arXiv:2611.31045v1 [math.MG] 23 Nov 2026

# 正性何时重要：曲线与曲面上的最大距离积分

Steven Finch

2026年11月24日

摘要

集合中的 $n$ 点平均可以相距多远？ $n \to \infty$ 答案是最大能量 $M^+(A)$，即当 $X$ 和 $Y$ 是来自 $A$ 且具有共同分布的独立随机点时， $\mathbb{E}|X-Y|$ 所能达到的最大值。如果允许该分布带有负质量，我们会得到第二个常数 $M(A) \geq M^+(A)$。它通常更容易计算：当带符号平衡测度存在时，它由线性势方程刻画；而正性问题还必须确定质量的支集。本文探讨正性何时重要，即 $M^+(A) < M(A)$。对于多边形和多面体，极值质量集中在顶点上，并且有大量闭式结果。即便如此，每个空心凸多边形都有 $M^+ < M$，一个简单的风筝形则展示了顶点如何被排除在支集之外。对于光滑曲线和曲面，答案取决于形状。圆和球面具有 $M^+ = M$。椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 具有 $M^+ = M$ 的数值结果，我们给出其精确到50位的值。椭圆 $x^2 + 9y^2 = 9$ 和 $x^2 + 25y^2 = 25$ 具有 $M^+ < M$ 的数值结果，且支集中存在间隔。对于由Larcher、Schmid和Wolf研究的椭球 $10x^2 + 15y^2 + 12z^2 = 15$，我们计算出 $M$ 的50位数值，并给出有力的数值证据表明 $M^+ < M$。极值测度在最短轴两端周围的两个球冠上为零。证明和数值方法汇集于附录中。

## 目录

1 引言 **3**
1.1 一个关于点的扩散的谜题 .3 1.2 关闭正性 .3 1.3 我们的发现 .4 1.4 为什么是空心集？ .5 1.5 关于名称 .5 1.6 关键数字摘要 .5

2 顶点获胜：多边形和多面体 **6**
2.1 质量去了哪里？ .6 2.2 闭式集锦 .7

**3** 当一个顶 点必须被排除：风筝形 **8**
3.1 有限集上的带符号权重 .8 3.2 风筝形 .8 3.3 最优值实际上做了什么 .9

3.4 正性的代价 .93.5 空心多边形总要付出代价 .9

4 圆和球面 10

5 椭圆 11
5.1 铺垫 .115.2 夹逼区间 .115.3 椭圆 $x^2+4y^2=4$：正性是免费的 .125.4 椭圆 $x^2+25y^2=25$：正性很重要 .125.5 椭圆 $x^2+9y^2=9$ 和阈值 .135.6 从椭圆到线段 .15

6 椭球 $10x^2+15y^2+12z^2=15$ 16
6.1 曲面 .166.2 带符号平衡：50 位数字与一次符号变化 .166.3 极值概率测度 .166.4 与 Larcher–Schmid–Wolf 的比较 .17

7 供进一步探讨的问题 17

A 证明 18
A.1 距离核的负定性 .18A.2 Bj¨orck 定理 .19A.3 点与测度 .19A.4 多胞体 .19A.5 有限集与风筝形.20A.6 带符号平衡与判据 .20A.7 空心多边形 .21A.8 宽度界 .21

B 会合数 22

C 数值 l 方法与数据 2 2
C.1 什么是严谨性 .22C.2 椭圆：稠密离散化 .23C.3 椭圆：谱伽辽金 .25C.4 椭球：谱伽辽金 .25C.5 椭球：离散优化 .27

D Mathematica 椭圆代码 28
D.1 $M^+$ 的夹逼区间.28D.2 带符号常数 $M$ .29D.3 比较二者 .29

椭球的 Mathematica 代码30
E.1 带符号常数 $M$ .30E.2 $M^+$ 的界.32E.3 检验和示例 .33

# 1 引言

## 1.1 关于点的扩散的谜题

在紧集 $A \subset \mathbb{R}^d$ 中散布 $n$ 个点，使它们两两之间的平均距离尽可能大。在单位区间上，最佳策略很简单：将一半的点放在每个端点上。此时平均距离趋近于1 2。对于三角形、正方形、圆、椭圆，情况又会怎样？本文正是对这一问题的邀请。

定义 1.1。对于紧集 $A \subset \mathbb{R}^d$，令

$$\gamma_1(A) = \lim_{n\to\infty} \max_{\xi_1,\dots,\xi_n \in A} \left( \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j<k} |\xi_j - \xi_k| \right).$$

该极限存在，并且可以用质量分布自然地描述。对于 $A$ 上的有限（带符号）Borel 测度 $\sigma$，定义能量和势

$$I(\sigma) = \iint |x-y| \, \mathrm{d}\sigma(x) \, \mathrm{d}\sigma(y), \qquad U_\sigma(x) = \int |x-y| \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

令 $\mathcal{P}(A)$ 表示 $A$ 上概率测度的集合。若 $X$ 和 $Y$ 是服从分布 $\mu \in \mathcal{P}(A)$ 的独立随机点，则 $I(\mu) = \mathbb{E}|X-Y|$，即 $\mu$ 的基尼平均差。令

$$M^+(A) = \max_{\mu \in \mathcal{P}(A)} I(\mu).$$

定理 1.2. 对任意紧致的 $A$ 和任意 $n \geq 2$,

$$M^+(A) \;\leq\; \max_{\xi_1,\dots,\xi_n \in A} \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j<k} |\xi_j - \xi_k| \;\leq\; \frac{n}{n-1} M^+(A).$$

特别地，$\gamma_1(A) = M^+(A)$。

这个思路颇具概率论色彩。对于左侧不等式，从一个最优 $\mu$ 中独立抽取这些点：其 期望点对平均值恰好为 $M^+(A)$，因此至少存在一种配置能达到这一水平。对于右侧不等式，注意到这些 $n$ 点本身定义了一个概率测度。详见附录A。

## 1.2 取消正性

现在取消质量必须为非负的要求。令 $\mathcal{M}_1(A)$ 表示 $A$ 上总质量为 1 的有限带符号博orel测度的集合，并令

$$M(A) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}_1(A)} I(\nu) \;\geq\; M^+(A).$$

负质量可能看起来不切实际。但由于距离核的一个性质，它使问题变得容易处理得多：如果 $\sigma$ 的总质量为零，那么 $I(\sigma) \leq 0$，且仅当 $\sigma = 0$(引理 A.2) 时等号成立。统计学家将此称为能量距离 [20]的非负性。以下是它所带来的结果。

- 假设一个符号质量为一的测度 $\nu$ 在 上具有 常势 $A$， $U_\nu \equiv \lambda$。那么 $\nu$ 自动是唯一的最大化解，并且 $M(A) = \lambda$ (命题 A.6)。我们称 $\nu$ 其为带符号平衡测度。求得它是一个线性问题；在有限集上，它对应于线性方程组 $Dw = \lambda \mathbf{1}$，其中 $D$ 是距离矩阵。这种测度不一定存在：对于单位圆盘，上确界 $M = \pi/2$ 无法由任何符号测度 [11]取得。

- 正性问题增加了约束 $\mu \geq 0$。这使其成为一个障碍问题：不仅要确定质量有多少，还要确定质量分布在哪里。

- 当极值概率测度具有常势时，两个问题才完全一致；也就是说，此时带符号平衡测度存在，并且确实是一个概率测度（定理 3.1）。

因此，本文的指导性问题是：

$$\textit{When does positivity matter, i.e., when is } M^+(A) < M(A)\textit{?}$$

对于我们所研究的曲线和曲面，带符号平衡测度似乎存在，其密度为 $\rho$，相对于某个自然参数而言；而当 $\min \rho < 0$ 时，正性恰恰变得重要。

## 1.3 我们发现了什么

- 多面体（第2节）。极值概率测度支撑在顶点上。对于实心多面体、它的边界以及顶点集，结论都成立。由此可得许多闭式：$2$ $3$ 对应等边三角形， $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ 对应单位正方形，$\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{8}$ 对应单位立方体；还有适用于任意三角形的公式，以及更多结果。

- 风筝形（第3节）。略微展平的风筝形展示了带符号平衡测度如何在一个顶点上产生负质量。此时，真正的最优测度会舍弃该顶点。Wilson 的一个定理表明，任意凸多边形的边界都有 $M^+ < M$。

- 圆与球面（第4节）。由对称性可知，均匀测度具有常势，因此 $M^+ = M$，其值在 $4/\pi$和 $4/3$ 单位半径时成立。

- 椭圆（第5节）。当 $x^2 + 4y^2 = 4$ 时，带符号密度为正（数值上），因此$M^+ = M$；我们将其计算到 50 位数字。当 $x^2 + 9y^2 = 9$和 $x^2 + 25y^2 = 25$时，密度会变号。我们的计算表明 $M^+ < M$，并发现极值测度完全舍弃了长而平坦边的中部。

- 椭球 $10x^2 + 15y^2 + 12z^2 = 15$ （第6节）。我们计算出 $M$的50位数字，给出 $M^+$ 的界，从而改进了Larcher、Schmid和Wolf的估计 [12], ，并找到有力的数值证据表明 $M^+ < M$。

### 1.4 为什么关注空心集?

本文中的所有集合都没有内点：风筝形是多边形曲线，椭圆是曲线（一维流形），而椭球是曲面（二维流形）。这是有意为之。对于凸体 $K$ （紧致且凸，并具有内点），两件事会自动发生：

- 极值概率测度支撑在 $\partial K$，因此 $M^+(K) = M^+(\partial K)$（定理 2.1）；
- $M^+(K) < M(K)$（推论 3.3）。

例如，单位圆的 $M^+ = M = 4/\pi$，而单位圆盘的 $M^+ = 4/\pi$和 $M = \pi/2$，其上确界无法由任何符号测度取到 [11]。同样，单位球面的 $M^+ = M = 4/3$，而单位球的 $M = 2$ [1, 11]。因此，实心体并没有提供关于 $M^+$的新信息，而且 $M$ 必定严格更大。有趣的问题在于空心边界。

### 1.5 关于名称的说明

常数 $M^+(A)$ 曾有过几个不同的名称：

- 一阶广义超限直径，遵循 Fekete 和 P´olya– Szeg˝o [18]的传统；
- Bj¨orck 的广义能量积分的最大值 [3]；
- 最优的 Riesz $(-1)$-能量 [5]；
- 最大平均距离或最大基尼平均差。

类比于牛顿容量（核 $|x-y|^{-1}$），它也可以称为欧几里得容量 [8]。我们简单地称之为最大能量。

我们的记号遵循 Hinrichs、Nickolas 和 Wolf [11], ，他们将 $M(X)$ 用于对符号质量为一的测度取上确界，并将 $M^+(X)$ 用于对概率测度取上确界。其他地方的记号并不统一：Wolf [21] 和 Larcher–Schmid–Wolf [12] 将 $M(X,\ d)$ 用于对概率测度取上确界，而我们使用 $M^+$；Nickolas 和 Wolf [14, 15, 16, 17] 使用$M(X)$，与我们一样，用于带符号的上确界。带符号问题可追溯至 Alexander 和 Stolarsky [2]。另一个相关但不同的常数，即 Gross 的会合数 [10], ，在附录B中讨论。

### 1.6 关键数据摘要

表中，“椭圆”指曲线，“椭球”指曲面； $\rho$ 是带符号平衡测度的密度，“conj”表示有数值依据的猜想。除圆和球面外，所有条目均为数值结果。 $M$ 的值来自谱伽辽金计算；我们只列出逐次截断结果一致的数字，但不提供严格误差界。 $M^+$ 的界来自离散优化：下界是显式概率测度的能量，附录C.1 说明了如何使上界具有严格性。条目“min $\rho < 0$； $M^+ < M$”也是同一意义下的数值结论。

| Set | 值 | 状态 |
|---|---|---|
| 圆，半径 1 | $M = 4/\pi = M^+$ | 已证明 |
| 球面，半径 1 | $M = 4/3 = M^+$ | 已证明 |
| 椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ | $M = 2.10805421217410132314371546218 3\ldots$<br>$2.1080542101 < M^+ < 2.1080542186$; | $\min \rho \approx 0.0073$;<br>$M^+ = M$ conj |
| 椭圆 $x^2 + 9y^2 = 9$ | $M = 3.06772727143623104684422932528 0\ldots$<br>$3.0677272090 < M^+ < 3.0677272273$ | $\min \rho < 0$;<br>$M^+ < M$ |
| 椭圆 $x^2 + 25y^2 = 25$ | $M = 5.03941628667511562030528143967 7\ldots$<br>$5.0394159505 < M^+ < 5.0394159819$ | $\min \rho < 0$;<br>$M^+ < M$ |
| 椭球<br>$10x^2 + 15y^2 + 12z^2 = 15$ | $M = 1.51126967304474006489174039479 4\ldots$<br>$1.5112600022 < M^+ < 1.5112601265$<br>（LSW下界 1.5112509356， $N = 3969$） | $\min \rho < 0$;<br>$M^+ < M$ |

# 2 顶点获胜：多边形和多面体

## 2.1 质量去了哪里?

基本结构定理归功于 Bj¨orck [3]。

定理 2.1（Bj¨orck）。设 $A \subset \mathbb{R}^d$ 为紧致集。

1. 存在唯一的 $\mu_0 \in \mathcal{P}(A)$，满足 $I(\mu_0) = M^+(A)$。
2. 其势在 $A$ 上满足 $U_{\mu_0} \le M^+(A)$，并且在 supp $\mu_0$ 上取等号。
3. 如果 $A = K$ 是凸体且 $d \ge 2$，那么 supp $\mu_0 \subset \partial K$，因此 $M^+(K) = M^+(\partial K)$。

第 2 点说明，质量只存在于势达到最高值的地方。第 3 点有一个简单的原因：每个函数 $x \mapsto |x-y|$ 都是凸函数，因此每个势 $U_\mu$ 都是凸的，而凸函数不可能在内部取得最大值，除非它是常数。凸性还告诉我们，多胞体上的最大值位于何处，即位于一个顶点：

定理 2.2（多胞体归约为顶点）。设 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是一个顶点集为 $V$ 的凸多胞体，且 $A$ 是紧致的，并具有 $V \subseteq A \subseteq K$。例如， $A$ 可以是 $V$、边界 $\partial K$，或其本身 $K$。那么 $M^+(A) = M^+(V)$，且 $A$ 的极值测度就是 $V$ 的极值测度；特别是，它集中于顶点上。

因此，对于多胞体、其空心边界或其顶点集，计算 $M^+$ 是一个有限问题：在满足 $\sum w_i = 1$ 的权重向量 $w \ge 0$ 上最大化 $w^{\mathsf{T}} D w$ ，其中 $D$ 是顶点距离矩阵。对称性通常会使这一点显而易见。

推论 2.3 (等势)。 在定理 2.2的设定下，设权重 $w_i \ge 0$ 使得$\sum_i w_i = 1$ 顶点势相等：

$$U(v_i) = \sum_l w_l |v_i - v_l| = \lambda \quad \textit{for every } i.$$

则 $M^+(A) = \lambda = \sum_{i,\ l} w_i w_l |v_i - v_l|$ 且 $\mu_0 = \sum_i w_i \delta_{v_i}$。此外，对于每个 $n$ 以及所有$\xi_1$、…、$\xi_n \in A$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} |\xi_j - \xi_k| \ \le\ \lambda\, n^2,$$

当恰好有 $w_i n$ 个点位于每个顶点 $v_i$ 时等号成立（只要这些数是整数）。

最后一个结论是一个有限-$n$ 事实，而不仅仅是极限结论。例如，只要 $3 \mid n$，在等边三角形的每个顶点放置 $n/3$ 个点，对于完整的双重和来说恰好是最优的。

例 2.4。设 $T$ 是一个单位边长的等边三角形， $S$ 是一个单位正方形， $C$ 是一个单位立方体。每个对象都可以视为实心的、空心的，或其顶点集。在每种情况下，对称群都在顶点上具有传递作用，因此均匀权重会使各势相等，并且 $\lambda$ 是从一个顶点到所有顶点（包括自身）的平均距离：

| Set | 从一个顶点出发的距离 | $M^+ = \lambda$ | 值 |
|---|---|---|---|
| $T$ | $0, 1, 1$ | $\frac{2}{3}$ | 0.6666667 |
| $S$ | $0,\ 1,\ 1,\ \sqrt{2}$ | $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ | 0.8535534 |
| $C$ | $0, 1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ | $\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{8}$ | 1.1218364 |

## 2.2 闭式集锦

同样的推理给出：

- 矩形和长方体。在对称性的作用下，顶点仍然是传递的。对于$a \times b$矩形，$M^+ = \frac{1}{4}\big(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\big)$。对于 $a \times b \times c$长方体，

$$M^+ = \tfrac{1}{8}\Big(a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\Big).$$

- 正单纯形。对于具有 $m$ 个顶点和单位边的正单纯形， $M^+ = (m-1)/m$。对于正四面体，该值为 3 4。

- 正多边形。对于外接圆半径为 1 的正 $m$边形， $M^+ = \frac{2}{m}$余切 $\frac{\pi}{2m}$。该值等于 1。1547，1。2071，.....对于 $m = 3,\ 4,\ .....$，并增加到 $4/\pi$，即单位圆的值（第4节）。

- **Ev**三角形。设边为 $a, b, c$， 分别与顶点 $A, B, C$ 相对。权重

$$w_A \propto a(b + c - a), \qquad w_B \propto b(c + a - b), \qquad w_C \propto c(a + b - c)$$

根据三角不等式，均为非负，且三个未归一化的顶点势均等于 $2abc$。因此

$$M^+ = \frac{2abc}{2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

这就给出了等边三角形的 2 3 。在退化情形 $a = 1,\ b = c = \frac{1}{2}$ 下，它给出的1 2就是单位区间的值。

注记 2.5。 以上讨论的都是 $M^+$。对于顶点集本身，带符号问题的答案相同，因为上述权重解满足 $Dw = \lambda\mathbf{1}$ 且为非负。可是，对于 空心三角形 $\partial T$， $M(\partial T) > M^+(\partial T) = \frac{2}{3}$(推论 3.3）。三角形的边界是正性至关重要的第一个例子。

# 3 必须舍弃一个顶点时：风筝形

## 3.1 有限集上的带符号权重

对于由 $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ 个不同点构成的有限集，其距离矩阵为 $D$，带符号问题纯粹是线性代数问题。 $D$ 可逆， $\mathbf{1}^\top D^{-1}\mathbf{1} > 0$，并且

$$M(V) = \frac{1}{\mathbf{1}^\top D^{-1}\mathbf{1}}, \qquad \text{attained by the weights } w = \frac{D^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top D^{-1}\mathbf{1}}$$

（命题 A.5）。这些权重使 $V$ 上的势相等。如果它们全都非负，则推论 2.3适用，且 $M^+$（$V$）$= M$（$V$）。如果其中一个为负，正性就至关重要。

三个点不会产生负权重；这就是上文的三角形公式。矩形、长方体和正多边形也不会，因为对称性会迫使权重相等。因此，四个点是可能出现负权重的最小情形。最简单的例子是风筝形。

## 3.2 风筝形

取顶点为

$$A = (-1, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (0, 1), \quad D = (0, -\varepsilon), \qquad \varepsilon \geq 0 \text{ small},$$

的风筝形，并令 $V = \{A, B, C, D\}$ 和 $K =$ 凸包 $V$。顶点 $D$ 恰好位于 $AB$ 中点的正下方。直观地看，它几乎是多余的：较长的对角线 $AB$ 已经在两侧延伸超过了它。

平坦情形 $\varepsilon = 0$。各距离为 $AB = 2$、 $AC = BC = \sqrt{2}$ 和 $AD = BD = CD = 1$。根据对称性， $A$ 和 $B$ 获得相同的权重。将 $p$、$p$、$q$、$r$ 处 $A$、$B$、$C$、$D$ 的权重分别记为 $p$、$p$、$q$、$r$，其中 $2p + q + r = 1$。于是

$$U(A) = 2p + \sqrt{2}\,q + r, \qquad U(C) = 2\sqrt{2}\,p + r, \qquad U(D) = 2p + q.$$

令 $U(A) = U(D)$，得到 $r = (1 - \sqrt{2})\,q$；当 $q > 0$ 时，该值为负。令 $U(A) = U(C)$，得到 $q = (2 - \sqrt{2})\,p$，归一化后得到

$$p = \tfrac{2+\sqrt{2}}{8} \approx 0.4268, \qquad q = \tfrac{1}{4}, \qquad r = \tfrac{1-\sqrt{2}}{4} \approx -0.1036, \qquad \lambda = \tfrac{3+\sqrt{2}}{4} \approx 1.1036.$$

$r$ 的符号是确定的。从 $A$ 移动到 $D$ 时， $A$ 和 $B$ 的贡献在 $2p$ 处保持不变，但 $C$ 比起 $A$ 更接近 $D$ （1 对 $\sqrt{2}$）。要保持势水平不变，唯一的办法就是赋予 $D$ 负质量。

真正的风筝形。对于 $\varepsilon > 0$ ，该四边形是严格凸的，且 $D$ 是真正的顶点。现在 $AD = BD = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$ 和 $CD = 1 + \varepsilon$。 $D$ 处的权重一直为负，直到在以下方程的根处变为零：

$$2\sqrt{1 + \varepsilon^2} + (2 - \sqrt{2})(1 + \varepsilon) = 2\sqrt{2}, \qquad \varepsilon^* \approx 0.2815.$$

同一效应的较温和版本出现在三个共线点 0、1、2 上：求解 $Dw = \mathbf{1}$ 后，中间点权重恰好为 0。像 $C$ 在这里所做的那样，将一个点移出直线，会使这个零值变为负值。

### 3.3 最优值实际做了什么

对于 $0 \le \varepsilon < \varepsilon^*$，极值概率测度变为 $D$。它是等腰直角三角形 $ABC$（斜边为 2，直角边为 $\sqrt{2}$）的测度，其权重来自三角形公式：

$$w_A = w_B = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-2} \approx 0.3867, \qquad w_C = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1} \approx 0.2265, \qquad M^+ = \frac{2}{2\sqrt{2}-1} \approx 1.0938363.$$

要看出 $D$ 为何理应被排除，可以计算其势。在 $\varepsilon = 0.1$处，例如，$U(D) = 2\sqrt{1.01}\,(0.3867) + 1.1\,(0.2265) \approx 1.026 < 1.0938$，因此势在四个顶点处均至多为 $M^+$，正如定理 2.1所要求的那样。在 $\varepsilon = \varepsilon^*$处，$U(D)$ 恰好上升到 $M^+$；此时 $D$重新进入支集。根据定理 2.2，对于 $V$、实心风筝形和空心风筝形，所取的值和测度相同 $\partial K$：

$$M^+(V) = M^+(\partial K) = M^+(K) = \frac{2}{2\sqrt{2}-1} \qquad (0 \le \varepsilon < \varepsilon^*).$$

多胞体的一个顶点完全没有获得任何质量。

### 3.4 正性需要付出多少代价

带符号常　　数四点集具有闭式。给定 $s = \sqrt{1+\varepsilon^2}$ 和 $t = 1+\varepsilon$，

$$M(V) = \frac{t\,(2\sqrt{2}\,s - t)}{2\big[\sqrt{2}\,(s+t) + st - 2 - t^2\big]}$$

（附录A.5）。一些值：

| $\varepsilon$ | $M\,(V)$ | $M^+\,(V)$ | $D$处的带符号权重 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{3+\sqrt{2}}{4} = 1.1035534$ | 1.0938363 | $\frac{1-\sqrt{2}}{4} = -0.1036$ |
| 0.1 | 1.098586 | 1.0938363 | $-0.0706$ |
| $\varepsilon^* \approx 0.2815$ | 1.09384 | 1.0938363 | 0 |

在 $\varepsilon^*$ 处，两个常数相等；带符号权重为零后，它们必然如此。对于 $\varepsilon \ge \varepsilon^*$，四个权重均为非负，且 $M^+\,(V) = M\,(V)$。

### 3.5 空心多边形总会付出代价

两个一般性结果完善了这一图景。第一个结果刻画了正性何时是免费的。它源自 Wolf 的工作 [21]；简短证明见附录A.6。

定理 3.1（判据）。对于紧致 $A \subset \mathbb{R}^d$，$M^+(A) = M(A)$ 当且仅当极值测度 $\mu_0$ 在整个 $A$ 上具有常势。

第二个结果归功于 David Wilson（见 [7, 命题 2] 和 [21]），说明常势并不常见。

定理 3.2（Wilson）。设 $X \subset \mathbb{R}^d$ 是紧致连通集，且不是线段。如果 $X$ 上存在某个概率测度，使其在 $X$ 上的势为常势，那么 $X$ 中不存在三个共线点。

推论 3.3。如果 $X \subset \mathbb{R}^d$ 是紧致连通集，不是线段，并且包含三个共线点，那么 $M^+(X) < M(X)$。特别是：

1. 每个凸多边形的边界，例如空心三角形 $\partial T$、空心正方形 $\partial S$和空心风筝形 $\partial K$；

2. $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$中的每个凸体。

对于多边形曲线，有一个简短直接的证明（引理 A.9）：沿着一条边，正测度的势弯曲得太厉害，无法保持水平。不需要任何计算。对于风筝形，间隔也可以测量。由于 $V \subset \partial K$，在 $V$ 上的每个符号测度都是 $\partial K$ 上的符号测度，因此

$$M(\partial K) - M^+(\partial K) \;\geq\; M(V) - \frac{2}{2\sqrt{2}-1} \;>\; 0 \qquad (0 \leq \varepsilon < \varepsilon^*),$$

在 .0097 左右（当 $\varepsilon = 0$ 处），在 .0048 左右（当 $\varepsilon = 0.1$处）。我们尚未计算 $M(\partial K)$本身，但它是有限的，这要归功于一个通过投影到直线上得到的简单界，Hinrichs、Nickolas 和 Wolf 对球 [11]也采用了这种方法。

命题 3.4（宽度界）。设 $X \subset \mathbb{R}^2$ 是紧致集，$P$ 是其凸包的周长。则 $M(X) \leq P/4$。更一般地，对于 $X \subset \mathbb{R}^n$，$M(X) \leq \frac{1}{2}\, b(n)\, \bar{w}$，其中 $\bar{w}$是 conv $X$的平均宽度，且 $b(n) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})/\Gamma(\frac{n}{2})$。对于线段和实心球*[11]*，等号成立。

证明见附录 A.8。例如，空心单位正方形满足 $\frac{2+\sqrt{2}}{4} < M(\partial S) \leq 1$，空心单位三角形 $\frac{2}{3} < M(\partial T) \leq \frac{3}{4}$。对于风筝形，$M(\partial K) \leq \frac{1}{2}\big(\sqrt{2} + \sqrt{1+\varepsilon^2}\big)$，约为 1。207（当 $\varepsilon = 0$时）。对于光滑曲线，这个界远非锐利：单位圆的$M = 4/\pi \approx 1.273$ 相较于 $P/4 = \pi/2$。

因此，多边形总要为正性付出代价，原因在于几何特性：它们有直边。光滑曲线上不存在三点共线，因此 Wilson 定理对它们并无论述。本文余下部分将探讨其中的情形。

## 4 圆与球面

在圆或球面上，每个点看起来都与其他点无异，因此均匀测度具有常势。根据定理 3.1 和命题 A.6，均匀测度因而是两个问题的极值解：

$$M^+ = M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2R\left|\sin\tfrac{\theta}{2}\right|\,\mathrm{d}\theta = \frac{4R}{\pi} \quad \text{(circle of radius } R\text{)},$$

$$M^+ = M = \frac{R}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{2-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{4R}{3} \quad \text{(sphere of radius } R\text{)}.$$

对于球面，$t = \langle u,\ v\rangle$ 在以下集合上均匀分布：$[-1, 1]$ 当 $v$ 为均匀分布时。这些经典事实可追溯至 Bj¨orck [3] 和 Stolarsky [19]；另见 Morris–Nickolas [13]关于各维度中的球面。实心圆盘也具有相同的 $M^+ = 4/\pi$：圆上的均匀测度的势是凸函数，因此在圆盘上至多为 $4/\pi$，而下文的命题5.1 给出了上界。

第 $m$ 节中的正 2.2 边形从下方逼近圆，$\frac{2}{m}$ 余切 $\frac{\pi}{2m} \uparrow \frac{4}{\pi}$。它们的顶点集具有 $M^+ = M$，而其空心边界则根据 $M^+ < M$推论 3.3具有。

# 5 椭圆

## 5.1 做好准备

记 $E_{a,b}$ 为椭圆曲线 $x(t) = (a\cos t, b\sin t)$，$0 \le t < 2\pi$，其中 $a > b$。我们将 $t$ 视为角度，即模 $2\pi$；相应地，$|t|$ 和 $|t-\pi|$ 表示圆 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上的距离，因此，例如，$\{|t| \le \tau\} = [0,\tau] \cup [2\pi-\tau, 2\pi)$。于是 $E_2$,1 是 $x^2+4y^2=4$，$E_3$,1 是 $x^2+9y^2=9$，而 $E_5$,1 是 $x^2+25y^2=25$。缩放会同时乘以两个常数：$M^+(cA) = c\,M^+(A)$，以及 $M(cA) = c\,M(A)$。因此，只有比值 $b/a$ 才重要。根据定理 2.1，实心椭圆与曲线具有相同的 $M^+$。它自动具有 $M^+ < M$（推论 3.3），这就是我们研究曲线的原因。

椭圆确实比目前为止所讨论的一切都更难：

- 没有顶点可以承载质量，而且对称群是有限的，因此没有任何对称性能够决定答案；
- 距离核可分解为

$$|x(t)-x(s)| = 2\left|\sin\tfrac{t-s}{2}\right| \sqrt{a^2\sin^2\tfrac{t+s}{2} + b^2\cos^2\tfrac{t+s}{2}},$$

  a function of $t-s$ 乘以一个关于 $t+s$ 的函数，因此傅里叶模态无法将其对角化 i t;
- 我们不知道答案是否存在闭式，也不认为它会有。

我们描述关于参数 $t$ 的密度。它们的平均值为 $1/(2\pi) \approx 0.159$。

## 5.2 括号

数值答案之所以值得信赖，源于一个简单的不等式，该不等式已在附录A.6中证明。

命题 5.1（夹逼）。对于每个定义在 $A$ 上的符号质量为一的测度 $\nu$，

$$M^+(A) \;\le\; 2\max_A U_\nu - I(\nu).$$

如果 $\nu$ 是概率测度，那么还有 $I(\nu) \le M^+(A)$。

因此，每个试验概率测度都将 $M^+$ 限定在两个可计算的数之间。以下是对 $E_{2,\ 1}$ 的初步尝试：

| $E_2$ 上的概率测度 ,1 | 能量 |
|---|---|
| 长轴两端各有一半质量 | 2 |
| 在 $t$ 上均匀分布 | $2P/\pi^2 \approx 1.96330$ |
| 四个轴端点上的最佳测度 | 2.037854 |
| 极值测度 $\mu_0$ | 2.10805421217 . . . |

这里 $P \approx 9.68845$ 是周长。均匀质量的效果不如两个点！对于四点测度，在 $(\pm 2, 0)$ 处放置质量 $p$，并在 $(0, \pm 1)$ 处放置质量 $q = \frac{1}{2} - p$。那么 $I = 8p^2 + 4q^2 + 8\sqrt{5}\,pq$，其最大值在 $p^* \approx 0.41982$ 处取得。参数取值为 $t = 0$、$\pi/6$、0.6、$\pi/4$、$\pi/3$ 时，对应的势约为 2.0379、2.1472、2.1488、2.1428、2.1170。势在顶点以外超过能量，因此根据定理 2.1，四点测度并非最优。命题 5.1 给出的夹逼区间大致为$M^+ \lesssim 2$(2.1488) $- 2.0379 \approx 2.26$。更精细的试探测度以及谱方法，将这个夹逼区间缩小到第 1.6 节中的数值。

### 5.3 椭圆 $x^2+4y^2=4$：正性无需付出代价

这是 Larcher、Schmid 和 Wolf 研究的椭圆 [12, 第 313]页。谱伽辽金计算（附录C.3）给出了带符号常数；其前 50 位数字在逐次截断中保持一致，结果如下：

$$M(E_{2,1}) = 2.10805421217410132314371546218320147837978028372 39\ldots$$

带符号密度在长轴两端（$t=0,\pi$）处达到最大值，约为 0.52。它下降到最小值

$$\min_t \rho(t) = 0.0073289961\ldots > 0$$

在短轴两端（$t=\pm\pi/2$）处，约为峰值的 $1/70$。由于带符号平衡测度为正，它就是极值概率测度。因此 $M^+(E_{2,\,1}) = M(E_{2,\,1})$，并且 $\mu_0$具有全支撑。独立的密集计算给出了汇总表中的夹逼区间，该结果与 $M$ 在八位数字上相符。

这一结论基于数值计算。要进行严格证明，需要给出 $\rho$ 小于 0。0073 的截断误差界。与观测到的误差（低于$10^{-20}$）相比，这一余量非常大，因此计算机辅助证明似乎完全可行（第 7节）。

与 LSW 的比较。Larcher、Schmid 和 Wolf 使用在 $t$ 中均匀分布的 4095 点网格，得到了 2.108054066642 . . .。我们的密集计算表明，此类网格上的最优值比 $M^+$低约 $2.4404/N^2$。对于 $N=4095$，这预示着结果为 2.108054066650，与他们的值在约 $10^{-11}$ 的精度上吻合。因此，他们的计算对于网格问题是准确的，但其中只有前七位有效数字是 $M^+$ 的有效数字。他们的密度直方图在 $t=0,\pi$ 处达到峰值，约为 0.52，与我们的结果相符。他们关于极值测度具有全支撑的猜想得到了我们计算结果的支持。

### 5.4 椭圆 $x^2+25y^2=25$：正性至关重要

将椭圆压扁至 $b/a=\frac{1}{5}$，图景便会改变。

带符号平衡测度会降至零以下。 谱计算收敛迅速（附录C.3），并给出

$$M(E_{5,1}) = 5.03941628667511562030528143967749014906772513091 66\ldots$$

带符号密度在 $t=0,\pi$ 处上升至约 1.42 的高峰。沿着长而平坦的侧边，它几乎为零；而在曲线每一半中的一个带状区域上，它略为负值：

$$\rho<0 \quad \text{on} \quad (t_-,\pi-t_-)\cup(\pi+t_-,2\pi-t_-), \qquad t_- = 0.779018.$$

每个带状区域都包含短轴的一端，并对应于 $|x|/a < 0.7116$。在一个带状区域内，密度呈浅“W”形。它的两个最小值 $\rho = -0.000411098$位于$t = 0.911007$ 和 $\pi - 0.911007$，也就是说，位于 $x/a = \pm 0.612$。在两者之间存在一个局部最大值$\rho(\pi/2) = -0.0000797838$，位于短轴的末端。负值部分极小：为平均密度的 0.26%，以及峰值的 0.03%。尽管如此，它仍比表观截断误差大许多个数量级；如果这一现象确实存在，就意味着正性至关重要（推论A.8）。

极值测度舍弃了平直边。使用多达 30000 个节点进行的密集计算（附录C.2）给出

$$5.0394159505 \;<\; M^{+}(E_{5,1}) \;<\; 5.0394159819, \qquad M^{+}(E_{5,1}) \approx 5.0394159581.$$

上界位于 $3.05\times10^{-7}$下方 $M$，因此 $M^{+} < M$已通过数值方法确定，与 $\rho$的符号无关。附录C.1 说明了如何以适中的代价使这一比较完全严格。估计差值为 $M - M^{+} \approx 3.3 \times 10^{-7}$。

$\mu_0$ 的支集由长轴两端附近的两段弧组成：

$$\operatorname{supp}\mu_0 = \{\,|t| \le t_e\,\} \cup \{\,|t-\pi| \le t_e\,\} = [0, t_e] \cup [\pi - t_e, \pi + t_e] \cup [2\pi - t_e, 2\pi), \qquad t_e \approx 0.632,$$

也就是说，是满足 $|x|/a \ge 0.807$的曲线部分。这些弧占参数范围的40%，但仅约占长度的23%。两条平直边完全不承载质量。在支集上， $\mu_0$ 的密度与带符号密度非常接近，一直到边缘处仍约为0。004（为其峰值的四分之一个百分点）；随后便突然降为零。因此从数值上看， $\mu_0$ 的密度在自由边界处有一个小的跳跃，没有尖峰或边缘效应（图2）。

间隔比负区域更宽。

| | 其中 $\rho < 0$ | 间隔，其中 $\mu_0$ 没有质量 |
|---|---|---|
| $t$-区间（前半部分） | (0.779, 2.363) | (0.632, 2.509) |
| $t$范围的分数 | 0.504 | 0.597 |
| $\lvert x\rvert/a$ | $< 0.712$ | $< 0.807$ |

在这些弧 $0.632 < |t| < 0.779$ （及其镜像）上，带符号密度是 正的，然而 $\mu_0$在此处没有质量。 $\mu_0$ 的支集并不简单地等同于“ $\nu$ 为正的地方 ”；它由势决定。从中去除负质量后，势低于 $M^{+}$ 的范围，比 $\nu < 0$为正的范围更广。对于带有 $s$-核且 $d-2 \le s < d$的 Riesz [6]，Brauchart、Dragnev 和 Saff 已证明，极值测度的支集包含于带符号平衡测度的正部的支集中。据我们所知，对于核 $|x-y|$尚无类似定理，尽管我们的两个示例都满足这一包含关系。

### 5.5 椭圆 $x^2 + 9y^2 = 9$ 与阈值

中间椭圆 $E_{3,\ 1}$ 的表现类似于 $E_{5,\ 1}$，但程度较弱。谱计算给出

$$M(E_{3,1}) = 3.06772727143623104684422932528002243268587275688 06\ldots,$$

截断 $K = 80$ 和 $K = 160$ 在全部 50 位数字上都一致。带符号密度再次在数值上跌至零以下，最小值为 $\min\rho \approx -0.0005105$，因此正性很重要。不同于 $E_{5,\ 1}$，这里的带符号密度沿平直边单调递减：在短轴两端附近的单个带状区域 $t_{-} < t < \pi - t_{-}$, $t_{-} \approx 1.30$ 上为负，并在 $t = \pi/2$ 处达到最小值。该带状区域再次位于 $\operatorname{supp}\mu_0$ 的间隔内，而在 $1.124 < t < 1.30$ 上，带符号密度为正，尽管 $\mu_0$ 不承载质量。密集计算给出

$$3.0677272090 < M^{+}(E_{3,1}) < 3.0677272273, \qquad M^{+}(E_{3,1}) \approx 3.0677272134,$$

因此 $M - M^{+} \approx 5.8 \times 10^{-8}$。 $n = 30000$处的上界位于 $4.4 \times 10^{-8}$ $M$以下，所以无论 $\rho$的符号如何， $M^{+} < M$都已通过数值方式得到确立。极值密度的峰值约为

0.83，位于长轴的两端。它支集于两条弧 $|t| \le t_e$ 和 $|t-\pi| \le t_e$ 上，其中 $t$模 $2\pi$ 和 $t_e \approx 1.124$，即 $|x|/a \ge 0.43$所在之处。这些弧覆盖了参数范围的72%，约占长度的61%。与 $E_{5,\,1}$相比，间隔更窄，并且集中在平直边的中部。

有趣的是， $\rho$ 的最小值关于 $b/a$并非单调：

| $b/a$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 最小值 $\rho$ | $+0.0073$ | $+0.00039$ | $-0.00051$ | $-0.00036$ | $-0.00041$ | $-0.00078$ |

最小值在 $b/a = \frac{2}{5}$和 $_{1\,3}$之间跌破零，随后在 $b/a = \frac{1}{4}$附近升至局部最大值，然后又变得更深。一种合理的解释是，两个极小值在相互竞争：一个位于短轴末端，在 $b/a \ge \frac{1}{3}$时占主导；另一些则是“W”形曲线的离轴极小值，到 $b/a = \frac{1}{5}$时占主导。对于较扁的椭圆，密度会越来越集中于长轴两端更高的峰值上（峰值高度大致与 $a/b$成正比），负凹陷似乎也随之加深。无论如何，凹陷的深度并不能很好地反映 $M - M^{+}$的大小：$E_{3,1}$ 的凹陷比 $E_{5,1}$更深，但其能隙约小六倍。

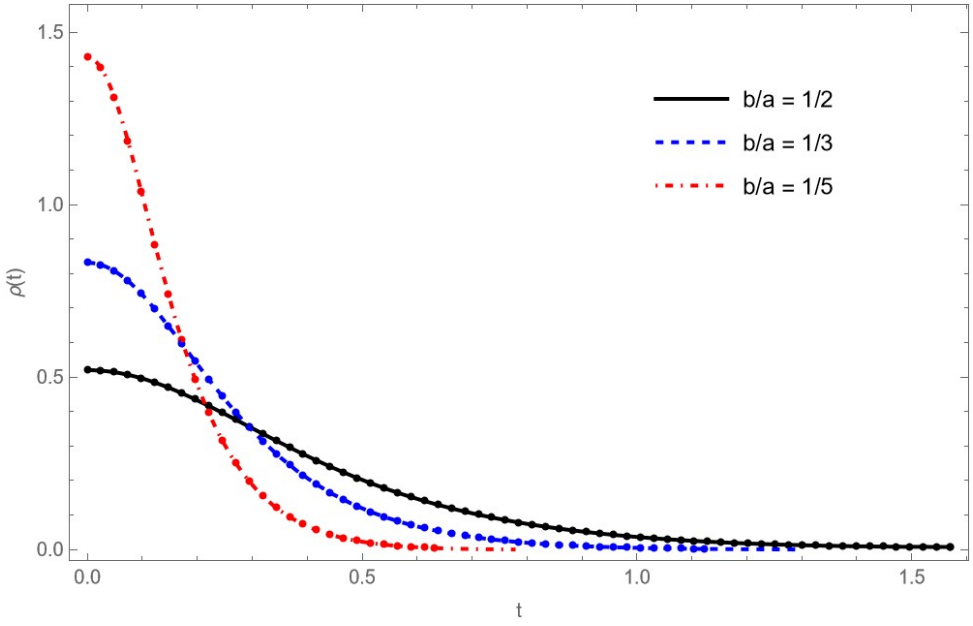


图 1：关于 $t$的密度，位于四分之一曲线 $0 \le t \le \pi/2$ 上，适用于$b/a = \frac{1}{2}$、$_{1\,3}$、$_{1\,5}$。曲线：带符号平衡密度 $\rho$ （谱的， $K = 80$）。点：极值概率测度$\mu_0$ （密集计算， $n = 6400$）。对于 $b/a = \frac{1}{2}$，两者重合，且 $\mu_0$ 具有全支撑；对于$b/a = \frac{1}{3}$ 和$_{1\,5}$，点在支集边缘处停止，分别为 $t_e \approx 1.124$ 和 0.632。

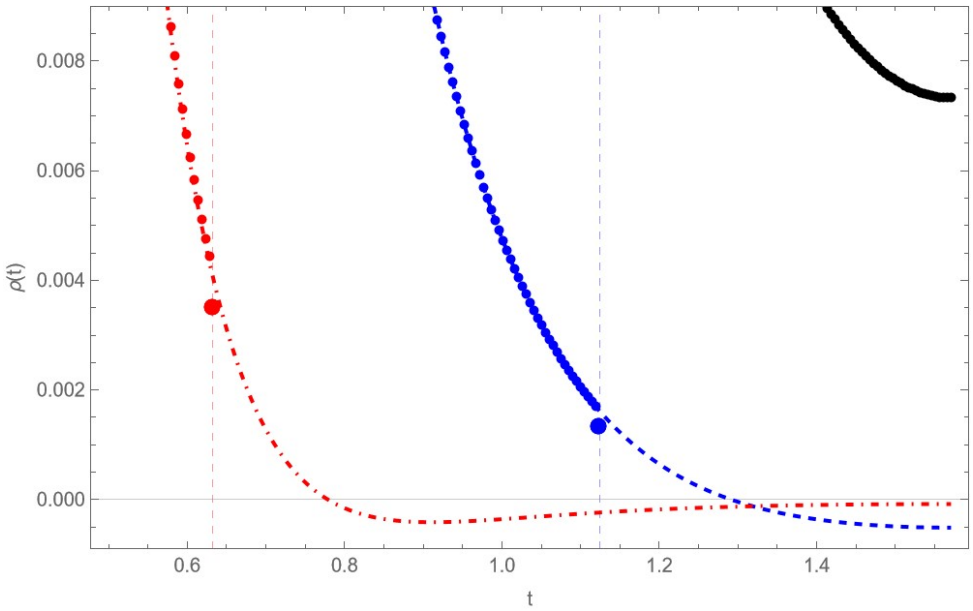


图 2：零点附近的相同密度。对于 $b/a = \frac{1}{2}$，带符号密度始终为正（在 $t = \pi/2$ 处最小值为 0.0073）。对于 $b/a = \frac{1}{3}$ 和 $15$，密度会降至零以下；$13$ 的下探更深，尽管 $15$ 的能隙 $M - M^+$ 更大。虚线标出支撑边缘；在每个边缘与最近的符号变化之间，$\rho > 0$，但 $\mu_0$ 不携带质量。对于 $b/a = \frac{1}{3}$，最小值位于 $t = \pi/2$；对于 $b/a = \frac{1}{5}$，下探呈 W 形，最小值位于 $t = 0.911$。在支集边缘，$\mu_0$ 的密度（点）从一个很小的正值降至零。

### 5.6 从椭圆到线段

随着 $b/a$ 减小，极值测度会经历三个阶段：

- 在 $b/a = \frac{1}{2}$ 处具有全支撑和光滑的正密度，并聚集在长轴的两端附近；

- 在 $b/a = \frac{1}{3}$ 处，它分布在两条弧上，覆盖了约 61% 的长度（峰值密度为 0.83）；在 $b/a = \frac{1}{5}$ 处，则分布在两条较短的弧上，覆盖了约 23%（峰值为 1.42）；在这两种情况下，其密度都会降至一个较小的正值（分别约为 0.0017 和 0.004），然后在边缘处降为零；

- 当 $b/a \to 0$ 趋近于 $12(\delta_{(-a,0)} + \delta_{(a,0)})$ 时，它趋近于线段的极值测度，而 $M^+ \to a$。

当到达 $b/a = \frac{1}{5}$ 时，椭圆的表现已经像一条“粗线段”：$M^+(E_{5,\ 1})/5 = 1.0078832$，而线段的值为 1。在 $b/a = \frac{1}{3}$ 和 $25$ 之间的某处，存在一个临界比率 $\kappa^*$，此时带符号密度首次达到零。

# 6 椭球 $10x^2 + 15y^2 + 12z^2 = 15$

## 6.1 曲面

沿用 Larcher、Schmid 和 Wolf 的说法， [12, 例 3], 设 $\mathcal{L}$ 为椭球 曲面

$$10x^2 + 15y^2 + 12z^2 = 15, \qquad \text{i.e.,} \qquad \frac{x^2}{3/2} + y^2 + \frac{z^2}{5/4} = 1,$$

半轴为 $(a, b, c) = (\sqrt{3/2}, 1, \sqrt{5}/2) \approx (1.2247, 1, 1.1180)$。这是一个轻微压扁的球面：坐标轴之间的差异最多为 22%。我们用单位球面进行参数化， $x = (au_1, bu_2, cu_3)$ 其中$u \in \mathbb{S}^2$，并将 $\rho(u)$ 表示为相对于 $\mathbb{S}^2$ 的面积测度的密度。在 $u$ 上的均匀测度的能量为 1.48871，这是 $M^+$ 的第一个下界。

## 6.2 带符号平衡测度：50 位有效数字与符号变化

采用球谐函数的谱伽辽金方法（附录C.4）的收敛速度约为每个调和阶数一位数字。48 阶和 56 阶的结果在 51 位有效数字上相符，因此我们报告

$$M(\mathcal{L}) = 1.51126967304474006489174039479474302763051175698 02\ldots$$

这些数字在度数、求积和工作精度发生变化时都保持稳定，但我们目前还没有严格的误差界。

从数值上看，即使是这个形状较为温和的椭球，其带符号密度也会变号。密度恰好在 $(0, \pm 1, 0)$ 处最小，即最短轴的两个端点处，其中 $\rho_{\min} = -0.0169305$。（那里的表面积密度为 $-0.0123643$ 。）区域 $\{\rho < 0\}$ 由围绕这两个点的两个略微偏离圆形的球冠组成。它们的最大角半径为 $27.4^\circ$，覆盖参数球面的 10.6% 和表面积的 11.5%。与椭圆相比，负值部分相当大：其深度约为平均密度 $1/(4\pi)$ 的五分之一。一个启发式解释是，对距离算子求逆会将形状的四极（$l = 2$）分量放大 35 倍。

## 6.3 极值概率测度

对最多 240,000 个有效点的八分体对称点集进行离散优化（附录C.5）得到

$$1.5112600022 \;<\; M^+(\mathcal{L}) \;<\; 1.5112601265, \qquad M^+(\mathcal{L}) \approx 1.511260014.$$

下界是一个显式概率测度的能量。上界来自网格搜索，随后对势进行局部最大化，因而并不严格（附录C.1）。不过，搜索中的误差只会使其变化约一个夹逼区间的宽度（$\sim 10^{-7}$），远小于计算所得的间隔

$$M(\mathcal{L}) - M^+(\mathcal{L}) \;\geq\; 9.55 \times 10^{-6}$$

（估计值 $9.66 \times 10^{-6}$）。独立地，计算得到的带符号密度大幅为负，根据推论 A.8这将意味着 $M^+ < M$；但其符号同样是一个数值结果。综合来看，这些结果为正性至关重要提供了有力的数值证据。极值测度在以 $(0, \pm 1, 0)$ 为中心、角半径约为 $41.5^\circ$ 的两个帽区上为零，这两个帽区覆盖了参数球面的大约四分之一。至于椭圆 $E_{5,\ 1}$，这些间隔明显大于带符号密度的负帽区（$27^\circ$）。带符号解定位出了这些间隔，但低估了它们的大小。

### 6.4 与 Larcher–Schmid–Wolf 的比较

在概率测度上取最大值的 LSW [12, 第 296–297]页。使用 $N = 3969$ 个网格点，他们报告的值为 1。51125093560193590，这是 $M^+(\mathcal{L})$ 的下界。他们的节点构成一个 $63 \times 63$ 纬度–经度网格，其中第一行的全部 63 个点都重合于北极，因此只有 3907 个点彼此不同。他们自己报告的势表明，在该网格上，他们的值与最优值相差 $2 \times 10^{-8}$。相对于 $M^+$ 约 $9.1 \times 10^{-6}$ 的不足，因此源于节点的布置，而不是其算法收敛缓慢。

他们的数据独立证实了这些间隔。在椭圆 $E_{2,\,1}$ 上，他们的节点势仅分布在 $3.7\times10^{-8}$。在椭球上，节点势分布在 $1.36\times10^{-3}$，范围过大，无法使势在全支撑上保持恒定。他们的图 3 显示了两个区域，其算法几乎没有放置任何质量，这与本文发现的两个间隔一致。

## 7 个值得进一步探讨的问题

1. 临界椭圆。求出使椭圆的带符号密度首次降为零的比值 $\kappa^* \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$。$\rho$的最小值在 $t = \pi/2$处（当 $b/a = \frac{1}{2}$和 $\frac{1}{3}$时），而偏离轴线的距离仅为 $b/a = \frac{1}{5}$；这表明第一个零点可能出现在短轴的端点。第一个零点究竟出现在短轴的端点（如 $b/a = \frac{1}{2}$处的形状所示），还是出现在轴线之外（如 $b/a = \frac{1}{5}$处）？

   猜想 7.1。存在 $\kappa^* \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$，使得 $M^+(E_{a,\,b}) = M(E_{a,\,b})$ 对于 $b/a \geq \kappa^*$和$M^+(E_{a,\,b}) < M(E_{a,\,b})$ 对于 $b/a < \kappa^*$。

2. 薄椭圆。$\min \rho$ 随 $b/a \to 0$ 如何变化？对 $t$ 按 $a/b$ 重新缩放后，长轴两端附近的带符号密度是否趋近于某个固定剖面？

3. 对 $E_{2,\,1}$ 的证明。例如，可以通过对截断傅里叶系统进行$\|\rho - \rho_K\|_\infty < 0.0073$ 区间算术界，严格验证 $\rho > 0$ 。

4. 椭球。对于半轴为 $(1, 1, c)$ 的族，找出带符号密度首次变号的位置。在该阈值以下，$M^+ = M$ 可以计算到许多位数字。

5. 支撑集与负区域。对于核 $|x - y|$，带符号密度为负的区域是否总包含在 $\operatorname{supp} \mu_0$ 的间隔内？

6. $M^+$ 的高精度结果。开发一种自由边界谱方法，使得当 $M^+ < M$ 时，$M^+$ 能以多位数字的精度给出。

7. 支集的边缘。数值结果显示，在 $E_{3,\,1}$ 和 $E_{5,\,1}$ 上，$\mu_0$ 的密度在其支集边缘处从一个较小的正值跃变为零。证明这一点，并确定其在 $\mathcal{L}$ 上的行为。

8. 多边形与凸体。根据命题 3.4，$\frac{2+\sqrt{2}}{4} < M(\partial S) \leq 1$ 对于空心单位正方形成立。那么 $M(\partial S)$ 是多少？它能否取到？进一步来说：每个平面凸体 $K$ 是否都满足 $M(K) = P/4$，就像圆盘那样？

9. 多边形曲线。计算凸多边形的 $M(\partial K)$。它是有限的吗？

10. 闭式。$M^+(E_{2,\,1})$ 能否用经典常数表示，例如完全椭圆积分？

# A 证明

全文中， $A \subset \mathbb{R}^d$ 是紧致的，测度是定义在 $A$上的有限带符号博orel测度。

## A.1 距离核的负定性

引理 A.1（Crofton）。对于 $x \in \mathbb{R}^d$ 以及 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的（未归一化）曲面测度 $\sigma$，

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle x, \omega \rangle| \, \mathrm{d}\sigma(\omega) = c_d \, |x|, \qquad c_2 = 4, \quad c_3 = 2\pi.$$

证明。由旋转不变性，不妨设 $x = |x| e_d$。对于 $d = 2$， $\int_0^{2\pi} |$余弦函数 $\theta| \mathrm{d}\theta = 4$。对于 $d = 3$，令 $t = \langle \omega, \ e_3 \rangle$，则有 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\phi$，因此积分等于 $|x| \cdot 2\pi \int_{-1}^{1} |t| \mathrm{d}t = 2\pi |x|$。一般地，$c_d > 0$，由同样的计算可得。 □

引理 A.2（严格条件负定性）。如果 $\sigma(\mathbb{R}^d) = 0$，那么 $I(\sigma) \leq 0$，且等号成立当且仅当 $\sigma = 0$。

证明。一维情形。设 $\tau$ 是 $\mathbb{R}$ 上的此类测度，并令 $T(u) = \tau((-\infty, u])$。对于实数 $s$、$t$，

$$|s - t| = \int_{\mathbb{R}} \big( \mathbf{1}\{s \leq u < t\} + \mathbf{1}\{t \leq u < s\} \big) \, \mathrm{d}u.$$

对 $\tau \otimes \tau$ 进行积分；由于 $|\tau|$ 有限且支集有界，Fubini 定理适用。利用 $\tau(\{s \leq u\}) = T(u)$ 和 $\tau(\{t > u\}) = -T(u)$，

$$I(\tau) = -2 \int_{\mathbb{R}} T(u)^2 \, \mathrm{d}u \leq 0.$$

投影。对于 $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ 令 $\pi_\omega(x) = \langle x, \ \omega \rangle$。根据引理 A.1 和 Fubini 定理，

$$I(\sigma) = \frac{1}{c_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} I\big( (\pi_\omega)_{\#} \sigma \big) \, \mathrm{d}\sigma(\omega) \leq 0.$$

等号成立。若 $I(\sigma) = 0$，则 $\omega \mapsto (\pi_\omega)_{\#}\sigma$ 的连续性迫使每个投影都具有 $T \equiv 0$，因此每个 $(\pi_\omega)_{\#}\sigma$ 都为零。于是，傅里叶变换 $\hat{\sigma}(r\omega) = (\pi_\omega)_{\#}\sigma(r)$ 恒等于零，且 $\sigma = 0$ （Cramér–Wold）。 □

注 A.3。等价地，$I(\sigma) = -C_d \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\sigma}(\xi)|^2 |\xi|^{-d-1} \mathrm{d}\xi$，其中 $C_d > 0$。这就是 Sz´ekely 和 Rizzo 的能量距离 [20], ; 用 Nickolas 和 Wolf 的术语来说，这意味着 $\mathbb{R}^d$ 是严格拟超度量。

引理 A.4（能量恒等式）。对于测度 $\mu$、$\nu$、$I(\mu) = I(\nu) + 2 \int U_\nu \mathrm{d}(\mu - \nu) + I(\mu - \nu)$。

证明。利用双线性展开 $I(\nu + (\mu - \nu))$，并利用核的对称性。 □

## A.2 Bj¨orck 定理

定理 2.1 的证明。存在性。 $\mathcal{P}(A)$ 是弱-$*$ 紧致的，并且 $I$ 是弱-$*$ 连续的，因为核在 $A \times A$ 上是连续的。

唯一性。若 $\mu_0 \neq \mu_1$ $M^+$ 2 $I(\frac{1}{2}\ \mu_0 + \mu_1\ ) =$二者 $\frac{1}{2}I\ \mu_0\ + \frac{1}{2}I\ \mu_1\ - \frac{1}{4}I\ \mu_0 - \mu_1\ > M^+$ 均取到最大值，则由双线性及引理 A.，可得 ( ) ( ) ( ) ( )，矛盾。

平衡条件。对于 $x \in A$ 和 $\mu_\varepsilon = (1-\varepsilon)\mu_0 + \varepsilon\delta_x$,

$$I(\mu_\varepsilon) = (1-\varepsilon)^2 M^+ + 2\varepsilon(1-\varepsilon)U_{\mu_0}(x),$$

其在 $\varepsilon = 0$处的右导数，即 $2(U_{\mu_0}(x) - M^+)$，必须为 $\leq 0$。由于 $\int U_{\mu_0}\mathrm{d}\mu_0 = M^+$且 $U_{\mu_0} \leq M^+$，等式几乎处处对 $\mu_0$成立，因此由连续性可知，在 $\operatorname{supp}\ \mu_0$ 上也成立。

边界上的支集。设 $A = K$ 为一个凸体。函数 $U = U_{\mu_0}$ 是凸函数。假设在内点 $x$处有 $U(x) = M^+$。对于任意 $y \in K$，写作 $x = ty + (1-t)z$，其中$z \in K$且 $t \in (0,1)$。于是 $M^+ = U(x) \leq tU(y) + (1-t)U(z) \leq M^+$，所以 $U(y) = M^+$。因此$U$ 在 $K$上必为常数，尤其在某个开集上为常数。但在分布意义下，$\Delta U = (d-1)\int |x-y|^{-1}\mathrm{d}\mu_0(y) > 0$，所以 $U$在任何开集上都不是常数。因此， $U < M^+$ 在内点上成立，且 $\operatorname{supp}\mu_0 \subset \partial K$。 □

## A.3 点与测度

定理 1.2 的证明。 令 $m_n$ 为最大的点对平均值。对于点 $\xi_1$、……、 $\xi_n$，其经验测度为 $\nu_n = \frac{1}{n}\sum \delta_{\xi_j}$,

$$\frac{2}{n(n-1)}\sum_{j<k}|\xi_j - \xi_k| = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{j,k}|\xi_j - \xi_k| = \frac{n}{n-1}\,I(\nu_n) \leq \frac{n}{n-1}\,M^+,$$

这给出了上界。对于下界，令 $\xi_1$、……、 $\xi_n$ 相互独立，且服从分布 $\mu_0$。每一对的 $\mathbb{E}|\xi_j - \xi_k| = I(\mu_0) = M^+$，因此点对平均值的期望等于 $M^+$，并且某个配置至少能达到其期望值。令 $n \to \infty$，可得 $\gamma_1 = M^+$。 □

同样的计算表明，对于 $\sum_{j,\ k}|\xi_j - \xi_k| \leq M^+(A)\ n^2$，对于每个紧致 $A$ 中的每个配置都成立。这就是推论 2.3 中的不等式。

## A.4 多面体

定理 2.2 的证明。 令 $\nu$ 为有限集 $V$的极值测度。根据定理 2.1（2），应用于 $V$， $U_\nu \leq M^+(V)$ 在 $V$上。由于 $U_\nu$是凸的，因此它至多为 $M^+(V)$ 在凸包 conv $V = K \supseteq A$上。对于 $\mu \in \mathcal{P}(A)$，引理 A.4 给出

$$I(\mu) = I(\nu) + 2\Big(\int U_\nu\,\mathrm{d}\mu - \int U_\nu\,\mathrm{d}\nu\Big) + I(\mu-\nu) \leq M^+(V) + 2\big(M^+(V) - M^+(V)\big) + 0 = M^+(V),$$

使用 $\int U_\nu\,\mathrm{d}\nu = I(\nu) = M^+(V)$ 和引理 A.2。等号成立要求 $\mu = \nu$。由于 $V \subseteq A$，同样有 $M^+(A) \geq M^+(V)$。 □

推论 2.3 的证明。 测度 $\nu = \sum w_i\delta_{v_i}$ 是 $V$ 上的概率测度，其在 $U_\nu \equiv \lambda$上的 $V$。根据下文的命题 A.6，它是 $V$的极值测度，并且 $M^+(V) = \lambda = I(\nu)$。定理 2.2 将这一结论转移到 $A$上。有限-$n$ 不等式已在上文证明。对于所述配置，由于其经验测度为 $\nu$，等号成立。 □

三角形权重可直接验证：在 $A$ 处，未归一化势为 $w_B c + w_C b = bc\big[(c+a-b) + (a+b-c)\big] = 2abc$，在 $B$ 和 $C$ 处同理。归一化常数为 $\sum a(b+c-a) = 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$。对于外接圆半径为 1 的正 $m$ 边形，从一个顶点到其他顶点的距离为 $2\sin(\pi k/m)$，并且 $\sum_{k=0}^{m-1} 2\sin\frac{\pi k}{m} = 2\cot\frac{\pi}{2m}$。

## A.5 有限集与风筝形

命题 A.5。设 $V = \{v_1, \dots, v_m\}$，$m \geq 2$ 是不同点，其距离矩阵为 $D$。则 $D$ 可逆，$s = D^{-1}\mathbf{1}$ 满足 $\mathbf{1}^{\mathsf{T}} s > 0$，且 $M(V) = 1/\mathbf{1}^{\mathsf{T}} s$，且仅在 $w = s/\mathbf{1}^{\mathsf{T}} s$ 时取得。

证明。可逆性。设 $Dx = 0$ 满足 $x \neq 0$。若 $\mathbf{1}^{\mathsf{T}} x = 0$，则 $x^{\mathsf{T}} D x = 0$ 与引理 A.2矛盾。否则进行缩放，使得 $\mathbf{1}^{\mathsf{T}} x = 1$。对于每个 $i$，$y = e_i - x$ 的质量为零，并且$y^{\mathsf{T}} D y = D_{ii} - 2e_i^{\mathsf{T}} D x + x^{\mathsf{T}} D x = 0$，因此 $x = e_i$ 对每个 $i$都成立，这不可能。

符号。若 $\mathbf{1}^{\mathsf{T}} s = 0$，则 $s^{\mathsf{T}} D s = 0$ 迫使 $s = 0$，这不可能。若 $\mathbf{1}^{\mathsf{T}} s < 0$，令$c = -\mathbf{1}^{\mathsf{T}} s/m > 0$，并令 $y = s + c\mathbf{1}$，其质量为零。于是 $y^{\mathsf{T}} D y = \mathbf{1}^{\mathsf{T}} s + 2cm + c^2 \mathbf{1}^{\mathsf{T}} D \mathbf{1} = cm + c^2 \mathbf{1}^{\mathsf{T}} D \mathbf{1} > 0$，与引理 A.2矛盾。

值。 $w$ 具有 $Dw = \lambda \mathbf{1}$ 且 $\lambda = 1/\mathbf{1}^{\mathsf{T}} s$；应用命题 A.6。 □

风筝形公式。将未归一化的权重写为 $p$、$p$、$q$、$r$，并令每个势都等于 1。结合 $s = \sqrt{1+\varepsilon^2}$ 和 $t = 1+\varepsilon$，方程为

$$2p + \sqrt{2}\, q + sr = 1, \qquad 2\sqrt{2}\, p + tr = 1, \qquad 2sp + tq = 1.$$

消去 $q$ 和 $r$ 得到 $p = (\sqrt{2}+s-t)\,/\,(4\sqrt{2}\,s - 2t)$，而 $M(V) = 1/(2p+q+r)$ 可化简为第 3 节的公式（使用 $s^2 = 1+\varepsilon^2$）。当 $\varepsilon = 0$ 时，它化为 $(3+\sqrt{2})/4$。阈值 $\varepsilon^*$ 是三角形测度（$w_A$、$w_B$、$w_C$）在 $D$ 处的势等于 $2/(2\sqrt{2}-1)$ 的位置，即 $\sqrt{2}\,s + (\sqrt{2}-1)\,t = 2$；这等价于所显示的方程。

## A.6 带符号平衡与判据

命题 A.6（带符号平衡测度）。假设 $\nu \in \mathcal{M}_1(A)$ 在 $A$ 上具有 $U_\nu \equiv \lambda$。那么每个$\mu \in \mathcal{M}_1(A)$ 都满足 $I(\mu) = \lambda + I(\mu - \nu) \leq \lambda$，因此 $M(A) = \lambda$，且最大化解 $\nu$ 唯一。此外，$M^+(A) = M(A)$ 当且仅当 $\nu \geq 0$，此时 $\nu = \mu_0$。

证明。由引理 A.4，$I(\mu) = \lambda + 2(\lambda - \lambda) + I(\mu - \nu)$，而引理 A.2 给出 $I(\mu-\nu) \leq 0$，等号仅在 $\mu = \nu$时成立。若 $\nu \geq 0$，则它对 $M^+$是可容许的。若不是，$\mu_0 \neq \nu$并且 $M^+ = I(\mu_0) < \lambda$。 □

引理 A.7（唯一性）。在 $A$ 上至多存在一个带符号平衡测度。

证明。如果 $\nu_1$、$\nu_2$ 具有常势 $\lambda_1$、$\lambda_2$，那么 $\sigma = \nu_1 - \nu_2$的质量为零，并且 $I(\sigma) = \int (U_{\nu_1} - U_{\nu_2})\,\mathrm{d}\sigma = (\lambda_1 - \lambda_2)\sigma(A) = 0$，因此 $\sigma = 0$。 □

定理 *3.1* 的证明。如果 $U_{\mu_0}$ 为常数，命题 A.6 给出 $M = M^+$。反之，设$M^+ = M$。那么 $M$ 是有限的，并且 $\mu_0$ 在 $I$ 上取最大值，其中 $\mathcal{M}_1(A)$。对于 $x \in A$ 和任意实数 $\varepsilon$，$\mu_\varepsilon = \mu_0 + \varepsilon(\delta_x - \mu_0) \in \mathcal{M}_1(A)$，并且

$$I(\mu_\varepsilon) = M + 2\varepsilon\big(U_{\mu_0}(x) - M\big) + \varepsilon^2 I(\delta_x - \mu_0).$$

由于 $\varepsilon$可能取正值或负值，极大性要求 $U_{\mu_0}(x) = M$。 □

推论 A.8. 若 $A$ 上存在带符号平衡测度 $\nu$，且它不是正测度，则$M^+(A) < M(A)$，并且 supp $\mu_0 \neq A$。

证明。 该不等式即为命题 A.6。若 supp $\mu_0 = A$，则根据定理 $U_{\mu_0} \equiv M^+$ 在 $A$ 上成立，由定理 2.1可知，因此 $\mu_0$ 是带符号平衡测度，并根据 $\nu$ 引理 A.7等于该值。这就产生了矛盾。 □

命题 *5.1* 的证明。 应用引理 A.4，取 $\mu = \mu_0$: $M^+ = 2\int U_\nu \,\mathrm{d}\mu_0 - I(\nu) + I(\mu_0 - \nu)$。这里 $\int U_\nu \,\mathrm{d}\mu_0 \le \max_A U_\nu$，因为 $\mu_0 \ge 0$ 的质量为 1，而 $I(\mu_0 - \nu)$。 □

## A.7 空心多边形

下面的引理 给出了推论 3.3(1) 的直接证明，无需借助 Wilson 的定理 m.

引理 A.9。设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 为紧致集，并包含两条不平行线段，例如凸多边形边界。则在 $A$ 上不存在对 $A$具有常势的概率测度。因此 $M^+(A) < M(A)$。

证明。设 $U_\mu \equiv c$ 在 $A$上，并令 $e \subset A$ 为一条线段，按 $x(t)$ 线性遍历。对于每个$y$，函数 $f_y(t) = |x(t) - y|$是凸的，而在 $e$的内部有 $f_y'' = 0$意味着 $y$位于 $e$的支撑直线 $\ell_e$上。（如果 $y \notin \ell_e$，则 $f_y'' = |x'|^2 \operatorname{dist}(y, \ell_e)^2/|x-y|^3 > 0$；如果 $y$位于 $e$的内部，则 $f_y''$在 $y$处有一个原子。）$f_y''$的二阶分布导数是非负测度，它们的 $\mu$平均值在 $e$的内部为 $(U_\mu \circ x)'' = 0$。对一个可数稠密的非负测试函数族进行测试可知，对于 $\mu$-几乎处处的 $y$，$f_y'' = 0$ 在那里成立，因此 supp $\mu \subset \ell_e$。对第二条不平行于 $e$的线段 $e'$进行同样处理，得到 supp $\mu \subset \ell_e \cap \ell_{e'}$是单点 $p$。所以 $\mu = \delta_p$。但 $|x-p|$ 沿 $e$并非常数，矛盾。该不等式由定理 3.1 得出。 □

## A.8 宽度界

命题 *3.4* 的证明。线段。 设 $\tau$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的符号质量为一的测度，该区间长度为 $L$，并令 $T(u) = \tau((-\infty, u])$。引理 A.2 证明中的计算，在此令$\tau(\{t > u\}) = 1 - T(u)$，可得

$$I(\tau) = 2\int_\alpha^\beta T(u)\big(1 - T(u)\big)\,\mathrm{d}u \;\le\; 2 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot L = \tfrac{L}{2},$$

因为 $T(1-T) \le \frac{1}{4}$对每个实数 $T$都成立。等号成立迫使 $T \equiv \frac{1}{2}$在 $(\alpha, \beta)$ 上成立，即 $\tau = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_\beta)$.

平面。 对于 $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$，引理 A.1 （取 $c_2 = 4$）以及 Fubini 定理给出

$$I(\nu) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} I\big((\pi_\theta)_\#\nu\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

投影测度支撑在长度为 $w(\theta)$ 的区间上，即在方向 $\theta$ 上的 $X$ 凸包的宽度，因此

$$I(\nu) \le \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} w(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8} \cdot 2P = \frac{P}{4}.$$

其中 $w(\theta) = h(\theta) + h(\theta + \pi)$， $h$ 是支撑函数，而柯西公式给出 $\int_0^{2\pi} h\,\mathrm{d}\theta = P$。

高维情形。对 $|x| = b(n)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, t\rangle|\,\mathrm{d}\lambda(t)$ 使用相同的论证，其中 $\lambda$ 是归一化表面测度，可得 $I(\nu) \le \frac{1}{2}\,b(n)\int w\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\,b(n)\;\bar{w}$。

等号成立。 对于线段，根据第一部分等号成立。对于实心球，由于$\bar{w} = 2$ 以及 $M(B^n) = b(n)$ [11]，等号也成立。 □

# B 会合数

Gross [10] 在紧致连通度量空间 $X$上考虑双人零和博弈。每位玩家选择一个点，收益为两点之间的距离。根据 Glicksberg 极小极大定理， [9]该博弈具有一个值 $r(X)$，以及最优混合策略，即概率测度：

$$r(X) = \max_{\mu \in \mathcal{P}(X)} \min_{X} U_\mu = \min_{\nu \in \mathcal{P}(X)} \max_{X} U_\nu.$$

Gross 将 $r(X)$ 称为会合值。他先针对等权有限集表述了其定理，Elton 将其推广到测度（见 [7]）：每个 $\mu \in \mathcal{P}(X)$ 都在某个 $P \in X$ 处具有 $U_\mu(P) = r(X)$，而 $r(X)$ 是具有这一性质的唯一常数。Gross 还证明了 $D/2 \le r < D$，其中 $D$ 是直径，并提出了平面集合中 $r/D$ 的精确上界问题。

定理 B.1（Wolf [21]）。对于紧致连通的 $X \subset \mathbb{R}^d$， $r(X) \le M^+(X)$，当且仅当 $U_{\mu_0}$ 在 $X$ 上为常数时取等号。

证明。首先，根据定理 2.1， $r \le \max U_{\mu_0} = M^+$。若 $U_{\mu_0} \equiv M^+$，则对每个 $\mu$ 都有 $\int U_\mu \, \mathrm{d}\mu_0 = \int U_{\mu_0} \mathrm{d}\mu = M^+$，因此 $\min U_\mu \le M^+ \le \max U_\mu$，由唯一性可得 $r = M^+$。反之，若 $r = M^+$，令 $\mu_1$ 为最大化方玩家的最优策略。于是 $U_{\mu_1} \ge M^+ \text{on} X$，所以 $I(\mu_1) \ge M^+$，从而 $\mu_1 = \mu_0$ 和 $U_{\mu_0} \ge M^+$。结合 $U_{\mu_0} \le M^+$，得到 $U_{\mu_0} \equiv M^+$。 □

结合定理3.1，对于紧致连通 $X \subset \mathbb{R}^d$：

$$r(X) = M^+(X) \iff M^+(X) = M(X).$$

因此，正性也决定了会合值是否等于最大能量。由此可知， $r = M^+ = M$ 对于圆、球面和线段，以及数值上对于 $E_{2,\ 1}$。Wolf 指出，对于一般椭圆， $r$ 尚属未知 [21]；对于$E_{2,\ 1}$，在假设 具有正性的条件下，它等于第5.3节中的 50 位数值。相比之下， $r < M^+$ 对于 $E_{3,\ 1}$、 $E_{5,\ 1}$、 $\mathcal{L}$，每个空心凸多边形和每个凸体都成立。例如，对于单位圆盘， $U_{\mu_0}$ 在中心处等于 $1 < 4/\pi$。

# C 数值方法与数据

所有计算均在 Mathematica 中完成；稠密线性代数通过 MKL 使用多线程处理。

## C.1 什么是严格的

- $M^+$的下界。对于任意节点集上的非负权重 $w$，并归一化为总质量一， $I(w) \le M^+$。无论生成 $w$的求解器精度如何，均有此结论；因此，只要在控制舍入误差的情况下（例如使用区间算术）计算 $I(w)$，这些界就是严格的。

- $M$的下界。同样， $I(w) \le M$ 对于总质量为一的带符号权重，Galerkin 值满足 $\lambda_K = I(\nu_K) \le M$，且随 $K$非递减。我们目前尚无 $M$的严格上界； $M$ 所打印的数字是逐次截断结果一致的那些数字。

- 的上界来自命题 5.1 ，需要在整条曲线或整个曲面上取 $U_\nu$ 的最大值。在我们的计算中，该最大值通过网格搜索和局部最大化得到，但这并不严格。引理C.1 说明了如何使其变得严格。

- $\rho$ 的符号是数值性的；若要得到严格版本，则需要一个小于 $|\min \rho|$ 的截断误差界。

- 支撑集。舍弃无约束权重为负的节点是一种启发式方法。报告的支撑集是计算得到的离散最优解的支撑集，其特征由 Karush–Kuhn–Tucker 条件给出。

引理 C.1（曲率修正）。设 $x\colon\ [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^d$ 为 $C^2$，满足 $|x''|\le\kappa$，且 $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 具有紧致支集。则 $g(t)=U_\mu(x(t))$ 在分布意义下满足 $g''\ge-\kappa$ 。因此

$$\max_{[\alpha,\beta]} g \;\le\; \max\{g(\alpha),g(\beta)\}+\tfrac{\kappa}{8}(\beta-\alpha)^2.$$

证明。对于 $f(t)=|x(t)-v|$ 以及 $x(t)\neq v$,

$$f''=\frac{|x'|^2|x-v|^2-\big((x-v)\cdot x'\big)^2}{|x-v|^3}+\frac{(x-v)\cdot x''}{|x-v|}\;\ge\;-|x''|,$$

由柯西–施瓦茨不等式可得；其中 $x(t)=v$， $f$ 具有凸折点。对 $\mu\ge0$ 取平均得到 $g''\ge-\kappa$。因此， $g(t)+\frac{\kappa}{2}(t-c)^2$，（其中 $c$ 为中点）是凸的，并且其在 $[\alpha,\beta]$ 上的最大值在端点处取得。□

对于椭圆 $\kappa=a$。对于此处使用的间距为 $2\pi/(40n)$ 的网格，在 $n=30000$ 处，修正项 $\kappa h^2/8$ 小于 $2\times10^{-11}$，与 $n$ 项求和中的浮点误差相当。对椭圆的四种对称性下的权重进行对称化后，概率测度仍得以保持，且第一象限搜索变得精确，因此椭圆的夹逼区间可变为严格的上界和下界，其上端最多提高不到 $10^{-10}$。再结合相同节点上无约束带符号权重的能量——这是 $M$ 的下界——即可证明 $M^+<M$ 对于 $E_{3,\,1}$ 和 $E_{5,\,1}$成立。我们尚未完成这项验证。对于参数化定义在参数矩形区域上的曲面，同样的论证给出的修正项 $\kappa\delta^2/8$ 适用于直径为 $\delta$ 的网格单元，其中 $|D^2x[h,h]|\le\kappa|h|^2$。对于坐标为 $(\theta,\varphi)$ 的椭球，可取 $\kappa=2\max(a,b,c)$；使用此处的 $200\times200$ 八分体网格时，修正项（约为 $4\times10^{-5}$）过大，因此需要使用细约十倍的网格。

一个测试案例。对于单位圆上第 $n$ 个单位根处的 $n$ 等权节点，设置$x=\pi/(2n)$。节点处的势为 $\frac{2}{n}\cot x$，而节点之间的中点处为 $\frac{2}{n}\csc x$，因此夹逼区间的宽度为$\frac{4}{n}\tan\frac{\pi}{4n}\approx\pi/n^2$。下界误差和上误差分别为 $\pi/(3n^2)$ 和 $2\pi/(3n^2)$。对于$n=800$，宽度为 $4.90874\times10^{-6}$，代码逐位复现了这一结果。

## C.2 椭圆：密集离散化

取 $n$ 在 $t$ 上均匀分布的节点，求解 $Ds=\mathbf{1}$，移除满足 $s_i<0$ 的节点，并重复此过程，直到所有权重均为正。所得的 $w=s/\sum s_i$给出下界 $I(w)=1/\sum s_i$，而命题 5.1 给出上界。两种误差都按 $n^{-2}$ 的速度衰减，因此理查森外推$R=\frac{1}{3}\,(4X(2n)-X(n))$ 非常有效。

$E_{2,\ 1}$。我们首先报告 $E_{1,\ 1/2}$ 的值，它们等于 $E_{2,\ 1}$ 的值的 $1\ 2$ 。每个节点在每个 $n$ 测试中都予以保留。误差约为 $1.221/n^2$ （下界）和 $3.913/n^2$ （上界）。理查森值：

| $(n, 2n)$ | 来自下界 | 来自上界 |
|---|---|---|
| 400/800 | 1.054027106093 | 1.05402710765 |
| 1600/3200 | 1.054027106093 | 1.05402710609 |
| 6400/12800 | 1.054027106087 | 1.05402710609 |
| 12800/25600 | 1.054027106093 | 1.05402710609 |

在 LSW 的网格上预测的离散最优值为 $2(M^+(E_{1,\ 1/2}) - 1.2202/N^2)$，其中 $N = 4095$；LSW 报告的数值为 2.108054066642。对于 $E_{2,\ 1}$ 本身，运行至 $n = 35000$ 时会保留每个节点；在 $n = 35000$、$2.10805421018 \le M^+ \le 2.10805421856$ 时，对 $16000/32000$ 对进行理查森外推，得到 2.10805421217（下界）和 2.10805421218（上界）。

$E_{3,1}$。

| $n$ | 下界 | 上界 | 宽度 | 支集 |
|---|---|---|---|---|
| 400 | 3.06770258391 | 3.06780511818 | $1.03 \times 10^{-4}$ | 286 |
| 1600 | 3.06772567409 | 3.06773208532 | $6.41 \times 10^{-6}$ | 1146 |
| 6400 | 3.0677271172 | 3.06772751791 | $4.01 \times 10^{-7}$ | 4578 |
| 12800 | 3.06772718935 | 3.06772728953 | $1.00 \times 10^{-7}$ | 9158 |
| 20000 | 3.06772720356 | 3.06772724459 | $4.10 \times 10^{-8}$ | 14306 |
| 30000 | 3.06772720903 | 3.06772722727 | $1.82 \times 10^{-8}$ | 21458 |

宽度满足 $\text{width} \cdot n^2 \approx 16.4$，适用于 $n \ge 12800$。对 $15000/30000$对进行理查森外推，无论下界还是上界，结果均为 3.06772721341；$14000/28000$ 对也得到相同的值。在 $n = 30000$ 处的上界比 $M$低 $4.4 \times 10^{-8}$。每个 $n$都会保留约 71.5% 的节点。

$E_{5,1}$。

| $n$ | 下界 | 上界 | 宽度 | 支集 |
|---|---|---|---|---|
| 400 | 5.03937350639 | 5.03954932517 | $1.76 \times 10^{-4}$ | 162 |
| 1600 | 5.03941330497 | 5.03942430774 | $1.10 \times 10^{-5}$ | 646 |
| 6400 | 5.03941579224 | 5.03941647997 | $6.88 \times 10^{-7}$ | 2578 |
| 12800 | 5.0394159166 | 5.03941608854 | $1.72 \times 10^{-7}$ | 5158 |
| 20000 | 5.03941594108 | 5.0394160115 | $7.04 \times 10^{-8}$ | 8058 |
| 30000 | 5.03941595051 | 5.03941598181 | $3.13 \times 10^{-8}$ | 12082 |

宽度满足 $\text{width} \cdot n^2 \approx 28.2$ 对于 $n \ge 12800$。对 $15000/30000$对进行理查森外推，从下界和上界均得到 5.039415958057。每个 $n$保留约 40.3% 的节点。

### C.3 椭圆：谱 Galerkin

核。设 $A_0=\frac{a^2+b^2}{2}$、 $B_0=\frac{a^2-b^2}{2}$ 和 $q=\frac{a-b}{a+b}$。则

$$|x(t)-x(s)|=\left|\sin\tfrac{t-s}{2}\right| g(t+s),\qquad g(u)=2\sqrt{A_0-B_0\cos u}=(a+b)\,|1-qe^{iu}|.$$

第一个因子的傅里叶系数为 $\alpha_m=-2/(\pi(4m^2-1))$。第二个因子的系数为$\beta_p=\beta_{-p}$，其精确表达式为

$$\beta_p=(a+b)\,\frac{(-\frac12)_p}{p!}\,q^p\;{}_2F_1\!\left(-\tfrac12,\,p-\tfrac12;\,p+1;\,q^2\right),\qquad p\ge 0,$$

这是通过展开 $(1-qe^{\pm iu})^{1/2}$ 得到的。作为检验， $\beta_0=(a+b)\;{}_2F_1(-\frac12,-\frac12;1;\,q^2)=P/\pi$是用于计算周长的高斯–库默尔级数。对于 $p\ge 1$， ${}_2F_1$ 中除第一项外的每一项都为负，而级数和为正，因此 $\beta_p$ 的计算具有完整的相对精度。衰减为 $\beta_p\sim q^p$。

系统。根据关于 $t\mapsto -t$和 $t\mapsto t+\pi$的对称性， $\rho(s)=\sum_J \rho_{2J}e^{2iJs}$，其中 $\rho_{2J}=\rho_{-2J}$，而势的系数为 $U_{2Q}=2\pi\sum_J \alpha_{Q+J}\beta_{Q-J}\rho_{2J}$。对 $0<|Q|\le K$和 $\rho_0=1/(2\pi)$，施加 $U_{2Q}=0$；于是 $\lambda_K=U_0$。

精度课程。通过 $\beta_p$ 数值求积求和 $O(1)$项，这些项相互抵消后只剩下约 $q^p$。在有效数字算术中，这会使 $K=80$位之前的所有数字都失效。闭式则完全避免了这一问题。

结果。对于$E_{2,\ 1}$ $(q=\frac13)$， $\lambda_K$ 中的误差约为 $1.35\times10^{-3}\cdot 3^{-2K}$，当$E_{1,\ 1/2}$时。对于$E_{5,\ 1}$($q=\frac23$)，使用 $\max(60,K+30)$ 位数字：

| $K$ | $\lambda_K$ | $\lvert\rho_{2K}\rvert$ | 最小值$_t\,\rho$ |
|---|---|---|---|
| 10 | 5.039411588028498892905706941923821941956993264258 5 | $6.36\times10^{-3}$ | $-0.006466425799$ |
| 20 | 5.039416286180501059514488398591074793348174791663 7 | $1.23\times10^{-4}$ | $-0.0005165414917$ |
| 40 | 5.039416286675115605183820151308184513626382922746 2 | $4.15\times10^{-8}$ | $-0.0004111309058$ |
| 80 | 5.039416286675115620305281439677449196212862851134 6 | $4.24\times10^{-15}$ | $-0.0004110980116$ |
| 160 | 5.039416286675115620305281439677490149067725130916 6 | $3.94\times10^{-29}$ | $-0.0004110980116$ |

$\lambda_K$ 的连续差分分别为 $4.9\times10^{-10}$、 $1.5\times10^{-17}$ 和 $4.1\times10^{-32}$。对于$E_{3,\ 1}$ $(q=\frac12)$，相同代码得到 $\lambda_{40}$、 $\lambda_{80}$ 和 $\lambda_{160}$，其尾项分别为 $5.3\times10^{-13}$、 $5.4\times10^{-25}$ 和 $5.1\times10^{-49}$； $\lambda_{80}$ 和$\lambda_{160}$ 在 50 位数字上相符。在间距为 $\pi/800$ 的网格上， $\rho$ 的最小值为 $-0.0005105319482$，对应于 $K\ge 80$。

### C.4 椭球：谱伽辽金

基。唯一性和反射对称性使得 $\rho$ 在每个坐标上都是偶函数。我们使用具有 $l$ 偶、 $m$ 偶且为余弦型的实正交归一球谐函数；截至次数 $L$，大约有 $L^2/8$ 个。

Crofton 加上 Funk–Hecke公式。令 $A=\operatorname{diag}(a,\ b,\ c)$，并令 $n=A\omega/|A\omega|$。引理 A.1 给出

$$|A(u-v)|=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^2}|A\omega|\,\big|\langle u,n\rangle-\langle v,n\rangle\big|\,\mathrm{d}\sigma(\omega),$$

因此，能量是投影的一维能量的平均值。根据 Funk–Hecke公式，将 $Y_{lm}(u)\,\mathrm{d}\sigma(u)$ 投影到轴 $n$ 上，其密度为 $2\pi Y_{lm}(n)P_l(t)$。因此，奇异核仅通过精确有理数

$$e_{ll}=\frac{-8}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)},\qquad e_{l,l+2}=\frac{4}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)},\qquad e_{ll'}=0\ (|l-l'|>2),$$

其中 $e_{ll'}=\iint|s-t|P_l(s)P_{l'}(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$。此外，$F_l(s)=\int_{-1}^{1}|s-t|P_l(t)\,\mathrm{d}t$ 等于 $s^2+1$（当 $l=0$ 时），而对于偶数 $l\ge 2$，等于 $6(1-s^2)^2C_{l-2}^{(5/2)}(s)/((l-1)l(l+1)(l+2))$。这种形式可避免计算势时的消去。

系统。对于 $\rho=\sum_i c_iY_i$，我们有 $I(\rho)=c^{\mathsf{T}}Gc$，其中

$$G_{ij}=2\pi\,e_{l_il_j}\int_{\mathbb{S}^2}|A\omega|\,Y_i(n)Y_j(n)\,\mathrm{d}\sigma(\omega),$$

通过在一个八分体上应用乘积高斯求积计算得到。求解 $Gx=e_{00}$；然后 $\lambda_L=1/(4\pi x_{00})$ 和 $c=x/(\sqrt{4\pi}\,x_{00})$。对于 $A=I$，$G$ 是对角的，其球面特征值为 $-16\pi/((2l-1)(2l+1)(2l+3))$，而 $\lambda_0$ 是均匀测度的能量。$l=0$ 与 $l=2$ 特征值之比为 35；这就是第 6节中提到的放大效应。

检验（机器精度）。该基的 Gram误差为 $1.5\times10^{-13}$。半径为 1 和 2 的球面分别给出 $4/3$ 和 $8/3$ 到 $4\times10^{-16}$。将额外的求积节点加倍后，$\lambda_{24}$ 变化了$9.5\times10^{-15}$，而势保持平坦，精度达到 $2\times10^{-15}$。收敛情况为：

| $L$ | $\lambda_L$ | $\lvert c_L\rvert$ | 最小值 $\rho$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.488709959082897 | $2.82\times10^{-1}$ | $+0.0795775$ |
| 4 | 1.511268670191912 | $4.07\times10^{-2}$ | $-0.0127418$ |
| 8 | 1.511269672970254 | $8.56\times10^{-4}$ | $-0.0168489$ |
| 16 | 1.511269673044751 | $1.96\times10^{-7}$ | $-0.0169305$ |
| 24 | 1.511269673044731 | $3.29\times10^{-11}$ | $-0.0169305$ |

$\lambda_L$ 中的误差约为 $|c_L|^2$，这符合变分方法的预期。

高精度。采用默认的有效数字算术时，随着 $L$ 增大，Mathematica 报告的位数会减少。原因是 $G$ 中最小的元素约为最大元素的 $10^{-0.65L}$ 倍，而整个矩阵的相对精度由这些最小元素决定（见下表）。它们的绝对准确度仍然很高。在求解前重置 $G$ 的精度，并与采用更高工作精度的运行结果进行核对，即可消除这个问题。

| $L$ | 精度$[G]$ | $\log_{10}$(最大值 $\lvert G\rvert$/最小值 $\lvert G\rvert$) | $\log_{10}\kappa(G)$ | 精度$[x_1]$ |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 38.11 | 13.08 | 4.16 | 38.11 |
| 24 | 32.25 | 18.38 | 4.68 | 32.25 |
| 32 | 26.27 | 23.57 | 5.05 | 26.27 |
| 40 | 20.25 | 28.69 | 5.34 | 20.25 |

在 60 位工作精度下：

| $L$ | $\lambda_L$ |
|---|---|
| 16 | 1.51126967304474006432140456139540894554972453285581878 0 |
| 24 | 1.51126967304474006489174038975022487677926846749395746 7 |
| 32 | 1.51126967304474006489174039479474298028887739017095068 6 |
| 40 | 1.51126967304474006489174039479474302763051129800422756 4 |
| 48 | 1.51126967304474006489174039479474302763051175698021274 6 |
| 56 | 1.51126967304474006489174039479474302763051175698021728 8 |

采用更多求积节点、以 70 位数字进行的运行结果，与 50 位数字的运行结果相比，对$L = 40$ 和 48 的差异在 $10^{-50}$ 以内。

点检验。在 1000 个和 2000 个单位球面的斐波那契点上求解 $Ds = \mathbf{1}$ 不带符号约束的问题，所得权重均为正，能量略低于 $4/3$。在 $\mathcal{L}$ 上进行相同的求解会得到约 10% 的负权重，这与 $\rho$的符号变化一致。

## C.5 椭球：离散优化

对称性。极值测度在八种符号变化下保持不变。将 $n$ 斐波那契节点 $x_i$ 置于开第一卦限中，并为每个节点及其七个镜像各赋予 $w_i/8$的权重。能量变为 $w^{\mathsf{T}}\tilde{D}w$，其中 $\tilde{D}_{ij} = \frac{1}{8}\sum_{\epsilon\in\{\pm1\}^3} |x_i - \epsilon x_j|$。

凸性。 引理 A.2 使其 $w \mapsto w^{\mathsf{T}}\tilde{D}w$ 在单纯形上严格凹，因此其最大化解是唯一的，并由 KKT 条件刻画（$U_i = M_n$ 在支集上， $U_i \le M_n$ 在其他位置）。在单纯形 $w^{\mathsf{T}}Jw = 1$上，其中 $J$ 是全 1 矩阵，因此该问题是凸二次规划：$\min w^{\mathsf{T}}(tJ - \tilde{D})w$。当 $tJ - \tilde{D}$ 至少等于带符号离散常数 $1/(\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\tilde{D}^{-1}\mathbf{1})$ 时，矩阵 $t$ 为半正定。二次规划解通过精确的主动集求解进行优化，并对 KKT 违背量进行检验；在每次运行中，该违背量均为 $\lesssim 2\times10^{-14}$。

结果。

| 卦限节点 | 支集 | 下界 | 上界 |
|---|---|---|---|
| 501 | 385 | 1.5112542239486 | 1.5113035953411 |
| 2002 | 1516 | 1.5112593079542 | 1.511266657202 |
| 8000 | 6027 | 1.5112599272211 | 1.5112608107351 |
| 16001 | 12029 | 1.5112599834297 | 1.5112602899604 |
| 20003 | 15038 | 1.5112599921891 | 1.5112602054275 |
| 25002 | 18781 | 1.5112599984628 | 1.5112601522271 |
| 30001 | 22534 | 1.5112600022317 | 1.5112601264508 |

两个界都以 $n^{-3/2}$ 的速度收敛。由三元组 (20003、25002、30001) 和 (8000、16001、30001) 得出的外推结果一致：$M^{+}(\mathcal{L})$。$\approx 1.511260014$支撑比例趋近于约 0。749。覆盖参数球面 25。1% 的两个圆形球冠的角半径为 $\arccos 0.749 \approx 41.5°$。即使 $n = 501$（即 4008 个有效点）也优于 LSW 的 1。5112509356。这些上界并不严谨；参见附录C.1。

# D 椭圆的 Mathematica 代码

两个程序处理曲线$E_{a;\,b}$它们解决不同的问题，因此彼此分开保留。

- `ellipseMplusBracket[a、b、n]`个位置 $n$ 中均匀分布点质量 $t$，通过主动集求解计算最优的非负权重（附录C.2），并返回命题 $I\,(w)$ 的夹逼区间 $\leq M^{+} \leq 2$ 最大值 $U_w - I\,(w)$。其误差为命题5.1中的 $O\,(n^{-2})$。整数 $n$ 必须能被 4 整除，这样节点集就具有椭圆的对称性，并且可以在一个象限内寻找$U_w$ 的最大值。

- `ellipseMSpectral[a、b、K]`通过附录C.3的傅里叶–伽辽金方法，使用模态 $\cos 2Jt$，$0 \leq J \leq K$求解带符号问题。它返回 $\lambda_K$（键`"M"`）、 $\rho$的系数，以及网格上的 $\min \rho$。其误差按 $q^{2K}$， $q = \frac{a-b}{a+b}$的速度衰减。

参数 $n$ 和 $K$ 彼此无关： $n$ 统计点质量的数量，而 $K$ 统计傅里叶模态的数量。当 $\rho > 0$时，两个程序的结果一致，因为此时 $M^{+} = M$。当 $\rho$ 改变符号时，关于 $M^{+}$的夹逼区间上界最终会低于 $M$。正如附录 C.1中所述，“上界”通过网格搜索和局部最大化计算，就目前而言并不严谨。

## D.1 $M^{+}$的夹逼区间

```
清除所有[ellipseMplusBracket];
ellipseMplusBracket[a_?数值判定, b_?数值判定,
n_整数?(Mod[#, 4] == 0 &), refine_整数 : 40] :=
Module[{ts , P, D0, active , sol, w, Pact, PT, 下界 , U, Ut,
tg, G, ug, cand, h, umax},
(* n nodes, uniform in the parameter t *)
ts = N[2 Pi 范围[0,n - 1]/n];
P = 转置[{a 余弦函数[ts] ,b 正弦函数[ts]}];
D0 =距离矩阵[P];
(* active-set solve of D w = const with w > 0 *)
活动 = 范围[n];
While循环[True ,
解 =线性求解[D0[[活动 , 活动]] ,
常量数组[1., 长度[活动]]];
如果[最小值[解] > 0, 中断[]];
活动 = 选取[活动 , 正[解]]];
w = 解/总和[解];
Pact = P[[激活]];
下界 = w . D0[[激活 , 激活]] . w;        (* I(w) <= M+ *)
(* potential of the discrete measure *)
PT =转置[Pact];
U[{x_?数值判定, y_?数值判定}]:=
w . Sqrt[(PT[[1]] - x)^2 + (PT[[2]]- y)^2];
Ut[t_?数值判定] :=U[{a 余弦函数[t], b 正弦函数[t]}];
(* fine grid on the first quadrant: refine points per node gap *)
tg = N[(Pi/2) 范围[0, 细化 n/4]/(细化 n/4)];
G = 转置[{a 余弦函数[tg] ,b 正弦函数[tg]}];
ug = 连接 @@（距离矩阵[#、Pact] 。w & /@
分区[G, 最多[2000]]）;
(* polish the 20 largest grid values by local maximization *)
h = 2 Pi/（细化 n）;
```

```
cand = 排序[ug, -最小[20, 长度[ug]]]; umax = 最大[ug, 安静
@Table[首先@FindMaximum[Ut[t],{t, tg[[i]] - h, tg[[i]] +
h}],{i, cand}]]; <|"n" ->n, "下界" -> lower, "上界" -> 2 u
max - lower, "间隔" -> 2 umax - 2 lower, "支集" -> 长度[active
],"最小权重" -> 最小[w], "节点"-> ts[[active]],"权重" -> w|>]
```

## D.2 带符号常数 $M$

```
ClearAll[ellipseMSpectral]; ellipseMSpectral[a0_, b0_, K_整数, prec_:
Automatic] :=Module[{a, b, p0, q, q2, betaL, beta, alpha, Js, Mat, sys, rhs, x,
c, lam, tt}, {a, b} = Rationalize[{a0, b0}, 0];(* exact inputs *)p0 = If[
prec === Automatic, Max[60, K + 30], prec]; q = (a - b)/(a + b); q2 =N[q
^2, p0];(* exact Fourier coefficients of g(u) = (a+b)/1 - q e^{iu}| *)
betaL = Table[N[(a + b) Pochhammer[-1/2, p]/p! * If[p == 0, 1, q^p], p0]
* Hypergeometric2F1[-1/2, p - 1/2, p + 1, q2], {p, 0, 2 K}]; beta[p_] :=
betaL[[Abs[p] + 1]]; alpha[m_] := N[-2/(Pi (4 m^2 - 1)), p0]; Js =Range[-
K, K]; Mat = Table[2Pi alpha[J + Q] beta[Q - J], {Q, Js}, {J, Js}];
(* U_{2Q} = 0 for Q != 0, and normalization rho_0 = 1/(2 Pi) *)sys =
ReplacePart[Mat, K + 1-> UnitVector[2 K + 1, K + 1]]; rhs = N[
UnitVector[2 K + 1, K + 1]/(2 Pi), p0]; x = 线性求解[sys, rhs]; lam = Mat[[
K + 1]] . x;(* lambda_K = U_0 *)c = x[[K + 1 ;;]];
(* rho_0, ..., rho_2K *)tt = N[Pi Range[0, 400]/800,p0];
(* grid on [0, Pi/2] *)<|"M" -> lam, "coeffs" ->c, "tail" -> Abs[Last[c]],"最
小 rho" -> Min[c[[1]] +2 Sum[c[[J + 1]]余弦函数[2 J tt], {J, 1, K}]],"精度" -
> Precision[lam]|>]
```

## D.3 比较两者

```
ClearAll[ellipseCompare]; ellipseCompare[a_, b_, n_
Integer, K_Integer: 80] :=Module[{d =
ellipseMplusBracket[a, b, n],s = ellipseMSpectral[a, b,
K]},<|"M+␣下界" -> NumberForm[d["下界"], 12],"M+␣上界
" ->NumberForm[d["上界"], 12],"M" ->N[s["M"], 20], "
最小 rho" -> N[s["最小 rho"], 10],"支撑比例" -> N[d["支集
"]/n],"上界 <␣M" -> d["上界"] < N[s["M"]]|>]
(* checks: the circle gives 4/Pi in both programs *)
```

```
ellipseMSpectral[1, 1, 8]["M"] - 4/Pi ellipseMplusBracket[1, 1, 800][
"下界"] - (2/800.) Cot[Pi/1600]
(* E_{2,1}: full support, minRho > 0, upper >= M *)ellipseCo
mpare[2, 1, 6400]
(* E_{5,1}: gaps, minRho < 0, upper < M once n >= 12800 *)
ellipseCompare[5, 1, 12800]
```

## 椭球的 Mathematica 代码

曲面由其半轴给出，例如 ax={Sqrt[3/2],1,Sqrt[5]/2}，适用于 $\mathcal{L}$。与椭圆一样，两个独立的程序分别解决这两个问题。

- `ellipsoidMSpectral[ax,L]`通过附录 C.4 的伽辽金方法，使用偶数阶、偶数阶次和余弦型的实球谐函数 $l \le L$（辅助程序 `evenSH`）、一个卦限上的乘积高斯求积公式（`octantRule`）以及精确的勒让德能量 $e_{ll'}$（`eLeg`）来求解有符号问题。它返回 $\lambda_L$（键 "M"）、 $\rho$的系数、各阶$l$ 部分的范数、网格上的最小值$\rho$ 以及求积公式的 Gram误差。若要获得更多位数，请使用 `WorkingPrecision->60`，并与采用更高精度及更多求积节点的运行结果进行比较。

- `ellipsoidMplusQP[ax,n]`在开第一卦限中大约放置 $n$ 个斐波那契节点，对距离矩阵施加八种符号变化的对称化（`symDist`），然后通过凸二次规划并进行精确的活动集精化（附录 C.5）计算最优的非负权重。其 "lower" 是 $M^+$ 的下界。随后，`ellipsoidMplusUpper` 通过在卦限上进行网格搜索和一次局部最大化，计算 2 max $U_w - I$（$w$）；如附录 C.1所述，该上界就目前而言并不严格。

次数 $L$ 与节点数 $n$ 无关。由于 $\rho$ 在 $\mathcal{L}$上变号，这两个程序的结果并不一致；计算得到的 $M^+$ 上界反而低于 $M$。

### E.1 带符号常数 $M$

```
清除全部[evenSH、octantRule、eLeg、椭球 M 谱];
(* orthonormal real spherical harmonics even in x, y, z
(l even, m even, cosine type) at unit vectors pts;
returns {labels {l,m}, matrix points x basis} *)evenSH[L_整数, pts_]:=
模块[{x, y, z, w, cols = <||>,cm, Cm, p0, p1, p2, keys}, {x, y, z} =转置[pts];
w = x + I y;(* Re[w^m] = sin^m(th) cos(m ph) *)循环[cm = 平方根[(2
m + 1)/(4 Pi (2 m)!)] (2 m - 1)!!; Cm = 如果[m == 0, 1, 平方根[2] 实部[w^
m]]; p2 = cm + 0 z; cols[{m, m}] = p2 Cm;(* l = m *)p1 = 平方根[2 m
 + 3]z p2;(* l = m+1 *)循环[p0 = 平方根[(4 l^2 - 1)/(l^2 - m^2)](z p1 - 平方根[
((l - 1)^2 - m^2)/(4 (l - 1)^2 - 1)] p2); 如果[EvenQ[l], cols[{l, m}] = p0 Cm];
```

```
p2 = p1; p1 = p0, {l, m + 2, L}] ,{m, 0, L, 2}]; keys = 排序[键[cols]]; {keys, 转置[
cols[#] & /@ keys]}]
(* product rule on the first octant (weights include the factor 8) *)
octantRule[坐标轴_, L_, ex_, prec_]:=模块[{nt = L + ex, np =L/2 + ex, gz, gw,
ph, om, wts, An, nrm}, {gz, gw} = Most[NIntegrate‘GaussRuleData[nt, prec]]; ph
= N[(Range[np] - 1/2) Pi/(2 np), prec]; om = 展平[Outer[{平方根[1 - #1^2]余弦函
数[#2] ,平方根[1 - #1^2] 正弦函数[#2] ,#1} &, gz, ph], 1]; wts = 8 展平[Outer[
Times, gw, 常量数组[N[Pi/(2 np), prec], np]]]; An = 转置[N[坐标轴, prec]转置[
om]]; nrm =平方根[总和[An^2, {2}]]; {om, wts, nrm, An/nrm}]
(* e_{l l'} = Integrate[|s-t| P_l(s) P_l'(t), {s,-1,1}, {t,-1,1}] *)eLeg[l_,
lp_]:= Which[l == lp, -8/((2 l - 1) (2 l + 1) (2 l + 3)), Abs[l - lp] == 2, With[{k =
Min[l, lp]}, 4/((2 k + 1) (2 k + 3) (2 k + 5))] ,True, 0]; 选项[椭球 M 谱] ={工作精度-
> 机器精度, "额外节点" -> 40}; 椭球 M 谱[坐标轴_列表, L_整数?(EvenQ[#]&& # >= 0
&), OptionsPattern[]] :=模块[{prec = OptionValue[工作精度] ,ex = OptionValue["
额外节点"] , om, wts, nrm, nn, keys, B, B0, ls, G, x, lam, coef, gram, ug, rhoU, rhoS,
dn}, {om, wts, nrm, nn} = octantRule[坐标轴, L, ex, prec]; {keys, B} =evenSH[L,
nn]; ls =keys[[全部, 1]]; G = 2 Pi (转置[B] . ((wts nrm) B)) N[Outer[eLeg, ls, ls
] , prec];
(* reset precision: significance arithmetic is overly pessimistic here *)x
= 线性求解[SetPrecision[G, prec] ,N[UnitVector[长度[keys] , 1] ,prec]]; lam = 1/
(4 Pi x[[1]]);(* lambda_L <= M *)coef = x/(平方根[4 Pi] x[[1]]);
(* coefficients of rho *)(* diagnostics, machine precision *)B0 =Last[
evenSH[L, N[om]]]; gram = Max[Abs[转置[B0] . (N[wts] B0) - 单位矩阵[长度[
keys]]]]; ug = N@展平[Outer[{正弦函数[#1] 余弦函数[#2] ,正弦函数[#1] 正弦函数[
#2] , 余弦函数[#1]} &, Subdivide[0, Pi/2, 60] , Subdivide[0, Pi/2, 60]] , 1];
rhoU = Last[evenSH[L, ug]] . N[coef];(* density w.r.t. d sigma(u)
                                                                    *)
rhoS = rhoU/((Times @@ N[坐标轴]) Sqrt[总和[转置[转置[ug]/N[坐
标轴]]^2,{2}]]);(* w.r.t. area *)dn = Table[Norm[Pick[N[coef
] , ls, l]] ,{l, 0, L, 2}];<|"坐标轴" -> 坐标轴, "L" -> L, "extra" -> ex, "M" -
>lam, "keys" -> keys, "coeffs" -> coef, "度范数" -> dn, "最小 rho" ->
Min[rhoU] , "maxRho" -> Max[rhoU] ,
```

```
"表面密度最小最大值" ->最小最大值[rhoS],  "Gram误差" ->gram|>]
```

## E.2 $M^{+}$的界

```
清除全部[八分体节点、八分体符号、对称距离、椭球 M 加 QP、
椭球 M+ 上界];

(* Fibonacci lattice with 8n points; keep those in the open first
octant (about n of them) *)
八分体节点[n_整数] :=模块[{m = 8 n、k、z、ph、u},
k = N[范围[0, m - 1] + 1/2]; z = 1 - 2 k/m;
ph = N[Pi (3 - Sqrt[5])]k;
u = 转置[{Sqrt[1 - z^2] 余弦函数[ph] ,Sqrt[1 - z^2] 正弦函数[ph], z}];
Select[u , Min[#] > 0 &]]

八分体符号 = Tuples[{1.,  -1.},  3];
(* symmetrized distances (1/8) Sum_s |p_i - s x_j| *)
对称距离[P_, X_] :=平均值[表格[
距离矩阵[P, 转置[s 转置[X]]] ,{s, 八分体符号}]]

椭球 M 加 QP[坐标轴_, n_整数, tol_ : 10^-9]:=
模块[{u , X, D, m, one, lamS, t, w, S, s, Mn, U, viol, 它 = 0},
u = 八分体节点[n]; X =转置[N[坐标轴]转置[u]];
D = 对称距离[X, X]; m = 长度[X]; one = 常量数组[1., m];
lamS = 1/总和[线性求解[D, one]];          (* signed discrete constant *)
t = 1.01 lamS;                            (* makes t J - D positive semidefinite *)
w = 二次优化[
{2 (t 常量数组[1., {m, m}] - D),          常量数组[0。, m]},
{单位矩阵[m, 稀疏数组], 常量数组[0。, m]},
{{one} , {-1.}}];
(* polish: exact active-set solve starting from the QP support *)
S = 展平@位置[w , _?(# > tol Max[w] &)];
While循环[它++ < 100,
s = 线性求解[D[[S, S]], 常量数组[1。, 长度[S]]];
如果[最小值[s] < 0 , S =选取[S , 正[s]]; 继续[]];
Mn = 1/总和[s]; w = 常量数组[0., m]; w[[S]] = Mn s;
U = D . w;
viol = 补集[展平@位置[U - Mn, _?(# > 10^-13 &)], S];
如果[viol === {} , 中断[]]; S = 并集[S, viol]];
<|"n" ->米,  "有效点" -> 8 m,  "有符号离散量" -> lamS,
"下界" -> w . D . w,  "支集" -> 长度[S],
"KKT 违约量" -> Max[U] - Mn , "节点" -> X , "u" -> u ,
"权重" -> w|>]

(* upper bound 2 max U - I(w); U has octant symmetry *)
椭球 M+ 上界[res_关联, 坐标轴_, ng_: 200] : =
模块[{X = res["节点"] ,w = res["权重"],  lo =res["下界"],
th, ph, G, Ug, 最佳, Uf, fm},
{th, ph} = 转置@展平[外积[列表, 细分[0。, Pi/2, ng],
细分[0。, Pi/2, ng]], 1];
G = 转置[N[坐标轴] {正弦函数[th]余弦函数[ph], 正弦函数[th] 正弦函数[
ph], 余弦函数[th]}];
```

```
Ug = 对称距离[G, X] 。w; 最佳 = 转置[{th, ph}][[首先@排序[Ug, -1]]];
Uf[a_?数值判定, b_?数值判定]:= 首先[对称距离[{N[坐标轴] {正弦函数[a]
余弦函数[b], 正弦函数[a] 正弦函数[b], 余弦函数[a]}},X] 。w]; fm =
首先@求最大值[{Uf[a, b], 0 <= a <= Pi/2, 0 <=b <=Pi/2}, {{a, best[[1]]},
{b, best[[2]]}}]; <|" 下界 " -> lo, " 上界 " -> 2Max[fm, Max[Ug]] - lo, "
maxU" -> Max[fm, Max[Ug]]|>]
```

### E.3 检验和示例

```
ax ={平方根[3/2], 1, 平方根[5]/2};

(* basis and quadrature: about 1e-13 *)
椭球 M 谱[ax, 20]["Gram误差"]
(* sphere of radius 1: about 1e-16 *)
椭球 M 谱[{1, 1, 1}, 10]["M"] - 4/3

(* convergence in L, machine precision *)
表格形式[表格[使用[{r =椭球 M 谱[轴, L],
{L, NumberForm[r["M"], 16], ScientificForm[最后[r["度范数"]], 3],
r["最小 rho"]}], {L, 0, 24, 4}]]

(* 50 digits: compare two precisions, then print *)
椭球 M 谱[轴, 48, 工作精度 -> 70, "额外节点" -> 60]["M"] -
椭球 M 谱[ax, 48, 工作精度 -> 60]["M"]
NumberForm[椭球 M 谱[ax, 56, 工作精度 -> 60]["M"], 55]

(* the ellipsoid: support fraction about 0.75, upper below M *)
With[{r = 椭球 M 加 QP[ax, 4000]},
{r["n"], r["支集"], NumberForm[r["下界"], 14], r["KKT 违约量"],
NumberForm[椭球 M+ 上界[r, ax]["上界"], 14]}]
```


### 致谢

Anthropic Claude Opus 5.5 在将我的猜想转化为定理的过程中发挥了至关重要的作用：如果仅仅说该人工智能模型“提供了协助”，那就远远不足以概括其贡献。在论文的每个方面，它始终承担了绝对不可或缺的研究角色。本研究未获得任何人工智能资助。我对最大能量的兴趣始于多年前（参见 [8]）。


## 参考资料


[1] R. Alexander, 《度量几何的两篇笔记》, 美国数学会会刊 64（1977）317–320。

[2] R. Alexander 和 K. B. Stolarsky, 《与能量积分相关的距离几何极值问题》, 美国数学会汇刊 193 （1974）: 1–31。

[3] G. Bj¨orck, 最大化某个广义能量积分的正质量分布, 《数学档案》3（1956）255–269。

[4] D. Bilyk 和 F. Dai，球面上的测地距离黎兹能量，《美国数学会汇刊》372（2019）3141–3166。[5] S. V. Borodachov、D. P. Hardin 和 E. B. Saff，《可求长集合上的离散能量》，Springer，2019。[6] J. S. Brauchart、P. D. Dragnev 和 E. B. Saff，轴支撑外场作用下球面上的黎兹极值测度，《数学分析与应用杂志》356（2009）769–792。[7] J. Cleary、S. A. Morris 和 D. Yost，数值几何——形状的数值，《美国数学月刊》93（1986）260–275。[8] S. R. Finch，《数学常数 II》，剑桥大学出版社，2019；§3.12，电容。[9] I. Glicksberg，上半连续和下半连续收益的极小极大定理，RAND 研究备忘录 RM-478，1950。[10] O. Gross，度量空间的会合值，载于《博弈论进展》（M. Dresher、L. S. Shapley 和 A. W. Tucker 编），《数学年鉴研究》52，普林斯顿大学出版社，1964，第49–53页。[11] A. Hinrichs、P. Nickolas 和 R. Wolf，关于单位球的度量几何的一则注记，《数学杂志》268（2011）887–896。[12] G. Larcher、W. Ch. Schmid 和 R. Wolf，关于距离几何中出现的某些质量分布的逼近，《匈牙利数学学报》87（2000）295–316。[13] S. A. Morris 和 P. Nickolas，关于紧致连通度量空间的平均距离性质，《数学档案》40（1983）459–463。[14] P. Nickolas 和 R. Wolf，拟超度量空间中的距离几何 I，《澳大利亚数学会公报》80（2009）1–25。[15] P. Nickolas 和 R. Wolf，拟超度量空间中的距离几何 II，《数学新闻》284（2011）332–341。[16] P. Nickolas 和 R. Wolf，拟超度量空间中的距离几何 III，《数学新闻》284（2011）747–760。[17] P. Nickolas 和 R. Wolf，有限拟超度量空间，《匈牙利数学学报》124（2009）243–262。.[18] G. P´olya 和 G. Szeg˝o，关于平面和空间点集的超限直径（容量常数），《纯粹与应用数学杂志》165（1931）4–49。[19] K. B. Stolarsky，球面上点之间的距离之和 II，《美国数学会会刊》41（1973）575–582。[20] G. J. Sz´ekely 和 M. L. Rizzo，能量统计量：一类基于距离的统计量，《统计规划与推断杂志》143（2013）1249–1272。[21] R. Wolf，关于平均距离性质和某些能量积分，《数学档案》35（1997）387–400。