\mathbb{S}$-温和化保留了关于基本群的哪些信息

请注意，由于收敛性问题，非单连通空间的 $\mathbb{S}$-温和同伦型不一定包含有理同伦型的信息，这与带有 $r \geq 2$ 的 $(r-1)$-连通理论相反。不过，它可以恢复 Lazard 完备化的信息，从而恢复基本群的 Malcev 完备化。本节旨在证明这一论断。

命题 5.1。 设 X 是一个带基点连通空间。其 $\mathbb{S}$-驯化化使我们能够恢复 $\pi_1 X$的 Lazard 完备化。

这是以下广为人知的命题的推论：

命题 5.2. 设 X 为带基点连通空间。映射 $p_n\colon X \to \mathcal{P}_n X$ 诱导一个同构

$$\pi_1 X/\Gamma^{n+1}\pi_1 X \xrightarrow{\cong} \pi_1 \mathcal{P}_n X,$$

其中 $\Gamma^1 G = G$ 和 $\Gamma^{k+1}G = [G, \Gamma^k G]$ 为下中心列。

证明。 对于群 H，记作 $N_n H = H/\Gamma^{n+1}H$。空间的所有余极限都是带基点同伦余极限。

首先，我们断言，在带基点连通空间上，$\mathcal{P}_n$ 取连通值，并与滤过余极限和几何实现相交换。对于滤过余极限，$\mathcal{P}_n$ 由有限同伦极限和序列余极限构成 [Goo03, §1]。其余部分按 n 归纳论证。对于 $n = 1$，$\mathcal{P}_1 = \Omega^\infty\Sigma^\infty$，且$\Omega^\infty$ 与连通谱的筛余极限相交换 [Lur15, 1.4.3.9]。对于 $n \geq 2$，由 [Goo03, 引理 2.2] 存在一个自然纤维列

$$\mathcal{P}_n X \to \mathcal{P}_{n-1} X \to R_n X, \qquad R_n X = \Omega^\infty E_n(X), \quad E_n(X) = \Sigma\, \partial_n(\mathrm{id}) \wedge_{h\Sigma_n} (\Sigma^\infty X)^{\wedge n}.$$

由于 ∂_n(id) 在非等变意义下是 S^{1-n} [Joh95, AM99], 的副本楔和，因此对于 X 连通，谱 $E_n(X)$ 是 1-连通的。因此 $R_n X$ 是单连通的，并且根据长正合列，$\mathrm{P}_n X$ 是连通的。函子 E_n 与筛余极限交换，因此在连通空间上R_n 也与筛余极限交换。设 $X_\bullet$ 为一个单纯带基点连通空间。由于 $\mathrm{P}_{n-1}X_\bullet$和 $R_n X_\bullet$ 逐层连通，几何实现与取同伦纤维 $\mathrm{P}_n X_\bullet \simeq$fib($\mathrm{P}_{n-1}X_\bullet \to R_n X_\bullet$) 交换 [BF78, 定理 B.4], 因此，对于 P_n，结论成立。其次，我们将该陈述归约到 X 为圆的楔和的情形。函子 π_1 从带基点连通空间到群，是 B的左伴随，因此它将同伦余极限变为余极限。函子 N_n 与滤过余极限及余等化子交换，因为 n-幂零群在群中对这些运算封闭。根据第一个断言，函子 $\pi_1\mathrm{P}_n$、 $N_n\pi_1$ 以及$N_n\pi_1\mathrm{P}_n$ 将带基点连通空间的滤过余极限和几何实现变为群的余极限。因此，带基点连通空间中满足两个自然映射的类 C X

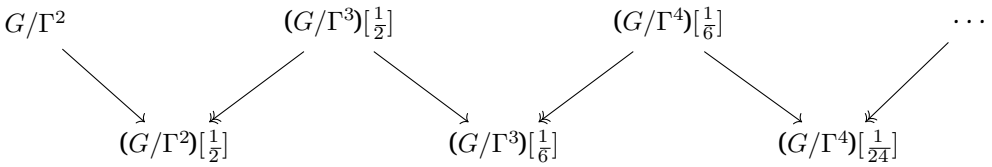
$$q_X\colon \pi_1\mathcal{P}_n X \to N_n\pi_1\mathcal{P}_n X, \qquad N_n\pi_1(p_n)\colon N_n\pi_1 X \to N_n\pi_1\mathcal{P}_n X$$

是同构这一性质在滤过余极限和几何实现下封闭。

剩下只需证明 $X = \bigvee_k S^1$ 有限时的结论。根据 [BD10，定理 6.8], ，对于自由群 $F_k = \pi_1 X$， $\pi_1(p_n)\colon F_k \to \pi_1\mathrm{P}_n X$ 是满射，且其核为 $\Gamma^{n+1}F_k$。因此 $\pi_1\mathrm{P}_n X$ 是 n-幂零的，q_X 是同构， $N_n\pi_1(p_n)$也如此；也就是说， $X \in \mathsf{C}$。任意多个圆的楔和都是有限个圆的滤过余极限，因此属于 C。最后，带基点连通空间可以用约化单纯集 X来建模。令 GX 为 X 的 Kan 环路群（它是一个单纯群，其中每个 $G_m X$ 都是自由对象，并对 ΩX建模），令 W 为单纯群的分类空间函子；单位 $X \to WGX$ 是一个弱等价[GJ99，第 V 章]。因此， $X \simeq |[m] \mapsto B(G_m X)|$ 是圆的楔和的几何实现，且属于 $X \in \mathsf{C}$。该结论中的同构为 $q_X^{-1} \circ N_n\pi_1(p_n)$。□

现在设 (X_n) 是源自带基点空间 X 的 $\mathbb{S}$-温和同伦型，由一个带有相容性条件 $\mathcal{P}_{n-1}X_n \simeq X_{n-1}[\begin{smallmatrix}1\\ n\end{smallmatrix}\,!]$的之字形图表示。由此可得一个简单推论：

前一个命题是，应用 π_1 函子后，我们得到一个群图表



其中 $G = \pi_1 X$。根据命题 2.5，通过 Lazard 对应将其转化到群上[Laz54，第 II 章，§4], 这恰好就是 $\pi_1 X$ 的 Lazard 完备化数据。

参考文献

[AM99] Gregory Arone 和 Mark Mahowald. 恒等函子的 Goodwillie 塔与球面的不稳定周期同伦. Invent. Math., 135(3):743–788, 1999. [BD10] Georg Biedermann 和 William G. Dwyer. 同伦幂零群. Algebr. Geom. Topol., 10(1):33–61, 2010. [BF78] A. K. Bousfield 和 E. M. Friedlander. Γ-空间、谱和双单纯集的同伦论. In Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), II, volume 658 of Lecture Notes in Math., pages 80–130. Springer, 柏林, 1978. [BKM+86] P. Boullay, F. Kiefer, M. Majewski, M. Stelzer, H. Scheerer, M. Unsöld, and E. Vogt. 通过微分形式研究温和同伦论. Preprint 223, Fachbereich Mathematik, 柏林自由大学, 柏林, Germany, 1986. Preprint n° 223. [CP84a] Bohumil Cenkl 和 Richard Porter. 带立方形式的德拉姆定理. Pac. J. Math., 112:35– 48, 1984.[CP84b] Bohumil Cenkl 和 Richard Porter. 群的 Lazard 完备化，以及有理数环子环上的自由微分分次代数模型. Topology, 23:445–464, 1984. [Dwy79] W. G. Dwyer. 温和同伦论. Topology, 18:321–338, 1979. [GJ99] Paul G. Goerss 和 John F. Jardine. 单纯同伦论，第 174 卷，Prog. Math. Basel: Birkhäuser, 1999.[Goo03] Thomas G. Goodwillie. 微积分 III：泰勒级数. Geom. Topol., 7:645–711, 2003. [Guè26] Nicolas Guès. 关于纽结空间的温和同伦型，2026年。准备中。[Hes93] Kathryn P. Hess. 温和与驯性同伦论. J. Pure Appl. Algebra, 84(3):277–310, 1993. [Heu21] Gijs Heuts. 高阶范畴的 Goodwillie 逼近，第 1333 卷，Mem. Am. Math. Soc. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2021. [Joh95] Brenda Johnson. 同伦论的导子. Trans. Amer. Math. Soc., 347(4):1295– 1321, 1995.[Laz 54] Michel Lazard. 关于幂零群和李环. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3), 71:101–190, 1954. [Lur15] Jacob Lurie. 高阶代数，2015年. [Sch88] H. Scheerer. 关于通过微分形式研究温和同伦论的报告. Algebraic topology, rational homotopy, Proc. Conf., Louvain-la- Neuve/Belg. 1986, Lect. Notes Math. 1318, 192-207 (1988)., 1988.[Wu22] Haoqin Wu. Dwyer 驯性空间的 Hopf 代数模型. 预印本，2022年。