库舍尔–佳格洛夫问题、最佳 Schoenberg 型不等式以及零点与临界点之间的主序关系

Teng Zhang

摘要。 本文给出了 Schoenberg 猜想的纯复分析证明。我们还确定了对每个实指数 $p > 0$ 和每个次数$n \geq 2$而言 Schoenberg 型不等式中的最佳常数，并刻画了所有相应的极值构型。特别地，我们证实了 [TZ25] 中提出的两个猜想，并完整解决了 Kushel 和 Tyaglov 提出的一个问题。此外，我们引入了称为加权弱主序的工具，并在零质心条件下，建立了临界点模与零点模之间新的弱主序关系。作为这些关系的推论，我们改进了若干已知结果。

arXiv:2611.31058v1 [math.CV] 23 Nov 2026

1. 引言

1.1. **库舍尔–佳格洛夫问题与最佳 Schoenberg 型不等式**。设 $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ 是一个次数为 $n \geq 2$ 的复多项式，其零点为 $z_1, \ldots, z_n$，且临界点 $w_1, \ldots, w_{n-1}$，即 $p'(z)$ 的零点。

1986 年，Schoenberg [Sch86] 猜想：若零点的质心位于原点，即 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$，则二次不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^2 \leq \frac{n-2}{n} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \tag{1.1}$$

成立，且当且仅当所有零点在复平面上共线时等号成立。根据 [DIS99], 中的等价表述，Schoenberg 猜想分别由 Pereira [Per03], 利用微分器理论，以及 Malamud [Mal05], 利用逆谱理论和正规矩阵的主化独立证明。随后，Cheung 和 Ng [CN06], 利用伴随矩阵，Kushel 和 Tyaglov [KT16], 利用循环矩阵给出了其他证明。

尽管如上所述，Schoenberg 猜想自然地源自复分析，但现有的所有证明都依赖矩阵理论的方法。这自然引出了以下问题。

问题 1.1. *Schoenberg* 猜想能否通过纯粹的复分析方法证明？

本文将在第 2 节给出 Schoenberg 猜想的纯复分析证明，从而回答问题 1.1。证明的主要步骤如下。

- 利用牛顿恒等式，我们将 Schoenberg 不等式化简为一个涉及临界点虚部的不等式。
- 我们引入一个全纯多项式族，并在.....上构造一个次调和函数
  上半平面。
- 我们应用最大值原理来证明所需的不等式。等号情形由强最大值原理得出。

Schoenberg 不等式 (1.1) 此后启发出一大类将零点与临界点的高阶矩联系起来的不等式，通常称为 Schoenberg 型不等式。四阶情形由 Cheung 和 Ng [CN06] 证明，随后 Kushel 和 Tyaglov [KT16]进一步改进。Tang [Tan25] 得到了分别为一阶和六阶的不等式。最近，Tang 与作者 [TZ25] 证实了 Georgiev、Gómez-Serrano、Tao 和 Wagner [GGTW26] 关于四阶 Schoenberg 型不等式的两个猜想，从而完整解决了起源于 [DS99]的 de Bruin–Sharma 问题。关于高阶 Schoenberg 型不等式的更多进展，请参阅 [LXZ21, Zha26b]。除了本身具有研究价值外，这些不等式还可应用于多项式临界点的几何。作为 (1.1) 的一项应用，作者 [Zha26a, Zha27] 对 Pawłowski [Paw98] 给出的界作了显著改进，该界刻画了零点质心到最近临界点的距离，

日期：2026年11月23日。2020 数学主题分类。 主要分类30C15；次要分类15A42、26D15、31A05。关键词和短语。 多项式临界点、Schoenberg 不等式、主化、幂和、格林函数。

一个与 Schmeisser 猜想密切相关的问题 [Sch77], 该问题后来由作者解决[Zha26d]。

Kushel 和 Tyaglov [KT16，第 5] 节强调了用零点表示高阶迹表达式的困难，并提出了以下问题。

问题 1.2 ([KT16])。 设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$、零点为 z_1、.. .、 z_n 且临界点为 w_1、.. .、 w_{n-1}的复多项式，重数均计入。假设 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$。是否可以估计$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^m$ 对于 $m \in \mathbb{N}$?

更一般地说，我们关注以下问题。

问题 1.3。 设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$ 的复多项式，其零点为 z_1、.. .、 z_n，临界点为w_1、. . .、 w_{n-1}，重数均计入。假设 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$。确定满足以下条件的最优常数 $C_{n,\,p}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p \leq C_{n,p} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p.$$

如果去掉零质心条件，最优常数是什么$C_{n,\ p}$ ？

本文完整解决了问题 1.3，从而回答了问题 1.2。中心化情形和非中心化情形中的最优常数均汇总于表 1 中。在表中， m 为正整数。对于 $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$，具有重数 k 和 $n-k$ 的中心化列表，其比值为

$$R_{n,p}(k) = \frac{(k-1)(n-k)^p + (n-k-1)k^p + (n-2k)^p}{k(n-k)^p + (n-k)k^p}.$$

$C(n,\ p)$	n, p	质心	参考文献
$\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}}$	$n \geq 2, \quad 0 < p \leq 1$	0	定理 1.4
最大值 $\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}}, \text{最大值}_k \ R_{n,\,p}(k)\right\}$	$n \geq 2, \quad 1 < p < 2$	0	定理 1.5
$\frac{n-2}{n}$	$n \geq 2, \quad p = 2$	0	Pereira [Per03], Malamud [Mal05]
$\frac{n-2}{n}$	$n = 2m, \quad p > 2$	0	定理 1.6
$R_{3,\,p}(1)$	$n = 3, \quad 2 < p \leq 4$	0	命题 7.1
$3^{-\frac{p}{2}}$	$n = 3, \quad p > 4$	0	命题 7.1
$R_{n,\,p}\big((n-1)/2\big)$	$n = 2m+3, \quad p > 2$	0	定理 1.7
$\left(\frac{n-1}{n}\right)^p$	$n \geq 2, \quad 0 < p < 1$	任意	定理1.9
$\frac{n-1}{n}$	$n \geq 2, \quad p \geq 1$	任意	de Bruijn–Springer [DS47]

表 1. 复多项式的零点和临界点的幂和不等式中的最优常数。

定理 1.4. 设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$ 的复多项式，其零点为 $z_1, \ldots, z_n$，临界点为$w_1, \ldots, w_{n-1}$，均按重数计。假设 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$ 且 $0 < p \leq 1$。则

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p \leq \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p.$$

当且仅当 $p(z) = cz^{n-2}(z^2 - a^2)$时等号成立，其中 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 且 $a \in \mathbb{C}$。

对于 $n \geq 4$，Tang and Zhang [TZ25，定理 4.7] 通过复插值，得到了 $1 < p < 2$ 的一个界。下一个定理给出了 $1 < p < 2$的最佳常数。

定理 1.5。 设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$、零点为 $z_1, \ldots, z_n$ 且临界点为$w_1, \ldots, w_{n-1}$的复多项式，零点和临界点均按重数计。假设 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$ 且 $1 < p < 2$。那么

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p \leq \max\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}}, \max_{1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor} \frac{(k-1)(n-k)^p + (n-k-1)k^p + (n-2k)^p}{k(n-k)^p + (n-k)k^p}\right\} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p.$$

该常数是最佳的。除 $p(z) = cz^n$外，等号成立的多项式恰为以下这些，其中$a, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$：若第一项取得最大值，则为 $cz^{n-2}(z^2 - a^2)$；对于第二项中每个极大化索引 k，则为 $c(z-(n-k)a)^k(z+ka)^{n-k}$。并列时包含所有极大化族。

我们的定理 1.6 和 1.7 分别证实了 [TZ25中的两个猜想，即猜想 1.6 和 1.7], 。

定理 1.6。设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$、零点为 z_1、…、z_n 且临界点为w_1、…、w_{n-1}的复多项式，所有零点和临界点均按重数计。假设 $\sum_{j=1}^n z_j = 0$ 和 $p \geq 2$。则

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p \leq \frac{n-2}{n} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p.$$

对于 $p = 2$，等式 成立当且仅当零点共线。对于 $p > 2$ 和非零根列表，等式 *lity* 恰好成立 当且仅当 n 为偶数且 $p(z) = c(z^2 - a^2)^{\frac{n}{2}}$ 对于非零 $a, c \in \mathbb{C}$。

定理 1.7。设 $p(z)$ 是一个奇数次复多项式 $n \geq 5$，其零点为 z_1、…、z_n，临界点为w_1、…、w_{n-1}，均按重数计。假设 $\sum_{j=1}^n z_j = 0$ 且 $p \geq 2$。则

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p \leq \frac{(n-3)(n+1)^p + (n-1)^{p+1} + 2^{p+1}}{(n-1)(n+1)^p + (n+1)(n-1)^p} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p.$$

对于 $p = 2$，当且仅当零点共线时等号成立。对于 $p > 2$，所有具有非零根列表的等号情形为 $p(z) = c(z-(n+1)a)^{\frac{n-1}{2}}(z+(n-1)a)^{\frac{n+1}{2}}$，其中 a、$c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。

注 1.8。在 [TZ25], 中，作者建立了 $n = 4$ 定理 *1.6* 和 *1.7*的等号情形。他们还证实了 *Georgiev*、*Gómez-Serrano*、*Tao* 和 *Wagner* 的两个猜想 [GGTW26]，这些猜想涉及四阶 *Schoenberg* 型不等式。这些结果解决了 *de Bruin–Sharma* 问题。

对于 $p \geq 1$，de Bruijn 和 Springer [DS47 的定理 4] 在不对质心作任何假设的情况下证明了（1.2）。同一不等式也可由 Pereira 的凸函数不等式 [Per03，推论 5 得到。5]。基于复插值的另一种证明见 [TZ25]。

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p \leq \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p. \tag{1.2}$$

对于 $p = 1$，当且仅当所有零点都位于从原点出发的同一条闭射线上时，等号成立。对于 $p > 1$，当且仅当所有零点重合时，等号成立。取 $p(z) = (z-a)^n$，并令 $a \neq 0$，可得比值 $(n-1)/n$ 对每个 $p \geq 1$均成立。下面的定理将（1.2）扩展到范围 $0 < p < 1$，并给出最佳常数。

定理 1.9。设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$ 的复多项式，其零点为 z_1、……、z_n，临界点为w_1、……、w_{n-1}，均按重数计。若 $0 < p < 1$，则

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^p \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p.$$

对于每个固定的数对 n, p，该常数是最佳的。若 $z_1, \ldots, z_n$ 不全为零，则当且仅当 $p(z)$ 是某个 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的非零标量倍时，等号成立。

1.2. 零点与临界点之间的主序关系。设 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，令 $x^{\downarrow} = (x_1^{\downarrow}, \ldots, x_n^{\downarrow})$ 表示其分量的非递增重排。

给定 $x, y \in \mathbb{R}^n$，称 x 被 y 弱主序，记作 $x \prec_w y$，如果

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^{\downarrow} \leq \sum_{j=1}^{k} y_j^{\downarrow}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

此外，若 $\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n y_j$，，则称 x 被 y 主序，记作 $x \prec y$。

类似地，对于 $x, y \in \mathbb{R}_+^n$，称 x 被 y 弱对数主序，记作 $x \prec_{w\log} y$，如果

$$\prod_{j=1}^{k} x_j^{\downarrow} \leq \prod_{j=1}^{k} y_j^{\downarrow}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

此外，如果 $\prod_{j=1}^n x_j = \prod_{j=1}^n y_j$，那么 x 被 y对数主序，记作 $x \prec_{\log} y$。特别地，弱对数主序蕴含弱主序；也就是说，

$$x \prec_{w\log} y \quad \Longrightarrow \quad x \prec_w y. \tag{1.3}$$

关于主序理论的全面论述，请参阅 Marshall–Olkin–Arnold [MOA11]。

Schmeisser [Sch04，推论 4] 建立了以下关于多项式零点与临界点的模的主序关系。

Schmeisser定理。设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$、零点为 z_1、…、z_n 且临界点为 w_1、…、w_{n-1}的复多项式，其中零点和临界点均按重数计。则

$$(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|, 0) \prec_{w \log} (|z_1|, \ldots, |z_n|).$$

利用（1.3），Schmeisser定理意味着 $(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|, 0) \prec_w (|z_1|, \ldots, |z_n|)$。

Malamud [Mal05，定理 47]和 Pereira [Per03，定理 54]。独立地得到了一个更强的几何主序关系。

Pereira–Malamud定理。设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$、零点为 z_1、…、z_n 且临界点为 w_1、…、w_{n-1}的复多项式，其中零点和临界点均按重数计。则

$$(w_1, \ldots, w_{n-1}, n^{-1} \sum_{j=1}^{n} z_j) \prec (z_1, \ldots, z_n),$$

其中，主化是在复向量意义下理解的，等价地说，即存在一个双随机矩阵。

By PPereira 的凸性推论 [Per03，推论 5。5], 每个凸函数 $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(w_k) \leq \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(z_j).$$

分别取 $\varphi(\zeta) = |\zeta|^p$、$\varphi(\zeta) = |\operatorname{Re} \zeta|^p$ 和 $\varphi(\zeta) = |\operatorname{Im} \zeta|^p$，则对于 $p \geq 1$，有

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p \leq \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p, \quad \sum_{k=1}^{n-1} |\operatorname{Re} w_k|^p \leq \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re} z_j|^p, \quad \sum_{k=1}^{n-1} |\operatorname{Im} w_k|^p \leq \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Im} z_j|^p. \tag{1.4}$$

如上所述，研究 Schoenberg 型不等式的一个核心情形是零点的质心位于原点。当增加这一假设时，可以改进前述估计中的常数。为此，我们建立一个加权弱主序框架，从而为具有零质心的多项式给出更精确的常数。特别地，当 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$时，我们改进（1.4）中的系数。

定义 1.10（加权弱主序）。令 $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m$、$y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$，以及$\gamma \geq 0$。我们称 x 被 y 以权函数 γ弱主序于，记作 $x \prec_{w,\,\gamma} y$，如果

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - t)_+ \leq \gamma \sum_{j=1}^{n} (y_j - t)_+, \qquad t \geq 0, \tag{1.5}$$

其中 $(s)_+ =$ 最大值$\{s,0\}$。

对于 x，$y \in \mathbb{R}_+^n$，通常的弱主序 $x \prec_w y$ 等价于

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - t)_+ \leq \sum_{j=1}^{n} (y_j - t)_+, \qquad t \geq 0.$$

因此，当 $\gamma = 1$ 且 $m = n$时，定义 1.10 退化为通常的弱主序。一般而言，$x \prec_{w,\,\gamma} y$ 不等价于 $x \prec_w \gamma y$。

下面的引理用递增凸函数刻画了加权弱主序；其证明见第5节。

引理 1.11。设 $x \in \mathbb{R}_+^m$、$y \in \mathbb{R}_+^n$和 $\gamma \geq 0$。则 $x \prec_{w,\,\gamma} y$ 当且仅当，对于每个满足 $\Phi(0) = 0$的递增凸函数 $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，

$$\sum_{i=1}^{m} \Phi(x_i) \leq \gamma \sum_{j=1}^{n} \Phi(y_j).$$

我们首先建立临界点的模与零点的模之间的加权弱主化关系。

定理 1.12. 设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$ 的复多项式，其零点为 $z_1, \ldots, z_n$，临界点为$w_1, \ldots, w_{n-1}$，均按重数计。假设 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$。则

$$(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|) \prec_{w, \sqrt{\frac{n-2}{n}}} (|z_1|, \ldots, |z_n|).$$

注 1.13。 在定理1.12的假设下，引理 1.11 给出

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Phi(|w_k|) \leq \sqrt{\frac{n-2}{n}} \sum_{j=1}^{n} \Phi(|z_j|) \tag{1.6}$$

对于每个递增凸函数 $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 且满足 $\Phi(0) = 0$。对于 $n = 2$ 两边均为零，因为唯一的临界点是零点。

在 *(1.6)* 中取 $\Phi(t) = t$ 即可得到 *Tang* 的一阶不等式 [*Tan25*, 定理 *3.*4]。*Tang* [*Tan25*, 注 *3.*5] 询问了其一阶不等式的凸函数扩展。定理 *1.12* 为在原点处为零的径向凸函数给出了这样的扩展。归一化很重要，因为常函数 *1* 要求 $n - 1 \leq n\sqrt{(n-2)/n}$。对于归一化的径向函数，中心化系数小于 *Pereira* 不等式 [*Per03*, 推论 *5.*5]中的 $(n-1)/n$。

定理 1.12 比较了这些模。对于它们的平方，权函数改进为 $(n-2)/n$。

定理 1.14。 设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$、零点为 $z_1, \ldots, z_n$、临界点为$w_1, \ldots, w_{n-1}$的复多项式，其中零点和临界点均按重数计。假设 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$。那么

$$(|w_1|^2, \ldots, |w_{n-1}|^2) \prec_{w, \frac{n-2}{n}} (|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2).$$

注 *1.15*。在定理 *1.14* 的假设下，对于满足 $\Phi(0) = 0$ 的任意递增凸函数 $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，引理 *1.11* 给出 $\sum_{k=1}^{n-1} \Phi(|w_k|^2) \leq \frac{n-2}{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi(|z_j|^2)$。因此，在零质心假设下，对于形如 $\zeta \mapsto \Phi(|\zeta|^2)$ 的函数，*Pereira* 不等式 [*Per03, Corollary 5.*5] 的系数更小。对于 $p \geq 2$，取 $\Phi(t) = t^{\frac{p}{2}}$，即可得到定理 *1.6* 中的不等式。

接下来我们考虑经过原点的直线的投影。对于 $\theta \in \mathbb{R}$ 和 $\zeta \in \mathbb{C}$，记 $L_\theta(\zeta) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\zeta)$。下一个定理比较投影零点和临界点的绝对值。

定理 1.16。 设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$ 的复多项式，其零点为 $z_1、\ldots、z_n$，临界点为$w_1、\ldots、w_{n-1}$，并按重数计。假设 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$。那么，对于每个 $\theta \in \mathbb{R}$，

$$\big(|L_\theta(w_1)|, \ldots, |L_\theta(w_{n-1})|\big) \prec_{w, \sqrt{\frac{n-2}{n}}} \big(|L_\theta(z_1)|, \ldots, |L_\theta(z_n)|\big).$$

注 1.17。 固定 $\theta \in \mathbb{R}$。定理 *1.16* 和引理 *1.11* 给出

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Phi(|L_\theta(w_k)|) \leq \sqrt{\frac{n-2}{n}} \sum_{j=1}^{n} \Phi(|L_\theta(z_j)|) \tag{1.7}$$

对于每个满足 $\Phi(0) = 0$的递增凸函数 $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$。由于 $\zeta \mapsto \Phi(|L_\theta(\zeta)|)$ 在$\mathbb{C}$上是凸函数，*(1.7)* 改进了单投影函数 [的 *Pereira* 系数，参见 *Per03*，推论 *5.*5]。结合 *(1.6)* 和 *(1.7)*，将 *Tang* 的一阶界 [（参见 *Tan25*，定理 *3.*4] ）推广到了径向函数和单投影函数。

与模比较一样，对于投影绝对值的平方可以得到更强的估计。

定理 1.18。 设 $p(z)$ 是一个次数为 $n \geq 2$ 的复多项式，其零点为 $z_1、\ldots\ldots、z_n$，临界点为$w_1、\ldots\ldots、w_{n-1}$，均按重数计。假设 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$。那么，对于每个 $\theta \in \mathbb{R}$，

$$\big(|L_\theta(w_1)|^2, \ldots, |L_\theta(w_{n-1})|^2\big) \prec_{w, \frac{n-2}{n}} \big(|L_\theta(z_1)|^2, \ldots, |L_\theta(z_n)|^2\big).$$

注 *1.19.* 对每个 $\theta \in \mathbb{R}$ 以及每个满足 $\Phi(0) = 0$ 的递增凸函数 $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，定理 *1.18* 得出 $\sum_{k=1}^{n-1} \Phi(|L_\theta(w_k)|^2) \leq \frac{n-2}{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi(|L_\theta(z_j)|^2)$。对于凸函数 $\zeta \mapsto \Phi(|L_\theta(\zeta)|^2)$，*Pereira* 不等式 [*Per03*，推论 *5.*5] 中的系数 $(n-2)/n$ 小于 $(n-1)/n$。

1.3. **本文结构**。 第2 节通过将最大值原理应用于证明 Schoenberg 猜想 (1.1)，从而回答问题 1.1第节证明定理 1.4 适用于中心化零点和 $0 < p \le 1$，以及定理 1.9 适用于质心任意的零点和 $0 < p < 1$。对于 $1 < p < 2$，第 4 节通过化归到实零点多项式，并应用附录 A中的矩估计，证明定理 1.5 。

第 5 节证明了引理 1.11 ，并建立了对角矩阵压缩的奇异值界。第 6 节证明了关于零点和临界点模的定理 1.12 。第 7 节证明了关于幂和、模平方以及到经过原点的直线的投影的定理 1.6、1.14、1.16和 1.18 。命题 7.1 给出了中心化三次多项式在 $p > 2$时的最佳常数。

第 8 节证明了奇数次数 $n \ge 5$下的定理 $2 < p < 3$。对于 $p \ge 3$，证明使用了附录 C 中的对数比较。对于 $p \ge 3$，附录 C 将实极值问题化归为至多具有三个不同零点的多项式，并证明了三次尾部不等式。附录 D 给出了区块分配和精确算术证书。配套的 Python 脚本可在 GitHub [Zha26c]上获取。

1.4. **致谢与 AI 工具披露**。 本研究得到国家留学基金管理委员会、中国科学技术协会中国科协青年人才托举工程博士生专项计划，以及西安交通大学中央高校基本科研业务费（项目编号：xzy022024045）的资助。

在寻求定理1.6的证明时，作者建立了本文所采用的加权弱主序框架，并给出了第 1.2 小节中介绍的模与投影比较；参见作者关于加权弱主序的早期笔记。在就本项目咨询 ChatGPT 6.0（OpenAI）之前，作者还独立获得了定理 1.4 和 1.9的证明。

作者曾猜想定理 1.5中确立的界，并与 Tang 共同提出了定理 1.7中确立的奇数次界。通过应用 Pereira投影定理 [Per03，定理 4。6],作者将这两个猜想都归结为关于实零点多项式的不等式。然而，作者尚未找到这两个实根不等式的证明。ChatGPT 6.0 提出了本文用于建立这两个不等式的方法。它还提出了第 2 节中给出的 Schoenberg 猜想的复分析证明，该证明基于次调和函数的最大值原理。

ChatGPT 6.0 用于英语编辑、校对、语法修正，以及就本文部分内容可能采用的方法进行探索性讨论。原稿中的数学论证和证明均由作者独立构思、核查并撰写。

2. Schoenberg 猜想的复分析证明

我们通过将最大值原理应用于上半平面上的次调和函数来证明（1.1）。该论证依赖于以下恒等式。

引理 2.1。 设 f 在包含于上半平面的区域内全纯。则

$$\Delta_t\left(\frac{(\operatorname{Im} f(t))^2}{\operatorname{Im} t}\right) = \frac{2}{\operatorname{Im} t}\left|f'(t) - \frac{\operatorname{Im} f(t)}{\operatorname{Im} t}\right|^2, \tag{2.1}$$

其中， Δ_t 表示平面拉普拉斯算子。

证明。 令 $t = u + iv$其中 $v > 0$，并设 h（u，v）$= \operatorname{Im} f$（$u + iv$）。由于 h是调和函数，直接求导得到 $\Delta_t\left(\frac{h^2}{v}\right) = \frac{2}{v}\left(h_u^2 + \left(h_v - \frac{h}{v}\right)^2\right)$。柯西–黎曼方程给出 $h_u = \operatorname{Im} f'$（$t$）以及 $h_v = \operatorname{Re} f'$（$t$），从而证明了（2.1）。 □

Schoenberg 猜想的证明 (1.1)。 如果所有零点重合，则质心条件给出 $p(z) = z^n$，且等号成立。否则，经过旋转可使不同零点的虚部两两不同。这种旋转保持了 (1.1) 的两边以及等号成立条件。

步骤 *1*：归约为投影不等式。 令 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$为实多项式$\prod_{j=1}^{n}(x - \operatorname{Im} z_j)$的临界点。 牛顿恒等式中的前两个 [BE95，第 5 页，练习 E。2], 应用于 $p(z)$、 $p'(z)/n$以及投影多项式，可得

$$\sum_{k=1}^{n-1} w_k^2 = \frac{n-2}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j^2, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k^2 = \frac{n-2}{n}\sum_{j=1}^{n}(\operatorname{Im} z_j)^2. \tag{2.2}$$

由于 $|z|^2 = \operatorname{Re}(z^2) + 2(\operatorname{Im} z)^2$, 方程（2.2）意味着

$$\frac{n-2}{n}\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 - \sum_{k=1}^{n-1}|w_k|^2 = 2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(\operatorname{Im} w_k)^2\right). \tag{2.3}$$

因此（1.1）等价于

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\operatorname{Im} w_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n-1}\eta_k^2. \tag{2.4}$$

步骤 *2*：一个全纯族及其渐近行为。对于 $t\in\mathbb{C}$，考虑多项式

$$p_t(w)=\prod_{j=1}^{n}\big(w-\operatorname{Re} z_j - t\operatorname{Im} z_j\big), \tag{2.5}$$

并将其临界点记为 $w_1(t)\dots,w_{n-1}(t)$。当 $t=i$时，(2.5) 给出 $p_i(z)=p(z)$；对于实数 t， p_t 的所有零点和临界点都是实数。

对于 $\operatorname{Im} t>0$，Gauss–Lucas定理 [BE95，第 18 页，定理 1.3。1] 给出

$$\min_{1\le j\le n}\operatorname{Im} z_j \le \frac{\operatorname{Im} w_k(t)}{\operatorname{Im} t}\le \max_{1\le j\le n}\operatorname{Im} z_j, \qquad 1\le k\le n-1, \tag{2.6}$$

因为每个临界点都属于 p_t 的零点的凸包。

接下来我们确定当 $|t|\to\infty$ 时临界点的行为。令 $a_1,\dots,a_s$ 为 $p(z)$ 的不同零点，其重数为 $m_1,\dots,m_s$，并按如下方式编号：$\operatorname{Im} a_1<\cdots<\operatorname{Im} a_s$. 对于每个 t， p_t 的导数可分解为

$$p_t'(w)=\prod_{j=1}^{s}(w-\operatorname{Re} a_j - t\operatorname{Im} a_j)^{m_j-1}\sum_{j=1}^{s} m_j\prod_{\ell\ne j}(w-\operatorname{Re} a_\ell - t\operatorname{Im} a_\ell). \tag{2.7}$$

只有当 t 为实数时，$\operatorname{Re} a_j + t\operatorname{Im} a_j$ 的两个不同值才可能重合，因为虚部 $\operatorname{Im} a_j$ 两两不同。除去这有限多个参数后，第一个因子给出继承临界点，其重数为 m_j-1。另外的 $s-1$ 个临界点是下式的解

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{m_j}{w-\operatorname{Re} a_j - t\operatorname{Im} a_j}=0. \tag{2.8}$$

令 $w=t\xi$，并令 $|t|\to\infty$，得到极限方程

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{m_j}{\xi-\operatorname{Im} a_j}=0. \tag{2.9}$$

（2.9）的左端在每个区间 （$\operatorname{Im} a_j$，$\operatorname{Im} a_{j+1}$）上严格递减，并在相应端点处分别趋于 $+\infty$ 和 $-\infty$。因此，它恰有 $s-1$ 个单实零点，每个区间内各有一个。再加上 m_j-1 个 $\operatorname{Im} a_j$，方程（2.9）的单零点构成列表 η_1，……，η_{n-1}。

全纯隐函数定理 [FG02，第34页，定理7。6], 应用于参数 $1/t$ 在方程（2.9）每个单根附近的情形，表明当 $|t|$ 充分大时，可以为移动临界点标记，使其满足

$$w_k(t)=\eta_k t+b_k+\sum_{\ell=1}^{\infty}c_{k,\ell}t^{-\ell}, \qquad b_k,c_{k,\ell}\in\mathbb{R}. \tag{2.10}$$

由于对实数 t，定义这些分支的方程具有实系数，因此系数均为实数。（2.10）中的级数对充分大的 $|t|$ 均收敛；对于继承的分支，系数 $c_{k,\ell}$ 为零。

对每个整数 $\ell\ge 1$ 以及 $\operatorname{Im} t>0$， $|\operatorname{Im}(t^{-\ell})|\le {}^{\ell}\!\operatorname{Im}\frac{t}{|t|^{\ell+1}}$。因此，在式（2.10）中取虚部可得

$$\frac{\operatorname{Im} w_k(t)}{\operatorname{Im} t}=\eta_k+O(|t|^{-2}), \qquad |t|\to\infty,\quad \operatorname{Im} t>0. \tag{2.11}$$

式（2.11）中的误差是一致的，即使 t 趋近实轴也是如此。

式（2.7）中的和关于 $s-1$ 的次数为 w，首项系数为 n，且多项式系数属于 t。因此，其判别式是 t的多项式。根据式（2.9）的单根性质，当 $|t|$充分大时，该判别式非零。因此，自由临界点只能在有限多个参数值处发生碰撞。

步骤 *3*：最大值原理的应用。对于 $\operatorname{Im} t>0$，定义

$$F(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\operatorname{Im} w_k(t))^2}{\operatorname{Im} t}-(\operatorname{Im} t)\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k^2. \tag{2.12}$$

远离该　　对于碰撞参数，临界点存在局部全纯分支，因此引理 2.1给出　　es

$$\Delta_t F(t) = \frac{2}{\operatorname{Im} t} \sum_{k=1}^{n-1} \left| w_k'(t) - \frac{\operatorname{Im} w_k(t)}{\operatorname{Im} t} \right|^2 \geq 0. \tag{2.13}$$

临界点的多重集连续依赖于 t，因此 F 在每个碰撞参数处连续。为检验碰撞处的次调和性 t_0，取一个圆盘 $|t-t_0| \leq r$，其中不含其他碰撞点，且包含于上半平面内。令 h 在该圆盘内调和，并在其闭包上连续，且在 $F \leq h$的边界上成立。对于 $\varepsilon > 0$，$F - h + \varepsilon \log(|t-t_0|/r)$ 在外圆以及每个充分小的内圆上均为非正，因为 $F-h$ 有界。比较原理 [Con78，第265页，推论3。5] 给出了中间环域上的相同界。缩小内圆，然后令 $\varepsilon \downarrow 0$ 得到 $F \leq h$，由连续性，该不等式在整个圆盘内成立。因此 F 在 t_0处为次调和函数。

由（2.6），函数 F 可连续延拓到实轴，其边界值为零。此外，（2.11）和（2.12）给出

$$F(t) = O\left(\frac{\operatorname{Im} t}{|t|^2} \right), \qquad |t| \to \infty, \quad \operatorname{Im} t > 0. \tag{2.14}$$

对次调和函数应用最大值原理 [Con78，第 264 页，定理 3。3] 在上半圆盘$\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} t > 0, \quad |t| < R\}$上。直径上的边界值为零，而式（2.14）在半圆边界上给出了 F 的上界O（R^{-1}）。令 $R \to \infty$，得到

$$F(t) \leq 0, \qquad \operatorname{Im} t > 0. \tag{2.15}$$

当 $t = i$时，得到式（2.4）。现在，由方程（2.3）可得式（1.1）。

步骤 *4*：等号情形。现在假设式（1.1）取等号。由方程（2.3）和（2.12）可得 F（i）$= 0$。强最大值原理 [Con78，第 264 页，定理 3。2],结合式（2.15），可推出 F 恒等于零。

由式（2.13），临界点的每个局部全纯分支都满足

$$w_k'(t) = \frac{\operatorname{Im} w_k(t)}{\operatorname{Im} t}. \tag{2.16}$$

导数 w_k' 是全纯且取实值的，因此是常数。由方程（2.16）可知，每个分支都是关于 t的仿射函数，且系数为实数。

选择　极限斜率为 $\eta \in$（Im a_{s-1}，Im a_s）的自由分支。根据（2.10）和（2.16），它具有以下形式　m

$$w(t) = \eta t + b, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

代入（2.8）得到有理恒等式

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{m_j}{(\eta - \operatorname{Im} a_j)t + b - \operatorname{Re} a_j} = 0. \tag{2.17}$$

第 j个加项在$\operatorname{Re}\eta - {}^{a_j - b}_{a_j \operatorname{Im}}$处有一个实极点，其留数为$\eta - {}^{m_j}_{\operatorname{Im} a_j}$·根据 η的选择，前 $s-1$个留数为正，最后一个为负。由于（2.17）中的和恒等于零，每个带正留数的极点都必须与带负留数的极点重合。因此，所有极点都重合。

因此，存在 $\tau \in \mathbb{R}$ 使得

$$\operatorname{Re} a_j + \tau \operatorname{Im} a_j = b + \tau\eta, \qquad 1 \leq j \leq s. \tag{2.18}$$

式（2.18）表明，p（z）的所有零点都位于一条直线上。

反之，如果中心化零点共线，通过旋转可使所有零点均为实数。随后由罗尔定理得到实临界点，并且（2.2）在（1.1）中给出等号。这就完成了证明。□

3. 定理 1.4 和1.9 的证明

对于 $k = 1$，下一个引理中的初等对称函数界归功于 Erdős 和 Niven [EN48]。一般情形由 Malamud 的凸函数不等式推出。

引理 3.1（[Mal05，定理 4.10]）。设 z_1、z_2、……、z_n 是复多项式 p（z）的零点，其次数为$n \geq 2$，并设 w_1、w_2、……、w_{n-1} 是其临界点。则

$$e_k(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|) \leq \frac{n-k}{n} e_k(|z_1|, \ldots, |z_n|), \qquad 1 \leq k \leq n-1,$$

其中，e_k 表示第 k 个初等对称多项式。

引理 3.2。 设 $0 < p < 1$。那么，对于每个 $a \geq 0$,

$$a^p = \frac{p \sin(\pi p)}{\pi} \int_0^\infty \log(1 + ta) t^{-p-1} \, \mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

证明。 当 $a = 0$ 时，该恒等式显然成立。假设 $a > 0$。作变量替换 $u = ta$，得到

$$\int_0^\infty \log(1 + ta) t^{-p-1} \, \mathrm{d}t = a^p \int_0^\infty \log(1 + u) u^{-p-1} \, \mathrm{d}u. \tag{3.2}$$

右侧的积分收敛，因为

$$\log(1 + u) u^{-p-1} = \begin{cases} O(u^{-p}), & u \to 0^+, \\ O(u^{-p-1} \log u), & u \to \infty, \end{cases}$$

且 $0 < p < 1$。

为计算该积分，我们在 $[\varepsilon, R]$ 上分部积分，其中 $0 < \varepsilon < R$:

$$\int_\varepsilon^R \log(1 + u) u^{-p-1} \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{p} \left[u^{-p} \log(1 + u) \right]_\varepsilon^R + \frac{1}{p} \int_\varepsilon^R \frac{u^{-p}}{1 + u} \, \mathrm{d}u.$$

边界 项消失，因为当 $u \downarrow 0$ 时， $u^{-p} \log(1+u) \sim u^{1-p}$; 当 $u \to \infty$ 时， $u^{-p} \log(1+u) \to 0$。他 nce

$$\int_0^\infty \log(1 + u) u^{-p-1} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{u^{-p}}{1 + u} \, \mathrm{d}u. \tag{3.3}$$

最后，代换 $s = u/(1 + u)$ 得到

$$\int_0^\infty \frac{u^{-p}}{1 + u} \, \mathrm{d}u = \int_0^1 s^{-p} (1 - s)^{p-1} \, \mathrm{d}s = B(1 - p, p) = \Gamma(1 - p)\Gamma(p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \tag{3.4}$$

其中，最后一个等号由欧拉反射公式得到。结合（3.2）、（3.3）和（3.4）即可证明引理 3.2 中的积分公式。□

定理 *1.4* 的证明。 当 $n = 2$ 时，质心条件意味着唯一的临界点为零。因此，不等式及其等号刻画便是显然的。下文设 $n \geq 3$。

情形 *1*：关于 $p = 1$ 的不等式。 根据引理 3.1，有

$$e_k(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|) \leq \frac{n - k}{n} e_k(|z_1|, \ldots, |z_n|), \qquad 1 \leq k \leq n - 1.$$

特别地， $e_2(|w_1|, \ldots\ldots, |w_{n-1}|) \leq \frac{n-2}{n} e_2(|z_1|, \ldots\ldots, |z_n|)$。将其与 Schoenberg 不等式（1.1）结合，得到

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n-1} |w_k| \right)^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^2 + 2e_2(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|) \\ &\leq \frac{n - 2}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 + 2e_2(|z_1|, \ldots, |z_n|) \right) \\ &= \frac{n - 2}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j| \right)^2. \end{aligned}$$

两边取平方根，得到

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k| \leq \left(\frac{n - 2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|. \tag{3.5}$$

公式（3.5）证明了情形 $p = 1$。

对于 $2 \leq k \leq n$，由伯努利不等式可得 $\left(\frac{n-2}{n} \right)^{\frac{k}{2}} = \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{\frac{k}{2}} \geq 1 - \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$。根据引理3.1和（3.5）可知

$$e_k(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|, 0) \leq \left(\frac{n - 2}{n} \right)^{\frac{k}{2}} e_k(|z_1|, \ldots, |z_n|), \qquad 1 \leq k \leq n, \tag{3.6}$$

其中， $k = n$ 的情形是平凡的。

将乘积展开为初等对称多项式，并比较它们在（3.6）中的系数，我们得出

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1+t|w_k|) \le \prod_{j=1}^{n}\left(1+t\sqrt{\frac{n-2}{n}}\,|z_j|\right), \qquad t\ge 0. \tag{3.7}$$

情形 *2*：关于 $0<p<1$ 的不等式。现在假设 $0<p<1$。对（3.7）取对数，得到

$$\sum_{k=1}^{n-1}\log(1+t|w_k|) \le \sum_{j=1}^{n}\log\left(1+t\sqrt{\frac{n-2}{n}}\,|z_j|\right). \tag{3.8}$$

逐项应用引理 3.2 的积分表示（3.1）。由于 $p\sin(\pi p)>0$，将（3.8）乘以$_{p\sin(\pi}{}^{\pi p}\ t^{-p-1}{}_{)}$并在 $(0,\infty)$上积分，由 ~~（3.1）~~可得 $\sum_{k=1}^{n-1}|w_k|^p \le \binom{n-2}{n}^{\frac{p}{2}}\sum_{j=1}^{n}|z_j|^p$。结合（3.5），这就证明了对每个 $0<\cancel{p}\le 1$，不等式均成立。

剩下的工作是确定等号情形。

情形 *1*：当 $p=1$ 时取等号。假设（3.5）中等号成立。由于 Schoenberg 不等式及其推导中所使用的初等对称函数不等式的亏量均为非负数，因此每个不等式中都必须取等号。特别地，

$$e_2(|w_1|,\dots,|w_{n-1}|) = \frac{n-2}{n}e_2(|z_1|,\dots,|z_n|). \tag{3.9}$$

我们证明，当至少有三个零点非零时，(3.9)不可能成立。令 $A=QDQ$，其中 Q、D 在引理4.2中定义。令 e_1，…，e_n 表示 $\mathbb{C}^n$的标准正交归一基，并定义

$$v_{ij} = (\textstyle\bigwedge^2 Q)(e_i\wedge e_j), \qquad 1\le i<j\le n.$$

根据外幂的乘法性，

$$\textstyle\bigwedge^2 A = \sum_{1\le i<j\le n} z_iz_jv_{ij}v_{ij}^*. \tag{3.10}$$

的元素为　　Q 为 $Q_{ij}=\delta_{ij}-1/n$。外幂中内积的行列式公式给出　　s

$$\|v_{ij}\|^2 = \frac{n-2}{n}, \qquad |\langle v_{ij},v_{ik}\rangle| = \frac{1}{n} \tag{3.11}$$

当 i、j、k两两不同时。

的特征值为 w_1，…，w_{n-1}、0，按代数重数计数。因此，$\bigwedge^2 A$的特征值就是它们两两的乘积。利用特征值绝对值之和的迹范数界，再结合(3.10)和(3.11)，可得

$$e_2(|w_1|,\dots,|w_{n-1}|) \le \left\|\textstyle\bigwedge^2 A\right\|_1 \le \sum_{i<j}|z_iz_j|\|v_{ij}v_{ij}^*\|_1 = \frac{n-2}{n}e_2(|z_1|,\dots,|z_n|). \tag{3.12}$$

根据（3.9），（3.12）中的两个不等式都必须取等号。特别地，对（3.10）应用迹范数三角不等式时取等号。

根据迹范数的对偶刻画，存在一个压缩算子 U使得 $\operatorname{Re}\operatorname{Tr}\left(U^*\bigwedge^2 A\right)=\left\|\bigwedge^2 A\right\|_1$。三角不等式中的等号随后迫使（3.10）中的每个非零项都在同一个对偶估计中取等号。因此，

$$Uv_{ij} = \frac{z_iz_j}{|z_iz_j|}v_{ij} \qquad \text{whenever } z_iz_j\neq 0. \tag{3.13}$$

事实上，这由柯西–施瓦茨不等式中的等号以及 $\|U\|\le 1$ 得出。

回忆一下，与模为 1 的不同特征值相对应的压缩算子的特征向量彼此正交。如果 z_i、z_j、z_k 都非零，则（3.11）表明 v_{ij} 和 v_{ik} 并不正交。因此，（3.13）推出$\frac{z_iz_j}{|z_iz_j|}=\frac{z_iz_k}{|z_iz_k|}$，从而 $\frac{z_j}{|z_j|}=\frac{z_k}{|z_k|}$。如果至少有三个零点非零，我们可以选取 i，使其不同于任意给定的一对 j、k 非零零点。由此可知，所有非零零点具有相同的幅角。这与质心条件 $\sum_{j=1}^{n}z_j=0$矛盾。

因此，$p=1$ 的等号成立至多要求两个非零零点。

情况 2：等号成立于 $0 < p < 1$。假设零点中至少有三个非零零点。那么 $e_3(|z_1|, \ldots\ldots, |z_n|) > 0$。由于 $n \geq 3$, $\binom{n-2}{n}^{\frac{3}{2}} > \frac{n-3}{n}$。对于 $n \geq 4$，应用引理 3.1，其中 $k = 3$。对于 $n = 3$，$e_3(|w_1|, |w_2|, 0) = 0$。无论哪种情况，

$$e_3(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|, 0) \leq \frac{n-3}{n} e_3(|z_1|, \ldots, |z_n|) < \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{3}{2}} e_3(|z_1|, \ldots, |z_n|).$$

因此，t^3 在（3.7）中的系数在左侧严格更小，而其他所有系数不等式仍然成立。因此，（3.7），从而（3.8），对于每个 $t > 0$都严格成立。（3.1）中积分权重的正性表明，定理1.4中的不等式是严格的。

因此，$0 < p < 1$ 取等号还要求至多有两个非零零点。

锐性。在这两种情形下，质心条件意味着，如果恰好有两个非零零点，则它们必须是 a 和 $-a$，其中 $a \neq 0$ 为某个值。如果所有零点都为零，则该多项式是 z^n的非零常数倍。因此，所有等号情形均具有如下形式

$$p(z) = c\, z^{n-2}(z^2 - a^2), \qquad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

反之，对该多项式求导得到 $p'(z) = c\, z^{n-3}\left(nz^2 - (n-2)\, a^2\right)$。其唯一可能的非零临界点是 $\pm\sqrt{\frac{n-2}{n}}\, a$. 因此，对于每个 $0 < p \leq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p = 2\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}} |a|^p = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p.$$

因此，该常数是最佳的，且等号刻画完整。

□

与定理 1.4 的证明中一样，下面我们证明定理 1.9。

定理 *1.9* 的证明。由引理3.1，可得

$$e_k(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|) \leq \frac{n-k}{n} e_k(|z_1|, \ldots, |z_n|), \qquad 1 \leq k \leq n-1.$$

另一方面，由伯努利不等式可得

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \geq 1 - \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

因此，

$$e_k(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|, 0) \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^k e_k(|z_1|, \ldots, |z_n|), \qquad 1 \leq k \leq n, \tag{3.14}$$

其中，$k = n$ 的情形显然。

展开 (3.14)，我们得到 将乘积展开为初等对称多项式，并比较其系数 in ain

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1 + t|w_k|) \leq \prod_{j=1}^{n}\left(1 + \frac{n-1}{n} t|z_j|\right), \qquad t \geq 0. \tag{3.15}$$

对（3.15）取对数，得到

$$\sum_{k=1}^{n-1} \log(1 + t|w_k|) \leq \sum_{j=1}^{n} \log\left(1 + \frac{n-1}{n} t|z_j|\right). \tag{3.16}$$

由于 $0 < p < 1$，权函数 $\left(\frac{p}{\sin(\pi p)}\, t^{-p-1}\right)$ 对每个 $t > 0$ 都严格为正。将（3.16）乘以该权函数，并在 $(0, \infty)$ 上积分，由引理 3.2，可得：

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-1}{n}|z_j|\right)^p = \left(\frac{n-1}{n}\right)^p \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p.$$

等号与锐性。 假设至少有两个非零零点。那么 $e_2(|z_1|, \dots, |z_n|) > 0$。由于$\binom{n-1}{n}^2 - \binom{n-2}{n} = \frac{1}{n^2} > 0$，引理 3.1 推出，对 $n \geq 3$，

$$e_2(|w_1|, \dots, |w_{n-1}|, 0) \leq \frac{n-2}{n} e_2(|z_1|, \dots, |z_n|) < \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 e_2(|z_1|, \dots, |z_n|).$$

当 $n = 2$ 时，同样的严格不等式成立，因为其左端为零。

因此， t^2 在（3.15）中的系数在左侧严格更小，而其余所有系数不等式均成立。由此可知（3.15），从而（3.16），对每个 $t > 0$均为严格不等式。由于引理 3.2 中的积分权重严格为正，所得的幂不等式也同样严格。

因此，只有至多一个零点非零时，等号才有可能成立。如果这些零点不全为零，这意味着，除一个非零常数因子外，

$$p(z) = z^{n-1}(z-a), \qquad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

反之，对于 $p(z) = c\, z^{n-1}(z-a)$，当 $c \neq 0$ 且 $a \neq 0$，有 $p'(z) = c\, z^{n-2}\big(nz - (n-1)a\big)$。因此，唯一的非零临界点为 $\frac{n-1}{n} a$，从而 $\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p = \binom{n-1}{n}^p |a|^p = \binom{n-1}{n}^p \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p$。因此该常数是最佳的，等号刻画也就完成了。□

4. 定理 1.5的证明

设 $n \geq 2$ 为一个整数，设 z_1、…、 z_n 和 w_1、…、 w_{n-1} 分别为次数为 n 的复多项式 $p(z)$ 的零点和临界点。对于实指数 $p \geq 1$，令

$$Z_p := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p, \qquad W_p := \sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p. \tag{4.1}$$

我们首先从证明定理 1.5中的最优常数可以由具有 ith 实零点的多项式确定。其 中所采用的约化利用了 Pereira 主序定理。

引理 4.1 ([Per03，定理 4.6])。 设 w_1，…， w_{n-1} 和 η_1，…， η_{n-1} 分别为 $\prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$和 $\prod_{j=1}^{n}(x - \operatorname{Re} z_j)$ 的临界点。则

$$(\operatorname{Re} w_1, \dots, \operatorname{Re} w_{n-1}) \prec (\eta_1, \dots, \eta_{n-1}).$$

因此，对于任意凸函数 $\varphi\colon \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\operatorname{Re} w_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\eta_k). \tag{4.2}$$

回顾一下，$C_{n,p}$ 是使得$W_p \leq C_{n,p} Z_p$ 对于每个满足 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$的次数为n 的实根多项式都成立的最小常数。现在考虑一个满足 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$的复多项式。对于 $\theta \in [0, 2\pi]$，令$\eta_1(\theta)$ …， $\eta_{n-1}(\theta)$为 $\prod_{j=1}^{n}(x - \operatorname{Re}(e^{-i\theta} z_j))$的临界点。将不等式 (4.2)应用于零点为 $e^{-i\theta} z_j$ 的多项式和凸函数 $\varphi(x) = |x|^p$，得到(4.3)中的第一个不等式。第二个不等式由实根界得到，因为$\sum_j \operatorname{Re}(e^{-i\theta} z_j) = 0$。

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} w_k)|^p \leq \sum_{k=1}^{n-1} |\eta_k(\theta)|^p \leq C_{n,p} \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} z_j)|^p. \tag{4.3}$$

对（4.3）在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 上积分，并利用

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} z)|^p \, d\theta = \frac{|z|^p}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos\theta|^p \, d\theta, \tag{4.4}$$

我们得到 $W_p \leq C_{n,\,p} Z_p$ 适用于中心化复多项式：正因子 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cos\theta|^p \, d\theta$ c 可从等式两边约去。反过来，每个中心化实根多项式都是中心化复多项式。因此，实数情形与复数情形的最佳常数相同。确定最佳常数后，我们将讨论复零点的等号情形。

在本节余下部分，固定 $1 < p < 2$。情形 $n = 2$、3（包括其等号情形）将在命题 A.40中处理。以下假设 $n \geq 4$。对于实零点，商 W_p / Z_p 在非零实数缩放下保持不变，并在紧集 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$、 $\sum_{j=1}^{n} z_j^2 = 1$上取得最大值。取一个极值构型。将所有零点除以最小零点与最大零点之间距离的一半，并在必要时将其反射，我们可以假设两个极端零点分别为 $t-1$和 $t+1$，且 $t \geq 0$。由于其余 $n-2$ 个零点位于 $t-1$ 与 $t+1$之间，质心条件推出 $0 \leq t \leq (n-2)/n$。

我们使用临界点的压缩表示。Komarova 和 Rivin [KR03]中也出现了相关的矩阵表示。对于对角矩阵 D，$e = n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ 满足 $e^* D^j e = n^{-1}\operatorname{Tr}(D^j)$ 对所有整数 $j \geq 0$均成立。因此，根据 Pereira 对微分算子的刻画 [Per03，定理 2。5]。

引理 4.2。令 $p(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$，并记 $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^T$、$D = \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_n)$以及 $Q = I - \mathbf{1}\mathbf{1}^T/n$。则

$$\det(zI - DQ) = \frac{z}{n}p'(z).$$

因此，压缩 $A = QDQ|_{\mathbf{1}^\perp}$ 的特征值（按重数计）就是 $p(z)$ 的临界点。

下一个引理将 W_p/Z_p 的一阶最优性条件转化为具有三个指定矩的积分恒等式。

引理 4.3。设中心化实根多项式使 W_p/Z_p达到最大值，并将其最小和最大零点分别归一化为 $t-1$ 和 $t+1$，其中 $0 \leq t \leq (n-2)/n$。则存在一个概率测度 μ，定义在 $[-1,1]$ 上，使得

$$\frac{W_p}{Z_p} = \frac{2\displaystyle\int_{-1}^{1} y\,\operatorname{sgn}(t+y)|t+y|^{p-1}\,d\mu(y)}{(1-t)^{p-1} + (1+t)^{p-1}}, \tag{4.5}$$

and

$$\int_{-1}^{1} y\,d\mu(y) = 0, \qquad \int_{-1}^{1} y^2\,d\mu(y) = \frac{n-2}{n}, \qquad \int_{-1}^{1} y^3\,d\mu(y) = -\frac{2t}{n}. \tag{4.6}$$

证明。选取指标 i、j，使得 $z_i = t-1$ 和 $z_j = t+1$，并沿用引理 4.2 中的 D、Q、A。由于零点均为实数，A是自伴的。令 $X = A - tI$ 作用于 $\mathbf{1}^\perp$，且 $f = (e_j - e_i)/\sqrt{2}$，其中 e_1、…、e_n 为标准基向量。利用 $z_i = t-1$ 和 $z_j = t+1$ 进行计算可得 $Xf = Q(e_i + e_j)/\sqrt{2}$。

将两个极端零点分别变为 $z_i(\varepsilon) = z_i - \varepsilon$ 和 $z_j(\varepsilon) = z_j + \varepsilon$，保持其他零点不变。这一扰动保持质心不变，并得到 $A'(0) = f(Xf)^T + (Xf)f^T$。令 $h(s) = \operatorname{sgn}(s)|s|^{p-1}$。由于$p > 1$，函数 $|s|^p$ 是连续可微的，并且自伴矩阵的迹导数公式给出 $W_p'(0) = p\operatorname{Tr}(h(A)A'(0))$。直接求导还得到 $Z_p'(0) = p((1-t)^{p-1} + (1+t)^{p-1}) > 0$。由极大性，$W_p(\varepsilon)/Z_p(\varepsilon)$ 的导数在 $\varepsilon = 0$ 处为零。因此

$$\frac{W_p}{Z_p} = \frac{W_p'(0)}{Z_p'(0)} = \frac{2\langle h(tI+X)f, Xf\rangle}{(1-t)^{p-1} + (1+t)^{p-1}}. \tag{4.7}$$

自伴压缩 A的特征值位于 $[t-1, t+1]$中，因此 $\operatorname{spec}(X) \subseteq [-1,1]$。令 μ为与单位向量 f相关联的 X的谱测度；特别地，对于 $[-1,1]$上的每个连续函数 φ，有 $\int_{-1}^{1}\varphi(y)\,d\mu(y) = \langle\varphi(X)f, f\rangle$。将谱恒等式应用于（4.7）即得（4.5）。

对于前两个矩，$\langle Xf, f\rangle = 0$以及 $\|Xf\|^2 = (n-2)/n$。对于三阶矩，Xf和$\sum_{r=1}^{n} z_r = 0$ 的显式表达式给出

$$\int_{-1}^{1} y^3\,d\mu(y) = \langle X(Xf), Xf\rangle = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}(z_r - t)\left(\delta_{ri} + \delta_{rj} - \frac{2}{n}\right)^2 = -\frac{2t}{n}. \tag{4.8}$$

在（4.8）中，我们使用了 $z_i - t = -1$、$z_j - t = 1$和$\sum_{r\neq i,\,j}(z_r - t) = -nt$。于是得到（4.6）中的三个矩恒等式。□

极值多项式的谱测度满足（4.6）中的条件。但这些条件本身并不能保留这样一个限制：多项式在每个位置的零点数必须是整数。该限制通过四阶矩体现出来。

引理 4.4。在引理 *4.3*的假设下，将剩余的 $n-2$ 个零点写为 $t + y_1$、……、$t + y_{n-2}$，其中 $-1 \leq y_\nu \leq 1$。则

$$\int_{-1}^{1}(1-y^2)(y-t)^2\,d\mu(y) = \frac{2}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n-2}(1-y_\nu^2). \tag{4.9}$$

如果 $\ell \leq t \leq u$，其中

$$\ell = 1 - \frac{2(k+1)}{n}, \qquad u = 1 - \frac{2k}{n}, \qquad 1 \leq k < \frac{n}{2}, \tag{4.10}$$

then

$$\int_{-1}^{1}(1-y^2)(y-t)^2\,d\mu(y)\geq 2(t-\ell)(u-t). \tag{4.11}$$

证明。 质心条件给出 $\sum_{\nu=1}^{n-2}y_\nu=-nt$。对于引理 f 中的单位向量 4.3，我们有 $Xf=Q(e_i+e_j)/\sqrt{2}$。由于 $X^2f=\bar{Q}(D-tI)Xf$，计算其欧几里得范数可得

$$\int_{-1}^{1}y^4\,d\mu(y)=\|X^2f\|^2=\left(\frac{n-2}{n}\right)^2+\frac{2}{n^2}\left(\sum_{\nu=1}^{n-2}y_\nu^2-nt^2\right). \tag{4.12}$$

展开 $(1-y^2)(y-t)^2$ 并代入 4.6 式和 4.12 式可知，其积分为 $2(n-2-\sum_{\nu=1}^{n-2}y_\nu^2)/n^2$，即为等式 (4.9)。

为证明 (4.11)，在满足 $-1\leq y_\nu\leq 1$ 和 $\sum_{\nu=1}^{n-2}y_\nu=-nt$ 的条件下最大化 $\sum_{\nu=1}^{n-2}y_\nu^2$。在最大化点处，至多只有一个坐标严格位于 -1 与 1 之间：如果有两个坐标处于内部，通过等量反向改变它们可保持其和不变，而它们的平方和关于扰动参数是严格凸的。对于 $\ell\leq t\leq u$，最大化列表中有 $k-1$ 个条目等于 1，$n-k-2$ 个条目等于 -1，以及一个条目等于 $v=n(u-t)-1$。由于 $-1\leq v\leq 1$ 和 $1-v^2=n^2(t-\ell)(u-t)$，我们得到 $\sum_{\nu=1}^{n-2}(1-y_\nu^2)\geq n^2(t-\ell)(u-t)$。等式 (4.9) 现在给出 (4.11)。□

对于 $0<r\leq 1$，定义

$$H_p(r)=\frac{(1+r)\{1+r^p-(1-r)^p\}}{r+r^p}. \tag{4.13}$$

The 中心化多项式 $p(z)=(z-(n-k)a)^k(z+ka)^{n-k}$，其中 $a\neq 0$ 和 $1\leq k\leq\lfloor n/2\rfloor$，满足

$$R_{n,p}(k)=\frac{(k-1)(n-k)^p+(n-k-1)k^p+(n-2k)^p}{k(n-k)^p+(n-k)k^p}=1-\frac{1}{n}H_p\left(\frac{k}{n-k}\right). \tag{4.14}$$

定理 A.1 表明，H_p 在其唯一极小点 $r_p\in(0,1)$ 之前严格递减，之后严格递增。令 $\theta_p=r_p/(1+r_p)$。由于 $k/(n-k)$ 随 k增加，方程（4.14）表明，最大的双值比出现在 $n\theta_p$附近的一个可 admissible 整数处。

当 $n\theta_p$ 不是整数时，H_p 的连续极小值不一定对应于具有整数根重数的多项式。四阶矩界（4.11）提供了比较非整数值与其相邻整数值所需的修正。

引理 4.5。 假设 $n\theta_p>1$ 不是整数，并令 $k=\lfloor n\theta_p\rfloor$。设 ℓ，u 如（(4.10)）中所定义。如果 *the* 使 c 最大化 引理中的构型 *4.3* 具有 $\ell\leq t\leq u$，则

$$\frac{W_p}{Z_p}\leq 1-\frac{1}{n}H_p\left(\frac{1-t}{1+t}\right)-\frac{4E_*(t)}{(1-t)^{p-1}+(1+t)^{p-1}}(t-\ell)(u-t), \tag{4.15}$$

其中 $E_*(t)$ 是定理 *A.5* 中最大的可容许非负四次系数。定理 *A.23* 给出$E_*(t)>0$ 在 $[\ell,u]$上成立。

证明。记 $\phi_t(y)=y\operatorname{sgn}(t+y)|t+y|^{p-1}$，并令 Q_0 为由以下条件确定的三次 Hermite 插值多项式：$Q_0(-1)=\phi_t(-1)$、$Q_0(1)=\phi_t(1)$、$Q_0(t)=\phi_t(t)$ 以及 $Q_0'(t)=\phi_t'(t)$。根据定理 A.5 以及定理 A.23 中的正性，$Q_0(y)-E_*(t)(1-y^2)(y-t)^2\geq\phi_t(y)$ 对于 $-1\leq y\leq 1$ 成立。

式 4.6中的三个矩恒等式意味着，对于每个 q 次数至多为三的多项式，

$$\int_{-1}^{1}q(y)\,d\mu(y)=\frac{n-2+nt}{2n(1+t)}q(-1)+\frac{2}{n(1-t^2)}q(t)+\frac{n-2-nt}{2n(1-t)}q(1). \tag{4.16}$$

确实，（4.16）中的系数重现了 1、y、y^2、y^3 在（4.6）中的矩。将（4.16）应用于 $q=Q_0$，并利用 -1、t、1 处的插值取值，可得

$$\frac{2\displaystyle\int_{-1}^{1}Q_0(y)\,d\mu(y)}{(1-t)^{p-1}+(1+t)^{p-1}}=1-\frac{1}{n}H_p\left(\frac{1-t}{1+t}\right). \tag{4.17}$$

积分 点态四次主函数与 μ 相乘并应用（4.5）、（4.17）和（4.11），得到（4.15 ）。□

整数单元之外的约化已在定理A.25的论证中得到证明。在单元内，定理A.28 和弦不等式（A.48）控制了（4.15）中的修正项。二者共同给出了实零点的尖锐估计。

引理 4.6。 设 $n \ge 4$ 和 $1 < p < 2$。对于在满足 $Z_p > 0$的根列表中使W_p/Z_p 达到最大值的次数为 n 的任意中心化实根多项式，

$$\frac{W_p}{Z_p} \le \max\left\{ \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}}, \max_{1\le k\le \lfloor n/2\rfloor} R_{n,p}(k) \right\}. \tag{4.18}$$

证明。 若 $n\theta_p \le 1$，则定理 A.19 给出的精确三矩优化为 $W_p/Z_p \le$ 最大值$\{((n-2)/n)^{\frac{p}{2}},\ R_{n,\,p}(1)\}$。若 $n\theta_p > 1$ 是整数，则定理 A.19 给出 $W_p/Z_p \le 1 - H_p(r_p)/n = R_{n,\,p}(n\theta_p)$。这两个界均推出（4.18）。

假设 $n\theta_p > 1$ 不是整数。令 $k = \lfloor n\theta_p \rfloor$ 并定义 ℓ，u 由（4.10）给出。定理 A.25 证明中的三矩分类和拉道边界分析表明，当 $t \notin [\ell, u]$时，（4.18）已经成立。

对于 $\ell \le t \le u$，应用（4.15）。四次系数为 $E_*(t) =$最小值$\{E_-(t)\ E_+(t)\}$，其中 $E_-(t)$ 和 $E_+(t)$ 由（A.8）给出。若 $E_-(t) \le E_+(t)$，则定理 A.28给出 $H_p((1-t)/(1+t)) > H_p(k/(n-k))$。结合 $E_*(t) > 0$，方程（4.15）推出$W_p/Z_p \le R_{n,\,p}(k)$。

若 $E_+(t) < E_-(t)$，令 $\theta = (1-t)/2$, $a = k/n$，以及 $b = (k+1)/n$。则 $t - \ell = 2(b-\theta)$ 且 $u - t = 2(\theta - a)$。严格后向余项定理 A.37 给出弦不等式 (A.48)。将 (A.48) 与 (4.15) 结合，得到 $W_p/Z_p \le \max\{R_{n,p}(k)R_{n,p}(k+1)\}$。这就证明了最后一种情形下的 (4.18)。□

定理 *1.5* 的证明。 对于 $n \ge 4$，引理 4.6 给出上界

$$C_{n,p} \le \max\left\{ \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}}, \max_{1\le k\le \lfloor n/2\rfloor} R_{n,p}(k) \right\}. \tag{4.19}$$

多项式 $p(z) = z^{n-2}(z^2 - a^2)$ 取得 $((n-2)/n)^{\frac{p}{2}}$，而 $p(z) = (z-(n-k)a)^k(z+ka)^{n-k}$ 取得$R_{n,p}(k)$，对任意 $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 和 $1 \le k \le \lfloor n/2\rfloor$ 均成立。当 a为实数时，这两个族都是中心化的，并且具有实零点。因此，(4.19) 中等号成立，且 $C_{n,p}$ 等于其右端。通过 (4.3) 和 (4.4) 证明的 Pereira 约化，将同一个最佳常数传递给中心化复多项式。

定理 A.39 给出了 $n \ge 4$ 的完整等号分类：除零根列表外，仅当 (4.19) 中的第一项达到最大值时，$p(z) = z^{n-2}(z^2 - a^2)$ 的非零标量倍数可以取等号；或者当 $R_{n,p}(k)$ 达到最大值时，$p(z) = (z-(n-k)a)^k(z+ka)^{n-k}$ 的非零标量倍数可以取等号。这里 $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，当 (4.19) 中有多个项并列最大时，所有极大化族均包含在内。 $n = 2$、3 的情形已在命题 A.40 中得到证明。证明完毕。□

5. 矩阵不等式与加权主化

引理 *1.11* 的证明。 当 $\gamma = 0$时，通过取 $t = 0$ 或 $\Phi(u) = u$，相应地，任一条件都会迫使每个 $x_i = 0$。反之，$x = 0$ 满足这两个条件。现在设 $\gamma > 0$ 和 $x \prec_{w,\,\gamma} y$，并令$M = \max\{x_i,\ y_j\colon\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$。在 $[0, M]$上，任意满足 $\Phi(0) = 0$ 的递增凸 Φ 都具有斯蒂尔切斯表示

$$\Phi(u) = au + \int_{(0,M]} (u-t)_+\, d\mu(t), \qquad 0 \le u \le M,$$

其中 $a = \Phi'_+(0) \ge 0$，且 μ 是由非递减右导数 Φ'_+ 所诱导的正测度。定义性的尾部不等式（包括 $t = 0$ 的情形）给出

$$\sum_{i=1}^m \Phi(x_i) = a\sum_{i=1}^m x_i + \int_{(0,M]} \sum_{i=1}^m (x_i - t)_+\, d\mu(t) \le \gamma a \sum_{j=1}^n y_j + \gamma \int_{(0,M]} \sum_{j=1}^n (y_j - t)_+\, d\mu(t) = \gamma \sum_{j=1}^n \Phi(y_j).$$

反之，取对于每个固定的 $\Phi(u) = (u-t)_+$，可恢复 $t \ge 0$ （1.5）。这就证明了两者的等价性。 □

引理 5.1。 设 $A = QDQ$，其中 Q，D 由引理 *4.2*定义。则

$$s_{j+2}(D) \le s_j(A) \qquad 1 \le j \le n-2,$$

and

$$s_j(A) \le s_j(D), \qquad 1 \le j \le n.$$

证明。 对于 $n = 2$，第一个不等式显然成立。对于 $n \ge 3$，注意到 $D - A = D - QDQ = (I-Q)D + QD(I-Q)$。由于 $I - Q = \frac{1}{n}J$的秩为一，右侧两项的秩均至多为一。因此，

$$\operatorname{rank}(D - A) \le 2. \tag{5.1}$$

应用 Weyl奇异值不等式 [Bha97，第 75 页，问题 III.6。5] 于 $D = A + (D - A)$，其中 $k = 3$，得到 $s_{j+2}(D) \le s_j(A) + s_3(D - A)$。由（5.1），$s_3(D - A) = 0$。因此

$$s_{j+2}(D) \le s_j(A), \qquad 1 \le j \le n - 2.$$

对于第二个不等式，Q 是一个正交投影，因此有 $\|Q\|_\infty = 1$。根据矩阵乘积的标准奇异值不等式（参见 [Bha97，第75页，问题III.6。2]），我们得到 $s_j(A) = s_j(QDQ) \le \|Q\|_\infty s_j(D)\|Q\|_\infty = s_j(D)$，对于每个 $1 \le j \le n$。□

令 $\mathbb{M}_n$ 表示所有 $n \times n$ 复矩阵的集合，令 $\mathbb{H}_n$ 表示所有 $n \times n$ 厄米矩阵的集合。对于 $A \in \mathbb{M}_n$，令Tr A 表示其迹。对于 A，$B \in \mathbb{H}_n$，如果 $B - A$ 是半正定的，我们记为 $A \le B$。这定义了 $\mathbb{H}_n$上的Loewner序。

对于 $A \in \mathbb{H}_n$，定义其正部和负部为

$$A_+ = \frac{|A| + A}{2}, \qquad A_- = \frac{|A| - A}{2},$$

其中 $|A| = (A^2)^{\frac{1}{2}}$。于是 $A = A_+ - A_-$ 且 A_+，$A_- \ge 0$。

由Weyl单调性原理，我们立即得到以下引理。

引理 5.2。设 X、$Y \in \mathbb{H}_n$。若 $X \le Y$，则 Tr $X_+ \le$ Tr Y_+.

引理 5.3（Weyl主定理 [Bha97，第 42 页，定理 II.3。6]）。设 $A \in \mathbb{M}_n$，并令$\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ 和 $s_1(A), \ldots, s_n(A)$ 分别表示其特征值和奇异值。则

$$(|\lambda_1(A)|, \ldots, |\lambda_n(A)|) \prec_w (s_1(A), \ldots, s_n(A)).$$

引理 5.4。设 $A \in \mathbb{M}_n$，并固定 $\theta \in \mathbb{R}$。令 $R_\theta(A) = (e^{-i\theta}A + e^{i\theta}A^*)/2$. 若 λ_1、…、λ_n 是 A 的特征值，而 ν_1、…、ν_n 是厄米矩阵 $R_\theta(A)$ 的特征值，则

$$(\mathrm{Re}(e^{-i\theta}\lambda_1), \ldots, \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\lambda_n)) \prec (\nu_1, \ldots, \nu_n).$$

证明。取一个酉矩阵 $U \in \mathbb{M}_n$ 使得 U^*AU 为上三角矩阵，且对角线元素为 λ_1，……，λ_n，如 [Bha97，第 5 页，Schur三角化定理]所示。因此，$U^*R_\theta(A)U = \frac{e^{-i\theta}U^*AU + e^{i\theta}U^*A^*U}{2}$ 是厄米矩阵，其对角线元素为 ~~$\mathrm{Re}(e^{-i\theta}\lambda_1)$……，~~ $\mathrm{Re}(e^{-i\theta}\lambda_n)$。根据Schur不等式，厄米矩阵的对角线受其特征值列表主序 [Bha97，第 35 页，习题 II.1。12]。□

6. 定理 1.12的证明

当 $n = 2$时，定理 1.12 中的质心条件意味着唯一的临界点为零，因此结论显然成立。以下假设 $n \ge 3$。

设 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$，$e = n^{-\frac{1}{2}}(1, \ldots, 1)^T$，$D = \mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n)$，以及 $Q = I - ee^*$和 $A = QDQ$。由于 $\sum_{j=1}^n z_j = 0$，向量 $\mathbf{z}$ 属于 $e^\perp$。根据引理 4.2，A的特征值为 w_1、…、w_{n-1}、0，并按代数重数计数。因此，Weyl主定理（引理 5.3）给出 $(|w_1|, \ldots, |w_{n-1}|, 0) \prec_w (s_1(A) \ldots, s_n(A))$。由于 $u \mapsto (u - t)_+$ 在 $[0, \infty)$上递增且为凸函数，我们得到

$$\sum_{k=1}^{n-1}(|w_k| - t)_+ \le \sum_{i=1}^{n}(s_i(A) - t)_+, \qquad t \ge 0. \tag{6.1}$$

对于 $t \ge 0$，定义

$$F(\mathbf{z}, t) = \sum_{i=1}^{n}(s_i(A) - t)_+, \qquad H(\mathbf{z}, t) = \sum_{j=1}^{n}(|z_j| - t)_+.$$

我们首先证明在 $t = 0$ 对于 $n \ge 3$ 的界。对于 $n = 3$，它将直接给出所需的临界点界。对于 $n \ge 4$，(6.1) 将问题归结为证明

$$F(\mathbf{z}, t) \le \sqrt{\frac{n-2}{n}}\, H(\mathbf{z}, t), \qquad t \ge 0. \tag{6.2}$$

6.1. **步骤 1。情形** $t = 0$。 在 $t = 0$ ，所需的界就是 Tang and Zhang [TZ25 的迹范数估计，定理 4。1]。用我们的记号表示为

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(A) \le \sqrt{\frac{n-2}{n}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|. \tag{6.3}$$

由于 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$，我们有 $QD^*e = D^*e$。因此， $A^*A = Q|D|^2Q - D^*ee^*D$。取迹可得

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(A)^2 = \operatorname{Tr}(A^*A) = \frac{n-2}{n} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2. \tag{6.4}$$

令 $e_1, \dots, e_n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交归一基，并设

$$v_{ij} = (\bigwedge^2 Q)(e_i \wedge e_j), \qquad 1 \le i < j \le n.$$

根据外幂的乘法性，

$$\bigwedge^2 A = \sum_{i<j} z_i z_j v_{ij} v_{ij}^*. \tag{6.5}$$

此外，

$$\|v_{ij}\|^2 = \det \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \frac{n-2}{n}.$$

的奇异值恰好是成对乘积 $s_i(A)s_j(A)$, $i < j$. 因此，由（6.5）及迹范数三角不等式可得

$$e_2(s_1(A), \dots, s_n(A)) = \left\| \bigwedge^2 A \right\|_1 \le \sum_{i<j} |z_i z_j| \|v_{ij} v_{ij}^*\|_1 = \frac{n-2}{n} e_2(|z_1|, \dots, |z_n|).$$

结合（6.4），可得

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{n} s_i(A))^2 &= \sum_{i=1}^{n} s_i(A)^2 + 2e_2(s_1(A), \dots, s_n(A)) \\ &\le \frac{n-2}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 + 2e_2(|z_1|, \dots, |z_n|) \right) \\ &= \frac{n-2}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j| \right)^2. \end{aligned}$$

取平方根即可证明（6.3）。

6.2. **步骤 2。三次情形。** 对于 $n = 3$ 临界点具有以下形式： w, $-w$。由（6.1）和（6.3）， $2|w| \le \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{3} |z_j|$。

如果 $t \ge |w|$，则 $2(|w| - t)_+ = 0$。对于 $0 \le t < |w|$，利用 $(u - t)_+ \ge u - t$ 对 $u \ge 0$，我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{3} (|z_j| - t)_+ \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{3} |z_j| - \sqrt{3}\, t \ge 2|w| - \sqrt{3}\, t \ge 2(|w| - t),$$

由于 $t \ge 0$ 和 $\sqrt{3} \le 2$。因此 $2(|w| - t)_+ \le H(\mathbf{z}\ t)/\sqrt{3}$ 对所有 $t \ge 0$均成立，这就证明了三次情形下的定理 1.12 。在本节其余部分，设 $n \ge 4$。

6.3. **步骤 3。约化到极点。** 引理 6.1 给出了 F 的次可加性的变分证明。

引理 6.1。 对于 $t \ge 0$ 和 $A = QDQ$,

$$F(\mathbf{z}, t) = \sup_{\|X\|_\infty \le 1} \{\operatorname{Re} \operatorname{Tr}(X^*A) - t\|X\|_1\}.$$

证明。 对于任意 $X \in \mathbb{M}_n$ 满足 $\|X\|_\infty \le 1$，冯·诺伊曼迹不等式 [Bha97，第 77 页，问题 III.6。12]给出

$$\operatorname{Re}\operatorname{Tr}(X^*A) - t\|X\|_1 \le \sum_{i=1}^n s_i(X)(s_i(A)-t) \le \sum_{i=1}^n (s_i(A)-t)_+.$$

反过来，令 $A = U\operatorname{diag}(s_1(A)\dots,s_n(A))V^*$ 为一个奇异值分解，并令 t

$$X = U\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)V^*, \qquad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & s_i(A) > t, \\ 0, & s_i(A) \le t. \end{cases}$$

那么 $\|X\|_\infty \le 1$ 且 $\operatorname{Re}\operatorname{Tr}(X^*A) - t\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n (s_i(A) - t)_+$。这就证明了变分引理。 □

注 6.2。 由引理*6.1* 容易推出 F 关于联合变量 $(\mathbf{z}\ t)$是正齐次且次可加的。特别地，

$$F(\mathbf{z}+\mathbf{z}', t+t') \le F(\mathbf{z},t) + F(\mathbf{z}',t') \tag{6.6}$$

对于中心化向量 $\mathbf{z}$、$\mathbf{z}' \in \mathbb{C}^n$ 以及 $t, t' \ge 0$。

定义 6.3 (衰退锥)。 设 $\mathscr{C}$ 是有限维实向量空间中的非空凸子集。若向量 v 满足对每个 $x \in \mathscr{C}$和每个 $\lambda \ge 0$ 都有 $x + \lambda v \in \mathscr{C}$，则称其为 $\mathscr{C}$的衰退方向 。 $\mathscr{C}$ 的所有衰退方向构成的集合称为其衰退锥，记为

$$\operatorname{rec}(\mathscr{C}) = \{v : x + \lambda v \in \mathscr{C} \text{ for all } x \in \mathscr{C},\ \lambda \ge 0\}.$$

引理 6.4 ([Roc70，第 166 页，定理 18。5])。 设 $\mathscr{C}$是有限维实向量空间中的非空闭凸子集。假设 $\mathscr{C}$不含直线。那么，每个 $x \in \mathscr{C}$ 都可以表示为

$$x = \sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu x^{(\nu)} + v, \tag{6.7}$$

其中 $x^{(1)}$、…、$x^{(N)}$ 是 $\mathscr{C}$的极点， $\alpha_\nu \ge 0$， $\sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu = 1$，且 $v \in \operatorname{rec}(\mathscr{C})$。

考虑闭凸集

$$\mathcal{C} = \left\{ (\mathbf{z},t) \in \mathbb{C}^n \times [0,\infty) : \sum_{j=1}^n z_j = 0, \quad H(\mathbf{z},t) \le 1 \right\}. \tag{6.8}$$

集合 $\mathcal{C}$ 不含直线。事实上，假设

$$(\mathbf{z} + \lambda\mathbf{v}, t + \lambda\tau) \in \mathcal{C}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

对于某个 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$和 $\tau \in \mathbb{R}$。由于对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$都有 $t + \lambda\tau \ge 0$，我们必有 $\tau = 0$。此外， $H(\mathbf{z} + \lambda\mathbf{v}\ t) \le 1$意味着

$$|z_j + \lambda v_j| \le t + 1, \qquad 1 \le j \le n, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

令 $|\lambda| \to \infty$，得到对每个 j都有 $v_j = 0$。因此 $\mathbf{v} = 0$，这证明 $\mathcal{C}$ 不含直线。

Le引理 6.5 （衰退锥与 F 的消失）。 设 $\mathcal{C}$ 为由以下条件定义的凸集 (6.8)。定 *en*

$$\operatorname{rec}(\mathcal{C}) = \left\{ (\mathbf{v},\tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} : \sum_{j=1}^n v_j = 0, \quad \tau \ge 0, \quad |v_j| \le \tau\ (1 \le j \le n) \right\}. \tag{6.9}$$

此外，对于每个 $(\mathbf{v}\ \tau) \in \operatorname{rec}(\mathcal{C})$， $F(\mathbf{v}\ \tau) = 0$。

证明。我们先证明 (6.9)。假设 $(\mathbf{v}\ \tau) \in \operatorname{rec}(\mathcal{C})$。由于 $(\mathbf{0}, 0) \in \mathcal{C}$，根据衰退锥的定义可知 $(\lambda\mathbf{v}\ \lambda\tau) \in \mathcal{C}$ $\lambda \ge 0$. 尤其是， $\sum_{j=1}^n v_j = 0, \tau \ge 0$. 此外，由于 H 的正齐次性， $\lambda \sum_{j=1}^n (|v_j| - \tau)_+ = H(\lambda\mathbf{v}\ \lambda\tau) \le 1$ 对每个 $\lambda > 0$ 都成立。令 $\lambda \to \infty$，得到 $\sum_{j=1}^n (|v_j| - \tau)_+ = 0$。由于每个加项均非负，因此对于每个 $1 \le j \le n$，都有 $|v_j| \le \tau$。这就证明了 (6.9) 中的一个包含关系。

反过来，假设

$$\sum_{j=1}^n v_j = 0, \qquad \tau \ge 0, \qquad |v_j| \le \tau, \quad 1 \le j \le n.$$

设 $(\mathbf{z}\ t) \in \mathcal{C}$ 且 $\lambda \geq 0$。显然，

$$\sum_{j=1}^{n}(z_j + \lambda v_j) = 0, \qquad t + \lambda\tau \geq 0.$$

此外，由三角不等式可得

$$|z_j + \lambda v_j| - (t + \lambda\tau) \leq |z_j| + \lambda|v_j| - t - \lambda\tau \leq |z_j| - t.$$

取正部并对 j求和，得到

$$H(\mathbf{z} + \lambda\mathbf{v}, t + \lambda\tau) = \sum_{j=1}^{n}\big(|z_j + \lambda v_j| - (t + \lambda\tau)\big)_+ \leq \sum_{j=1}^{n}(|z_j| - t)_+ = H(\mathbf{z}, t) \leq 1.$$

因此 $(\mathbf{z} + \lambda\mathbf{v}\ t + \lambda\tau) \in \mathcal{C}$对每个 $(\mathbf{z}\ t) \in \mathcal{C}$以及每个 $\lambda \geq 0$均成立。根据衰退锥的定义，$(\mathbf{v}\ \tau) \in \mathrm{rec}(\mathcal{C})$。这就完成了（6.9）的证明。

最后，设 $(\mathbf{v}\ \tau) \in \mathrm{rec}(\mathcal{C})$。由于 Q是正交投影，根据（6.9），

$$\|Q\,\mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_n)Q\|_\infty \leq \|\,\mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_n)\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n}|v_j| \leq \tau.$$

因此，$Q\,\mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_n)Q$的每个奇异值都不超过 τ。由 F的定义可知，$F(\mathbf{v}\ \tau) = \sum_{i=1}^{n}\big(s_i(Q\,\mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_n)Q) - \tau\big)_+ = 0$。这就完成了证明。□

根据引理 6.4 和引理 6.5，每个 $(\mathbf{z}\ t) \in \mathsf{C}$ 都可表示为 $(\mathbf{z}\ t) = \sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu(\mathbf{z}^{(\nu)}, t_\nu) + (\mathbf{v}\ \tau)$，其中 $(\mathbf{z}^{(\nu)}, t_\nu)$ 是 C 的极点，满足 $\alpha_\nu \geq 0$ 和 $\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu = 1$，且 $(\mathbf{v}\ \tau) \in \mathsf{rec(C)}$。由 F（注 6.2）的次可加性和正齐次性，结合引理 6.5，我们有

$$F(\mathbf{z}, t) \leq \sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu F(\mathbf{z}^{(\nu)}, t_\nu) + F(\mathbf{v}, \tau) = \sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu F(\mathbf{z}^{(\nu)}, t_\nu).$$

因此，只需证明

$$F(\mathbf{z}, t) \leq \sqrt{\frac{n-2}{n}} \tag{6.10}$$

在 $\mathcal{C}$ 的每个极点处成立。

设 $(\mathbf{z}\ t)$为这样的一个极点。若 $t = 0$，则（6.3）和 $H(\mathbf{z},\ 0) \leq 1$给出 $F(\mathbf{z},\ 0) \leq \sqrt{\frac{n-2}{n}}H(\mathbf{z},\ 0) \leq \sqrt{\frac{n-2}{n}}$。因此我们可以假设 $t > 0$。

引理 6.6。设 $\mathcal{C}$ 是由 (6.8)定义的凸集。若 $(\mathbf{z}\ t)$ 是 $\mathcal{C}$ 的极点，且 $t > 0$，则$H(\mathbf{z}\ t) = 1$.

证明。反设 $H(\mathbf{z}\ t) < 1$。由于 H 连续且 $t > 0$，存在 $0 < \varepsilon < t$ 使得

$$H(\mathbf{z}, t - \varepsilon) < 1, \qquad H(\mathbf{z}, t + \varepsilon) < 1.$$

因此，$(\mathbf{z}\ t - \varepsilon)$ 和 $(\mathbf{z}\ t + \varepsilon)$ 都属于 $\mathcal{C}$。然而，$(\mathbf{z}\ t) = \frac{1}{2}(\mathbf{z}\ t - \varepsilon) + \frac{1}{2}(\mathbf{z}\ t + \varepsilon)$。该线段的端点互不相同，这与 $(\mathbf{z}\ t)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的极点相矛盾。□

引理 6.7. 设 $\mathcal{C}$ 为由 (6.8) 定义的凸集，且 $(z\ t)$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个极点，并满足 $t > 0$。令r 和 s 分别表示 z 的模大于和小于 t 的分量数。也就是说，$r = \#\{1 \leq j \leq n\colon |z_j| > t\}$ 且 $s = \#\{1 \leq j \leq n\colon |z_j| < t\}$。则 $(r, s) = (1, 0)$ 或 $(2, 0)$

证明。根据引理 6.6，有 $H(\mathbf{z}\ t) = 1$，因此 $r \geq 1$。我们将证明 $r + 2s < 3$。重新排列 $\mathbf{z}$ 的分量，不妨设

$$\begin{cases} |z_j| > t, & 1 \leq j \leq r, \\ |z_j| = t, & r + 1 \leq j \leq n - s, \\ |z_j| < t, & n - s + 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

对于 $1 \leq j \leq n - s$，记 $z_j = |z_j|e^{i\theta_j}$。

假设 $r + 2s \geq 3$。我们将证明存在一个非零向量 $(\mathbf{v}\ \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$，使得二者均

$$(\mathbf{z} + \varepsilon\mathbf{v}, t + \varepsilon\tau) \quad \text{and} \quad (\mathbf{z} - \varepsilon\mathbf{v}, t - \varepsilon\tau)$$

当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，属于$\mathcal{C}$。这将与 $(\mathbf{z}\ t)$ 的极端性相矛盾.

根据$\mathcal{C}$的定义，我们只需验证 that

$$\sum_{j=1}^{n}(z_j \pm \varepsilon v_j) = 0, \qquad t \pm \varepsilon\tau \geq 0, \qquad \text{and} \qquad H(\mathbf{z} \pm \varepsilon\mathbf{v}, t \pm \varepsilon\tau) \leq 1.$$

由于 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$，第一个条件等价于

$$\sum_{j=1}^{n} v_j = 0. \tag{6.11}$$

当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，第二个条件自动成立，因为 $t > 0$。为处理最后一个条件，取

$$v_j = \begin{cases} b_j e^{i\theta_j}, & 1 \leq j \leq r, \\ \tau e^{i\theta_j}, & r+1 \leq j \leq n-s, \\ x_j + iy_j, & n-s+1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

其中 b_j， τ， x_j， y_j 是待确定的实数。

当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，各分量仍位于扰动阈值的同一侧。因此，

$$H(\mathbf{z} + \varepsilon\mathbf{v}, t + \varepsilon\tau) = \sum_{j=1}^{r}\big(|z_j| - t + \varepsilon(b_j - \tau)\big) = 1 + \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{r} b_j - r\tau\right),$$

同理，$H(\mathbf{z} - \varepsilon\mathbf{v}\ t - \varepsilon\tau) = 1 - \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{r} b_j - r\tau\right)$。因此，当且仅当 if

$$\sum_{j=1}^{r} b_j - r\tau = 0. \tag{6.12}$$

将所选取的$\mathbf{v}$ 分量代入（6.11）并分离实部和虚部，我们看到（6.11）和（6.12）等价于以下方程组：

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{r} b_j \cos\theta_j + \tau \sum_{j=r+1}^{n-s} \cos\theta_j + \sum_{j=n-s+1}^{n} x_j = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r} b_j \sin\theta_j + \tau \sum_{j=r+1}^{n-s} \sin\theta_j + \sum_{j=n-s+1}^{n} y_j = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r} b_j - r\tau = 0. \end{cases} \tag{6.13}$$

This 这是一个关于 $1 + r + 2s$ 个实未知数的三个实线性方程组成的齐次方程组，即

$$b_1, \ldots, b_r, \quad \tau, \quad x_{n-s+1}, y_{n-s+1}, \ldots, x_n, y_n.$$

由于 $r + 2s \geq 3$，未知数的数量至少为四个。根据秩-零化度定理，（6.13）存在非零解。

固定这样一个解，并令（$\mathbf{v}$ τ）为相应的扰动方向。由于 $t > 0$，对于充分小的 $\varepsilon > 0$，定义 $|z_j| > t$ 和 $|z_j| < t$ 分量的严格不等式仍然成立。$|z_j| = t$ 分量的模仍为 $t \pm \varepsilon\tau$。

根据（6.11），两个扰动后的构型的质心均为零。此外，（6.12）给出 $H(\mathbf{z} \pm \varepsilon\mathbf{v}\ t \pm \varepsilon\tau) = 1$。两个扰动后的点均属于 $\mathcal{C}$，因为 $t \pm \varepsilon\tau > 0$。该扰动非零，其中点为 $(\mathbf{z}\ t)$，这与其极端性矛盾。

因此， $r + 2s < 3$。由于 $r \geq 1$ 和 r， s 是非负整数，唯一的可能性是

$$(r, s) = (1, 0) \qquad \text{or} \qquad (r, s) = (2, 0).$$

证明完毕。 □

6.4. 步骤 4。一个模数高于阈值。假设 $|z_1| = t + d$ 以及 $|z_2| = \cdots = |z_n| = t$，其中 $d > 0$。根据引理 5.1，$A = QDQ$ 的奇异值为 $t + L$、t，其重数为 $n-3$、a和 0，其中 $L \geq 0$ 以及 $0 \leq a \leq t$。因此，$F(\mathbf{z}\ t) = L$，且 $H(\mathbf{z}\ t) = d$。希尔伯特–施密特恒等式 (6.4) 给出$2tL + L^2 + a^2 = \frac{n-2}{n}(2td + d^2)$，从而 $2tL + L^2 \leq 2t\sqrt{\frac{n-2}{n}}\, d + \frac{n-2}{n} d^2$。由于 $s \mapsto 2ts + s^2$ 在 $[0, \infty)$ 上递增，我们得到

$$F(\mathbf{z}, t) \leq \sqrt{\frac{n-2}{n}}\, H(\mathbf{z}, t). \tag{6.14}$$

6.5. **步骤5。两个模数高于阈值**。假设 $|z_1| = t + d_1$、$|z_2| = t + d_2$以及$|z_3| = \cdots = |z_n| = t$，其中 d_1、$d_2 > 0$。则 $H(\mathbf{z}\ t) = d_1 + d_2$。

如果 A 至多有一个奇异值超过 t，则引理 5.1 表明，其奇异值为 $t + L$、t，重数分别为 $n-3$、a，以及 0，其中 $L \geq 0$ 和 $0 \leq a \leq t$。根据 (6.4)，$2tL + L^2 + a^2 = \frac{n-2}{n}\big(2t(d_1 + d_2) + d_1^2 + d_2^2\big)$。由于 $d_1^2 + d_2^2 \leq (d_1 + d_2)^2$，，第 6.4 小节中的单调性论证给出 $F(\mathbf{z}\ t) = L \leq \sqrt{\frac{n-2}{n}}(d_1 + d_2)$。

接下来处理恰有两个奇异值超过 t 的情形。令 $z_j = (t + d_j)u_j$，其中$|u_j| = 1$ 对 $j = 1,\ 2$ 成立，并令 $\Delta_j = d_j(2t + d_j) > 0$。由于 $\sum_{j=1}^n z_j = 0$，我们有 $QD^*e = D^*e$。因此，

$$A^*A = t^2 Q + \sum_{j=1}^{2} \Delta_j (Qe_j)(Qe_j)^* - D^* e e^* D. \tag{6.15}$$

这里 $e = n^{-\frac{1}{2}}(1, \ldots, 1)^T$，如 A的定义中所述。差 $A^*A - t^2 Q$ 的秩至多为三。在$\mathbf{1}^\perp$上，特征值 t^2 因此至少具有 $n-4$重数。将A^*A的其余三个特征值（按重数计）记为 $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq 0$。引理 5.1 给出 $y_3 \leq t^2$，而我们的假设意味着$y_2 > t^2$。因此

$$F(\mathbf{z}, t) = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - 2t. \tag{6.16}$$

接下来，在保持所有模固定的情况下，我们比较 z_1 和 z_2取不同相位时的奇异值。Qe_1、Qe_2和 D^*e 的格拉姆矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{\overline{z_1}}{\sqrt{n}} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \frac{\overline{z_2}}{\sqrt{n}} \\ \frac{z_1}{\sqrt{n}} & \frac{z_2}{\sqrt{n}} & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \end{pmatrix}.$$

（6.15）中的秩三扰动的三个特征值（必要时补以零）与 $\mathrm{diag}(\Delta_1, \Delta_2, -1)$ 乘以该格拉姆矩阵所得矩阵的特征值重合。其迹和二阶主子式之和仅取决于模。其行列式中唯一依赖相位的项是 $2\Delta_1\Delta_2 \mathrm{Re}(z_1 z_2)/n^2$。因此，在给每个特征值加上 t^2 之后，$S := y_1 + y_2 + y_3$ 和 $E := y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$ 仅取决于模，并且

$$y_1 y_2 y_3 = C_0 + \frac{2\Delta_1\Delta_2}{n^2}\, \mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}), \tag{6.17}$$

其中 C_0 也仅取决于模。由于 $\Delta_1\Delta_2 > 0$，所以（6.17）中的乘积在 $u_1 = -u_2$时最小。我们证明，在 S 和 E 保持不变的情况下，减小 $y_1y_2y_3$的值不会使 $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}$减小。令 $x = y_3$。于是 $y_1 + y_2 = S - x$ 和 $y_1y_2 = E - Sx + x^2$，因此

$$y_1 y_2 y_3 = x(E - Sx + x^2), \qquad \frac{d}{dx}\big(x(E - Sx + x^2)\big) = (y_1 - x)(y_2 - x) \geq 0.$$

因此，减小乘积不会增大最小特征值 x。此外，

$$(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2})^2 = S - x + 2\sqrt{E - Sx + x^2}. \tag{6.18}$$

（6.18）右端关于 x 是非增的，因为其导数在有定义处为 $-1 + (2x - S)/\sqrt{E - Sx + x^2} \leq 0$。此外，$y_2 = \big(S - x - \sqrt{S^2 + 2Sx - 3x^2 - 4E}\big)/2$ 关于 x 也是非增的：由于 $S - 3x = y_1 + y_2 - 2x \geq 0$，其导数非正。在重特征值或零特征值处，相应结论由连续性得到。因此，减小 $y_1y_2y_3$ 不会减小 $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}$，也不会导致 y_2 低于 t^2。由（6.16），为 z_1 选择相反的相位，z_2 不会减小 F（$\mathbf{z}\ t$）。

现在我们检查相反的相位是否与质心条件相容。由于 $\sum_{j=1}^n z_j = 0$ and$|z_j| = t$ for $j \geq 3$, $|z_1 + z_2| \leq (n-2)t$。反三角不等式给出 $|d_1 - d_2| \leq |z_1 + z_2| \leq (n-2)t$。对于 $r \geq 2$ 个模为 t 的复数，加总结果会填满半径为 rt 的圆盘。对于 $r = 2$，只需改变各加项之间的夹角即可得到这一结论。在半径为 rt 的圆盘中加入一个加项，会填满半径为 $(r+1)t$ 的圆盘，因为半径为 $(r+1)t$ 的圆盘中的每一点到半径为 t 的圆的距离至多为 rt。

将此应用于 $r = n-2$。因此，可以选择 $z_3, \dots, z_n$ 的相位，使得在设定 $u_1 = -u_2$ 后根列表仍保持居中。因此不妨设 $z_1 = (t+d_1)u$ and $z_2 = -(t+d_2)u$ for some $|u| = 1$。

如有必要交换前两个零点，设 $d_1 \geq d_2$。于是我们得到分解

$$\mathbf{z} = (d_2 u, -d_2 u, 0, \dots, 0) + ((t+d_1-d_2)u, -tu, z_3, \dots, z_n). \tag{6.19}$$

（6.19）右侧的两个向量都已中心化。第一个向量在阈值为零时满足迹范数界（6.3）。若 $d_1 > d_2$，则第二个向量满足（6.14）。若 $d_1 = d_2$，则其最大模为 t，因此其压缩的算子范数至多为 t，其贡献为零。由次可加性（6.6）可得

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}, t) &\leq F((d_2 u, -d_2 u, 0, \dots, 0), 0) + F(((t+d_1-d_2)u, -tu, z_3, \dots, z_n), t) \\ &\leq 2\sqrt{\frac{n-2}{n}}\, d_2 + \sqrt{\frac{n-2}{n}}(d_1 - d_2) = \sqrt{\frac{n-2}{n}}\, H(\mathbf{z}, t). \end{aligned}$$

因此，对于引理 6.10中的情形 $(r,\ s) = (2,\ 0)$，引理 6.7中的（6.10）成立。

6.6. 第六步：完成证明。引理 6.7 中的极点分类以及第 6.4 和 6.5 小节中证明的界，确立了对于 C 中满足 $t > 0$ 的每个极点，（6.10）都成立。对于 $t = 0$，由（6.3）和定义（6.8）可得同样的结论。因此，分解（6.7）、引理 6.5 所述衰退锥上 F 的消失性以及次可加性（6.6）给出 $F(\mathbf{z}\ t) \leq \sqrt{(n-2)/n}$，对于每个 $(\mathbf{z}\ t) \in$ C。

现在令 z 为任意中心化向量，且 $t \geq 0$。若 $H(\mathbf{z}\ t) > 0$，则 $(\mathbf{z}/H(\mathbf{z}\ t)\ t/H(\mathbf{z}\ t)) \in$ C。由正齐次性可得 (6.2)。若 $H(\mathbf{z}\ t) = 0$，则 $|z_j| \leq t$ 对所有 j均成立，因此 $\|A\|_\infty \leq \|D\|_\infty \leq t$ 且 $F(\mathbf{z}\ t) = 0$。因此，对于每个中心化根列表以及每个 $t \geq 0$，(6.2) 均成立。

将 (6.2) 与 (6.1) 结合可得

$$\sum_{k=1}^{n-1} (|w_k| - t)_+ \leq \sqrt{\frac{n-2}{n}} \sum_{j=1}^{n} (|z_j| - t)_+, \qquad t \geq 0.$$

根据定义 1.10，定理 1.12 的断言对于 $n \geq 4$成立。在极值点约化之前处理的 $n = 2$ 和 $n = 3$两种情形，完成了证明。

7. 定理 1.6、1.14、1.16和 1.18 的证明

7.1. 模平方与幂和。

定理 1.14 的证明。对于 $n = 2$，中心化二次多项式的唯一临界点是零。假设 $n \geq 3$，并令 $e = n^{-\frac{1}{2}}(1, \dots, 1)^T$，$Q = I - ee^*$, $D = \operatorname{diag}(z_1, \dots, z_n)$，且 $A = (QDQ)|_{e^\perp}$。根据引理 4.2，A 的谱由 $w_1, \dots, w_{n-1}$ 构成，按重数计。由 Weyl主定理（引理 5.3）以及定义在 $[0, \infty$ 上的递增凸函数 $s \mapsto (s^2 - t)_+$，证明可归结为

$$\sum_{i=1}^{n-1} (s_i(A)^2 - t)_+ \leq \frac{n-2}{n} \sum_{j=1}^{n} (|z_j|^2 - t)_+, \qquad t \geq 0. \tag{7.1}$$

质心条件蕴含 $D^* e \in e^\perp$。因此，在 $e^\perp$ 上，

$$A^*A = (Q|D|^2 Q)|_{e^\perp} - (D^*e)(D^*e)^*, \qquad \operatorname{Tr}(A^*A) = \frac{n-2}{n} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2. \tag{7.2}$$

迹恒等式证明了（7.1），当 $t = 0$。固定 $t > 0$。情形 $z_1 = \cdots = z_n = 0$ 是显然的。否则，令 $b_j = (|z_j|^2 - t)_+$, $r_j = \min\{|z_j|^2, t\}$，并令 $\rho = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} r_j > 0$。特别地，$|z_j|^2 = b_j + r_j$ 且 $\rho \leq t$。由于 $|z_j|^2 - t \leq b_j$，方程（7.2）给出

$$A^*A - tI_{e^\perp} \leq T := (Q \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n) Q)|_{e^\perp} - (D^*e)(D^*e)^*. \tag{7.3}$$

直接计算迹可得 $\operatorname{Tr} T = \frac{n-2}{n} \sum_{j=1}^{n} b_j - \rho$。

我们断言 $T \geq -\rho I_{e^\perp}$。若 $b_j = 0$，则 $|z_j|^2/(b_j + \rho) = r_j/\rho$。若 $b_j > 0$，则 $r_j = t \geq \rho$，因此$|z_j|^2/(b_j + \rho) = 1 + (r_j - \rho)/(b_j + \rho) \leq r_j/\rho$。由此，$\sum_j |z_j|^2/(b_j + \rho) \leq n$。对于 $h \in e^\perp$，加权柯西 – 施瓦茨不等式给出

$$|\langle D^*e, h\rangle|^2 \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{|z_j|^2}{b_j + \rho} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} (b_j + \rho)|h_j|^2 \right) \leq \sum_{j=1}^{n} (b_j + \rho)|h_j|^2.$$

定义 的 T在 (7.3) 因此推出 $\langle (T+\rho I_{e^\perp})h,\ h \rangle \geq 0$。

算子 T 至多有一个负特征值，因为它是半正定算子的秩一负扰动。由于 $T \geq -\rho I_{e^\perp}$，我们有 $\operatorname{Tr}(T_-) \leq \rho$。将引理 5.2 应用于（7.3），得到

$$\sum_{i=1}^{n-1}(s_i(A)^2-t)_+ \leq \operatorname{Tr}(T_+) = \operatorname{Tr} T + \operatorname{Tr}(T_-) \leq \frac{n-2}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j.$$

因此（7.1）对每个 $t \geq 0$都成立。最后，引理 5.3 给出了其中的第一个不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1}(|w_k|^2-t)_+ \leq \sum_{i=1}^{n-1}(s_i(A)^2-t)_+ \leq \frac{n-2}{n}\sum_{j=1}^{n}(|z_j|^2-t)_+. \tag{7.4}$$

由于（7.4）对所有 $t \geq 0$均成立，定义 1.10 证明了该定理。 □

定理 *1.6*的证明。 当 $n=2$时，零点互为相反数，唯一的临界点为零。对于 $n \geq 3$，将引理 1.11 应用于定理 1.14，其中 $\Phi(u) = u^{\frac{p}{2}}$。这证明了所述界。对于 $p=2$，等号成立条件为（1.1）中的条件。

设 $p>2$，且这些根不全为零。令 $q=p/2$。由于 $u^q = q(q-1)\int_0^\infty (u-t)_+ t^{q-2}\,dt$，等号成立迫使（7.4）中两个外侧项之间的连续非负差对每个 $t \geq 0$ 都为零。在 $t=0$ 处，这意味着（1.1）中的等号成立，因此我们可以将这些根旋转到实轴上。记 $M = \max_j |z_j| > 0$。令 r 表示模为 M 的根的数量（按重数计），并令 d 表示不同的此类根的数量。根据不同实根值之间的严格交错性，恰有 $r-d$ 个临界点的模为 M。取 $t < M^2$ 充分接近 M^2，得到 $r-d = (n-2)r/n$，从而 $r = nd/2$。若 $d=1$，则一半的根等于一个端点，而另一半的模严格更小，这与中心化矛盾。因此 $d=2$、 $r=n$，并且中心化给出在 M 和 $-M$ 处的重数相等。反之，对于 $c(z^2-a^2)^{\frac{n}{2}}$ 的根，临界点为 0 和 $\pm a$，后者各自的重数为 $n/2-1$。这对每个 $p \geq 2$ 都给出等号成立。□

命题 7.1。 对于中心化三次多项式和 $p>2$，最小常数为

$$C_{3,p} = \begin{cases} 2/(2^p+2), & 2<p<4, \\ 1/9, & p=4, \\ 3^{-\frac{p}{2}}, & p>4. \end{cases}$$

在置换和共同的非零复因子意义下，非零极值根列表为 $(1、1、-2)$（对于$2<p<4$）以及 $(1、-1、0)$（对于 $p>4$）。当 $p=4$ 时，它们都是中心化共线列表。

证明。 临界点为 $\pm w$，其中 $6w^2 = \sum_j z_j^2$。旋转图形，使该和为非负实数，并令 $z_j = x_j + iy_j$。于是 $6|w|^2 = \sum_j x_j^2 - \sum_j y_j^2 \leq \sum_j x_j^2$和 $\sum_j |z_j|^p \geq \sum_j |x_j|^p$。由于 $\sum_j x_j = 0$，只需考虑实根。对于非零极值者，除非所有 $y_j = 0$，第一次比较都是严格的。

固定 $S = \sum_j x_j^2 > 0$并令 $u_j = x_j^2$和 $R = (x_1x_2x_3)^2$。由于 $\sum_j x_j = 0$，我们有 $\sum_{i<j} u_iu_j = (\sum_{i<j} x_ix_j)^2 = S^2/4$。因此， u_j解出 $t^3 - St^2 + (S^2/4)t - R = 0$。以$x_j$为根的三次多项式的判别式为 $S^3/2 - 27R$。于是 $0 \leq R \leq S^3/54$，其极值端点分别由一个零坐标和一个重坐标给出。根据连续性，每个中间 R都在圆 $\sum x_j = 0,\ \sum x_j^2 = S$ 上取得。

令 $q=p/2$。在内部， u_j 均为正且互不相同，隐式微分给出 $\frac{d}{dR}\sum_{j=1}^3 u_j^q = q\sum_{j=1}^3 \prod_{i\neq j} \frac{u_j^{q-1}}{(u_j-u_i)}$。右侧的和是 t^{q-1}的二阶差商，因此根据二阶导数的符号，对于$1<q<2$它为负，对于 $q=2$为零，对于 $q>2$为正。分子 $2(S/6)^q$是固定的。因此，对于 $2<p<4$，使分母最小的情形在重根端点处取得；对于 $p=4$的每个列表，均在此处取得；而对于 $p>4$，则在零坐标端点处取得。将 $(1,1,-2)$ 和 $(1,-1,0)$ 代入即可得到所述常数。□

7.2. **方向比较**。

定理 1.16 的证明。对于 $n=2$，断言显然成立。假设 $n \geq 3$。我们首先证明中心化实根多项式的临界点满足一个尾部不等式。令 $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ 满足 $\sum_j x_j = 0$，设$e = n^{-\frac{1}{2}}(1,\dots,1)^T$，并令 $Q = I - ee^*$，写作 $q_j = Qe_j$，其中 $e_1,\dots,e_n$ 为标准坐标向量。根据引理 4.2，自伴压缩 $B = (Q\,\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n)Q)|_{e^\perp}$的特征值就是 $\prod_j (z-x_j)$ 的临界点。

取 S 上的一个正压缩算子 $e^\perp$，并令 $h_j = \langle Sq_j,\ q_j\rangle$。对于互异的 j， k，厄米算子$q_jq_j^* - q_kq_k^*$的迹为零，且有两个非零特征值 $\pm\sqrt{(n-2)/n}$，因为 $\|q_j\|^2 = (n-1)/n$ 而

$\langle q_j,\ q_k\rangle = -1/n$。因此，正部和负部的变分刻画给出 $|h_j - h_k| \le \sqrt{(n-2)/n}$。

设 $a = \min_j h_j$ and $g_j = h_j - a$。则 $0 \le g_j \le \sqrt{(n-2)/n}$，并且 $\sum_j g_j = \operatorname{Tr} S - na \le \operatorname{Tr} S$，因为 $\sum_j q_j q_j^* = I_{e^\perp}$。对于 $t \ge 0$，中心化得到

$$\operatorname{Tr}\big(S(B - tI_{e^\perp})\big) = \sum_j (x_j - t)g_j - t\big(\operatorname{Tr} S - \sum_j g_j\big) \le \sqrt{\frac{n-2}{n}} \sum_j (x_j - t)_+.$$

对正收缩算子 S 取最大值可得 $\operatorname{Tr}\big((B - tI_{e^\perp})_+\big) \le \sqrt{(n-2)/n} \sum_j (x_j - t)_+$。对 $-B$ 应用相同的论证并相加，得到

$$\sum_{k=1}^{n-1} (|\eta_k| - t)_+ \le \sqrt{\frac{n-2}{n}} \sum_{j=1}^{n} (|x_j| - t)_+, \qquad t \ge 0, \tag{7.5}$$

其中 $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_{n-1}$ 是 $\prod_j (z - x_j)$ 的临界点。

固定 $\theta \in \mathbb{R}$，并将（7.5）应用于 $x_j = L_\theta(z_j) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} z_j)$。投影零点满足 $\sum_j x_j = 0$。根据引理 4.1，旋转临界点的实部被 $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_{n-1}$主序。将凸函数 $s \mapsto (|s| - t)_+$ 应用于该主序关系，然后使用（7.5），得到

$$\sum_{k=1}^{n-1} (|L_\theta(w_k)| - t)_+ \le \sum_{k=1}^{n-1} (|\eta_k| - t)_+ \le \sqrt{\frac{n-2}{n}} \sum_{j=1}^{n} (|L_\theta(z_j)| - t)_+. \tag{7.6}$$

参数 $t \ge 0$ 和方向 $\theta \in \mathbb{R}$ 均为任意的。等式（7.6）正是定义1.16下定理1.10的断言。□

定理*1.18*的证明。固定 $\theta \in \mathbb{R}$，并令 $x_j = L_\theta(z_j) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} z_j)$。质心条件给出 $\sum_{j=1}^n x_j = 0$。令 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ 为实多项式 $\prod_{j=1}^n (z - x_j)$ 的临界点。

引理4.1 表明，投影临界点向量 $(L_\theta(w_k))_{k=1}^{n-1}$ 被 $(\eta_k)_{k=1}^{n-1}$ 主化。由于 $s \mapsto (s^2 - t)_+$ 在 $\mathbb{R}$ 上对每个 $t \ge 0$都是凸的，Pereira 的主序关系给出了关于η_k的上界。定理1.14应用于中心化实多项式 $\prod_{j=1}^n (z - x_j)$，通过 x_j的模平方尾部对所得的和给出上界。因此，

$$\sum_{k=1}^{n-1} (|L_\theta(w_k)|^2 - t)_+ \le \frac{n-2}{n} \sum_{j=1}^{n} (|L_\theta(z_j)|^2 - t)_+, \qquad t \ge 0. \tag{7.7}$$

由于 θ 是任意的，定义 1.10 表明，（7.7）等价于对每个方向所声称的加权弱主序。□

8. 定理 1.7的证明

设 $n = 2m + 1 \ge 5$，并设 $p(z)$ 是一个零点质心为零的多项式。我们使用幂和Z_p 以及 W_p，它们在（4.1）中定义，并令

$$N_p = (m-1)(m+1)^p + m^{p+1} + 1, \qquad D_p = m(m+1)^p + (m+1)m^p, \qquad B_{n,p} = \frac{N_p}{D_p}. \tag{8.1}$$

在 $p = 2$处，（8.1）中的系数满足 $B_{n,\,2} = (n-2)/n$，因此（1.1）解决了 $p = 2$。还需考虑$p > 2$。

我们首先证明实零点的情形。对于任意函数 $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$，满足 $f(0) = 0$，令

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] = (m-1)\sum_{j=1}^{n} f((m+1)|z_j|) + m\sum_{j=1}^{n} f(m|z_j|) + \sum_{j=1}^{n} f(|z_j|) \\ - m\sum_{k=1}^{n-1} f((m+1)|w_k|) - (m+1)\sum_{k=1}^{n-1} f(m|w_k|).\end{aligned} \tag{8.2}$$

将 $f(u) = u^p$ 代入（8.2）得

$$\mathcal{L}[u^p] = N_p Z_p - D_p W_p. \tag{8.3}$$

F或以 0 为中心的实零点，牛顿恒等式给出 $W_2 = (n-2)Z_2/n$。由于 $N_2/D_2 = (n-2)/n$，

$$\mathcal{L}[u^2] = 0. \tag{8.4}$$

由于 $D_p > 0$，方程（8.1）和（8.3）表明，实根不等式 $W_p \le B_{n,\ p} Z_p$ 等价于 $\mathcal{L}[u^p] \ge 0$。定理 B.19 中的对数比较处理 $2 < p < 3$；命题 C.4 处理 $p \ge 3$，这是在引理 C.2中的极值约化之后得到的。

8.1. 范围 $2 < p < 3$。对于 $s > 0$，令 $\ell_s(u) = u/s - \log(1 + u/s)$，其中 $u \ge 0$。对于每个次数为 n 的中心化实根多项式，附录 B 中证明的定理 B.19 给出 $\mathrm{J}_s \ge 0$。小节 B.3 中定义的线性泛函 J_s，由参考根列表 $((m+1)^{[m]}, (-m)^{[m+1]})$ 及其临界点列表 $((m+1)^{[m-1]}, (-m)^{[m]}, 1)$ 构成。展开相应的乘积多重集可得 $\mathrm{J}_s = -\mathrm{L}[\ell_s]$。因此，

$$\mathcal{L}[\ell_s] \le 0, \qquad s > 0. \tag{8.5}$$

界（8.5）对每个中心化实构型均成立，与不同的零点值的数量无关。

对于 $u \ge 0$ 和 $2 < p < 3$，梅林恒等式为

$$u^p = \frac{p \sin(\pi p)}{\pi} \int_0^\infty s^{p-1} \left[\frac{u^2}{2s^2} - \ell_s(u) \right] ds. \tag{8.6}$$

对于 $u > 0$，代入 $t = u/s$ 并令 $g(t) = \log(1 + t) - t + t^2/2$。右侧积分在乘以前置因子之前变为 $u^p \int_0^\infty g(t) t^{-p-1}\, dt$。由于 $g(t) = O(t^3)$ 在零点处，而 $g(t) = O(t^2)$ 在无穷远处，积分收敛，且两个边界项均消失。利用 $g'(t) = t^2/(1+t)$ 进行分部积分，再应用欧拉贝塔积分，得到 $\int_0^\infty g(t) t^{-p-1}\, dt = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{t^{2-p}}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{p \sin(\pi p)}$。这证明了（8.6），包括通过直接代入得到的 $u = 0$。对于 $2 < p < 3$，其前置因子为正。将线性泛函（8.2）应用于（8.6），然后利用（8.4）和（8.5），得到

$$\mathcal{L}[u^p] = -\frac{p \sin(\pi p)}{\pi} \int_0^\infty s^{p-1} \mathcal{L}[\ell_s]\, ds \ge 0. \tag{8.7}$$

恒等式（8.7）因此意味着 $W_p \le B_{n,\ p} Z_p$ 对于满足 $2 < p < 3$ 的每个中心化实根多项式。

8.2. 范围 $p \ge 3$。固定 $p \ge 3$。对于非零实根列表，商 W_p/Z_p 在共同非零缩放下保持不变。因此，它在紧集 $\sum_{j=1}^n z_j = 0$、$\sum_{j=1}^n z_j^2 = 1$ 上取得最大值。选取一个极大化多项式。根据附录 C 中证明的引理 C.2，其零点至多取三个不同的值；如果有三个值，则中间值的重数为 1。经过反射和缩放后，根值分别为 $-\ell - t$、$(n-1)t$ 和 $k - t$，相应的重数为 k、1、ℓ，其中 $k + \ell = n - 1$、$1 \le k \le m$ 和 $-\ell/n \le t \le k/n$。这就是（C.9）中的参数化。在 $t = -\ell/n$ 和 $t = k/n$处，两个根值重合。

对于 $s \ge 0$，定义 $f_s(u) = (u^3 - s)_+$。式 $\mathcal{D}f$ 在（C.11）中的函数，是将所有根和临界点取值乘以 n 后，由归一化三值列表（C.9）构造而成的。由于 $f_{n^3 s}(nu) = n^3 f_s(u)$，公式（8.2）和（C.11）给出

$$\mathcal{L}[f_s] = n^{-3} \mathcal{D}_{f_{n^3 s}} \ge 0, \qquad s \ge 0. \tag{8.8}$$

（8.8）中的不等式是命题 C.4，即公式（C.14），证明见附录 C。

Whe令 n $p = 3$，将 $s = 0$ 代入（8.8）可得 $\mathcal{L}[u^3] \ge 0$。对于 $p > 3$，我们使用积分表示

$$u^p = \frac{p}{3}\left(\frac{p}{3} - 1\right) \int_0^\infty (u^3 - s)_+ s^{\frac{p}{3} - 2}\, ds, \qquad u \ge 0. \tag{8.9}$$

将 $\mathcal{L}$ 应用于（8.9），并利用（8.8）得到

$$\mathcal{L}[u^p] = \frac{p}{3}\left(\frac{p}{3} - 1\right) \int_0^\infty \mathcal{L}[f_s] s^{\frac{p}{3} - 2}\, ds \ge 0. \tag{8.10}$$

对于所选的实数最大化者，（8.3）以及 $s = 0$ for $p = 3$处的界，或对于 $p > 3$的（8.10），意味着$W_p/Z_p \le B_{n,\ p}$。由于该构型使商最大化，因此对于次数为 n的每个中心化实根多项式，$W_p \le B_{n,\ p} Z_p$ 均成立。

我们现在已经证明了$W_p \le B_{n,\ p} Z_p$ 对于两个范围内的实零点：（8.7）处理 $2 < p < 3$，（8.8）在 $s = 0$处处理 $p = 3$，而（8.10）处理 $p > 3$。为推广到复零点，固定 $\theta \in [0, 2\pi]$。将引理4.1应用于旋转后的多项式和凸函数 $x \mapsto |x|^p$，再结合实根不等式，可得

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} w_k)|^p \le B_{n,p} \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} z_j)|^p. \tag{8.11}$$

对 (8.11) 在 $[0, 2\pi]$ 上积分，并利用 (4.4) 可得

$$W_p \le B_{n,p} Z_p, \qquad n = 2m + 1 \ge 5, \quad p > 2. \tag{8.12}$$

To 证明锐性，取 $a, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 且 co nsider

$$p(z) = \lambda(z - (m+1)a)^m (z + ma)^{m+1}. \tag{8.13}$$

临界点为$(m+1)a$，重数为 $m-1$，$-ma$，重数为 m，以及 a 一次。因此$Z_p = D_p|a|^p$ 且 $W_p = N_p|a|^p$，所以对于每个 $p > 2$，(8.12)中均取等号。

对于 $p \geq 3$，命题 C.4 中的严格断言排除了具有三个不同零点的极值实根多项式。引理 C.2 排除了多于三个不同零点值的情形。小节 C.1.5 中的二值比较表明，非零实根多项式只有在重数为 m 和 $m+1$时才能取等号。如果复根列表具有至少三个不同值，则对于几乎所有方向，其实投影都具有至少三个不同值。因此，对于几乎所有投影，实数情形的不等式都是严格的，对 (8.11) 积分便得到 (8.12) 中的不等式严格成立。一个中心化的二值复数列表位于一条经过原点的直线上，因此旋转后即可应用实数情形的等号分类。于是，对于 $p \geq 3$，非零等号多项式恰好是 (8.13) 中的那些多项式，正如定理 C.1 所断言的那样。对于 $2 < p < 3$，实根列表取等号迫使 (8.7) 中的积分为零。其权函数为正，并且对于 $s > 0$，$-\mathrm{L}[\ell_s]$ 连续且非负，因此对于每个 $s > 0$都有 $\mathrm{L}[\ell_s] = 0$。固定 u后，当 $s \to \infty$、$\ell_s(u) = \frac{u^2}{2s^2} - \frac{u^3}{3s^3} + O(s^{-4})$时，(8.2) 中的泛函是一个有限和。根据 (8.4)，乘以 s^3 并令其趋于极限，得到 $\mathrm{L}[u^3] = 0$。定理 C.1 的三次多项式等号情形现在给出非零实根列表的 (8.13)。具有三个或更多不同值的复数列表在几乎所有方向上都有三个不同的实投影。对这些方向上的严格实数情形不等式积分，排除了该列表取等号的可能性。剩余的二值列表都是共线的。(8.13) 的恒等式 $Z_p = D_p|a|^p$ 和 $W_p = N_p|a|^p$ 表明其具有锐性。

参考文献

[Bha97] R. Bhatia，《矩阵分析》，数学研究生教材，第169卷，施普林格出版社，纽约，1997，doi:10.1007/978-1-4612-0653-8. [BE95] P. Borwein 和 T. Erdélyi，《多项式与多项式不等式》，数学研究生教材，第161卷，施普林格出版社，纽约，1995，doi:10.1007/978-1-4612-0793-1. [CN06] W. S. Cheung 和 T. W. Ng，利用伴随矩阵研究多项式的零点与临界点，《数学分析及其应用杂志》319 (2006)，第2期，690–707，doi:10.1016/j.jmaa.2005.06.071. [Con78] J. B. Conway，《单复变函数 I》，第2版，数学研究生教材，第11卷，施普林格出版社，纽约，1978，doi:10.1007/978-1-4612-6313-5. [DS47] N. G. de Bruijn 和 T. A. Springer，关于多项式及其导数的零点 II，《数学探索》9 (1947)，264–270，原始期刊扫描件。 [DIS99] M. G. de Bruin、K. G. Ivanov 和 A. Shar ma，舍恩伯格式猜想，《不等式及其应用》4 3, 183 1999 10 1155 1025583499000363 ( )，第 –213 期，doi: . /S 。 [DS99] M. G. de Bruin 和 A. Sharma，关于一个舍恩伯格式猜想，《计算与应用数学杂志》105 2, 221 1999 1 10 1016 0377 0427 99 00013 8 ( )，第 – –228 期，doi: . /S - ( ) - 。 [EN48] P. Erdős 和 I. Niven，关于多项式及其导数的根，《美国数学会通报》 54 2, 184 1948 10 1090 0002 9904 1948 08982 0 ( )，第 –190 期，doi: . /S - - - - 。 [FG02] K. Fritzsche 和 H. Grauert，从全纯函数到复流形，数学研究生教材，第213卷，施普林格出版社，纽约，2002，doi:10.1007/978-1-4684-9273-6. [GGTW26] B. Georgiev、J. Gómez-Serrano、T. Tao 和 A. Z. Wagner，数学发现与探索可以规模化开展，《美国国家科学院院刊》123 (2026)，第40期，论文编号 e2536158123，doi:10.1073/pnas.2536158123. [KR03] N. L. Komarova 和 I. Rivin，调和平均数、随机多项式与随机矩阵，《应用数学进展》31 (2003)，第2期，501–526，doi:10.1016/S0196-8858(03)00023-X. [KT16] O. Kushel 和 M. Tyaglov，循环矩阵与多项式的临界点，《数学分析及其应用杂志》439 2, 634 2016 10 1016 2016 03 005 ( )，第 –650 期，doi: . /j.jmaa. . . 。 [LXZ21] M. Lin、M. Xie 和 J. Zhang，关于循环矩阵与多项式临界点的注记，《数学分析及其应用杂志》502 (2021)，第1期，论文编号 125233，doi:10.1016/j.jmaa.2021.125233. [Mal05] S. M. Malamud，正规矩阵的逆谱问题与Gauss–Lucas定理，《美国数学会汇刊》357 (2005)，第10期，4043–4064，doi:10.1090/S0002-9947-04-03649-9. [MOA11] A. W. Marshall、I. Olkin 和 B. C. Arnold，《不等式：主化理论及其应用》，第2版，施普林格统计学丛书，Springer，纽约，2011，doi:10.1007/978-0-387-68276-1. [Paw98] P. Pawłowski，关于多项式及其导数的零点，《美国数学会汇刊》350 11, 4461 1998 4472，10 1090 0002 9947 98 02291 0 ( )，第 – 期，doi: . /S - - - - 。 [Per03] R. Pereira，微分算子与多项式的几何，《数学分析及其应用杂志》285 (2003)，第1期，336–348，doi:10.1016/S0022-247X(03)00465-7. [Roc70] R. T. Rockafellar，《凸分析》，普林斯顿数学丛书，第28卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，1970，doi:10.1515/9781400873173. [Sch77] G. Schmeisser，关于伊利耶夫猜想，《数学杂志》156 (1977)，第2期，165–173，doi:10.1007/BF01178761. [Sch04] G. Schmeisser，多项式的临界点被其零点主化，《函数理论计算方法》3 (2004)，第1期，95–103，doi:10.1007/BF03321027. [Sch86] I. J. Schoenberg，关于罗尔定理对实系数或复系数多项式的一个猜想类比，《美国数学月刊》93 (1986)，第1期，8–13，doi:10.1080/00029890.1986.11971734. [Tan25] Q. Tang，Schoenberg 型不等式，预印本，2025，arXiv:2504.09837v2，doi:10.48550/arXiv.2504.09837。

[TZ25] Q. Tang 和 T. Zhang，尖锐的 *Schoenberg* 型不等式与 *de Bruin–Sharma* 问题，预印本，2025，arXiv:2508.10341v3，doi: 10.48550/arXiv.2508.10341。[Zha26a] T. Zhang，*Pawlowski* 结果的一个改进，《美国数学会会刊》**154** (2026)，第2期，775–782，doi: 10.1090/proc/17471。

[Zha26b] T. Zhang，复多项式的零点分布，《数学分析及其应用杂志》**561**(2026)，第 1 期，论文编号 130609，doi: 10.1016/j.jmaa.2026.130609。

[Zha26c] T. Zhang，*Schoenberg* 验证代码，Python 软件，GitHub，2026 https://github.com/zhangteng2000/，，修订版（三次尾部检查器）。schoenberg-validation e7435e5521dc。

[Zha26d] T. Zhang，*Schmeisser* 猜想的证明，预印本，2026 年，arXiv:2611.19084v2，doi: 10.48550/arXiv.2611.19084。

[Zha27] T. Zhang，零点与临界点的凸包何时重合？，《数学分析及其应用杂志》**566** (2027)，第 1 期，论文编号 131002，doi: 10.1016/j.jmaa.2026.131002。

附录 A. $1 < p < 2$ 的整数敏感的矩估计

A.1. 唯一的最小化二值比例。

定理 A.1. 对于每个 $1 < p < 2$，函数

$$H_p(r) = \frac{(1+r)(1+r^p-(1-r)^p)}{r+r^p}, \qquad 0 < r \le 1,$$

有一个唯一的临界点 $r_p \in (0,\ 1)$。它在 $(0,\ r_p)$ 上严格递减，在$(r_p,\ 1)$上严格递增。特别地，r_p 是唯一的全局最小值。

证明。令 $q = p-1 \in (0,\ 1)$，并令 $J(r) = (r+r^p)^2 H_p'(r)$ 以及 $K(r) = J(r)/(r\,r^{q+1})$。直接求导得到

$$J(r) = (1-r)^q\big[1+qr+pr^2+(p+qr+r^2)r^q\big] - 1 - p(1-r^2)r^q + r^{2q+2}.$$

我们证明 K 在 $(0,\ 1)$ 上严格凹。

写出二项式展开式 $(1-r)^q = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j r^j$，其中 $a_j > 0$ 和 $a_1 = q$，并令 $c_2 = p - q^2 - a_2 = \frac{2+q-q^2}{2} > 1$ 以及 $b_2 = 1 + p - q^2 - pa_2$。对于 $j \ge 3$，令 $A_j = a_j + qa_{j-1} + pa_{j-2} > 0$ 和$B_j = pa_j + qa_{j-1} + a_{j-2} > 0$。展开两个因子并合并 r 的同次幂，得到

$$K(r) = -q^2 + c_2 r^{1-q} + b_2 r + r^{q+1} - \sum_{j=3}^{\infty} A_j r^{j-q-1} - \sum_{j=3}^{\infty} B_j r^{j-1}. \tag{A.1}$$

两个级数都可以在 $(0,\ 1)$ 的每个紧子区间上逐项求导。对于 $j \ge 3$，指数$j-q-1$ 和 $j-1$ 均大于 1，因此它们的二阶导数项均严格为负。只保留第二个和式的 $j = 3$ 项，$K''(r) \le -c_2 q(1-q)r^{-q-1} + q(q+1)r^{q-1} - 2B_3$。由 $z^{\frac{1-q}{1+q}}$ 的凹性可得 $q(q+1)r^{q-1} \le q(1-q)r^{-q-1} + 2q^2$。由于 $B_3 = pa_3 + qa_2 + a_1 > q > q^2$ 和 $c_2 > 1$，因此得到$K''(r) \le -(c_2-1)q(1-q)r^{-q-1} - 2(B_3 - q^2) < 0$。这证明了严格凹性。

公式（A.1）给出 $K(0+) = -q^2 < 0$。J 的显式表达式给出 $K(1-) = 0$，更确切地说，$\lim_{r\uparrow 1} J(r)/(1-r)^q = 4p \ge 0$。事实上，乘在 $(1-r)^q$ 前的括号趋于 $4p$，而 $1 + p(1-r^2)r^q - r^{2q+2} = O(1-r)$ 以及 $q < 1$。因此，当 $r < 1$ 充分接近 1 时，对所有 $r < 1$，均有 $K(r) > 0$。

一个严格凹函数满足 $K(0+) < 0$、$K(1-) = 0$，并且当 $r < 1$ 充分接近 1 时，$K(r) > 0$，则它在 $(0,\ 1)$ 中恰有一个零点：两个内部零点连同端点零点会与中间零点处的严格凹性相矛盾。该函数在内部零点之前为负，在其后为正。由于对于 $0 < r < 1$，$H_p'(r)$ 和 $K(r)$ 具有相同的符号，K 的唯一零点就是所断言的极小化点 r_p。□

推论 A.2。 对于次数为 n 的中心化二值列表，最大比值为

$$\mathcal{B}_{n,p} = \max_{1 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor} \frac{(k-1)(n-k)^p + (n-k-1)k^p + (n-2k)^p}{k(n-k)^p + (n-k)k^p}.$$

由定理 *A.1*可知，只需检验整数 $\lfloor n\theta_p \rfloor$ 和 $\lceil n\theta_p \rceil$，其中 $\theta_p = r_p/(1+r_p)$。若任一整数位于 $[1, \lfloor n/2 \rfloor]$ 之外，则将其替换为区间上最近的端点。

证明。该比值恰为 $1 - H_p(k/(n-k))/n$，且 $k/(n-k)$ 随 k严格递增。由定理 A.1可得其在 $n\theta_p$ 两侧的单调性。□

最小值的范围。对于 $0 < r < 1$，$H_p(r) > 1$，由于$(1+r)\ (1-r)^p < (1+r)\ (1-r) < 1 < 1+r^{p+1}$。在零点处，$H_p(r) = p - (p-1)\ r^{p-1} + o(r^{p-1})$。结合已取得的内部最小值，这证明了 $1 < H_p(r_p) < p$。

A.2. **关于使最小值达到的二值比例的上界。** 下面的估计控制了定理 A.1 中最小值的位置。它还用于确定需要进行四次修正的整数单元。

引理 A.3。 令 $1 < p < 2$，集合 $q = p - 1$，并令 r_p 为 H_p的唯一极小点。则

$$0 < \frac{r_p}{1 - r_p} < \min\left\{\frac{q^2}{4}, \frac{1}{16}\right\}. \tag{A.2}$$

证明。置 $b_p = r_p/(1 - r_p)$。我们首先利用函数 K 和级数（A.1）证明 $b_p < q^2/4$ 当 $0 < q \le 1/2$时成立。对于 $q \ge 1/2$，我们通过固定半径的导数估计证明 $b_p < 1/16$。

范围 $0 < q \le 1/2$。保留 K 自定理 A.1的证明。根据其定义，K（r）和 H_p'（r）具有相同的符号，并且

$$K(r) = -q^2 + c_2 r^{1-q} + b_2 r + r^{q+1} - \sum_{j=3}^{\infty} A_j r^{j-q-1} - \sum_{j=3}^{\infty} B_j r^{j-1},$$

其中

$$c_2 = 1 + \frac{q(1-q)}{2}, \qquad b_2 = 2 + \frac{q(1-q)^2}{2}, \qquad 0 < A_j, B_j \le 2(1+q)q.$$

A_j 和 B_j 的界由二项式展开式 $(1 - r)^q = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j r^j$中的 $0 < a_j \le q$ 推出。置$r = q^2/(4 + q^2)$，对应于 $b = q^2/4$。若 T表示除以 r后的两个正尾项，则

$$T \le 2(1+q)q\frac{r^{1-q} + r}{1 - r}, \qquad \frac{K(r)}{r} = -(4 + q^2) + c_2 r^{-q} + b_2 + r^q - T.$$

对于 $0 < q \le 1/4$，有 $r \le 1/65$、$r^{1-q} < 1/20$，因此得到 $T < q/6$。利用 $r^{-q} + r^q \ge 2$ 可得

$$\frac{K(r)}{r} \ge q\left(1 - \frac{5}{2}q + \frac{1}{2}q^2\right) - T \ge \left(\frac{13}{32} - \frac{1}{6}\right)q > 0.$$

对于 $1/4 \le q \le 1/2$，有 $r \le 1/17$ 和 $r^{-q} > 2$。因此，$r^{-q} + r^q > 5/2$，而 $r^{1-q} < 1/4$ 给出 $T < 63q/64 \le 63/128$。剩余的主项至少为

$$\frac{1}{2} - q^2 + q(1-q) + \frac{1}{2}q(1-q)^2 \ge \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

因此 $K(r)/r > 1/128$。K 的唯一零点位于左侧，这就证明了在这一范围内的 $b_p < q^2/4$ q。

范围 $1/2 \le q < 1$。还需证明 $H_p'(1/17) > 0$。令 $t = 1 - q \in (0,\ 1/2]$，$\alpha = \log(17/16)$，以及$\beta = \log 17$。在 $r = 1/17$ 处，精确分子 $J = (r + r^p)^2 H_p'(r)$变为

$$J(t) = \left(\frac{4928}{4913} - \frac{288}{4913}t\right)e^{\alpha t} + \left(\frac{9536}{83521} - \frac{288}{4913}t\right)e^{(\alpha+\beta)t} - 1 + \left(-\frac{576}{4913} + \frac{288}{4913}t\right)e^{\beta t} + \frac{1}{83521}e^{2\beta t}.$$

常数泰勒系数为零。令 $J(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j t^j$，只需验证

$$c_1 > \frac{49}{100000}, \quad c_j > 0\ (2 \le j \le 5), \quad c_j > -\frac{1}{1000}\ (6 \le j \le 11),$$

以及，对于 $0 < t \le 1/2$，$\left|\sum_{j=12}^{\infty} c_j t^j\right| < \frac{t}{1000000}$。有理数算术证书 `subquad_04_the_upper_location_estimate.py` 通过以下方式界定对数，从而验证系数和尾项界：

$$\log\frac{1+z}{1-z} = 2\sum_{j=0}^{23}\frac{z^{2j+1}}{2j+1} + R, \qquad 0 < R < \frac{2z^{49}}{49(1-z^2)},$$

利用 $z = 1/33$ 和 $z = 1/3$，并使用 $\log 17 = 4\log 2 + \log(17/16)$。指数尾项通过 $\alpha < 1/16$、$\alpha + \beta < 3$、$\beta < 3$、$2\beta < 6$ 以几何级数地进行界定。校验器仅使用精确有理数运算。因此，$J(t) > \left(\frac{49}{100000} - \frac{1}{16000} - \frac{1}{1000000}\right)t > 0$。由此，定理 A.1 得出 $b_p < 1/16$，适用于 $1/2 \le q < 1$。由于在此范围内 $q^2/4 \ge 1/16$，且对于 $q \le 1/2$，$q^2/4 \le 1/16$，这两个估计证明了 (A.2)。

□

A.3. **十九次以内一致的二值位置界。**

定理 A.4. 设 $1 < p < 2$ 且设 r_p 为定理 H_p 中的唯一极小点 A.1。令 $\theta_p = r_p/(1+r_p)$。那么

$$r_p < \frac{1}{18}, \qquad \theta_p < \frac{1}{19}.$$

证明。令 $q = p - 1$。对于 $0 < q \le 12/25$，引理 A.3 给出 $r_p < q^2/(4+q^2) \le 36/661 < 1/18$。对于 $12/25 \le q < 1$，我们证明 $H_p'(1/18) > 0$。由定理 A.1，这意味着 $r_p < 1/18$。

令 $r = 1/18$, $\varepsilon = 1 - q \in (0, 13/25]$, $\alpha = \log(18/17)$ 和 $\beta = \log 18$。精确导数分子 $J = (r + r^p)^2 H_p'(r)$ 为

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) = {} & (1-r)\{1 + r + 2r^2 - \varepsilon(r + r^2)\}e^{\alpha\varepsilon} \\ & + (1-r)r\{2 + r + r^2 - \varepsilon(1+r)\}e^{(\alpha+\beta)\varepsilon} \\ & - 1 + r(1-r^2)(-2+\varepsilon)e^{\beta\varepsilon} + r^4 e^{2\beta\varepsilon}. \end{aligned}$$

其常数系数为零。令 $J(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varepsilon^j$。以下有限有理数界成立：$c_1 > \frac{1}{5000}$, $c_j > 0$ $(2 \le j \le 5)$、$c_j > -\frac{1}{1000}$ $(6 \le j \le 11)$，以及

$$\left| \sum_{j=12}^{\infty} c_j \varepsilon^j \right| < \frac{\varepsilon}{500000} \qquad \left(0 < \varepsilon \le \frac{13}{25}\right).$$

该证书 `turn3_norm_nineteen_location_certificate.py` 使用以下内容验证系数和尾项界

$$2\sum_{j=0}^{23} \frac{z^{2j+1}}{2j+1} < \log\frac{1+z}{1-z} < 2\sum_{j=0}^{23} \frac{z^{2j+1}}{2j+1} + \frac{2z^{49}}{49(1-z^2)}.$$

对于 α，它取 $z = 1/35$，并使用带有 $z = 1/3$ 和 $z = 1/17$ 的 $\beta = 4\log 2 + \log(9/8)$。所有系数计算均为有理数。利用 $\alpha < \frac{1}{17}$、$\alpha + \beta < 3$、$\beta < 3$ 和 $2\beta < 6$，指数尾部以几何级数地方式进行界定。结合 $T = 13/25$，$J(\varepsilon)$ 的系数和尾项界推出

$$\frac{J(\varepsilon)}{\varepsilon} > \frac{1}{5000} - \frac{1}{1000}\frac{T^5}{1-T} - \frac{1}{500000} = \frac{17401}{146484375} > \frac{1}{10000} > 0.$$

因此，在剩余范围内，$H_p'(1/18) > 0$ 始终成立。严格单峰性给出 $r_p < 1/18$，而关于 θ_p 的上述界由递增映射 $r \mapsto r/(1+r)$ 得到。□

特别地，$n\theta_p \le 1$ 无上限三矩定理中的条件对每个 $4 \le n \le 19$ 以及每个 $1 < p < 2$ 均成立。该蕴含使用了 $\theta_p < 1/19$ 定理 A.4 中的条件；不需要 r_p 关于 p 的单调性。

为后文使用，记 $S_{n,\,p} = ((n-2)/n)^{\frac{p}{2}}$；二值构型上的最大值 $\mathcal{B}_{n,\,p}$ 定义于推论 A.2 中。

A.4. **整数约束之外的四阶矩上限。** 沿用引理 4.3 和 4.4 的记号。记 $q = p - 1$ 以及 $c = (n-2)/n$。在最大化的实根构型中，μ 的目标函数和前三阶矩分别由（4.5）和（4.6）给出。精确四阶矩恒等式为（4.12）。

将剩余的 $n-2$ 根写为 $t + y_\nu$，其中 $y_\nu \in [-1, 1]$ 且 $\sum_{\nu=1}^{n-2} y_\nu = -nt$。选择一个整数 $m \in \{0, \dots, n-3\}$，使得 $v = -nt - 2m + (n-3)$ 位于 $[-1, 1]$ 中。在此立方体截面上的凸最大化问题，结合柯西–施瓦茨不等式，可得

$$c^2 + \frac{4t^2}{n(n-2)} \le \int_{-1}^{1} y^4 \, d\mu(y) \le c^2 + \frac{2}{n^2}(n - 3 + v^2 - nt^2). \tag{A.3}$$

上界取等号要求每个 y_ν 除至多一个外都属于 $\{-1, 1\}$。因此，四阶矩缺陷恒等式（4.9）给出

$$\int_{-1}^{1} (1-y^2)(y-t)^2 \, d\mu(y) \ge \frac{2(1-v^2)}{n^2}. \tag{A.4}$$

对称端点。如果 $t = 0$，方程（4.5）和（4.6），连同 $s^{\frac{p}{2}}$ 的凹性，给出 $W_p/Z_p = \int_{-1}^{1} |y|^p \, d\mu(y) \le c^{\frac{p}{2}}$。等号成立必然有 μ 的支撑集为 $\{\pm\sqrt{c}\}$，因此 $\int y^4 \, d\mu = c^2$。由（4.12），这意味着 $\sum_{\nu=1}^{n-2} y_\nu^2 = 0$，因为 $t = 0$。因此，所有内部零点均为零；等号仅在稀疏对经过实数缩放和置换后成立。

松弛矩问题。设 $\Lambda_{n,\,p}=$ 最大值$\{S_{n,\,p},\ \mathcal{B}_{n,\,p}\}$。只需证明，每个满足（$\mu$ 上的 $[-1,1]$ 4.6）和（A.3）中上界条件的概率测度）都满足

$$2\int y\,\operatorname{sgn}(t+y)|t+y|^{q}\,d\mu(y)\le \Lambda_{n,p}\big((1-t)^{q}+(1+t)^{q}\big),\qquad 0\le t\le c.$$

极大化实根列表的谱测度满足（4.6）和（A.3）。在包含连续型最大值的单元之外，我们使用三阶矩界。在该单元之内，（A.4）给出了四次修正积分的下界。

对于在整个区间上主化 $P(y)=\sum_{j=0}^{4}a_j y^{j}\operatorname{sgn}(t+y)|t+y|^{q}$ 的四次多项式 y，可利用固定的前三阶矩以及根据 a_4 符号选取的相应四阶矩端点来界定其积分。只有在整个区间 $[-1,1]$ 上证明了四次多项式的逐点主化关系及由此得到的积分不等式后，它才能给出精确的对偶证书。

A.4.1. 整个舍入单元都位于四次定理的区域内。设 r_p 为 H_p 的唯一极小点，令 $\theta_p=r_p/(1+r_p)$ 且 $t_p=1-2\theta_p$。方程 (A.2) 蕴含 $r_p<1/17$，因而 $\theta_p=r_p/(1+r_p)<1/18$。若 $n\theta_p<1$，则 $t_p>(n-2)/n$，且在整个可容许区间上，连续二值表达式都不超过单离群点端点。若 $n\theta_p$ 是整数，则其连续型最大值已在某个允许的格点处取得。否则令 $k=\lfloor n\theta_p\rfloor\ge 1$。只有单元 $\left[1-\frac{2}{(k+1)\,n},\ 1-\frac{2k}{n}\right]$ 可能包含这样的点：连续二值表达式超过所有离散二值表达式的值。其左端点满足$1-\frac{2}{(k+1)\,n}>t_p-\frac{2}{n}\ge 1-4\theta_p>\frac{7}{9}>\frac{3}{4}$。因此，在该单元内处处有 $t>3/4$。定理 A.23 给出了E_{-}的符号。定理 A.28 和 A.37 给出了与离散最大值的比较。

A.5. **仅均值包络的全局双接触分类**。固定 $0<q<1$，令 $p=q+1$，并设 $0<t<1$。定义 $\phi_t(y)=y\operatorname{sgn}(t+y)|t+y|^{q}$和 $D=(1-t)^{q}+(1+t)^{q}$，并令 K_t 为连续差商 $K_t(y)=\phi_t[-1,y,1]=\frac{D/2+\big((1+t)^{q}-(1-t)^{q}\big)y/2-\phi_t(y)}{1-y^{2}}$。端点值由连续性确定。

在所有 δ_t 在 $[-1,1]$ 上且均值为 t 的概率测度 ν 中，$\int K_t\,d\nu$ 的最小值要么由要么由一个测 度支撑在 $\{-1,b\}$ 上的概率测度取得，其中某个 $t<b\le 1$ 满足这一条件。因此，这个仅均值约束下的最小值恰为

$$\min_{t\le b\le 1}\frac{(b-t)K_t(-1)+(1+t)K_t(b)}{1+b}. \tag{A.5}$$

选择 $b=t$ 包含点质量 δ_t。这并不会在端点梯度问题中施加倒数约束或方差约束，因此其本身无法给出尖锐的有限次数常数。

负分支上的全局端点弦不等式。设 Q_H 为在 -1、1 处的 ϕ_t 三次 Hermite 插值多项式，并在两个端点处规定函数值和一阶导数。令 $A=1-t$, $B=1+t$。其 y^{2}、y^{3} 的系数分别为 $d_2=\frac{D+q(A^{q-1}+B^{q-1})}{4}>0$ 和 $d_3=\frac{q(B^{q-1}-A^{q-1})}{4}<0$。~~记 $g(u)=u^{q+1}+tu^{q}$ 以及$P(u)=Q_H(-t-u)$~~。由于 P和 g在 $u=A$处具有相同的函数值和导数，三次泰勒公式给出 $P(u)=g(A)+g'(A)(u-A)+\big(d_2-(2+t)d_3-d_3u\big)(u-A)^{2}$。有用的系数恒等式为$d_2-(2+t)d_3=qA^{q-1}+\frac{1-q}{4}D$。$u^{q}$ 在 $[0,\infty)$ 上的凹性给出 $u^{q}\le A^{q}+qA^{q-1}(u-A)$。将此不等式乘以 $u\ge 0$ 得到 $u^{q+1}\le A^{q+1}+(q+1)A^{q}(u-A)+qA^{q-1}(u-A)^{2}$。因此，再加上关于$tu^{q}$ 的切线界，得到 $g(u)\le g(A)+g'(A)(u-A)+qA^{q-1}(u-A)^{2}$。因此

$$P(u)-g(u)\ge\left(\frac{1-q}{4}D-d_3u\right)(u-A)^{2}>0\qquad(u\ge 0,\ u\ne A). \tag{A.6}$$

特别地，这适用于 $0\le u<A$，即整个负平移分支 $-1<y\le -t$，包括尖点。设 L_H 为连接 K_t端点值的仿射函数。恒等式 $Q_H(y)-\phi_t(y)=(1-y^{2})(K_t(y)-L_H(y))$ 以及（A.6）表明

$$K_t(y)>\frac{1-y}{2}K_t(-1)+\frac{1+y}{2}K_t(1)\qquad(-1<y\le -t). \tag{A.7}$$

将该区间内的任意质量替换为其端点混合，可保持均值不变，并严格减少其对目标函数的贡献。因此，没有任何最优测度会在该处放置正质量。

分类的证明。紧性以及具有一个指定矩的概率测度的极点的基本描述表明，可以选择一个支撑点至多为两个的最优解。等价地，连续函数 K_t 在内部点 t 处的下凸包由一条弦实现。它有一个支撑仿射函数 ℓ，满足 $\ell\le K_t$，并且在该最优解的每个支撑点处取等号。根据 (A.7)，每个内部支撑点都严格位于 $-t$ 的右侧。三次多项式$Q(y)=D/2+\big((1+t)^{q}-(1-t)^{q}\big)y/2-(1-y^{2})\ell(y)$ 支配 ϕ_t，并且自动在 $y=-1$、1 处接触。

写作 $z = t + y$，且 $Q(z - t) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$。主化要求 $a_0 > 0$：若 $a_0 = 0$，则当 $z = -u < 0$ 很小时，残差等于 $-tu^q + O(u) < 0$。在正半轴上，残差为 $a_0 + tz^q + a_1 z - z^{q+1} + a_2 z^2 + a_3 z^3$。按指数递增顺序排列时，其系数符号至多有三次变化。因此，广义笛卡尔符号法则将其正零点（按重数计）限制为至多三个。该法则可在除以最低次幂后，反复应用罗尔定理论证得到；零系数直接略去。两个内部支撑点都会产生二重正-z 接触，这与零点数的上界矛盾。在 $\{a, 1\}$ 上且满足 $-1 < a < t$ 的最优解也不可能存在：其内部原子满足 $a > -t$，而在 1 处 ℓ 与 K_t 接触，这使 $Q - \phi_t = (1 - y^2)(K_t - \ell)$ 在右端点处为二重零点。再加上在 a 处的二重接触，正零点总数再次达到四个。仅剩的选择是在 t 处的单原子测度，以及支撑在 $\{-1, b\}$ 上的双原子测度。它们的权重恰好给出 (A.5)。□

在 $t = 0$ 处，包络函数所需的结论可直接由 $K_0(y) = (1 - |y|^p)/(1 - y^2) \geq p/2$得到，且在端点处等号成立。(A.5)中的最小化只使用了给定的一阶矩。(4.6)中的谱问题还固定了二阶矩和三阶矩；仅凭均值的计算无法确定其精确值。

A.6. 精确的整体四次主控准则。我们为(4.5)中的被积函数构造一个四次主函数。然后可以利用(4.11)控制其负的四次修正项。在整个过程中，$0 < q < 1$、$p = 1 + q$和 $0 < t < 1$。令 $\phi_t(y) = y\mathrm{sgn}(t + y)|t + y|^q$，其中 $-1 \leq y \leq 1$。令 Q_0 为由 $Q_0(-1) = \phi_t(-1)$ $Q_0(1) = \phi_t(1)$ $Q_0(t) = \phi_t(t)$ $Q_0'(t) = \phi_t'(t)$所规定的三次 Hermite 插值多项式。定义

$$E_- = \frac{Q_0'(-1) - \phi_t'(-1)}{2(1+t)^2}, \qquad E_+ = \frac{\phi_t'(1) - Q_0'(1)}{2(1-t)^2}. \tag{A.8}$$

定理 A.5（全局四次锚定准则）。对于 $E \geq 0$，多项式

$$Q_E(y) = Q_0(y) + E(y^2 - 1)(y - t)^2$$

在整个 $[-1, 1]$ 上支配 ϕ_t 当且仅当

$$E \leq \min\{E_-, E_+\}.$$

特别地，只要该最小值非负，它就是允许的非负系数中的最大值。

证明。令 ℓ_F为在 -1、1 处的 ϕ_t的仿射插值函数，并令 $K_t(y) = {}^{\ell_F(y) - \phi_t(y)}/_{1-y^2}$以及 $P_E(y) = K_t(t) + K_t'(t)(y - t) + E(y - t)^2$。$K_t$ 的端点值由连续性定义。插值条件给出恒等式 $Q_E(y) = \ell_F(y) - (1 - y^2)P_E(y)$。此外，端点斜率条件恰好是$E \leq E_\pm \iff P_E(\pm 1) \leq K_t(\pm 1)$。由于残差在两个端点均为零，这些条件对于上界函数而言是必要的。

假设 $E \leq \min\{E_-, E_+\}$。由于 $E \geq 0$，函数 P_E 是凸函数，因此位于连接其端点值的仿射弦下方。因此，它位于连接 $K_t(-1)$ $K_t(1)$ 的仿射弦 L_H 下方。全局负分支弦不等式 (A.7) 给出 $P_E(y) \leq L_H(y) < K_t(y)$，其中 $-1 < y \leq -t$。因此，$Q_E - \phi_t$ 在整个区间上均严格为正，包括尖点 $y = -t$。

接下来只需考虑 $z = t + y > 0$。记 $Q_E(z - t) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + Ez^4$。由刚刚证明的严格不等式，有 $a_0 > 0$。正半轴上的残差是广义多项式$R(z) = a_0 + tz^q + a_1 z - z^{q+1} + a_2 z^2 + a_3 z^3 + Ez^4$。对于 $E > 0$，其系数按指数递增顺序排列时至多有四次符号变化。广义笛卡尔符号法则表明，其正零点（按重数计）至多有四个。在 $z = 2t$ 处规定的接触至少是二重的，而端点$B = 1 + t > 2t$ 是一个零点，且有 $R'(B) \leq 0$。如果 $R'(B) = 0$，则 $2t$ 和 B 处的接触已经至少计入四个零点。如果 $R'(B) < 0$，那么 R 在 B的右侧紧邻处为负；另一方面，由于其首项系数为正，$R(z) > 0$ 对所有充分大的 z成立；因此在 B之外还存在另一个零点。这样又计入了四个零点。因此，在 $(0, B)$ 中不可能存在其他正零点，且 $2t$ 处的接触具有偶重数。由于 $R(0) = a_0 > 0$，可推出 $R \geq 0$ 在 $[0, B]$上成立。

当 $E = 0$ 时，将广义笛卡尔符号法则应用于三次余项，可知正零点至多有三个，无论三次系数的符号如何。二重接触 $2t$ 和端点 B 已经占据了三个。因此不存在其他零点，且接触 $2t$ 的重数不能是奇数。再次，$R(0) > 0$ 证明了 $R \geq 0$ 在 $[0, B]$ 上成立。这就证明了充分性，包括端点斜率为零以及中间系数为零的情形。□

推论 A.6（任意正平移接触点）。定理 *A.5* 中的判据在将双接触点 t 替换为 $b \in (-t, 1)$ 时仍然成立。更确切地说，令 $Q_{0,\,b}$ 与 ϕ_t 在 -1、1、b处的值以及其在 b处的导数相匹配，并令

$$E_{-,b} = \frac{Q_{0,b}'(-1) - \phi_t'(-1)}{2(1+b)^2}, \qquad E_{+,b} = \frac{\phi_t'(1) - Q_{0,b}'(1)}{2(1-b)^2}.$$

对于 $E \ge 0$，多项式 $Q_{0,\,b}(y) + E(y^2-1)(y-b)^2$ 在 $[-1,1]$ 上支配 ϕ_t，当且仅当 $E \le$ 最小值$\{E_{-,\,b},\ E_{+,\,b}\}$。

证明。在定理 A.5 的证明中，将 P_E 替换为 $K_t(b)+K_t'(b)(y-b)+E(y-b)^2$。端点弦论证保持不变。在正向平移半轴上，所指定的二重零点为 $z=t+b\in(0,1+t)$，因此定理 A.5 中的广义笛卡尔符号法则论证无需修改即可适用。□

引理 A.7（右端点系数为正）。对于任意 $0<q<1$ 和 $1/2\le t<1$，均有$E_+>0$。因此，在此参数范围内，定理 A.5 表明，存在可容许的非负 E等价于 $E_-\ge 0$。

证明。令 $A=1-t$, $b=2t$, $B=1+t$和 $g(z)=\frac{z^q+A^q}{z+A}$以及 $k(z)=z^q-g(z)$表示 $z>0$。将节点平移 t后，在负节点 $-A$ 处取一阶差商可得 $E_+=k[b,b,B,B]$。令$Q=q(q-1)(q-2)=q(1-q)(2-q)>0$以及 $r=A/z$。直接求导得到 $z^{4-q}g'''(z)=\frac{P(r)}{(1+r)^4}$，其中 $P(r)=Q(1+r)^3-3q(q-1)(1+r)^2+6q(1+r)-6(1+r^q)$。对于 $0\le r\le 1$，不等式 $r^q\ge r$给出

$$Q(1+r)^4-P(r)\ge(1-q)(1+r)\big(q(2-q)r(1+r)^2-3q(1+r)+6\big)>0.$$

最后一个括号超过 $6-3q(1+r)>0$。因此，对于 $z\ge 1$和 $A\le 1/2$，$k'''(z)=Qz^{q-3}-g'''(z)>Qz^{q-4}(z-1)\ge 0$。由于 $b=2t\ge 1$和 $B=1+t>1$，四个节点 b,b,B,B位于 $[1,\infty)$ 中。Hermite–Genocchi 公式以及 k''' 在 $(1,\infty)$ 上的严格正性给出 $E_+>0$。□

端点系数的精确比较。两个端点系数在 $r=(1-t)/(1+t)$ 中都有显式表达式；比较它们无需对插值多项式求导。令$r=(1-t)/(1+t)$、$X=r^q$以及 $Z=(1-r)^q$。直接代入可得

$$\frac{E_-}{(1+t)^{q-2}}=\frac{Xqr^2+Xqr-2Xr^3-Xr^2-Zqr^2-Zqr-2Zr^3-Zr^2-Z+1}{4r^2},$$
$$\frac{E_+}{(1+t)^{q-2}}=\frac{Xr^3+Zqr^2+Zqr+Zr^3+Zr+2Z+qr^2+qr-r-2}{4r^3}.$$

特别地，$\frac{E_--E_+}{(1+t)^{q-2}}=\frac{1+r}{4r^3}\big(2-qr+Xr^2(q-2r)-Z(2+qr+qr^2+2r^3)\big)$。因此，当 $q>2r$ 时，右端点决定可容许系数这一条件是关于 X 的线性下界：$E_-\ge E_+\iff X\ge\frac{2+qr+qr^2+2r^3)}{r^2}$。$\frac{-2+qr}{(q-2r)}$。

矩的推论。设概率测度 μ 在 $[-1,1]$ 上满足 $m_1=0$、$m_2=c_n=\frac{n-2}{n}$ 和 $m_3=-\frac{2t}{n}$，并记 $\Delta=\int(1-y^2)(y-t)^2\,d\mu(y)=c_n-\frac{2t^2}{n}-m_4$。那么，上界函数给出精确界

$$\frac{2\int\phi_t\,d\mu}{(1-t)^q+(1+t)^q}\le 1-\frac{H_p((1-t)/(1+t))}{n}-\frac{2E\Delta}{(1-t)^q+(1+t)^q}.$$

在端点梯度应用中，$\Delta\ge 2(1-u^2)/n^2$ 整数/奇偶参数为 $u\in[-1,1]$。离散比较使用定理 A.28 和定理 A.37。

对整数单元目标函数求导。为对整数单元目标函数求导，令

$$D(t)=(1-t)^q+(1+t)^q,\qquad \kappa(t)=H_p\left(\frac{1-t}{1+t}\right),\qquad K(t)=D(t)\kappa(t),\qquad L(t)=\frac{D'(t)}{D(t)}.$$

Then

$$\begin{aligned}K'(t)&=a(t)K(t)-b(t)D(t),\\ a(t)&=\frac{q+1+(1-q)t^2}{t(1-t^2)},\qquad b(t)=\frac{2(q+1)}{t(1-t^2)},\\ \kappa'(t)&=(a(t)-L(t))\kappa(t)-b(t),\\ L'(t)&=\frac{q(q-1)-2(q-1)tL(t)}{1-t^2}-L(t)^2.\end{aligned}\tag{A.9}$$

例如，第一个恒等式可通过对 $K(t)=\frac{2(1-t^q}{1+t}+\frac{2(1+t)^q}{1-t}-\frac{4t)}{1-t^2}\frac{2t^q}{}$ 求导得到。此外$E_+(t)\,D(t)=A(t)\kappa(t)\pm B(t)+\frac{L(t)}{}2(1-t)$，其中

$$A(t)=\frac{qt^2-q-4t^2-2t-2}{8t(1-t)^2(1+t)},\qquad B(t)=\frac{2qt^2+qt+q+t^2+t+2}{4t(1-t)^2(1+t)}.$$

因此，对于距离为 $2/n$ 的固定格点端点 $a_0 < b_0$，函数 $\mathrm{F}(t) = \kappa(t) + 4n^{E_+}(t)\,{}_D(t)\,(t-a_0)(b_0-t)$ 及其前两个导数根据 (A.9) 关于 $\kappa(t)$ 是仿射的。特别地，如果 $\alpha = E_+/D$ and $u = n(t-(a_0+b_0)/2)$，则 $\mathrm{F}''(t) = \kappa''(t) + \frac{4}{n}(1-u^2)\alpha''(t) - 16u\alpha'(t) - 8n\alpha(t)$。

A.7. 三矩松弛的联合驻定点的必要条件。固定 $n \geq 3, q \in (0,1)$，$c = (n-2)/n$，并记 $F_t(y) = y\,\mathrm{sgn}(t+y)|t+y|^q$，$D_t = (1-t)^q + (1+t)^q$，$d(t) = -2t/n$。三矩松弛目标函数为 $2I/D_t$，其中 $I = \int F_t\,d\mu$，且 μ 是定义在 $[-1,1]$ 上、矩为 $m_1 = 0, m_2 = c, m_3 = d(t)$ 的概率测度。设 $0 < t < c$，并且某个有限支撑测度的所有谱原子均位于 $(-1,1)$ 内。明确假设存在一个三次对偶多项式 $Q(y) = \lambda_0 + \lambda_1 y + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 y^3 \geq F_t(y)$ $(-1 \leq y \leq 1)$，它在每个原子处均与被积函数相切，且联合 t 乘子方程成立。对于所有可行概率测度和 t 上的内部全局最大值点，双重接触条件与驻定性条件均成立；但对于预先指定的支撑大小族中的局部最大值，并不主张这些条件成立。于是

$$\lambda_0 = \frac{I}{2}\left(1 - q + \frac{tD_t'}{D_t}\right), \qquad 1 - q + \frac{tD_t'}{D_t} \geq 0. \tag{A.10}$$

对于所断言的有限全局最大值点应用，在使用光滑乘子之前也可以排除尖点原子。如果至少存在三个原子，则两个非尖点原子提供秩为四的合流矩雅可比矩阵；移动位于 $y = -t$ 的一个原子，并利用其他原子校正各阶矩，会使目标函数出现阶为 $|\varepsilon|^q$ 的奇数阶主导项。选择适当的方向即可严格增大目标函数。若一个可行的双原子测度在 $-t$ 处有一个原子，则其零均值和二阶矩 c 将迫使另一个原子位于 $c/t > 1$，从而落在支撑区间之外。

对于互异的内部原子，乘子条件是正则的：一个在两个不同原子处函数值及导数均为零的三次多项式必为零，因此合流矩雅可比矩阵的秩为四。在全局测度最大值点处，这一秩还允许插入一个具有小正质量的新原子，同时调整原有权重和位置，以保持全部四个矩不变。由此得到的单侧一阶变分不等式给出全局上界函数 $Q \geq F_t$。可能的尖点 $y = -t$ 不可能是接触点，因为对于 $t > 0$，F_t 的局部主导项为 $-t\,\mathrm{sgn}(y+t)\,|y+t|^q$，它在一侧超过任何光滑接触多项式。

证明中，内部接触意味着在每个原子点处都有 $F_t'(y) = Q'(y)$。欧拉齐次性给出 $t\partial_t F_t + y\partial_y F_t = (q+1)F_t$。因此，对其积分并利用各阶矩可得 $t\int \partial_t F_t\,d\mu = (q+1)I - 2c\lambda_2 - 3d\lambda_3$。$I/D_t$ 的联合驻定性给出 $\int \partial_t F_t\,d\mu - \frac{ID_t'}{D_t} + \lambda_3 d'(t) = 0$。利用 $\overline{td'} = d$ 和 $I = \int Q\,d\mu = \lambda_0 + c\lambda_2 + d\lambda_3$，我们从齐次性和驻定性恒等式中消去 $\int \partial_t F_t\,d\mu$ 和 λ_2，得到（A.10）。最后，$Q(0) \geq F_t(0) = 0$。由 $h(x) = \mathrm{sgn}(x)|x|^q$ 的单调性可知，$I > 0$ 严格为正，因为 $I = \mathrm{Cov}(Y, h(t+Y))$ 且 $\mathrm{Var}\ Y = c > 0$。

函数 $1 - q + tD_t'/D_t$ 在 $(0,\ 1)$ 上从 $1-q$ 到 $-\infty$ 严格递减：$D_t' < 0$ 和 $D_t'' < 0$，因此 $\log D_t$ 在此处严格凹。它有一个唯一零点 τ_q。因此，所有谱原子均位于内部的联合最大化点必须满足 $t \leq \tau_q$。对于 $q = 1/2$，直接化简得到 $\tau_{1/2} = \sqrt{3}/2$。该判据仅排除了高-t内部接触的最大化点；它本身并不能分类其余的低-t 或端点接触情形。

如果对偶多项式还与某个端点接触，则欧拉方程和驻定性计算会包含边界导数，并得到 $\lambda_0 = \frac{I}{2}\left(1 - q + \frac{tD_t'}{D_t}\right) + \frac{e}{2}$，其中 $e = \mu(\{1\})\{F_t'(1) - Q'(1)\} - \mu(\{-1\})\{F_t'(-1) - Q'(-1)\} \geq 0$。该不等式由上界函数在两个端点处的单侧导数条件推出。项 $e/2$是 (A.10) 中拉道和洛巴托情形下的边界贡献。连续两值最优解。令

$$\mathcal{H}_p(t) = \frac{2\{(1-t)^p + (1+t)^p - (2t)^p\}}{(1-t^2)\{(1-t)^{p-1} + (1+t)^{p-1}\}}, \qquad 0 < t < 1.$$

这是用参数 $r = (1-t)/(1+t)$ 表示的两值亏损。其唯一最小值为 $H_p(r_p) < p$，在 $t = t_p$ 处取得。于是 $t_p > \tau_q$。为直接证明这一点，令 $J(t) = (1-t)^p + (1+t)^p - (2t)^p$，则 $\mathrm{H}_p = 2J/[(1-t^2)D_t]$。初等恒等式 $tJ'(t) = p\{J(t) - D_t\}$ 以及 $\mathrm{H}_p'(t_p) = 0$ 给出 $1 - q + \frac{t_p D_{t_p}'}{D_{t_p}} = {}^2(1-p/H_p(r_p))\,{}_{1-t_p^2} < 0$。左侧严格递减，从而证明 $t_p > \tau_q$。因此，连续的两值最大值位于这样一个区域中：其中仅具有内部接触点的构型不可能联合驻定。

A.8. **高非对称区域中的三个接触点**。设 $0 < q < 1$、$p = q + 1$ 和 $p/3 \leq t < 1$。假设三次多项式 $Q(y)$ 在 $[-1,1]$ 上支配 $F_t(y) = y\,\mathrm{sgn}(t+y)|t+y|^q$。假设一个支撑集为接触集的概率测度具有矩 $m_1 = 0$、$m_2 = c < 1$ 和 $m_3 = -(1-c)t$。那么，该接触集至多有三个点能够支撑这样的测度；事实上，一旦计入必然存在的内部正接触点，完整接触集至多有三个点。因此，在此区域内，一个

三次对偶证书会将三阶矩问题中的每个最优解归约为至多三个原子。此处不对 $t < p/3$ 作任何断言。

写作 $x = t + y$ 和 $P(x) = Q(x - t) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$。尖点处的主化迫使 $a_0 > 0$：若 $a_0 = 0$，则当 $x = -u < 0$ 较小时，残差将为 $-tu^q + O(u) < 0$。对于 $x > 0$，残差是广义多项式 $E_+(x) = a_0 + tx^q + a_1x - x^{q+1} + a_2x^2 + a_3x^3$。广义笛卡尔符号法则（通过除以首项的幂并逐次求导，从罗尔定理导出）表明，正零点至多有三个（按重数计），因为按指数递增顺序排列的系数符号为（+，+，$\operatorname{sgn} a_1$，−，$\operatorname{sgn} a_2$，$\operatorname{sgn} a_3$）。若 $a_3 \geq 0$，则该数量上限降为两个。若 $a_3 < 0$ 和 $a_2 \leq 0$，则降为一个。系数为零时直接略去。

矩恒等式 $\int y(1 - y^2)\, d\mu = -(m_3) = (1 - c)t > 0$ 迫使其与 $y > 0$ 发生内部接触，因而也与 $x > 0$ 发生内部接触。每个这样的内部接触在 E_+ 中的重数至少为二。因此，至多存在一个内部正-x 接触。当 $a_3 \geq 0$ 时，不存在其他正 -x 接触。当 $a_3 < 0$ 时，必须有 $a_2 > 0$，并且至多还存在一个正 -x 接触，且必为上端点$x = t + 1$。

接下来需要计算与 $x = -u < 0$, $0 < u \leq 1 - t$ 的接触数。令 $g(u) = u^{q+1} + tu^q$。由于 $t \geq p/3$和 $u \leq 1 - t$, $g'''(u) = q(q - 1)u^{q-3}\{(q + 1)u - t(2 - q)\} > 0$ 位于开区间内。因此，g'' 递增，且 $g''(u) \leq q(p - 2t)(1 - t)^{q-2}$。若 $a_3 < 0$，取已确立的正内部接触 $x = v$，其中 $t < v < t + 1$。值和导数同时接触意味着 $a_2 = \frac{a_0}{v^2} - 2a_3v + qv^{q-1} + (1 - q)tv^{q-2}$。最后两项作为 $v > 0$ 的函数严格递减。利用 $a_0 > 0$, $a_3 < 0$ 和 $v < t + 1$，可得 $\{P(-u)\}'' = 2a_2 - 6a_3u > {}^{2}(q+t)\,(1+t)^{2-q}$。初等不等式

$$\frac{2(q + t)}{(1 + t)^{2-q}} > \frac{q(q + 1 - 2t)}{(1 - t)^{2-q}}, \qquad 0 < q < 1, \quad 0 < t < 1, \tag{A.11}$$

因此证明了 $\{P(-u) - g(u)\}'' > 0$。严格凸的非负函数在此区间上至多有一个零点。结合至多两个正-x 接触点，即可证明此情形下的结论。

(A.11) 即使没有 $t \geq p/3$ 的限制也成立。当 $q + 1 - 2t \leq 0$ 时显然成立。否则，令 $\mathcal{R}(q, t)$ 表示其两条正边之比。对于固定的 t 和 q，其中 $q + 1 - 2t > 0$,

$$\partial_q \log \mathcal{R} = -\frac{t}{q(q + t)} - \frac{1}{q + 1 - 2t} + \log \frac{1 + t}{1 - t} \leq -\frac{t}{1 + t} - \frac{1}{2(1 - t)} + \log \frac{1 + t}{1 - t} < 0.$$

为证明最后一个严格符号，令 $U = (1+t)/(1-t) > 1$ 以及 $v = \sqrt{U}$。初等不等式 $\log U \leq \sqrt{U} - 1/\sqrt{U}$ 可通过对 $(v - 1)^2/v^2 \geq 0$ 积分得到。此外，$\frac{U+3-2/U}{4} - \left(\sqrt{U} - \frac{1}{\sqrt{U}}\right) = \frac{2+(v-1)(v-2)^2(v+1)}{4v^2} > 0$。由于 $t/(1 + t) + 1/[2(1 - t)] = (U + 3 - 2/U)/4$，导数为负。最后，$\mathcal{R}(1, t) = 1$，因此对于 $q < 1$，$\mathcal{R}(q, t) > 1$。

如果 $a_3 \geq 0$，那么 $\{P(-u) - g(u)\}''' = -6a_3 - g'''(u) < 0$。三阶导数严格为负的非负函数不可能有两个不同的内部零点：两个内部极小值及其之间的一个极大值会迫使一阶导数有三个零点，进而根据罗尔定理使三阶导数出现一个零点。因此，内部至多有一个负-x 接触点，并且在 $u = 1 - t$ 处至多还有一个接触点；尖点不是接触点。再加上唯一的正-x 接触点，总数至多为三个。

A.9. 截断四阶矩对偶的三个接触点。 令 $0 < q < 1$、$p = q + 1$ 和 $p/4 \leq t < 1$。设多项式 Q 的次数至多为四，且在 $[-1, 1]$ 上支配 $\phi_t(y) = y \operatorname{sgn}(t + y)|t + y|^q$；并设 y^4 的系数非负。若其接触集支撑一个满足 $m_1 = 0$、$m_2 = c < 1$ 以及 $m_3 = -(1 - c)t$ 的概率测度，则完整接触集至多包含三个点。特别地，只要在此情形下四阶矩上限松弛存在一个最优四次对偶证书，则与该证书互补的每个测度都支撑在至多三个点上。一个标量曲率界。对于 $g(u) = u^{q+1} + tu^q$，有

$$\sup_{u>0} g''(u) = q\left(\frac{q + 1}{2 - q}\right)^{2-q} t^{q-1} < \frac{2(q + t)}{(1 + t)^{2-q}} \qquad (t \geq p/4). \tag{A.12}$$

事实上，g'' 在 $u = (2 - q)t/(q + 1)$处取得唯一最大值。(A.12)右端与其中间表达式之比关于 t 的对数导数等于$\frac{(1-q)(q+2t)}{t(q+t)(1+t)} > 0$。在 $t = p/4$ 处，该比值为

$R(q) = 2^{(5q+1)\,q(q+1)} \binom{2-q}{q+5}^{2-q}$。令 $h(q) = \log R(q)$，得到

$$h'(q) = \frac{5}{5q+1} - \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} + \log\frac{q+5}{2-q} - \frac{7}{q+5},$$
$$h''(q) = \left(\frac{1}{q^2} - \frac{25}{(5q+1)^2}\right) + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{q+5} + \frac{1}{2-q} + \frac{7}{(q+5)^2} > 0.$$

由于 $h(1) = 0$ 且 $h'(1) = \log 6 - 11/6 < 0$，我们有 $h(q) > 0$ 对于 $0 < q < 1$。关于 $\log 6$ 的初等严格界，例如可由 $11/6$ 处指数级数的前五项得到，其和为$186985/31104 > 6$。

证明。平移 $z = t + y$ 并写成 $Q(z-t) = \sum_{j=0}^{4} a_j z^j$。如同三次论证一样，主化迫使 $a_0 > 0$；尖点 $z = 0$ 不是接触点。在正半轴上，残差为 $a_0 + tz^q + a_1 z - z^{q+1} + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$。当 $a_4 > 0$ 时，其系数符号至多有四次变化；当 $a_4 = 0$ 时，至多有三次变化；零系数不计。

恒等式 $\int y(1-y^2)\,d\mu = (1-c)t > 0$ 迫使出现一个正-y 内部接触点。这是残差的一个二重正-z零点。至多存在两个不同的正-z 接触点，因为三个接触点至少会计数出五个零点：其中至多一个可以是右端点。

首先，假设存在两个正接触点 $v < w \le 1 + t$。较小的接触点位于内部。当 w 位于内部时，残差在 w 处的导数为零；当 $w = 1 + t$时，该导数非正。令 H 为 $\varphi(z) = z^{q+1} - tz^q$ 在 v, w处的三次 Hermite 插值多项式，并令 $\delta = \varphi'(w) - Q'(w-t) \ge 0$。通过在两个节点处匹配函数值和一阶导数，可得恒等式$Q(z-t) = H(z) - \delta\,(z-v)^2(z-w)\,(w-v)_2 + a_4(z-v)^2(z-w)^2$。由于当 $z > 0$时 $\varphi'''(z) < 0$，比较三次项系数得到 $a_3 = \varphi[v,v,w,w] - \delta\,(w-v)_2 - 2a_4(v+w) < -2a_4(v+w) \le 0$。在 v 处的函数值与导数方程随后推出

$$a_2 = \frac{a_0}{v^2} - 2a_3 v - 3a_4 v^2 + qv^{q-1} + (1-q)tv^{q-2} > qv^{q-1} + (1-q)tv^{q-2} \ge \frac{q+t}{(1+t)^{2-q}}.$$

此处 $-2a_3 v - 3a_4 v^2 > a_4(v^2 + 4vw) \ge 0$，并且最后两个幂项随 v 严格递减。

对于负的 $z = -u$，$0 < u \le 1 - t$，令 $R(u) = Q(-t-u) - g(u) \ge 0$。标量界（A.12）现在给出$R''(u) = 2a_2 - 6a_3 u + 12a_4 u^2 - g''(u) > 0$。因此，负 z 接触至多一个，而接触总数至多为三个。

如果只有一个正-z 接触，则改用 $g''''(u) = q(q-1)(q-2)u^{q-4}\big((q+1)u - t(3-q)\big) < 0$。事实上，该括号内的表达式在开区间 $0 < u < 1 - t$ 中严格小于 $p - 4t \le 0$。由此可得$R''''(u) = 24a_4 - g''''(u) > 0$。三个不同的负-$z$ 接触至少会计数出五个零点，因为其中至多一个可以是左端点，而所有内部接触都是二重的。反复应用罗尔定理将迫使 R'''' 出现一个零点，这是不可能的。因此，负接触至多有两个，接触总数仍至多为三个。□

非负首项系数正是与四阶矩上界相关联的对偶符号。这一接触点计数结论本身并不能求出所得到的三原子优化问题。推论 A.13 中的边界分类以及定理 A.25 中的整数胞腔约化，提供了求解截断问题所需的额外比较。

对偶可达性与实际的三原子约化。四次接触点计数论证还约束了截断矩问题中最优解的支撑集。固定 $0 < c < 1$、$p/4 \le t \le c$、$d = -(1-c)t$，并且$e \ge e_{\min} := c^2 + \frac{d^2}{c}$。在所有定义于 $[-1,1]$、其矩为 $m_1 = 0$、$m_2 = c$、$m_3 = d$ 和$m_4 \le e$的概率测度中，$\int \phi_t\,d\mu$ 的最大值可由至多含三个原子点的测度取到。事实上，当 $t < c$且 $e > e_{\min}$时，每个极大化测度都支撑于某个已取到的四次对偶证书的至多三点接触集上。

我们首先证明其存在性，包括边界情形。对于每个这样的测度，

$$\int \left(y^2 - \frac{d}{c}y - c\right)^2 d\mu = m_4 - c^2 - \frac{d^2}{c} \ge 0. \tag{A.13}$$

$y^2 - (d/c)y - c$ 的两个根都位于 $[-1,1]$中，因为 $|d| \le c(1-c)$。在这两个根上存在唯一的均值为零的概率测度。其二阶、三阶和四阶矩分别为 c、d、$e_{\min}$。因此，可行集非空且紧，其最大值存在。如果 $e = e_{\min}$，（A.13）迫使该双原子测度成立。如果 $t = c$，则 $\int (1+y)(y-c)^2\,d\mu = 0$，这迫使支撑集包含于$\{-1,\ c\}$中，无论 e如何，问题再次归结为双原子情形。

现在设 $t < c$ 和 $e > e_{\min}$。存在一个严格可行的测度，其含有绝对连续分量，且该分量的密度在整个区间上均有一个正的常数下界。为明确说明这一点，令 σ 为 $[-1,1]$ 上的均匀测度，并取一个足够小的 $\varepsilon > 0$。剩余矩

$$c_\varepsilon = \frac{c - \varepsilon/3}{1-\varepsilon}, \qquad d_\varepsilon = \frac{d}{1-\varepsilon}$$

仍满足 $0 < c_\varepsilon < 1$ 和 $|d_\varepsilon| < c_\varepsilon(1-c_\varepsilon)$。令 γ_ε 为相应的零均值双原子测度。则 $\bar{\mu} = \varepsilon\sigma + (1-\varepsilon)\gamma_\varepsilon$ 具有规定的前三阶矩，且其四阶矩趋于 $e_{\min}$，当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时。因而，取 ε 足够小即可得到 $\bar{m}_4 < e$ 以及一个密度至少为 $\varepsilon/2$ 的绝对连续分量。

为完整起见，有限维分离现在给出了一个取到的对偶多项式，而不仅仅是一个逼近序列。令 $V(s_1, s_2, s_3, e')$ 表示在给定前三阶矩和四阶矩上限约束下的最优积分。刚刚构造的严格可行全支撑测度可以通过小的多项式密度进行扰动，因此 V 在 $(0, c, d, e)$ 的邻域内有限。它在该邻域以及其凸可行区域上都是凹的。在这个内点处，其上图集的一个支撑超平面具有系数 a_1, a_2, a_3, a_4，其中 $a_4 \geq 0$，因为 V 关于上限约束是非递减的。将该支撑不等式应用于点质量，得到 $\phi_t(y) \leq Q(y) := a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4$，其中 $a_0 = V(0, c, d, e) - a_2 c - a_3 d - a_4 e$。因此，$Q$ 是对偶可行的，且其目标函数恰好等于原问题最优值。对于一个极大化测度，$\int (Q - \phi_t)\, d\mu + a_4(e - m_4) = 0$。两项均为非负，因此其支撑集包含于 Q 的接触集内。接触定理证明了所断言的三原子约化。这里使用的所有分离都发生在有限维矩空间中；无需对多项式系数作任何紧性断言，也无需无限维对偶可达性。

A.10. 完整倒数问题的高斯-埃尔米特判据。 令 $1/2 \leq c < 1$，并令 $p = q + 1$。令 $y_- < 0 < y_+$ 为 $y^2 + \left(\frac{1-c}{c}\right) t\, y - c = 0$ 的根。这两个节点定义了满足 $m_1 = 0$、$m_2 = c$ 以及 ~~$m_3 = -(1-c)t$~~ 的唯一高斯测度。它们的平移值符号相反；记作

$$t + y_- = -u, \qquad t + y_+ = v, \qquad u, v > 0.$$

令 P_q 为在 $-u, v$ 处针对 $\Psi_{t,q}(x) = (x - t)\,\mathrm{sgn}(x)|x|^q$ 的三次 Hermite 插值多项式。

引理 A.8（高斯-埃尔米特判据）。 负分支埃尔米特不等式为

$$P_q(x) \geq \Psi_{t,q}(x) \qquad (t - 1 \leq x \leq 0). \tag{A.14}$$

除规定的负插值节点外，该不等式均为严格不等式。因此，埃尔米特多项式在完整区间 $[t-1, t+1]$ 上为上界函数，当且仅当单个端点不等式

$$P_q(1 + t) \geq (1 + t)^q \tag{A.15}$$

成立。

证明。 令 $\rho = 2 - \frac{1}{c} \in [0, 1)$、$S = v - u = (1+\rho)t$ 和 $P = uv = c - \rho t^2 > 0$。对于 $s > 0$，考虑有理核 $f_s(x) = \frac{(x-t)}{s + x^2}^{x}$。在 ~~—~~ u, v 处直接进行埃尔米特插值，得到误差

$$H_s(x) - f_s(x) = \frac{(x+u)^2 (x-v)^2 N(s,x)}{(s+x^2)(s+u^2)^2 (s+v^2)^2}, \tag{A.16}$$

其中 $N(s,x) = (s + tx)\big((s+P)^2 - sS^2\big) + 2sS(s+P)(t-x)$。对于 $x < 0$ 和 $t > 0$，这个关于 s 的三次多项式具有负的常数项，以及所有正次幂项的严格正系数。事实上，除首项系数 1 外，这些系数为

$$\begin{aligned}
[s^2]N &= 2c + (1 - 2\rho - \rho^2)t^2 - (1 + 2\rho)tx \geq 2c - 2t^2 > 0, \\
[s]N &= P^2 + 2(1+\rho)Pt^2 - tx\big(2\rho P + (1+\rho)^2 t^2\big) > 0, \\
[s^0]N &= txP^2 < 0.
\end{aligned}$$

因此，随着 s 增大，$N(s,x)$ 恰好改变一次符号，即从负变为正。

斯蒂尔切斯表示 $\mathrm{sgn}(x)|x|^q = \frac{\sin(\pi q/2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{q-1}{2}}\, x}{s + x^2}\, ds$ 表明，埃尔米特误差是相应积分的正倍数，其中被积函数为 (A.16)。误差积分绝对收敛，因此可以交换插值与该积分。对于 $q = 0$ 远离 $x = 0$ 的情形，同一公式仍然成立，只需用 $\mathrm{sgn}(x)$ 替代幂即可。

在 $q = 0$ 处，负半轴上的函数就是 $-x + t$。它在 $-u, v$ 处的三次 Hermite 插值多项式满足恒等式 $P_0(x) - (-x+t) = \frac{2}{(x+u)^2\,(u+v)^3}\Big((2t - S)x + 2v^2 - t(u + 3v)\Big)$。由于 $2t - S = (1-\rho)t \geq 0$，$x \geq t - 1$ 中的括号至少为 $2(v-t)^2 - (1-\rho)t$。正高斯节点 $v - t = y_+$ 递减

随 t 变化，并在 $t=c$处等于 c。因此 $v-t\ge c$，且 $2(v-t)^2-(1-\rho)t\ge 2c^2-(1-c)=(2c-1)(c+1)\ge 0$。所以，指数为 $-1/2$ 时的误差积分非负。

为完整起见，单符号变化转移是初等的。写作 $W(s)=N(s,x)/[(s+x^2)(s+u^2)^2(s+v^2)^2]$，并令 s_0 为其唯一变号点。对于 $0<q<1$、$\int_0^\infty s^{\frac{q-1}{2}}W(s)\,ds>s_0^{\frac{q}{2}}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}W(s)\,ds\ge 0$，这是因为 W 在 s_0 以下为负、在其以上为正。当 $t=0$ 时，有理分子本身为正，无需进行转移。这证明了 (A.14)，且除负插值节点外均为严格不等式。$x=0$ 处的值由连续性得到；它严格为正，因为若常数项为零，则对于足够接近零的负 x，多项式将小于 $t|x|^q+|x|^{q+1}$。在 $t=0$ 处，同样的正性可直接由偶高斯厄米特多项式得到。

在 $x>0$ 上，残差具有 $a_0+tx^q+a_1x-x^{q+1}+a_2x^2+a_3x^3$的形式，其中 $a_0>0$。根据广义笛卡尔符号法则，它至多有三个正零点。正高斯节点 v 是一个给定的二重零点，并满足 $v<1+t$。如果残差在 $1+t$处非负，那么 0 与 $1+t$之间的任何负值区间都至少需要另外两个零点（计入端点重数），从而总数至少为四个。这是不可能的。因此，（A.15）是充分条件，而且显然也是必要条件。□

端点判据成立时的推论。如果（A.15）成立，则高斯两点测度在所有具有前三阶矩 $m_1=0$、$m_2=c$ 和 $m_3=-(1-c)t$ 的测度中，使$\int\phi_t$ 达到最大值。因此，只要上限约束不小于其最小四阶矩，它也会使带上限的四阶矩问题达到最大值。其归一化梯度值明确为 $G_{\mathrm{Gauss}}(c,\ t)=\frac{2c\ (1-t)^{\,q}+(1+t)^{\,q}}{u^q+v^q}$。对于 $c=(n-2)/n$，这恰好是中心化根配置的端点梯度商

$$t-1,\qquad -\frac{2t}{n-2}\quad\text{repeated } n-2 \text{ times},\qquad t+1.$$

导数估计（A.36）将该商界定为 $\max\{S_{n,\,p},\,R_{n,\,p}(1)\}$。我们对 A.15）进行验证，其中 $0\le t\le 1/2$以及任意 $1<p<2$。

定理 A.9（低中点区域中的完备高斯解）。设 $1/2\le c<1$，$0\le t\le 1/2$，且 $0<q<1$。来自引理 *A.8* 的三次高斯厄米插值多项式 $P_q\,\Psi_{t,\,q}$ 在整个$[t-1,t+1]$上支配 （A.15）中的右端点不等式严格成立。因此，高斯两点测度是在预设的前三阶矩约束下 $\int\phi_t\,d\mu$ 的唯一最大化元。它还解决了该问题的每个可行的封顶四阶矩版本。特别地，对于 $n\ge 4$，区域 $0\le t\le 1/2$ 中的完整倒数矩松弛有上限约束。

$$\max\{S_{n,p},R_{n,p}(1)\}.$$

证明。根据引理 A.8，只需验证 (A.15)。$t=0$ 的情形直接由正有理分子得到，因此设 $0<t\le 1/2$。使用引理 A.8 中的 ρ、P、S，并令 $d=t(1+t)>0$。在 $x=1+t$ 处，有理厄米分子化简为 $N(s,1+t)=(s+d)(s+P)^2-sS^2(s+d)-2sS(s+P)$。我们先建立以下两个初等估计

$$3S^2<4P,\qquad 9S^2<16Pd. \tag{A.17}$$

对于第一个估计，$4P-3S^2=4c-[4\rho+3(1+\rho)^2]t^2$ 关于 t递减，并且在 $t=1/2$ 处等于 $\frac{(1-\rho)^2(3\rho+10)}{2-\rho}>0$。对于第二个估计，将 $16Pd-9S^2$除以 t，并写成 $F(t)=16(c-\rho t^2)(1+t)-9(1+\rho)^2t$。由于 $F''(t)=-32\rho-96\rho t\le 0$，该函数在 $[0,1/2]$上是凹函数。其端点值满足 $F(0)=16c>0$，且$F(1/2)=\frac{3(1-\rho)^2(3\rho+10)-2(2-\rho)}{8}>0$。因此，在整个区间内都有 $F(t)>0$，从而证明 (A.17)。

对于每个 $s>0$，基本的算术—几何平均不等式界给出 $\frac{sS^2}{(s+P)^2}\le\frac{S^2}{4P}<\frac{1}{3}$，并且 $\frac{2sS}{(s+d)(s+P)}<\frac{2sS}{(\sqrt{d}+\sqrt{P})^2}\le\frac{S}{2\sqrt{dP}}<\frac{2}{3}$。因此，$N(s,1+t)=(s+d)(s+P)^2=1-\frac{sS^2}{(s+P)^2}-\frac{2sS}{(s+d)(s+P)}>0$。正的斯蒂尔切斯表示现在使右端点的埃尔米特误差严格为正。这证明了全局上界。负分支的严格性和正零点计数表明，唯一的接触点是两个高斯节点，因此最优解是唯一的。对于 $c=(n-2)/n$，高斯梯度是 (A.35) 中的导数商；因此，(A.36) 将其值界定为 $\max\{S_{n,p},R_{n,p}(1)\}$。□

A.11. 四阶矩问题的显式雅可比约化。 对于 $t\ge p/4$，三接触论证给出了截断矩问题的雅可比矩阵参数化。固定 $0<c<1$、$0\le t<c$，并令 $d=-(1-c)t$、$\beta=\frac{d}{c}$ 和 $e_{\min}=c^2+\frac{d^2}{c}$。对于四阶矩上限 $e\ge e_{\min}$，令 $\gamma_{\max}=\frac{e}{c}-c-\beta^2$。对于 $0\le\gamma\le\gamma_{\max}$，定义

$$J_{\gamma,\delta}=\begin{pmatrix}0&\sqrt{c}&0\\ \sqrt{c}&\beta&\sqrt{\gamma}\\ 0&\sqrt{\gamma}&\delta\end{pmatrix}. \tag{A.18}$$

其在第一坐标处的谱测度的矩为 $m_1 = 0$、 $m_2 = c$、 $m_3 = c\beta = d$、 $m_4 = c(c + \beta^2 + \gamma)$。完整矩阵是一个压缩算子， $-I \le J \le I$，当且仅当

$$-1 + \frac{\gamma}{1 - c + \beta} \le \delta \le 1 - \frac{\gamma}{1 - c - \beta}. \tag{A.19}$$

分母为正，因为 $t < c$。(A.19) 中的界可以通过 $I \pm J$ 的舒尔补得出，也可以直接进行主子式计算。当 $\gamma > 0$ 时，不可约性意味着这等价于第一坐标谱测度的支撑集位于 $[-1, 1]$ 中。当 $\gamma = 0$ 时，该测度不考虑 δ，因此可以始终将其选在 (A.19) 的区间内，而不改变目标函数。

反过来，任何至多含三个原子点且具有所给前三阶矩的测度，都是 (A.18) 的第一坐标谱测度。为此，先在其矩内积下对 1、y、y^2 进行正交化：前两个非对角雅可比系数为 $\sqrt{c}$ 和 $\sqrt{m_4/c - c - \beta^2}$。若第二个系数为零，则前两个坐标已经给出唯一的双原子测度，最后一个坐标的谱权重为零。

因此，对于 $t \ge p/4$ ，带上限矩优化值恰为 $\max_{\gamma,\,\delta} \frac{\langle e_1,\ \phi_t(J_{\gamma,\delta})e_1\rangle^2}{(1-t)^q + (1+t)^q}$，其中参数满足 $0 \le \gamma \le e/c - c - \beta^2$ 以及（A.19）。雅可比参数化是精确的：每个可容许的参数对都表示一个可行谱测度，并且每个最优解都可以由一个可容许的参数对表示。奇偶性上限。对于 $c = (n-2)/n$ 以及 $e = c - \frac{2t^2}{n} - \frac{2}{(1-u^2)\,n^2}$，其中 $|u| \le 1$，激活上限对应于$\gamma = \gamma_{\max}$，其允许区间变为

$$\frac{t}{c} - \frac{1 - u^2}{n(c - t)} \le \delta \le \frac{t}{c} + \frac{1 - u^2}{n(c + t)}. \tag{A.20}$$

因此，活跃上限优化只需要一个标量 δ。在格点端点 $u^2 = 1$ 处，该区间收缩为 $\delta = t/c$，三个谱节点为 -1、t、1。

未激活上限可归结为边界曲线。如果 $t \ge p/3$ 且某个最优解满足 $\gamma < \gamma_{\max}$，则互补性给出一个三次对偶多项式。这样的最优解不可能具有三个内部谱节点。事实上，两个正的平移接触点将给出三次余项的四个正零点。若只有一个正接触点，则当平移后的三次系数为负时，根据（A.11）中的计算，负侧余项是严格凸的。若该系数非负，则负侧余项具有严格为负的三阶导数，因为$g'''(u) > 0$ 对于 $0 < u < 1 - t$ 当 $t \ge p/3$时。在这两种情况下，两个内部负接触点都是不可能的。因此，这一范围内的全局最优值出现在以下某条曲线上：

$$\gamma = 0, \qquad \gamma = \gamma_{\max}, \qquad \delta = -1 + \frac{\gamma}{1 - c + \beta}, \qquad \delta = 1 - \frac{\gamma}{1 - c - \beta}.$$

第一个是高斯双原子测度；最后两个是端点曲线或拉道曲线。这一观察并不意味着曲线最大值出现在其端点处。

逆源测度。在多项式应用中，令 $R(z)$ 表示 J 的第一坐标预解式。松弛源中其余 $n-2$ 个根的柯西变换为

$$T(z) = \frac{2(1 - zR(z))}{(z^2 - 1)R(z) - z} = (n-2)\frac{z - \delta}{z^2 - (\delta + \beta/(1-c))z + (\beta\delta - \gamma)/(1-c)}.$$

对于 $\gamma > 0$ ，这是定义在 $[-1, 1]$ 上的正双原子测度；其两个节点分居 δ 两侧。以总质量 $n-2$ 归一化后，其均值和二阶矩分别为 $-\frac{t}{c}$ 和 $\frac{t^2}{c^2} + \frac{\gamma}{1-c}$。在活跃奇偶约束下，其端点亏量总和恰好为 $\int (1 - y^2)\, dT(y) = 1 - u^2$。源还在 -1，1 的每个位置各包含一个单位原子。一般而言，两个内部源权重是实数，而非整数。因此，三原子谱优化器是对四个源取值的一种松弛，其中两个端点权重固定为 1。未经检查这些权重，不应将其视为实际的均匀根列表。如果存在谱端点，则一个源极点会与该端点合并，从而得到三值源。当某个格点值处同时存在两个谱端点时，该源就是相应的整数二值配置。

精确的内部驻点方程。设 $y_1 < y_2 < y_3$ 为 $\gamma > 0$ 的特征值，并假设没有任何一个等于 $-t$。记 $P_\delta(z) = \det(zI - J) = z^3 - (\beta + \delta)z^2 + (\beta\delta - c - \gamma)z + c\delta$。对第一坐标预解式求导得到 $\partial_\delta R(z) = \frac{c\gamma}{P_\delta(z)^2}$。因此，其目标分子的导数为五阶差商

$$\partial_\delta \langle e_1, \phi_t(J) e_1 \rangle = c\gamma\, \phi_t[y_1, y_1, y_2, y_2, y_3, y_3]. \tag{A.21}$$

该公式可通过标量函数演算的埃尔米特插值成立；不假设尖点处具有解析性。 δ 中的内部最大值点不可能具有等于 $-t$ 的特征值：在对 δ 进行变分时，该特征值的速度严格为正，其贡献带有非零的奇数 $|s|^q$ 尖点，因此沿某个方向可以增大。

方程（A.20）和（A.21明确给出了剩余的活跃上限约束标量优化。其与精确离散常数的比较由定理 A.25处理。

A.12. 任意有限次数下的全局三原子上界。令 $n \ge 4$、 $1 < p < 2$、 $q = p - 1$ 和 $c = (n-2)/n$。对于 $0 \le t \le c$，令 $u_n(t) = -nt - 2m + n - 3$，并按 (A.3) 选取整数 m，再设 $e_n(t) = c - \frac{2t^2}{n} - {}^{2}(1-u_n(t)^2)\,n^2$、 $\beta(t) = -\frac{(1-c)t}{c}$，以及 $\Gamma_n(t) = {}^{e_n(t)}{}_{c}\overline{-c} - \beta(t)^2$。在单元边界处， m 的任一取值都会得到 $u_n(t)^2 = 1$，因此 e_n 和 Γ_n 连续。量 $\Gamma_n(t)$ 非负：奇偶性上限不小于高斯最小四阶矩。

定义紧参数集

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n = \{(t,\gamma,\delta) : 0 \le t \le c, \quad 0 \le \gamma \le \Gamma_n(t), \quad -1 \le \delta \le 1,\\ \gamma \le (1+\delta)(1-c+\beta(t)),\\ \gamma \le (1-\delta)(1-c-\beta(t))\}.\end{aligned} \tag{A.22}$$

式（A.22）中的乘积不等式在 $t = c$ 处仍有意义。对每个这样的三元组，令

$$J(t,\gamma,\delta) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c} & 0 \\ \sqrt{c} & \beta(t) & \sqrt{\gamma} \\ 0 & \sqrt{\gamma} & \delta \end{pmatrix}, \qquad \phi_t(y) = y\,\mathrm{sgn}(t+y)|t+y|^q,$$

并定义显式的有限维上界

$$V_{n,p} = \max_{(t,\gamma,\delta)\in\mathcal{D}_n} \frac{2\langle e_1, \phi_t(J(t,\gamma,\delta))e_1\rangle}{(1-t)^q + (1+t)^q}. \tag{A.23}$$

定理 A.10 (倒数松弛的精确全局约化)。 量 $V_{n,\,p}$ 恰好是完整倒数矩松弛的全局最优值，等价地，也是满足以下条件的谱矩问题的全局最优值

$$m_1 = 0, \quad m_2 = c, \quad m_3 = -2t/n, \quad m_4 \le e_n(t), \quad \operatorname{supp}\mu \subset [-1,1].$$

对于每个 t，该问题都有一个至多含三个原子的最优解。此外

$$\Lambda_{n,p} \le C_{n,p} \le V_{n,p} \le U_{n,p} \le 1 - \frac{H_p(r_p)}{n}, \tag{A.24}$$

其中 $\Lambda_{n,\,p}$ = 最大值$\{S_{n,\,p},\ \mathcal{B}_{n,\,p}\}$。为定义 $U_{n,\,p}$，令 $D = (1-t)^q + (1+t)^q$ 并令 K_t 为小节*A.5*中的差商。于是

$$U_{n,p} = \max_{t,\nu}\left(1 - \frac{4}{nD}\int K_t\,d\nu\right), \qquad \int y\,d\nu = t, \quad \int (y-t)^2\,d\nu \ge \frac{1-u_n(t)^2}{n}. \tag{A.25}$$

最大值是在 $0 \le t \le c$ 以及定义在 $[-1,1]$ 上的概率测度中取到的。

证明。 对于 $0 \le t \le 1/2$，定理 A.9 给出一个双原子最优解。对于 $t > 1/2$，有 $t > p/4$，因此小节 A.9 中的四次接触点计数论证给出了一个至多含三个原子的最优解。这涵盖了每个 $t \in [0,c]$。

至多含三个原子点且具有所示前三个矩的测度，其雅可比表示恰为 $J(t,\gamma,\delta)$。其四阶矩为 $c($ $c + \beta^2 + \gamma)$，从而得到 $\gamma \le \Gamma_n(t)$；关于 $-I \le J \le I$ 的两个舒尔补不等式恰好就是 (A.22)。当 $\gamma = 0$时， e_1 处的谱测度不依赖最后一个坐标，因此 δ 是冗余的。在 $t = c$处，第一个舒尔补不等式推出 $\gamma = 0$；唯一的测度是支撑在 $\{-1, c\}$ 上的两点测度。因此，所有退化情形都包含在内，无需除以零。反过来，D_n 中的每个三元组都对应一个可行谱测度。区域是紧集，而标量函数演算连续，包括尖点处，因此 (A.23) 中的最大值能够取到。这就证明了该松弛问题的精确约化。

原始根配置给出了可行谱测度。在实数最大化根列表处，矩比等于其端点梯度商；因此 $C_{n,\,p} \le V_{n,\,p}$，而角度约化将此上界推广到复根。对于可行谱测度 μ，概率测度 $d\nu = (n/2)(1-y^2)\,d\mu$ 的均值为t。由四阶矩上限可知，其方差满足 (A.25)。将 ϕ_t 写成其仿射端点插值函数减去 $(1-y^2)K_t$，可知其归一化积分为 $1 - 4\int K_t\,d\nu/(nD)$。这就证明了 $V_{n,\,p} \le U_{n,\,p}$。稀疏根列表和二值根列表给出 $\Lambda_{n,\,p} \le C_{n,\,p}$。

为证明 $U_{n,\,p} \le 1 - H_p(r_p)/n$，固定一个均值为 t、支撑集包含于 $(-1,1)$ 的概率测度 ν。选取足够大的整数 N，使得 $N\theta_p > 1$， $t < (N-2)/N$，且以下构造中的两个端点质量均为非负。在 $(-1,1)$ 上取 $\_d\mu = 2\,d\nu/[N(1-y^2)],$，并分别赋予 ± 1 质量$\frac{1}{2} - N^{-1}\int (1 \mp y)^{-1}\,d\nu$。于是， μ 是一个概率测度，满足 $m_1 = 0$、 $m_2 = 1 - 2/N$ 和 $m_3 = -2t/N$。将定理 A.19 的独立三矩界应用于次数 N，得到 $1 - 4\int K_t\,d\nu/(ND) \le 1 - H_p(r_p)/N$。因此 $4\int K_t\,d\nu/D \ge H_p(r_p)$。对于任意均值为 t 的测度，

将同一论证应用于其在 $y \mapsto (1-\varepsilon)y + \varepsilon t$ 下的像，并令 $\varepsilon \downarrow 0$。 K_t 在 $[-1,1]$上的连续性给出了 (A.25) 中每个测度的界。 □

剩余区域完全位于 $t = 1/2$ 之上。定理 A.9 将 (A.23) 的区域 $0 \le t \le 1/2$ 界定为 $\max\{S_{n,p}, R_{n,p}(1)\}$。稀疏值出现在 $t = 0$，而单离群值在 $t = c \ge 1/2$ 处表示。因此也可以等价地写成

$$V_{n,p} = \max\left\{ S_{n,p},\ \max_{\substack{(t,\gamma,\delta)\in\mathcal{D}_n \\ t\ge 1/2}} \frac{2\langle e_1, \phi_t(J) e_1\rangle}{(1-t)^q + (1+t)^q} \right\}.$$

推论 A.13 将 Jacobi 参数域缩减至其边界族，而定理 A.25比较了整数二值构型中的剩余最大值。

推论 A.11 （两种松弛之间等号成立的刚性）。 记 $\mathcal{B}_{n,p} = \max_k R_{n,p}(k)$。则

$$V_{n,p} = U_{n,p} \quad \Longleftrightarrow \quad U_{n,p} = \mathcal{B}_{n,p}.$$

在这种情况下，原最优常数可精确确定为：$C_{n,p} = V_{n,p} = U_{n,p} = \mathcal{B}_{n,p}$。若 $U_{n,p} > \mathcal{B}_{n,p}$，则 $V_{n,p} < U_{n,p}$ 严格成立。

证明。设 $V_{n,p} = U_{n,p}$，并取一个使 (A.23) 达到最大值的谱测度 μ 。相应的$d\nu = (n/2)(1-y^2)\,d\mu$ 没有端点原子，并在 (A.25) 中同一 t 处使 $\int K_t\, d\nu$ 达到最小值。若 $t = 0$，则$K_0(y) = (1-|y|^p)/(1-y^2) > p/2$ 在 $(-1,1)$ 上成立。在 -1 和 1 处具有相等权重的测度是可行的，并给出$p/2$。因此 $t > 0$。

存在一个具有非负二次项系数的 K_t 二次下界函数，它在 ν 的支撑集上与 K_t 一致。事实上，在均值固定为 t 时，可达到的点对 $(\int (y-t)^2\, d\nu,\ \int K_t\, d\nu)$ 构成一个紧凸集。均值为 t 的端点混合具有方差 $1 - t^2 \ge 1 - c^2 > 1/n$。因此，在受约束的最小值处进行分离，可得到方差下界的有限乘子 $\lambda \ge 0$。对于 $K_t(y) - \lambda(y-t)^2$,，在其下凸包的内点 t 处取一条支撑线。加回 $\lambda(y-t)^2$ 后，得到所需的下界函数，并且等号 ν-几乎处处成立。

由凸性可知，该下界函数位于连接 K_t 端点值的弦之下。式 (A.7) 排除了在 $(-1,-t]$ 上的接触。在 $y > -t$ 上，将 K_t 与下界函数之间的差乘以 $1-y^2$，并令 $z = t + y$。所得残差具有 $a_0 + tz^q + a_1 z - z^{q+1} + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \lambda z^4$ 的形式，根据 $y = -t$ 处严格的弦不等式，有 $a_0 > 0$。其系数至多有四次符号变化。除 $z = 1 + t$ 处的零点外，两个内部接触将产生两个二重正零点，这与定理 A.5 中使用的广义笛卡尔符号法则相矛盾。因此， $\nu = \delta_{t_0}$。其零方差迫使 $u_n(t)^2 = 1$ 出现在 (A.25) 中。因此，对于整数 k，有 $t = 1 - 2k/n$，且目标函数等于 $R_{n,p}(k)$。由于 $R_{n,p}(k) \le \mathcal{B}_{n,p}$，我们有 $U_{n,p} \le \mathcal{B}_{n,p}$。反向不等式由 (A.24) 得出。反之，若 $U_{n,p} = \mathcal{B}_{n,p}$，则在 $\mathcal{B}_{n,p}$ 与 $U_{n,p}$ 之间的 (A.24) 中，每个量都等于它们的共同值。因此，$U_{n,p} > \mathcal{B}_{n,p}$ 迫使 $V_{n,p} < U_{n,p}$。 □

A.13. 高斯楔与四阶矩问题的全局边界约化。 以下结果在任意次数以及任意 $1 < p < 2$ 下，排除了倒数松弛中的所有非激活帽、三个内节点优化器。它并未断言剩余的离散包络比较。

定理 A.12 （关于 $t \le p/3$ 的高斯最优性）。 设 $1/2 \le c < 1$、 $0 < q < 1$、 $p = q + 1$，以及$0 \le t \le$最小值$\{c, p/3\}$。令 μ 遍历满足以下条件的 $[-1,1]$ 上的概率测度

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = c, \qquad m_3 = -(1-c)t.$$

$y^2 +$ 的根上的高斯两点测度 $_{(1-c)}{}_{c}{}^{t}y - c = 0$ 是 $\int y\overline{\operatorname{sgn}(t+y)}|t+y|^q\, d\mu$ （y） 的唯一最大化元。对于带有四阶矩上界的该问题的每个可行版本，高斯测度同样是唯一最大化元。

证明。 我们使用负分支埃尔米特不等式（A.6）：在两个移位高斯节点处的三次 Hermite 插值多项式支配负移位半轴上的目标函数，而全局支配等价于右端点不等式。我们证明，在当前假设下，该端点不等式严格成立。

将移位高斯节点记为 $-u$，v，其中 u，$v > 0$，并令 $\rho = 2 - \frac{1}{c}$和 $T = u + v$，使得$v - u = (1+\rho)t$和 $uv = c - \rho t^2$。由 v进行归一化，并设 $r = \frac{u}{v}$、 $\tau = \frac{t}{v}$和 $\varepsilon = \frac{1+t-v}{v}$。令 $h_q(z) = \operatorname{sgn}(z)|z|^q$，置 $g_\tau(z) = (z - \tau)h_q(z)$，并令 H_τ为其在 $-r$，1 处的三次 Hermite 插值多项式。端点误差的符号为 $E_\tau(\varepsilon) = H_\tau(1+\varepsilon) - g_\tau(1+\varepsilon)$ 的符号。物理参数满足

$$\frac{1}{5} \le r \le 1, \qquad \tau \ge \frac{1-r}{2}, \qquad 0 < \varepsilon \le r, \qquad \frac{r}{1+r} \ge \frac{2-q}{6}. \tag{A.26}$$

高斯公式具有 $T^2 = 4c + a^2t^2$，其中 $a = (1-c)/c \in (0,1]$。差值 $T^2 - (1+t)^2 = 4c - 1 - 2t - (1-a^2)t^2$ 关于 t 递减，并在 $t = c$处等于零。因此 $T \geq 1 + t$，这正是 $\varepsilon \leq r$。正高斯节点严格小于 1，因此 $\varepsilon > 0$。此外，$T \geq 2\sqrt{c} \geq 3 - \frac{1}{c} = 1 + \rho$。对于第二个不等式，两边乘以 c，并注意到 $2c^{\frac{3}{2}} - 3c + 1$ 在 $[1/2, 1]$上递减至零。由此得到 $\frac{1-r}{1+r} = \frac{v-u}{T} \leq t$ 和 $\frac{r}{1+r} \geq \frac{1-t}{2} \geq \frac{2-q}{6}$。这也给出了 $r \geq 1/5$。最后，$1 - r = (1+\rho)\tau \leq 2\tau$。

我们首先证明，对于固定的 $r \in [1/5, 1]$ 和 $\varepsilon > 0$，$E_\tau(\varepsilon)$ 关于 τ 严格递增。令 K 为 h_q 在 $-r$、1 处的三次 Hermite 插值多项式。由线性性，$\partial_\tau E_\tau(\varepsilon) = h_q(1+\varepsilon) - K(1+\varepsilon)$。令 $\alpha = 1 - q \in (0, 1)$，$L = 1 + r$，并令 $s = \log(1/r) < 2$。K 的三次系数 k_3 满足 $L^3 k_3 = (1-r)(e^{\alpha s} - 1) - \alpha L(1 + e^{\alpha s}) < 0$，因为 $\tanh(\alpha s/2) \leq \alpha s/2$ 且 $(1-r)s < 2L$。函数 $(1-\alpha)e^{\alpha s}$ 关于 α 是凹函数，因为其二阶导数为 $se^{\alpha s}\{s(1-\alpha) - 2\} \leq 0$。因此，$qr^{q-1} \leq 1 + \alpha(s-1)$ 且 $r^q \geq r(1 + \alpha s)$。在 1 处使用精确厄米特公式可得

$$L^2\{K''(1) - h_q''(1)\} = 2qLr^{q-1} + 4qL - 6(1 + r^q) + q\alpha L^2 \leq \alpha\{2(1-2r)s + r^2 - 4r - 5\} < 0.$$

当 $r \geq 1/2$ 时，最后一个严格不等号是显然的。当 $r \leq 1/2$ 时，利用 $s < 2$ 将其大括号内的部分估计为 $r^2 - 12r - 1 < 0$。由于 $h_q'''(z) > 0$ 当 $z > 0$ 和 $K''' = 6k_3 < 0$时，残差 $K - h_q$ 在 $[1, \infty)$ 上的三阶导数为负，在 1 处的二阶导数为负，且在那里函数值和一阶导数均为零。因此，对于 $z > 1$，有 $K(z) < h_q(z)$，从而证明了所述的单调性。只需考虑 $\tau_0 = \frac{1-r}{2}$。

对于此值，将 $A(\varepsilon) = \frac{E_{\tau_0(\varepsilon)}}{\varepsilon^2}$ 连续延拓至 $\varepsilon = 0$。在正半轴上，$g_{\tau_0}'''' > 0$；因此，积分泰勒公式表明 A 是严格凹的：

$$A(\varepsilon) = \frac{H_{\tau_0}''(1)}{2} + a_3\varepsilon - \int_0^1 (1-z) g_{\tau_0}''(1 + z\varepsilon)\, dz, \qquad A''(\varepsilon) < 0.$$

这里 $a_3 = \frac{q(1-r^{q-1})}{2L}$，且 $2LA(0) = 1 + r^q - qLr^{q-1} + \frac{q\alpha L^2}{2}$。对于 $r \geq 1/3$，Hermite 系数估计和 $r^q \geq r(1 + \alpha s)$ 给出 $2LA(0) \geq \alpha\left(L - s + \frac{qL^2}{2}\right) > 0$，因为 $L \geq 4/3 > \log 3 \geq s$。对于 $1/5 \leq r \leq 1/3$，则有 $A'(0) \leq \frac{q\alpha}{12L}\{L(5-r) - 6\log(1/r)\} < 0$。事实上，$6\log(1/r) - (1+r)(5-r)$ 随 r 递减，并且在$r = 1/3$ 处为正，因为 $\log 3 > 13/12 > 28/27$。第一个严格的对数界由 $\log 3 = 2\sum_{j=0}^{\infty}(1/2)^{2j+1}/(2j+1)$ 的前两项得到。由于 A 是凹的，$A'(0) < 0$ 意味着在此范围内 $A(0) \geq A(r)$。因此，在两个范围内，只需证明 $A(r) > 0$。

令 $x = r/(1+r) \in [1/6, 1/2]$。直接进行 Hermite 求值得到

$$E_{\tau_0}(r) = \frac{(1+r)^{q+1}}{2} F_q(x), \tag{A.27}$$

其中 $F_q(x) = x^{q+1}\{(1-q)x - q\} + (1+x)^2(1-x)^{q-1}\{1 - (1-q)x\} - (1+2x)$。由 (A.26)，$\alpha = 1 - q \leq 6x - 1$。现在证明，在整个区域上 $F_q(x) > 0$。记 $a = -\log x$、$b = -\log(1-x)$，则$F_q(x) = -x^2\{1 - (1+x)\alpha\}e^{a\alpha} + (1+x)^2(1 - x\alpha)e^{b\alpha} - (1+2x)$。函数 $(1 - (1+x)\alpha)e^{a\alpha}$ 关于 $\alpha \in [0,1]$严格凹，因为 $a \leq \log 6 < 2(1+x)$。在零点处的切线给出

$$-x^2\{1 - (1+x)\alpha\}e^{a\alpha} \geq -x^2 + \alpha x^2(1 + x - a). \tag{A.28}$$

第二个函数 $h(\alpha) = (1 - x\alpha)e^{b\alpha}$ 满足 $h(0) = h(1) = 1$，且 $-h''(\alpha) = be^{b\alpha}(2x - b + bx\alpha) \geq b(2x - b) > 0$，因为 $b < 2x$ 对 $0 < x \leq 1/2$成立。因此 $h(\alpha) \geq 1 + \frac{1}{2}b(2x - b)\alpha(1 - \alpha)$。对于 $x \geq 1/3$，将此界代入 h 并将 (A.28) 代入 F_q，得到 $F_q(x) \geq \alpha x^2(1 + x - a) > 0$，因为 $1 + x - a \geq 4/3 - \log 3 > 0$。若$1/6 \leq x \leq 1/3$，使用 $1 - \alpha \geq 2(1 - 3x)$ 可得 $F_q(\alpha^x \geq x^2)(1 + x + \log x) + (1+x)^2 b(2x - b)(1 - 3x)$。$b$的幂级数给出 $0 \leq \frac{b}{x} - 1 \leq \frac{x}{2(1-x)}$ 以及 $b(2x - b) \geq x^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)$。因此 $F_q(x) \geq \alpha x^2 M(x)$，其中 $M(x) = 1 + x + \log x + (1+x)^2(1 - 3x)\left(1 - \frac{x^2}{4}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)$。函数 M在$[1/6, 1/3]$上严格凹。为作完全有理数验证，令 $x = (1+z)/6$, $0 \leq z \leq 1$。直接求得到 $2x^2(1-x)^4 M''(x) = \frac{-z^7 + 15z^6 - 57z^5 - 129z^4 + 2933z^3 - 747z^2 + 3397z - 13603}{10368} < 0$。对于 $0 \leq z \leq 1$，$2x^2(1-x)^4 M''(x)$的分子至多为 $15 + 2933 + 3397 - 13603 = -7258$。最后，$M(1/6) = \frac{4417}{2400} - \log 6 > 0$且 $M(1/3) = \frac{4}{3} - \log 3 > 0$。例如 $\log 6 < 11/6 < 4417/2400$，这可由 $\sum_{j=0}^{4}(11/6)^j/j! = 186985/31104 > 6$ 得出。此外 $e^{\frac{4}{3}} > 1 + 4/3 + (4/3)^2/2 > 3$。由凹性可知，$M > 0$ 在整个区间内成立，从而 $F_q > 0$。

方程（A.27）给出 $A(r) > 0$。由于 A具有严格凹性，且有端点界 $A(0) \geq A(r) > 0$ 当 $r \leq 1/3$ 以及 $A(0) > 0$ 当 $r \geq 1/3$时成立，可得 $A(\varepsilon) > 0$ 对每个 $0 \leq \varepsilon \leq r$均成立。关于 τ的单调性证明了严格物理右端点不等式。随后，负分支判据给出一个全局三次主函数，其接触点仅为两个高斯节点。将其对具有指定前三阶矩的测度积分，即可证明高斯最优性和唯一性。高斯测度具有可能的最小

四阶矩，因此对于每个非空的四阶矩上限问题，它都是可行的，并且也证明了最后的断言。□

推论 A.13（倒数松弛的全局边界分类）。对于每个 $n \geq 4$ 和 $1 < p < 2$，完整的倒数／四阶矩松弛问题都存在一个最优解，位于四个边界族之一

$$\gamma = 0, \qquad \gamma = \Gamma_n(t), \qquad \delta = -1 + \frac{\gamma}{1 - c + \beta(t)}, \qquad \delta = 1 - \frac{\gamma}{1 - c - \beta(t)}.$$

最后两个边界族通过退化端点处的交叉相乘收缩条件来刻画。因此，其全局最优值是四个边界曲面上的最大值；无需保留所有节点都位于（-1,1）内的上限未激活的三节点最优解。

证明。当 $t \leq p/3$ 时，定理 A.12 给出高斯族 $\gamma = 0$。当 $t > p/3$ 时，只要四阶矩上限未激活，达到的四次对偶的首项系数就为零。本小节 A.11 中的三次接触点计数论证排除了这一范围内存在三个内点接触点的可能。二节点可行测度必定是高斯测度；因此，三节点测度必定含有一个端点节点，并位于两个拉道边界之一。激活上限则给出第二个所示边界族。当 $t = c$ 时，矩问题已经对应唯一的二节点高斯测度。这涵盖了所有参数及所有退化情形。□

Theo其余A.25 将比较剩余的边界最大值与离散二值比率。

A.14. 消去左侧拉道曲面。 令 $1/2 \leq c < 1$, $0 \leq t < c$, $0 < q < 1$，并令$\beta = -\frac{(1-c)t}{c}$，$h = 1 - c + \beta > 0$, $\phi_t(y) = y\,\mathrm{sgn}(t+y)|t+y|^q$。考虑左侧拉道雅可比族

$$J_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c} & 0 \\ \sqrt{c} & \beta & \sqrt{\gamma} \\ 0 & \sqrt{\gamma} & -1 + \gamma/h \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \gamma \leq \overline{\gamma},$$

其中 γ是任意一个使所有矩阵均为收缩算子的非负上界。因此，该谱测度具有固定的矩 $m_1 = 0$、$m_2 = c$、$m_3 = c\beta$，并包含左端点 -1。

定理 A.14。 在此区间上，$\langle e_1, \phi_t(J_\gamma)e_1 \rangle$ 的最大值在 $\gamma = 0$ 或 $\gamma = \gamma$ 处取得。每个非退化内点临界点都是严格局部极小值。特别地，在四阶矩松弛中，整个左侧拉道曲面均可舍弃，仅保留其高斯端点以及它与有效四阶矩上限的交点。

证明。令 $\delta = -1 + \gamma/h$。特征多项式分解为 $\det(zI - J_\gamma) = (z+1)\{z^2 - (1+\beta+\delta)z + c\delta\}$。对于 $\gamma > 0$，另外两个特征值 $a < b$ 满足 $a < c < b$，其中 $b = c + \frac{(1-c)(c-t)}{c-a}$。二者都是关于 δ的严格递增函数，因为 $\frac{da}{d\delta} = \frac{c-a}{b-a} > 0$ 和 $\frac{db}{d\delta} = \frac{b-c}{b-a} > 0$。在 $\gamma = 0$处，它们是两个高斯节点，因此 $a + b \geq \beta$ 和 $b \geq c$。对第一坐标预解式求导可得$\frac{d}{d\gamma}\langle e_1, \phi_t(J_\gamma)e_1 \rangle = c\,\phi_t[-1, a, a, b, b]$，只要 $a \neq -t$成立即可。下面不需要考虑可去的 $\gamma = 0$ 极限。满足 $a < -t$的区间。令 $A = 1 - t$、$u = -t - a > 0$、$v = t + b > 0$、$S = v - u$、$P = uv$、$x = -A$。这里 $0 < u < A$，且 $t \leq S \leq 1 + t$。事实上，$S = 2t + a + b \geq 2t + \beta = (3 - 1/c)t \geq t$；上界由 $u \geq 0$ 和 $b \leq 1$ 推出。

令 H_q为 $f_q(z) = (z - t)\,\mathrm{sgn}(z)|z|^q$在 $-u, v$处的三次 Hermite 插值多项式。我们证明 $H_q(-A) > f_q(-A)$。对于有理核 $f_s(z) = (z-t)_{\frac{z}{s+z^2}}$，埃尔米特误差为 $H_s(x) - f_s(x) = \frac{(x+u)^2(x-v)^2 N(s,x)}{(s+x^2)(s+u^2)^2(s+v^2)^2}$，其中$N(s, x) = (s + tx)\{(s + P)^2 - sS^2\} + 2sS(s + P)(t - x)$。在 $x = -A$处，其系数为

$$\begin{aligned} [s^3]N &= 1, \\ [s^2]N &= 2P - S^2 + 2S - t(1 - t) > 0, \\ [s]N &= P^2 + 2SPt + x\{2P(t - S) - tS^2\} > 0, \\ [s^0]N &= txP^2 \leq 0. \end{aligned}$$

对于二次项系数，$S(2 - S)$在 $[t, 1 + t]$ 上的凹性给出 $S(2 - S) - t(1 - t) \geq \min\{t,\ 1 - t\} \geq 0$。对于一次项系数，使用 $S \geq t$ 和 $x < 0$。因此，当 $t > 0$ 时，有理分子恰有一个正零点，并且在该点处由负变正。当 $t = 0$ 时，它对所有 $s > 0$都严格为正。

指数为 $q = 0$ 时，埃尔米特误差具有精确表达式 $H_0(x) - (-x + t) = \frac{2}{(x+u)\,u+v)^3}\{(2t - S)^2 x + 2v^2 - t(u + 3v)\}$。在 $x = t - 1$ 时，括号内的表达式化简为 $2b^2 + a + b \geq 2c^2 + \beta \geq 2c^2 - (1 - c) = (2c - 1)(c + 1) \geq 0$。因此，权函数为 $s^{-\frac{1}{2}}$ 的误差积分非负。对于 $0 < q < 1$，使用斯蒂尔切斯表示 $\mathrm{sgn}(z)|z|^q = \frac{\cos(\pi q/2)}{\pi} \int_0^\infty s^{\frac{q-1}{2}} z / (s + z^2)\, ds$。如果 $t > 0$，令 s_0 为有理误差的唯一符号变化点

有理核。将该核乘以 $s^{\frac{q}{2}}-s_0^{\frac{q}{2}}$ 后，在 s_0 的两侧所得乘积均严格为正。因此，对 $s^{-\frac{1}{2}}\,ds$ 进行积分后，新的误差严格大于 $s_0^{\frac{q}{2}}$ 乘以在 $q=0$ 处的非负误差积分。所有积分都绝对收敛。对于 $t=0$，有理核本身为正。

由于差商与埃尔米特误差的符号相反，$\phi_t[-1,a,a,b,b]=\frac{f_q(-A)-H_q(-A)}{(A-u)^2(A+v)^2}\le 0$。因此，只要满足 $a<-t$，拉道目标函数就严格递减。

满足 $a>-t$的区间。假设这里存在一个内部驻定点。令 Q 为在 ϕ_t 处、节点为 $a,\ b$的三次 Hermite 插值多项式。驻定性恰好表明，$Q(-1)=\phi_t(-1)$也成立。在 $[a,b]$ 上，平移变量$z=t+y$为正，并且 $\phi_t^{(4)}(y)=q(q-1)(q-2)z^{q-4}\{(q+1)z+(3-q)t\}>0$。因此，埃尔米特余项或其重复节点差商给出 $\phi_t''(a)-Q''(a)>0$ 以及 $\phi_t''(b)-Q''(b)>0$。令 $w_a,\ w_b>0$为两个可移动的谱权重。由于沿该族中每个三次多项式的期望值均保持不变，在驻定点处对其求两次导数可得

$$\frac{d^2}{d\gamma^2}\langle e_1,\phi_t(J_\gamma)e_1\rangle = w_a(a')^2\{\phi_t''(a)-Q''(a)\}+w_b(b')^2\{\phi_t''(b)-Q''(b)\}>0.$$

由于接触条件，所有涉及权重导数的项都为零，且节点 -1 固定。因此，这样的每个驻点都是严格局部极小值。

若 $a=-t$ 且 $t>0$，其贡献中有一个非零的奇数次 $\operatorname{sgn}(\gamma-\gamma_0)|\gamma-\gamma_0|^q$ 首项，且系数为负。因此它不是局部极大值。对于 $t=0$，递增节点 a 只有在完全收缩端点处才达到零。因此不存在内部局部极大值，断言得证。□

推论 A.15 (完整四阶矩包络的三个边界曲面)。对于任意 $n\ge 4$ 和$1<p<2$，令 $c=(n-2)/n$，并保留四阶矩雅可比约化中的奇偶性上限 $\Gamma_n(t)$。完整的松弛包络 $V_{n,p}$ 在以下之一上取得

$$\gamma=0,\qquad \gamma=\Gamma_n(t),\qquad \delta=1-\frac{\gamma}{1-c-\beta},\quad \beta=-\frac{(1-c)t}{c}.$$

因此，无需单独优化左侧拉道曲面。

证明。高斯楔形定理与非活跃上限接触分类共同表明，最优解可在四个曲面上取得，这四个曲面由三个已显示的曲面和左侧拉道曲面组成。对于 $t<c$，与压缩相容的 γ 最大值为 $\gamma_{\mathrm{full}}=(1-c)\left(1-\frac{t^2}{c^2}\right)$。奇偶性上限满足 $0\le\Gamma_n(t)=\gamma_{\mathrm{full}}-\frac{2(1-u_n(t)^2)}{n^2c}\le\gamma_{\mathrm{full}}$。因此，定理 A.14 适用于整个左侧拉道区间 $0\le\gamma\le\Gamma_n(t)$。其两个端点已位于高斯曲面或活跃上限曲面上。在 $t=c$ 处，γ_{full} 和 $\Gamma_n(t)$ 均为零；唯一有效的谱测度是高斯双原子测度。等价地，此情形也可由 $t\uparrow c$ 时的连续性推出。由此证明了所述的全局约化。□

A.15. **非激活上限右 Radau 优化器的消去**。令 $1/2\le c<1$、$0<q<1$、$p=q+1$ 和 $0<t<c$。置 $\beta=-(1-c)t/c$，并考虑右 Radau 族

$$J_\gamma=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{c} & 0\\ \sqrt{c} & \beta & \sqrt{\gamma}\\ 0 & \sqrt{\gamma} & 1-\gamma/(1-c-\beta)\end{pmatrix}.$$

其第一坐标谱测度具有固定的前三阶矩 $m_1=0$、$m_2=c$、$m_3=-(1-c)t$，并包含端点 1。令

$$\phi_t(y)=y\operatorname{sgn}(t+y)|t+y|^q,\quad D=(1-t)^q+(1+t)^q,\quad \Phi=\int\phi_t\,d\mu,\quad G=2\Phi/D.$$

定理 A.16。假设 μ 是具有这些前三阶矩和未激活四阶矩上限的矩问题的一个最优解，并且它是满足 $0<\gamma<\gamma_{\mathrm{full}}=(1-c)\,(1-t^2/c^2)$ 的右 *Radau* 测度。若 $t>p/3$，则在固定 c 和 γ 的情况下，其沿右 *Radau* 曲面的导数满足

$$\partial_t G>0.$$

因此，有限阶截断松弛的全局优化器不可能位于具有未激活上限且满足 $\gamma>0$ 的右 *Radau* 曲面上。结合 $t\le p/3$ 的高斯最优性和左 *Radau* 消去，全局松弛归结为高斯曲面和有效四阶矩上限。

证明利用了最优解处三次对偶主函数的存在性。其导数估计涉及沿 t 右 Radau 曲面的可行变分。

证明。将两个可移动节点写为 $-x$，b，使得 $-1<-x<-t<0<t<b<1$。特征多项式在固定节点 1 处进行因式分解。在 $\gamma=0$ 处，另外两个节点是高斯节点，而在完全收缩端点处，它们等于 -1，t。随着 γ 增大，二者都减小。特别地，$x>b$, $x>t$, $b>t$，且 $(b+t)-(x-t)\geq 3t-1>0$。第一个不等式也可直接由 $b-x=\beta-\gamma/(1-c-\beta)<0$得到。矩关系为 $c(1-x+b-t)=xb-t$。引入正量

$$u=x-t,\quad v=b+t,\quad A=1-t,\quad B=1+t,$$
$$E=1+x,\quad L=1-b,\quad d=x+b,$$
$$\varepsilon=1-x,\quad W=1-x+b-t.$$

因此 $u<v$、$A>u$、$B>v$ 和 $c=\frac{xb-t}{W}$、$1-c=\frac{\varepsilon}{(1+b)\,W}$，以及 $x=1-\frac{}{(1-c)\quad(b-t)\;b+c}$。在 $-x$、b、1 处的谱权重为

$$w_-=\frac{(1+b)(b-t)}{WdE},\qquad w_b=\frac{\varepsilon(x+t)}{WdL},\qquad w_1=\frac{c-xb}{EL}.$$

在所讨论的最优解处，三个权重均严格为正。

由于上限约束未激活，取得的对偶多项式 Q 次数至多为三，并且在 $[-1,1]$ 上满足 $Q\geq\phi_t$。它在 $-x$、b、1 处与 ϕ_t 接触，并在 $-x$、b 处具有导数接触。等价地，它是 $-x$、b 处的三次 Hermite 插值多项式，其右端点接触即为拉道驻点方程。记 Q_3 为其三次系数。必然有

$$Q_3<0. \tag{A.29}$$

事实上，在 $[b,1]$ 上有 $\phi_t'''(y)=q(q-1)(t+y)^{q-3}\{(q+1)(t+y)+(2-q)t\}<0$。如果 $Q_3\geq 0$，则残差 $Q-\phi_t$ 在那里具有严格为正的三阶导数。它在内部接触点 b 处的二阶导数非负，而其在 b 处的值和一阶导数均为零。因此，它在 1 处应严格为正，这与接触相矛盾。

在最优解处，对矩约束求导可得

$$\Phi_t=q\int y|t+y|^{q-1}\,d\mu-(1-c)Q_3,\qquad G_t=\frac{2}{D}\left(\Phi_t-\Phi\frac{D'}{D}\right). \tag{A.30}$$

为证明第一个恒等式，将 Q 固定在所求导的点处。其函数值和导数的接触性质使得移动测度对 ϕ_t 的期望值的导数等于 Q所对应的导数。只有三阶矩发生变化，其导数为 $-(1-c)$。对 t 中的被积函数求导A.30得到式（A.30）中的积分。

一个正系数。分子中 A^q 的系数 $\Phi_tD-\Phi D'$ 为 $L=\Phi_t+q\Phi/A>0$。为了从下方界定A^q，我们首先比较两个内部节点的贡献。它们的负值与正值之比为 $\frac{u^q}{v^q}\frac{xL}{bE}\frac{b^2-t^2}{x^2-t^2}\leq\frac{u^q}{v^q}\frac{bL}{xE}<1$，其中使用了 $x>b>t$ 和 $u<v$。端点贡献为$\overline{qw_1}\overline{B^q(1}/A+\overline{1/B)}$，$>0$剩余项根据式（A.29）为 $-(1-c)Q_3>0$。由此证明了$\mathcal{L}>0$。

化为二次式。将所有幂除以 v^q，并令 $X=(u/v)^q$、$H=(B/v)^q$ 和 $Y=(A/v)^q$。定义$K=2x^2+x-b$、$J=\frac{qxEd}{u}-K$、$J_0=K+\frac{qd}{(b-x^2)\,v}$、$h_1=-\frac{L^2J}{d^3}$和 $h_0=1+\frac{qL}{v}+\frac{L^2J_0}{d^3}$。在1处直接进行三次厄米插值，得到驻点方程 $H=h_0+h_1X$。r^q 的凹性及其加权调和下界给出

$$\ell:=\frac{B}{B-qL}\leq H\leq h:=1+\frac{qL}{v},\qquad Y\geq\frac{AX}{M},\qquad M=A-q\varepsilon>0. \tag{A.31}$$

关于该量的下界 Y在（A.31）中的结果由 $(A/u)^q\geq A/((1-q)A+qu)$得到。应用相同的加权调和 nic均值不等式 于 B/v，得到关于 H的下界。

有 $J_0>0$。事实上，由于 $x>b$，$K\geq 2x^2$；而对于 $t>p/3>1/3$，$\frac{d}{v}\leq\frac{1+b}{b+t}\leq 2$，$b>t$。若 $b-x^2\geq 0$，则根据其定义有 $J_0>0$。否则，$K>2x^2$ 和 $d/v\leq 2$ 给出 $J_0>2x^2-2qx^2\geq 0$，因为 $0<q<1$。因此，$h_0>h$。由于 $X>0$ 和 $H\leq h$，驻定性迫使 $h_1<0$。因此，关于 H 的界等价于 $0<X_h:=\frac{h-h_0}{h_1}\leq X\leq X_\ell:=\frac{\ell-h_0}{h_1}$。

Set

$$P_0=bw_b,\quad P_1=xw_-,\quad T_0=\frac{qbw_b}{v}-\frac{\varepsilon(1+b)}{W}\frac{x-b+qdb/v}{d^3},\quad T_1=-\frac{qxw_-}{u}-\frac{\varepsilon(1+b)}{W}\frac{x-b-qdx/u}{d^3}.$$

这里， P_0+P_1X是 Φ的归一化内部部分，而 T_0+T_1X是去掉固定端点项 qw_1H/B 后的归一化 Φ_t。定义二次多项式

$$F(X)=AX(T_0+T_1X)+q(P_0+P_1X)X \\ +(h_0+h_1X)\left\{M(T_0+T_1X)-\frac{qM}{B}(P_0+P_1X)+qw_1X\left(1+\frac{A}{B}\right)\right\}. \tag{A.32}$$

展开式（A.30），结合 Y在（A.31）中的下界，可得 $\frac{\Phi_t D-\Phi D'}{v^{2q}}\geq {}^{F}(X)_{M}$。由 $\mathcal{L}>0$可知该不等式的方向是正确的。

常数系数严格为负：

$$F(0)=h_0M\left(T_0-\frac{qP_0}{B}\right),\qquad T_0-\frac{qP_0}{B}=\frac{\varepsilon}{Wd^3vB}\left\{(1+b)Bv(b-x)-qbd\varepsilon(d+B)\right\}<0.$$

两个端点不等式为

$$F(X_h)>0,\qquad F(X_\ell)>0. \tag{A.33}$$

它们在更大的有理数域 $\frac{1}{2}\leq c<1$、 $0<q<1$、$-(1+q)/3<t<1$、 $t<b<1$、 $x=1-\frac{(1-c)}{(b-t)\,b+c}$ 中处处成立，只要有理函数有定义。在该区域内，式（A.33）的证书适用于任意源权重。

一个二次式 F满足 $F(0)<0$，且在两个正参数处取正值，则它在连接 X_h 与 X_ℓ的区间上为正。若其二次项系数非正，则由凹性即可得出结论。若其为正，则它的两个实根异号，因此在较小的正参数处为正，意味着整个区间都位于其唯一正根之后。于是（A.33）证明了 $F(X)>0$，从而证明了 $G_t>0$。

最后，如果第四个约束上限未被触及，那么沿着这条拉道曲面充分小幅地增加 t 仍然可行，即使位于奇偶单元边界处也是如此，因为该约束上限是连续的，且松弛量严格为正。唯一的端点 $t=c$ 是高斯点。这排除了所断言的全局最优解，并证明了该定理。□

端点不等式的精确有理证书。独立脚本 `turn3_source_right_radau_certificate.py`根据埃尔米特系数和端点权重，构造（A.32）中的每个有理表达式。它代入 $c=(1+C)/2$、 $q=Q$、 $t=(1+Q+(2-Q)T)/3$ 以及 $b=t+(1-t)Z$，其中$0<C$、Z、T、$Q<1$。情形 $C=0$单独进行校验。随后，它对每个端点值的分子和分母进行因式分解，并通过精确的系数计算验证每个奇数重因子的符号。唯一的偶数重分子因子是 Q^2，由于 $0<q<1$，它严格为正；校验器对此进行了显式验证。在有理表达式有定义的所有位置，偶数重分母因子均不为零，因此其符号为正。唯一的几个较大的奇数重因子具有以下数据：

端点	多重次数为 $(C,\ Z,\ T,\ Q)$	非零符号证书系数	sign
X_h	(7, 11, 11, 12)	14729	−
X_ℓ	(7, 11, 12, 13)	17192	+

分子和分母的符号分别为 $(-,\ -)$ 和 $(+,\ +)$。因此，两个有理端点值均为正。

为精确起见，通过代入 $z_j=s_j/(1+s_j)$ 并乘以 $\prod_{j=1}^{4}(1+s_j)^{d_j}$，即可认证多重次数为 $(d_1,\dots,d_4)$ 的多项式 P。所得多项式的每个系数都具有所述符号，且至少有一个系数非零。这等价于单位立方体上的张量伯恩斯坦符号证书。所有运算均使用精确有理多元多项式。校验器还会验证，在令 $C=0$ 时仍有非零系数，因此严格不等式包含 $c=1/2$。只有在检查完两个有理表达式后，它才会打印最终的 PASS。因此，仅凭公式即可复现该证书，且无需使用存储的数值样本。

推论 A.17 (完全松弛的两个剩余曲面)。 对任意 $n\geq 4$ 和 $1<p<2$，令$c=(n-2)/n$，并令 $\Gamma_n(t)$ 表示 *Jacobi* 坐标下的奇偶性四阶矩上限约束。全局倒数/四阶矩松弛恰好可化为以下形式：

$$V_{n,p}=\max_{0\leq t\leq c}\max\left\{G(t,0),\quad \max_{\delta_-(t)\leq\delta\leq\delta_+(t)}G\big(t,\Gamma_n(t),\delta\big)\right\},$$

其中

$$\delta_-(t)=\frac{t}{c}-\frac{1-u_n(t)^2}{n(c-t)},\qquad \delta_+(t)=\frac{t}{c}+\frac{1-u_n(t)^2}{n(c+t)}.$$

这些公式在退化端点处按连续性理解。因此，只剩下高斯族和有效四阶矩上限。

证明。 推论 A.13 将全局最优解限制在高斯族、激活上限族、左拉道族和右 Radau 族内。左拉道端点定理将其贡献约化为高斯情形或激活上限情形。对于右 Radau 族中上限未激活的情形，当 $t \le p/3$ 时，由高斯楔形定理可知全局最大值点为高斯情形；当 $t > p/3$ 时，则由定理 A.16排除。严格未激活意味着 $\gamma < \Gamma_n(t) \le \gamma_{\text{full}}$，正如该处所需。当 $t = c$ 时，矩问题已是高斯情形。由此证明了精确约化，但并未声称对剩余曲面求值。□

A.16. **对称三值族的端点界。**

定理 A.18. 设 $n \ge 3$ 和 $1 < p < 2$。对于任意非零的中心化实根列表，若其有三个有序值，重数为 $(1, n-2, 1)$，

$$\frac{\sum_{j=1}^{n-1} |w_j|^p}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} < \max\left\{S_{n,p}, R_{n,p}(1)\right\},$$

除非其中间值为零。两个端点比值分别为 $S_{n,p} = ((n-2)/n)^{\frac{p}{2}}$（对应稀疏对）和$R_{n,p}(1) = ((n-2)^p + n - 2)/((n-1)^p + n - 1)$（对应两个零合并后得到的二值列表）。在闭族上，较大的端点比值即为最大值。若两个比值相等，则只有两个端点（在反射和缩放意义下）能取到该最大值。

证明。 将有序根值写作 $x_- < x_0 < x_+$ 并令 $d = (x_+ - x_-)/2 > 0$。中心化给出$x_- + x_+ = -(n-2)x_0$。按 d 缩放并令 $\tau = nx_0/(2d)$，于是得到根列表

$$-1 - c\tau, \qquad (2\tau/n)^{[n-2]}, \qquad 1 - c\tau, \qquad c = \frac{n-2}{n}. \tag{A.34}$$

严格序关系等价于 $-1 < \tau < 1$。反射将 τ 变为 $-\tau$ 并保持该比值，因此不妨取 $0 \le \tau < 1$。纳入 $\tau = 1$ 即可得到正根碰撞端点。因此（A.34）涵盖整个族。

令 $a = (n-3)/n$ 以及 $b = 1/n$。除重数为 $n-3$的临界点 $2\tau/n$ 外，其余两个临界点为 $-a\tau \pm \sqrt{c + b^2\tau^2}$。当 $0 \le \tau \le 1$时，它们符号相反，因为在此区间上 $c - (a^2 - b^2)\tau^2 > 0$。对于 $\tau > 0$，令 $x = 1/\tau \ge 1$ 和 $y = \sqrt{cx^2 + b^2}$。将矩比的分子和分母同除以 τ^p，得到 $U(x)/V(x)$，其中 $U(x) = (y+a)^p + (y-a)^p + (n-3)(2/n)^p$，以及$V(x) = (x+c)^p + (x-c)^p + (n-2)(2/n)^p$。四个基 $y \pm a$和 $x \pm c$均为正数。令 $q = p - 1 \in (0, 1)$，它们导数之比为

$$D(x) := \frac{U'(x)}{V'(x)} = \frac{cx}{y} \frac{(y+a)^q + (y-a)^q}{(x+c)^q + (x-c)^q}. \tag{A.35}$$

我们证明

$$D(x) \le \max\{S_{n,p}, R_{n,p}(1)\}, \qquad x \ge 1. \tag{A.36}$$

当 $1 < x < \infty$时，不等式严格成立。

定义

$$\mathcal{A}_q(t) = \frac{(1+\sqrt{t})^q + (1-\sqrt{t})^q}{2}, \qquad F_q(t) = -\log \mathcal{A}_q(t), \quad 0 \le t < 1.$$

由于每个偶数项二项式系数 $\binom{q}{2j}$, $j \ge 1$, 都是负的，$\mathcal{A}_q(t) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} d_j t^j$ 其中 $d_j > 0$。展开$-\log(1-z)$ 因此可得

$$F_q(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j t^j, \qquad e_j > 0. \tag{A.37}$$

F_q 的幂级数及其导数在 $[0, 1)$ 的紧子区间上收敛。令

$$z = 1/x^2 \in [0, 1], \qquad \eta = \frac{b^2}{c}, \qquad A = \frac{a^2}{c}, \qquad B = c^2.$$

我们有 $0 \le A < B < 1$，因为 $n(n-3)^2 - (n-2)^3 = 8 - 3n < 0$。方程（A.35）变为

$$\log \frac{D(x)}{c^{\frac{p}{2}}} = -\frac{1-q}{2} \log(1 + \eta z) + F_q(Bz) - F_q\left(\frac{Az}{1+\eta z}\right). \tag{A.38}$$

（A.38）右侧关于 z严格凸。对数项严格凸，而（A.37）将两个 F_q 项之差表示为 $B^j z^j - A^j \left(\frac{z}{1+\eta z}\right)^j$的正和。每个这样的函数都是凸函数。对于 $j=1$，这是显然的；对于 $j \geq 2$，使用

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{1+\eta z}\right)^j = \frac{j z^{j-2}[(j-1)-2\eta z]}{(1+\eta z)^{j+2}} \leq j(j-1)z^{j-2}$$

以及 $A \leq B$。的所有参数在（A.38）中的 $[0,1)$ 一个固定的紧子区间内，因此对凸项求和是合理的。

在（A.35）中，$D(x) \to c^p_2 = S_{n,p}$ 当 $x \to \infty$时。在 $x=1$处，我们有 $y(1) = (n-1)/n$，因此 $D(1) = \frac{n-2}{n-1}\,(n-2)^{q+1}\,(n-1)^{q+1} = R_{n,p}(1)$。$\log D$ 作为 z 的函数具有严格凸性，从而证明了（A.36）。

最后令 $C_* = \max\{S_{n,p}, R_{n,p}(1)\}$。在 $x=1$处，根列表只有两个值，且 $U(1) = R_{n,p}(1)V(1)$。由于 $V'(x) > 0$ 且 $D(x) \leq C_*$，所以 $(U - C_*V)' = V'(D - C_*) \leq 0$。由此可知，对于所有 $x \geq 1$，$U(x) \leq C_* V(x)$。当 $x > 1$ 时，导数严格为负，因此对每个有限的 $x > 1$，不等式都是严格的，或者等价地$0 < \tau < 1$。在 $\tau = 0$ 处，原始的未缩放比值为$S_{n,p}$；在 $\tau = 1$ 处，它为$R_{n,p}(1)$。严格的内部导数界和端点计算证明了所述最大化点的分类。□

A.17. 次二次范围内的联合三阶矩问题。令 $n \geq 4$、$1 < p < 2$，并设 $c = (n-2)/n$、$q = p-1$，且 $S_{n,p} = c^p_2$和 $R_{n,p}(1) = (n-2)^{p+n-2}(n-1)^{p+n-1}$。取 (4.13) 中的 H_p，置$R_{\mathrm{cont}}(t) = 1 - H_p((1-t)/(1+t))/n$。令 r_p 为 H_p 的唯一极小点，并令 $\theta_p = r_p/(1+r_p)$，$t_p = 1 - 2\theta_p$。将联合无上限三阶矩最优值定义为

$$\mathcal{T}_{n,p} = \max_{0 \leq t \leq c} \; \max_{\substack{\mu \text{ probability on } [-1,1] \\ m_1=0,\ m_2=c,\ m_3=-(1-c)t}} \frac{2\int y\,\mathrm{sgn}(t+y)|t+y|^q\,d\mu(y)}{(1-t)^q + (1+t)^q}.$$

定理 A.19（精确联合三阶矩最优值）。对于每个 $n \geq 4$ 和 $1 < p < 2$，

$$\mathcal{T}_{n,p} = \max\left\{S_{n,p},\ \max_{0 \leq t \leq c} R_{\mathrm{cont}}(t)\right\}.$$

等价地，这等于

$$\begin{cases} \max\{S_{n,p}, R_{n,p}(1)\}, & n\theta_p \leq 1, \\ 1 - H_p(r_p)/n, & n\theta_p > 1. \end{cases}$$

在第一种情形中，每个极大化矩构型都是高斯构型：$t=0$ 给出稀疏值，而 $t=c$ 给出单离群值。只有所显示数值最大的端点或端点们会出现。当$n\theta_p > 1$时，唯一的极大化矩构型是证明中所显示的、支撑在 $\{-1, t_p, 1\}$ 上的内在上限测度。

证明。联合可行集在 $[0,c]$ 上概率测度的 $[-1,1]$弱拓扑中是紧的，且目标函数连续。因此，全局最大值存在。

这个表面上没有上限约束的问题具有内在四阶矩上限。事实上，其前面三阶矩给出 $0 \leq \int (1-y^2)(y-t)^2\,d\mu = c - m_4 - (1-c)t^2$。因此 $m_4 \leq e_{\mathrm{full}}(t) := c - (1-c)t^2$。等号成立迫使支撑集包含于$\{-1, t, 1\}$中。其权重由前两个矩唯一确定：

$$\alpha_- = \frac{c+t}{2(1+t)}, \qquad \alpha_t = \frac{1-c}{1-t^2}, \qquad \alpha_+ = \frac{c-t}{2(1-t)}.$$

当 $0 \leq t \leq c$ 时，它们均为非负数。代入目标函数后恰好得到 $R_{\mathrm{cont}}(t)$。

对于 $t \leq p/3$，定理 A.12 给出唯一的高斯最大化点。设 $p/3 < t < c$ 且内在上限 $e = e_{\mathrm{full}}(t)$ 未激活。如推论 A.13的证明所示，互补松弛给出一个三次对偶主函数。其接触点数量排除了三个内部节点，因此极大化测度要么是高斯测度，要么具有一个端点节点。定理 A.14 将左侧 Radau 情形归结为高斯情形或满上限端点。在上限约束未激活的非退化右Radau优化器处，定理 A.16 给出 $G_t > 0$，从而排除联合最大值。

在 Jacobi 坐标中，内在上限为 $\gamma_{\mathrm{full}}(t) = (1-c)\left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right)$。在此取值处，最后一个对角元的收缩区间塌缩为 $\delta = t/c$，从而得到定义在 $\{-1,\ t,\ 1\}$ 上的测度，其权重由前两个矩确定。因此，联合最大化点要么是高斯测度，要么就是这个三节点测度。在 $t=0$ 处，高斯唯一性由定理 A.12推出。在 $t=c$处，矩问题本身就是高斯的且具有唯一性：非负多项式 $(1+y)\,(y-c)^2$ 的期望值为零，从而迫使支撑集包含于 $\{-1,\ c\}$中。这也涵盖了两个端点，而无需调用内部对偶性。

对于 $0 < t < c$，令 $X = c/t > 1$。在 (A.35) 的归一化中，中间根为 $2/n$，外侧根为 $-X - c$ 和 $X - c$。增大 X 会使外侧根以 -1 和 1 的速度移动。因此，高斯目标函数就是端点导数商 $G_{\mathrm{Gauss}}(t) = U'(X)/V'(X)$。方程 (A.36) 及其在 $X > 1$ 时的严格性给出 $G_{\mathrm{Gauss}}(t) < \max\{S_{n,p}, R_{n,p}(1)\}$。在 $t = 0$ 处，高斯节点为 $\pm\sqrt{c}$，且权重相等，从而得到 $G_{\mathrm{Gauss}}(0) = S_{n,\,p}$。在 $t = c$ 处，它们为 -1、c，从而得到 $G_{\mathrm{Gauss}}(c) = R_{n,\,p}(1) = R_{\mathrm{cont}}(c)$。因此，全局高斯贡献恰好为 $\max\{S_{n,p}, R_{n,p}(1)\}$，所述第一公式即得证。

最后，R_{cont} 先严格递增至 t_p，随后严格递减。若 $n\theta_p \le 1$，则 $t_p \ge c$，且其在可容许区间上的唯一最大值位于 $t = c$。否则，其最大值在 $t = t_p$处取得。在后一种情形下，$1/(n-1) < r_p$，因此 H_p 从其在零点的值 p 开始严格递减，从而得到$R_{n,\,p}(1) > 1 - p/n$。$s^{\frac{p}{2}}$ 的凹性给出$S_{n,\,p} < 1 - p/n$，所以稀疏值严格更小。当 $n\theta_p \le 1$ 时，(A.36)以及 R_{cont} 在 $0 < t < c$ 上的严格递增，仅留下高斯端点 $t = 0$，c。当 $n\theta_p > 1$时，连续型最大值严格大于$R_{n,\,p}(1)$和$S_{n,\,p}$，并且在 t_p处唯一取得。t_p 处的内禀帽矩测度是唯一的，这证明了附加的等号断言。□

推论 A.20（连续二元最优值超出次数约束时的最佳常数）。对于每个 $n \ge 4$ 和 $1 < p < 2$ 满足 $n\theta_p \le 1$的情形，最优中心化多项式常数为

$$C_{n,p} = \max\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}},\quad \frac{(n-2)^p + n - 2}{(n-1)^p + n - 1}\right\}.$$

对于实根和复根，该结果都是最佳的。除全零列表外，等号成立当且仅当（在置换和乘以一个公共非零复数标量的意义下）为

$$(1, -1, 0, \ldots, 0) \quad \textit{when the first value is maximal,}$$

or

$$(n-1, (-1)^{[n-1]}) \quad \textit{when the second value is maximal.}$$

在二者相等时，两族都达到等号。

证明。对于临界点/根矩比的非零实数最大化点，将极端根归一化为$t - 1$，$t + 1$ 并在必要时进行反射，可得 $0 \le t \le c$。中心化端点变分使其比值恰好等于可行测度在 $\mathcal{T}_{n\text{ 中的 }p}$ 端点梯度。因此 $C_{n,\,p} \le \mathcal{T}_{n,\,p}$。稀疏对和单离群值二元列表分别达到上述两个值，从而证明等号成立。

关于等号成立，定理 A.19 迫使 $t = 0$ 或 $t = c$，且具有高斯谱测度。雅可比约化的逆源恒等式给出归一化的内部源方差 $\gamma/(1-c)$。高斯性意味着 $\gamma = 0$，因此所有 $n - 2$ 内部源点都等于 $-t/c$。在 $t = 0$ 处，它们全都为零。在 $t = c$ 处，它们全都为 -1，这也可直接由它们的均值及其下界 -1推出。这恰好给出两个实数构型。

角向 Schur–Jensen 约化将精确界推广到复根情形。对于 $p > 1$，其等号步骤具有刚性：$|x|^p$ 的严格凸性迫使 Schur 三角形临界点压缩的厄米部分对几乎所有旋转都是对角矩阵，因而迫使该压缩为正规矩阵。对于中心化根列表，写作 $D = \mathrm{diag}(z_j)$ 和 $e = n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ 时，压缩交换子是由 De 和 De 生成的秩一矩阵之差。正规性给出 $De = \omega D\bar{e}$，其中某个 $|\omega| = 1$ 成立。因此，所有根都位于一条经过零点的公共直线上，旋转后即得到实数等号情形。□

推论 A.21（. 在每个次数下的显式指数范围）对于每个整数 $n \ge 4$ 以及满足条件的 $1 < p < 2$,

$$(n-2)(p-1)^2 \le 4, \qquad \textit{equivalently} \qquad p - 1 \le \frac{2}{\sqrt{n-2}},$$

有

$$C_{n,p} = \max\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}},\quad \frac{(n-2)^p + n - 2}{(n-1)^p + n - 1}\right\},$$

且等号构型恰好是推论 *A.20*中的构型。

证明。界（A.2），其中 $q = p - 1$ 以及 $\theta_p = r_p/(1 + r_p)$，给出 $\theta_p < \frac{q^2}{4+2q^2}$。在 $(n-2)\,q^2 \le 4$ 下，这意味着 $n\theta_p < 1$。应用推论 A.20。特别地，每条固定射线 $p = 1 + \tau/n$ 都会在所有充分大的 n时进入这一显式范围。□

推论 A.22（四次至十九次的所有指数）。对于每个整数 $4 \le n \le 19$ 以及每个$1 < p < 2$,

$$C_{n,p} = \max\left\{\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{p}{2}},\quad \frac{(n-2)^p + n - 2}{(n-1)^p + n - 1}\right\},$$

with 推论中的所有等号构型 *A.20.*

证明。强化的不动点位置证书，即定理 A.4，证明了 $r_p < 1/18$ 对每个 $1 < p < 2$均成立。因此 $\theta_p = \frac{r_p}{1+r_p} < \frac{1}{19}$。由此 $n\theta_p < 1$ 在所述次数范围内处处成立，且推论 A.20适用于每个 $1 < p < 2$。 □

A.18. **每个峰值单元内四次锚点均严格为正。**

定理 A.23. 设 $0 < q < 1$、 $p = 1 + q$，并令 r_p 使 H_p 取最小值。只要满足以下条件，四次锚点的左端点系数就严格为正

$$0 < r = \frac{1-t}{1+t} \le \frac{2r_p}{1-r_p}.$$

因此，在包含连续双值峰的每个整数单元内， $E_-(t) > 0$ 。右系数在该处也严格为正，因此四次锚点在整个峰值单元上（包括其端点）均可用。

证明。令 $\alpha = 1 - q$、 $X = r^q$，并令 $Z = (1-r)^q$。精确端点公式给出 $4r^2E_-(1+t)^{q-2} = N_q(r)$，其中 $N_q(r) = 1 - Z\{1 + qr + (q+1)r^2 + 2r^3\} + r^{q+1}\{q - (1-q)r - 2r^2\}$。我们先建立一个有用的初等下界。写作 $(1-r)^q = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j r^j$，其中 $a_j > 0$ 且 $a_1 = q$。相乘得到 $Z\{1 + qr + (q+1)r^2 + 2r^3\} = 1 + c_2r^2 + c_3r^3 - \sum_{j=4}^{\infty} C_j r^j$，其中 $c_2 = \frac{2+q-q^2}{2}$，$c_3 = \frac{(1-q)(6+2q-q^2)}{3}$，$C_j = a_j + qa_{j-1} + (q+1)a_{j-2} + 2a_{j-3} > 0$ 且 $C_4 > 2q$。仅保留严格下界 $C_4 > 2q$，可得

$$N_q(r) > \alpha r^2 F_q(r), \tag{A.39}$$

其中 $F_q(r) = (q - 2r^2)\frac{r^{-\alpha}-1}{\alpha} - r^q - \frac{q+2}{2} - \frac{6+2q-q^2}{3}r - 2r^2$。每当 $q > 2r^2$ 时，通过求导可知，$F_q(r)$ 关于 r 严格递减：$F_q'(r) = -4r\frac{r^{-\alpha}-1}{\alpha} - (q-2r^2)r^{-\alpha-1} - qr^{q-1} - \frac{6+2q-q^2}{3} - 4r$中的每一项都为负。我们将在三个扩大的参数域上证明其为正。

小指数： $0 < q \le 2/5$ 和 $r \le q^2/2$。只需令 $R = q^2/2$。定义 $g(q) = \frac{qR^{q-1}}{1-q}$。此函数在 $(0, 2/5]$ 上严格递减。事实上，$(\log g)' = \log(q^2/2) + 2 - \frac{1}{q} + \frac{1}{1-q}$，且右侧随 q 增大，并且在 $q = 2/5$ 时等于 $\log(2/25) + 7/6 < -5/6$。此外， $g(2/5) > 3$，因为 $(25/2)^3 > (9/2)^5$。因此，在此范围内， $g(q) > 3$。在 $F_q(R)$ 的表达式中，第一项可写为 $\left(1 - \frac{q^3}{2}\right) g(q) - \frac{q-2R^2}{1-q}$。对于 $q \le 3/10$，利用 $R^q \le 1$ 可得明确的下界

$$F_q(R) > \frac{1973}{2000}\,3 - \frac{3}{7} - 1 - \frac{23}{20} - \frac{7}{3}\frac{9}{200} - 2\left(\frac{9}{200}\right)^2 = \frac{38063}{140000} > 0.$$

对于 $3/10 \le q \le 2/5$，函数 $(q^2/2)^q$ 是递减的，因为其对数导数为 $\log(q^2/2) + 2 < 0$。此外，$(9/200)^{\frac{3}{10}} < \frac{2}{5}$，这一点可通过将两边提升到十次方看出。因此

$$F_q(R) > \frac{121}{125}\,3 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{6}{5} - \frac{7}{3}\frac{2}{25} - 2\left(\frac{2}{25}\right)^2 = \frac{821}{1875} > 0.$$

两个恒定半径域。接下来我们证明

$$F_q(r) > 0 \quad \begin{cases} 2/5 \le q < 1, & 0 < r \le 1/12, \\ 3/5 \le q < 1, & 0 < r \le 2/17. \end{cases}$$

由关于 r 的单调性，只需分别使用 $R = 1/12$ 和 $R = 2/17$。令 $L = \log(1/R)$，并写作$F_R(\alpha) = F_{1-\alpha}(R)$。零点处的连续取值为 $F_R(0) = (1-2R^2)L - \frac{3}{2} - \frac{10R}{3} - 2R^2$。对于每个泰勒次数 $j \ge 2$， α^j 的系数为 $\frac{L^j}{j!}\left\{(1-2R^2)^{j+1} - (1+R)^L\right\} + \frac{R}{3}\mathbf{1}_{\{j=2\}}$。次数为$j \ge 2$ 的泰勒系数均为严格负值。要仅使用宽松的界来验证这一点，请注意，对于两个半径都有 $2 < L < 5/2$。当 $j \ge 2$ 时，大括号小于 $-1/6 - R$；对于 $j = 2$，额外的 $R/3$ 被支配，因为 $L^2/2 > 2$。因此，对于 $\alpha \ge 0$， F_R 是严格凹函数。

在零点处，初等界 $L > 2$ 给出 $F_{1/12}(0) > \frac{13}{72}$ 和 $F_{2/17}(0) > \frac{43}{1734}$。在其他端点处，使用 $12^{\frac{3}{5}} > \frac{22}{5}$和 $(17/2)^{\frac{2}{5}} > \frac{47}{20}$。将每个不等式两边提升至五次方，得到一个有理比较。 F_R 中乘在指数项前的系数均为正，直接代入可得 $F_{1/12}(3/5) > \frac{571}{1350}$ 和 $F_{2/17}(2/5) > \frac{3421}{57800}$。凹性分别证明了在 $0 \le \alpha \le 3/5$ 和 $0 \le \alpha \le 2/5$上的正性。这就建立了这两个区域上的结论。

峰值单元的位置。对于 $q \le 2/5$，方程（A.2）给出 $\frac{2r_p}{1-r_p} < \frac{q^2}{2-q}$；对于 $q \ge 3/5$，定理 A.4 给出 $2r_p/(1-r_p) < 2/17$。在中间区间 $2/5 \le q \le 3/5$ 中，引理 A.24 给出的精确位置界为 $r_p < 1/25$，因此 $2r_p/(1-r_p) < 1/12$。因此，这三个正性区域涵盖了定理所要求的每一个点。方程（A.39）证明了 $E_- > 0$。引理 A.7 给出 $E_+ > 0$，因为每个峰值单元都有 $t > 15/19 > 1/2$。□

引理 A.24。 对于 $2/5 \le q = p - 1 \le 3/5$，唯一极小点满足 $r_p < 1/25$。

证明。令 $r = 1/25$、$\varepsilon = 1 - q \in [2/5, 3/5]$、$\log(25/24)$ 和 $\beta = \log 25$。在 $r = 1/25$ 处，导数分子 $J = (r + r^p)^2 H_p'(r)$ 可由定理 A.4 证明中的指数公式通过代入 $r = 1/25$、$\alpha = \log(25/24)$ 以及 $\beta = \log 25$ 得到。记 $J = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varepsilon^j$。精确的有理对数界给出 $c_1 > -\frac{3}{5000}$、$c_2 > 0$、$c_3 > \frac{17}{5000}$、$c_4 > \frac{3}{1000}$、c_5、$c_6 > 0$，

$$c_j > -\frac{3}{5000} \quad (7 \le j \le 11), \qquad \left| \sum_{j=12}^{\infty} c_j \varepsilon^j \right| < \frac{\varepsilon}{100000}.$$

校验器 `turn3_norm_peak_anchor_certificate.py` 通过有理数运算验证系数界和尾项界。它利用带有 $z = 1/49$ 的反双曲正切级数对 α 进行包围，并使用 $z = 1/3$，$1/9$ 计算 $\log 2 + 2\log(5/4)$。对于指数尾项，它使用 $\alpha < 1/24$、$\alpha + \beta < 10/3$、$\beta < 13/4$ 和 $2\beta < 13/2$。由此可得

$$\frac{J}{\varepsilon} > -\frac{3}{5000} + \frac{17}{5000}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{3}{1000}\left(\frac{2}{5}\right)^3 - \frac{3}{5000}\frac{(3/5)^6}{1 - 3/5} - \frac{1}{100000} = \frac{3501}{62500000} > 0.$$

H_p 的严格单峰性证明了所声称的位置。 □

A.19. **将有限次数定理约化为一个峰值单元。** 定理 A.14 和定理 A.16 排除了相关单元之外的非活动上限拉道极值点。现在，我们将尖锐有限次数不等式约化为连续最优点所在整数区间上的标量比较。根据定理，所需的四次系数均为正 A.23。

固定 $n \ge 4$、$1 < p < 2$、$q = p - 1$ 和 $c = (n-2)/n$。保留 $R_{\mathrm{cont}}(t) = 1 - H_p((1-t)/(1+t))/n$、$B_{n,p} = \max_j R_{n,p}(j)$。连续双值比率在 $t_p = 1 - 2\theta_p$ 处取得唯一最大值。若 $n\theta_p \le 1$，则应用推论 A.20。若 $n\theta_p > 1$ 为整数，则定理 A.19 中的最大值由重数为 $n\theta_p$ 和 $n(1-\theta_p)$ 的二值列表取得。

因此我们假设 $k = \lfloor n\theta_p \rfloor \ge 1$ 和 $n\theta_p$ 不是整数。令 $\ell = 1 - \frac{2}{(k+1)\,n}$ 和 $u = 1 - \frac{2k}{n}$，使得 $\ell < t_p < u$。定理 A.4 给出 $\theta_p < 1/19$，从而得到 $\ell > 3/4$。在此情形下 $\mathcal{B}_{n,p} > S_{n,p}$：事实上 $1/(n-1) < r_p$，因此 H_p 从其端点值 $H_p(0) = p$ 严格递减，得到 $H_p(1/(n-1)) < p$。于是 $\mathcal{B}_{n,p} \ge R_{n,p}(1) > 1 - p/n \ge c^{\frac{p}{2}}$。

定理 m A.25（单个区间上的充分标量比较）。端点锚定系数满足

$$E_-(t) > 0, \qquad E_+(t) > 0 \qquad (\ell \le t \le u).$$

令 $E_*(t) = \min\{E_-(t), E_+(t)\}$。若

$$H_p\left(\frac{1-t}{1+t}\right) + \frac{4nE_*(t)}{D_t}(t-\ell)(u-t) \ge \min\left\{H_p\left(\frac{1-\ell}{1+\ell}\right), H_p\left(\frac{1-u}{1+u}\right)\right\} \qquad (\ell \le t \le u), \tag{A.40}$$

则 $C_{n,p} = B_{n,p}$ 对于中心化复多项式而言，无需在此单元之外进行额外的矩—包络估计。

证明。两个系数均严格为正是定理 A.23。先考虑 $0 \le t \le c$ 的任意闭子区间上的无上限三矩问题。其可行测度具有 $m_1 = 0$、$m_2 = c$、$m_3 = -(1-c)t$。内在最大四阶矩为 $e_{\mathrm{full}} = c - (1-c)t^2$，因此其 Jacobi 区间为 $0 \le \gamma \le \gamma_{\mathrm{full}} = (1-c)(1-t^2/c^2)$。在上端点处，两个压缩界迫使 $\delta = t/c$；该测度的支撑集为 $\{-1, t, 1\}$，其取值为 $R_{\mathrm{cont}}(t)$。高斯端点的取值为 $G_G(c, t)$。

紧性给出了一个最大化点。对于 $t \le p/3$ 的高斯唯一性以及对于 $t > p/3$ 所达到的三次接触分类，将其他可能性归结为拉道曲面。定理 A.14 将左曲面归结为其高斯端点或满上限端点。在每个剩余的非退化右 Radau 优化器处，定理 A.16 表明，在固定 γ 的情况下，随着 t 增加，其导数严格为正。此处上限约束并未生效，因此只要所选 t 区间的右端点尚未达到，这就是一个可行局部方向。

在 $[u, c]$ 上应用这一论证。非退化的右 Radau 测度不可能在内部 t 或左端点 u 处取得最大值，因为增大 t 仍处于该区间内。端点 c 是高斯点。

因此，其最大值不超过高斯最大值与 $[u,c]$ 上 R_{cont} 的最大值中的较大者。根据三矩分类，高斯最大值为 $\max\{S_{n,p}, R_{n,p}(1)\} \le \mathrm{B}_{n,p}$；而根据定理 A.1，连续二元值在 $[u,c]$ 上于 $R_{\text{cont}}(u) \le \mathrm{B}_{n,p}$ 处取得其最大值。因此，每个满足 $u \le t \le c$ 的无上限约束三矩测度都已经满足 $G \le \mathrm{B}_{n,p}$。

将推论 A.13 中的高斯／拉道边界分类应用于 $[0,\ell]$。唯一可能的额外右拉道最大值出现在右端点 $t=\ell$。端点不等式 $E_-(\ell)>0$ 和 $E_+(\ell)>0$，结合定理 A.5，使得 Q_0 成为全局上界函数。其矩期望给出该端点处任意测度都满足的逐点界 $G \le R_{\text{cont}}(\ell)$。高斯最大值再次至多为 $\mathcal{B}_{n,p}$。由定理 A.1可知，R_{cont} 在 $[0,\ell]$ 上严格递增。因此，任意满足 $0 \le t \le \ell$ 的未施加上限约束的三矩测度，其目标函数至多为 $\mathcal{B}_{n,p}$。

在 $[\ell,u]$内，使用系数为 $E_*(t)$ 的四次锚点以及精确整数四阶矩界。此单元上的奇偶坐标满足 $1-u_n(t)^2 = n^2(t-\ell)(u-t)$，因此得到的梯度界为$G \le 1 - \frac{H_p\left(\frac{1-t}{1+t}\right)}{n} - \frac{4E_*(t)D_t}{n}(t-\ell)(u-t)$。根据（A.40），该值至多为 $1-\frac{1}{n}\min\{H_p\left(\frac{1-\ell}{1+\ell}\right), H_p\left(\frac{1-u}{1+u}\right)\} = \mathcal{B}_{n,p}$。最后一个等号使用了针对二元最大值的相邻整数约化。这三个区域覆盖所有可行的 t。

在实数极值根列表处，端点梯度值等于临界点/根矩比。因此$C_{n,p} \le \mathcal{B}_{n,p}$。相应的二元多项式取到 $\mathcal{B}_{n,p}$，而角向 Schur–Jensen 约化则表明，复根情形下的最佳常数相同。□

定理 A.25将有限次数锐常数归结为 (A.40)。定理 A.28 和定理 A.37确立了 $1<p<2$的标量比较。

A.20. 三种 完整峰值域上的导数符号。 令 $q=p-1$，$\theta_p = r_p/(1+r_p)$，并定义 ne

$$J(\theta) = H_p\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right), \qquad T(\theta) = \frac{16E_+(1-2\theta)}{(2\theta)^q + (2-2\theta)^q}.$$

定理 A.26. 对于任意 $0<q<1$ 和 $0<\theta\le 2\theta_p$，

$$J''(\theta)>0, \qquad J'''(\theta)<0, \qquad T'(\theta)>0.$$

下面的证明给出一个有限有理多项式证书。证明中不含数值采样，也不使用未经认证的数值来近似分数次幂。

证明。令 $r=\theta/(1-\theta)$，$X=r^q$，并令 $Z=(1-r)^q$。定理 A.4和引理 A.24中的位置估计，连同 $r_p/(1-r_p) < q^2/4$，将所需区域置于以下三个区域的并集中：

$$\begin{array}{c|c} 0<q\le 2/5 & 0<r\le q^2/2 \\ 2/5\le q\le 3/5 & 0<r\le 1/12 \\ 3/5\le q<1 & 0<r\le 2/17. \end{array}$$

事实上，$r \le 2r_p/(1-r_p)$，而定理 A.23 的证明给出了 r的每个上界。在三个范围内$r\le 2/17$，因此 $\log(1/r) > 2$。

暂时将 r、q、X、Z视为相互独立的不定元，并令 $\mathcal{H} = (1+r)\{1+rX-(1-r)Z\}\cancel{r(1+X)}$，$\cancel{\mathcal{T} = (1+r^2)()\{Xr^3+Zqr^2+Zqr+Zr^3+Zr+2Z+qr^2+qr-r-2\}}$。在 $X=r^q$, $Z=(1-r)^q$ 处，有 $\mathcal{H} = J$以及 $\mathcal{T} = T$。关于 θ 的微分为

$$\mathcal{D} = (1+r)^2\left(\partial_r + \frac{qX}{r}\partial_X - \frac{qZ}{1-r}\partial_Z\right). \tag{A.41}$$

定义三个多项式分子如下：

$$N_2 = r^3(1+X)^3(r-1)\mathcal{D}^2\mathcal{H}, \qquad N_3 = r^4(1+X)^4(r-1)^2\mathcal{D}^3\mathcal{H}, \qquad N_T = r^4(1+X)^2(r-1)\mathcal{D}\mathcal{T}.$$

每个分子都是多项式，并且关于 Z 是仿射的。所需的三个符号条件都等价于 $N_i<0$。

我们给出关于 N_2、N_3、N_T 符号的精确多项式界。对于 $j\ge 1$，令 $a_j = q(1-q)(2-q)\cdots(j-1-q)/j!$ 其中 $a_1=q$，并令 $Z_6 = 1-\sum_{j=1}^6 a_j r^j$。二项式级数严格给出 $Z<Z_6$。置$\alpha = 1-q$。指数中的初等指数下界和凸弦界给出$r(1+2\alpha+2\alpha^2) < X < r+\alpha(1-r)$。$X$ 的上界减去下界为 $\alpha(1-3r-2\alpha r) > 0$。因此，我们可以写成

$$X = r(1+2\alpha+2\alpha^2) + \alpha(1-3r-2\alpha r)w, \qquad 0<w<1. \tag{A.42}$$

第一个证书验证了 $K_i := \partial_Z N_i (1+r)^{\nu_i} > 0$，其中 $(\nu_2, \nu_3, \nu_T) = (3, 4, 4)$，定义在更大的盒集 $0 \le q \le 1$、$0 \le r \le 2/17$、$0 \le X \le 1$ 上。在 $q = u$、$r = 2v/17$、$X = w$ 之后，每个 K_i 在其张量积伯恩斯坦基中都具有严格正系数。它们的次数向量和系数总数为

$$\begin{array}{c|c|c} K_2 & (2,4,2) & 45 \\ K_3 & (3,6,3) & 112 \\ K_T & (2,4,1) & 30. \end{array}$$

因此，将 Z 替换为 Z_6 会严格增大每个分子。

对于第二个证书，将 A.42代入 X，并定义 $P_i(q, r, w) = -N_i(r, q, X, Z_6)\, r^{e_i}(1-q)$，其中 $(e_2, e_3, e_T) = (1, 1, 3)$。所示除法是精确的：所有 P_i 都是具有有理系数的多项式。在中指数区域和高指数区域上，分别使用

$$(q,r) = \left(\frac{2}{5} + \frac{u}{5}, \frac{v}{12}\right), \qquad (q,r) = \left(\frac{3}{5} + \frac{2u}{5}, \frac{2v}{17}\right).$$

所得多项式在 $0 \le u, v, w \le 1$ 上的伯恩斯坦基中的每个系数都非负。在这两个区域中，次数向量分别为 $\deg P_2 = (11, 14, 3)$，$\deg P_3 = (14, 18, 4)$，$\deg P_T = (9, 12, 2)$。对于低指数区域，代入 $r = q^2 v/2$。每个所得多项式都可被 q^2整除。除以这个正因子并代入 $q = 2u/5$后，所有伯恩斯坦系数再次均为非负。它们的次数向量分别为 $(35, 14, 3)$、$(45, 18, 4)$ 和 $(29, 12, 2)$。

为完整起见，仅凭这些紧凑公式即可复现精确证书。若一个多重次数为 (d_1, d_2, d_3) 的多项式具有幂系数 a_{ijk}，则其在 (h_1, h_2, h_3) 处的伯恩斯坦系数为$\sum_{i \le h_1,\, j \le h_2,\, k \le h_3} a_{ijk} \binom{h_1}{i} \binom{d_1}{i} \binom{h_2}{j} \binom{d_2}{j} \binom{h_3}{k} \binom{d_3}{k}$。随附的校验器 turn3_norm_peak_derivative_certificate.py 根据 (A.41) 构造分子，执行每一步代入和精确除法，并使用有理数运算验证每个系数。它还检查第一个证书是否具有严格正系数。

第二个证书证明了 $N_i(r, q, X, Z_6) \le 0$。第一个证书以及 $Z < Z_6$ 从而给出$N_i(r, q, X, Z) < 0$ 对于实际幂。定义中三个正或负分母的符号如今给出 $J'' > 0$、$J''' < 0$ 和 $T' > 0$，正如所断言的那样。□

A.21. 右锚点处于激活状态的一个可认证区域。

引理 A.27. 若 $3/4 \le q < 1$ 且 $0 < r \le 1/14$，则 $E_-(t) > E_+(t)$，其中 $t = (1-r)/(1+r)$。特别地，在次数为 $n \ge 30$ 的每个首个整数单元中，右端点在整个指数区间内决定锚点系数。

证明。设 $\alpha = 1 - q$、$X = r^q$ 和 $Z = (1-r)^q$。$E_- - E_+$ 的符号为 $N = 2 - qr + r^2(q-2r)X - (2 + qr + qr^2 + 2r^3)Z$的符号。设 $Z = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j r^j$，其中 $a_j > 0$ 且 $a_1 = q$。精确乘法得到 $N = r^2(q-2r) X - B r^3 + C_4 r^4 + \sum_{j=5}^{\infty} C_j r^j$，其中 $B = (3-q)(2-q)(q+2)\,6$，$C_4 = 2q + \alpha q (6+5q-q^2)\,12$，以及$C_j > 0$。因此 $N > \alpha r^3 G_q(r)$，其中

$$G_q(r) = (q-2r)\frac{r^{-\alpha} - 1}{\alpha} - \frac{12 + 2q - q^2}{6} + r\left\{\frac{q(6 + 5q - q^2)}{12} - 2\right\}.$$

对于 $q \ge 2r$，这个函数关于 r严格递减：其导数是 $-2(r^{-\alpha} - 1)/\alpha$, $-(q-2r) r^{-\alpha-1}$之和，并且最后一项严格为负。因此，只需令 $R = 1/14$。

令 $L = \log 14$。用 $\alpha \in [0, 1/4]$表示时，该函数为

$$G_R(\alpha) = \left(\frac{6}{7} - \alpha\right)\frac{e^{\alpha L} - 1}{\alpha} - \frac{13}{6} + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{-14 - 13\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3}{168}.$$

该函数严格凹。事实上，其次数为 $j \ge 2$ 的泰勒系数，除去显式贡献 $\frac{5}{28}\mathbf{1}_{j=2} + \frac{1}{168}\mathbf{1}_{j=3}$ 外，等于 $\frac{L^j}{j!}\left\{\frac{6L}{7}\frac{7}{j+1}() - 1\right\}$。初等界 $5/2 < L < 3$使所有这些系数都严格为负，包括次数为二和三的情形。在零点处，$G_R(0) = \frac{6}{7}\log 14 - \frac{9}{4} > 0$。为完整起见，反双曲正切级数给出 $\log 14 = 3\log 2 + \log(7/4)$ $> 56/27 + 6/11 + 18/1331 > 21/8$。在另一端点处，$14^{1/4} > 193/100$ 给出 $G_R(1/4) > \frac{43}{89600} > 0$。在后一项中取四次方后，两种比较均为有理比较。严格凹性证明了整个区间内的正性。因此 $N > 0$ 和$E_- > E_+$。当 $n \ge 30$ 时，首单元半径为 $r \le 2/(n-2) \le 1/14$。□

A.22. **在整数二进制包络以下时，左锚点是不必要的。**整数假设明确地用于处理指数接近二的第一单元。

定理 A。 **28.** 令 $n \ge 4$ 为整数，$0 < q = p - 1 < 1$，并设 $n\theta_p \notin \mathbb{Z}$ 和 $k = \lfloor n\theta_p \rfloor \ge 1$。*P* *ut*

$$r_0 = \frac{k}{n-k}, \qquad r_1 = \frac{k+1}{n-k-1}, \qquad r = \frac{1-t}{1+t} \in [r_0, r_1].$$

如果 $E_-(t) \le E_+(t)$，则

$$H_p(r) > H_p(r_0).$$

因此，在峰值单元中满足 $H_p(r) \le \min\{H_p(r_0)\ H_p(r_1)\}$ 的部分上，右锚点严格更小：$0 < E_+(t) < E_-(t)$。

证明。在整个证明中记 $H = H_p$，$\alpha = 1 - q$，$X = r^q$，以及 $Z = (1-r)^q$。位置估计（A.2）、定理 A.4和引理 A.24 以及峰值单元的定义给出

$$r_0 < r_p < r_1, \qquad r \le \frac{2r_p}{1-r_p} < \min\left\{\frac{q^2}{2}, \frac{2}{17}\right\}. \tag{A.43}$$

特别地，$q > 2r$。根据精确端点公式，$E_- - E_+$ 的符号就是 $N_q(r) = 2 - qr + r^2(q-2r)r^q - (2 + qr + qr^2 + 2r^3)(1-r)^q$ 的符号。

严格递减的归一化切换函数。记作 $(1-r)^q = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j r^j$，其中 $a_j > 0$ 和$a_1 = q$。相乘得到 $\frac{N_q(r)}{r^3} = (q-2r)r^{-\alpha} - B + C_4 r + \sum_{j=5}^{\infty} C_j r^{j-3}$，其中 $B = \frac{(3-q)(2-q)(q+2)}{6}$，$C_4 = 2q + \frac{\alpha q(6+5q-q^2)}{12}$，以及 $C_j = 2a_j + qa_{j-1} + qa_{j-2} + 2a_{j-3} > 0\,(j \ge 5)$。对于 $j \ge 2$，乘积公式给出 $a_j \le \alpha/j$。因此，对于 $j \ge 5$，有 $C_j < 2\alpha$，并且 $C_4 \le 2q + 5\alpha/6$。对收敛级数求导，并利用 $r^{-\alpha} \ge 1$，得到

$$\left(\frac{N_q(r)}{r^3}\right)' \le \alpha\left\{-\frac{q}{r} + \frac{5}{6} + \frac{2r(2-r)}{(1-r)^2}\right\} < -\frac{269}{450}\alpha < 0 \qquad \left(q > 2r,\ 0 < r \le \frac{2}{17}\right).$$

这里 $2r(2-r)/(1-r)^2 \le 128/225$ 对于 $0 < r \le 2/17$。因此，只要固定半径 R 位于此区域内且$N_q(R) > 0$，条件 $N_q(r) \le 0$ 就会推出 $r > R$。

较小的指数 ：峰值单元上不存在分支切换。保留 C_4 项可得 $N_q(r) > \alpha r^3 G_q(r)$，其中 e

$$G_q(r) = (q-2r)\frac{r^{-\alpha} - 1}{\alpha} - \frac{12 + 2q - q^2}{6} + r\left\{\frac{q(6+5q-q^2)}{12} - 2\right\}.$$

当 $q > 2r$时，此函数关于 r严格递减。对于 $q \le 3/10$，令 $R = q^2/2$。则 $G_q(R) > qR^{-\alpha} - q - \frac{13}{6} - q^2$。函数 $q(q^2/2)^{q-1}$ 在 $(0, 3/10]$ 上严格递减，因为其对数导数为 $\log(q^2/2) + 2 - 1/q < 0$。此外，$3\,10\,(200/9)^{\frac{7}{10}} > \frac{13}{5}$，这就是有理不等式 $(200/9)^7 \ge (26/3)^{10}$。由此可得 $G_q(R) > 13/300 > 0$。根据 (A.43)，在此范围内，整个峰值单元上均有 $N_q(r) > 0$，因此定理的前提不可能成立。

五个中间指数带。对于下表中的每一行，所标示的两个严格不等式在其闭 q 区间内始终成立：

q 区间	R	经认证的不等式
$[3/10, 2/5]$	$7/200$	$N_q(R) > 0,\quad H(R) > H(R/(2+R))$
$[2/5, 1/2]$	$9/200$	$N_q(R) > 0,\quad H(R) > H(R/(2+R))$
$[1/2, 3/5]$	$11/200$	$N_q(R) > 0,\quad H(R) > H(R/(2+R))$
$[3/5, 7/10]$	$3/50$	$N_q(R) > 0,\quad H(R) > H(R/(2+R))$
$[7/10, 4/5]$	$67/1000$	$N_q(R) > 0,\quad H(R) > H(R/(2+R))$。

(A.44)

关于（A.44）的有理数验证，请参见本证明中的证书。假设 $N_q(r) \le 0$。归一化单调性给出 $r > R$。整数单元几何给出 $r_0 \ge \frac{r}{2+r}$。事实上，在变量 $\theta = r/(1+r)$ 中，下方的格点为 k/n，且 $\theta \le (k+1)/n$，因此 $(k/n)/\theta \ge 1/2$。令 $s(r) = r/(2+r)$。于是 $s(R) < s(r) \le r_0 < r_p$。由于 $H(R) > H(s(R))$，严格单峰性迫使 $R > r_p$。定理 A.1 中的单调性给出$H(r) > H(R) > H(s(R)) \ge H(s(r)) \ge H(r_0)$。

区间 $4/5 \le q < 1$。令 $R = 5/69$。在整个区间内，以下三个经过认证的不等式成立：

$$N_q(R) > 0, \qquad H(R) > H(1/28), \qquad H(R) > H\left(\frac{2R}{3+R}\right). \tag{A.45}$$

再次 $N_q(r) \le 0$ 迫使 $r > R$。若 $k \ge 2$，则格点几何改进为 $r_0 \ge \frac{2r}{3+r}$，因为 $k/(k+1) \ge 2/3$。使用（A.45）中的最后一个不等式，并将定理A.1 应用于 $s(r) = 2r/(3+r)$。

还需处理 $k=1$。若 $n\ge 30$，则 $r\le 2/(n-2)\le 1/14$，而引理 A.27 给出 $N_q(r)>0$，矛盾。因此 $n\le 29$，且 $r_0=1/(n-1)\ge 1/28$。由于 $r_0<r_p$，（A.45）中的中间不等式意味着 $R>r_p$，并得到 $H(r)>H(R)>H(1/28)\ge H(r_0)$。这穷尽了所有情形，并证明了该定理。□

精确的有限证书。校验器仅使用整数和有理数运算。其源代码见配套档案：

turn3_source_anchor_branch_rational_certificate.py.

它验证 全部十三个不等式，分别见（A.44）和（A.45），并覆盖其整个闭参数区间 .

对固定的有理数 R，记 $q=1-\alpha$ 和 $L_x=\log(1/x)$。则

$$N_{1-\alpha}(R)=2-R+\alpha R+R^3(1-2R-\alpha)e^{\alpha L_R}-(1-R)\{2+R+R^2+2R^3-\alpha(R+R^2)\}e^{\alpha L_{1-R}}$$

比较 $H(R)>H(s)$ 时，两边同乘正分母，并使用

$$\mathcal{A}_x(\alpha)=(1+x)\{1+x^2e^{\alpha L_x}-(1-x)^2e^{\alpha L_{1-x}}\},\qquad \mathcal{B}_x(\alpha)=x+x^2e^{\alpha L_x}.$$

所需分子为 $\mathcal{A}_R\mathcal{B}_s-\mathcal{A}_s\mathcal{B}_R$。因此，每个分子都是一个有限指数集 Λ 上的有限和 $\sum_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda+b_\lambda\alpha)e^{\lambda\alpha}$，其中含有有理数 a,b 以及非负的对数 λ。其在 $\alpha=0$ 处的值根据一个精确的有理恒等式为零，脚本会对此进行检查。脚本除去这个零点，并保留分子的泰勒次数 1 至 40。

每个对数都被化为 $[1,2]$, 中的一个有理数自变量加上 log 2 的整数倍。对于$z=(x-1)/(x+1)\in[0,1/3]$，它使用 $\log x=2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{2j+1}}{2j+1}$ 的前 55 项，其余项的上界为$2z^{111}/(111(1-z^2))$。所有区间运算都在有理数网格 $10^{-70}\mathbb{Z}$ 上向外舍入。

设 $B>0$ 为 α 区间的上端点。对于一个加项 $(a+b\alpha)e^{\lambda\alpha}$，除以 α 后，泰勒余项的绝对值被 $3^8\left\{\frac{|a|(\lambda B)^{41}}{41!}+\frac{|b|}{40!}(\lambda B)^{40}\right\}$所界定。脚本检查 $0\le\lambda B<8$，并使用 $e^{\lambda B}<e^8<3^8$。最后，它将所包含的次数为 39 的泰勒多项式转换为完整指定区间上的伯恩斯坦基。在十三种情形中，全部四十个伯恩斯坦系数下界都超过总余项上界。因此，每个归一化分子都严格为正。有理数区间计算无需细分即可覆盖十三个区间中的每一个。

推论 A.29。 在整数峰值单元上，只需用 E_+ 代替 $\min(E_-,E_+)$证明端点比较。事实上，在 $E_-\le E_+$ 的任何位置，未修正的值 $H_p(r)$ 已经超过左侧格点端点，而非负修正项只会使其增大。因此，右锚点比较意味着与两个锚点系数实际最小值进行的所需比较。

A.23. **加权曲率衰减在完整峰值域上**。保留函数 $J(\theta)=H_p(\theta/(1-\theta))$ 和 $T(\theta)=(1+2\theta)/D(1-2\theta)$ 来自定理 A.26。

定理 A.30。 对于每个 $1<p<2$ 和 $0<\theta\le 2\theta_p$,

$$\theta J'''(\theta)+\frac{1}{2}J''(\theta)<0.$$

等价地， $\theta^{\frac{1}{2}}J''(\theta)$ 在此区间内严格递减。

证明。 使用定理 *A.26*中的形式有理函数和微分算子 D。分子

$$N_{1/2}=2r^3(1+X)^4(r-1)^2\left\{\frac{r}{1+r}\mathcal{D}^3\mathcal{H}+\frac{1}{2}\mathcal{D}^2\mathcal{H}\right\}$$

是关于 Z的仿射多项式。只需证明 $N_{1/2}<0$。定理 Z_6 A.26证明中定义的六次二项式上界 Z也给出了 $N_{1/2}$ 的上界。分子 $1+r$) 的精确伯恩斯坦证书验证了 $-3\partial_Z N_{1/2}$ 的所有系数在 $0\le q\le 1,\ 0\le r\le 2/17,\ 0\le X\le 1$上均严格为正。其次数向量为 (3,6,3)，共有 112 个系数。还需证明 $N_{1/2}(Z_6)\le 0$。

对于 $q\le 9/10$，使用定理 A.26 证明中建立的幂函数包围： $X=r(1+2\alpha+2\alpha^2)+\alpha(1-3r-2\alpha r)w$，其中 $\alpha=1-q$和 $0\le w\le 1$。多项式 $-N_{1/2}(Z_6)/[r(1-q)]$ 在 (q,r) 平面上的每个矩形 $[2/5,3/5]\times[0,1/12]$ 和 $[3/5,9/10]\times[0,2/17]$ 内，其伯恩斯坦系数均非负。在任一矩形中，其次数向量为 (14, 17, 4)。对于 $0<q\le 2/5$, 代入 $r=q^2v/2$，并在映射 $q=2u/5$之前除以精确因子 q^2。所得多项式的所有伯恩斯坦系数也均非负；其次数向量为 (43, 17, 4)。

只有最后一个指数区间需要在 X 上采用更紧的上界。对于 $9/10\le q<1$，$\alpha=1-q$ 中的凸性给出 $r^q-r\le 10\alpha(r^{\frac{9}{10}}-r)<\frac{3}{10}\alpha$，适用于 $0<r\le 2/17$。函数 $r^{\frac{9}{10}}-r$ 在此区间上单调递增。在 $R=2/17$ 处有 $R^{\frac{9}{10}}<R+\frac{3}{100}=\frac{251}{1700}$，因为 $R^9<\left(\frac{251}{1700}\right)^{10}$。单调性由下式推出

$R<(9/10)^{10}$。因此，将幂区间替换为 $X=r(1+2\alpha+2\alpha^2)+\alpha\left(\frac{3}{10}-2r-2\alpha r\right)w$。其长度对于 $r\le 2/17$ 和 $\alpha\le 1/10$ 为正。代入 $q=9/10+u/10$ 和 $r=2v/17$ 后，多项式 $-N_{1/2}(Z_6)/[r(1-q)]$ 再次只有非负的伯恩斯坦系数，其次数向量为 (14，17，4)。

独立检查器 `turn3_norm_peak_weighted_decay_certificate.py` 根据 $N_{1/2}$ （A.41）构造，检查每一次精确除法，并使用有理数运算验证全部四个伯恩斯坦证书。它还验证严格为正的 Z-系数，以及用于改进区间的两个有理幂比较。因此， $N_{1/2}(Z_6)\le 0$，而严格的 $Z<Z_6$ 和 $\partial_Z N_{1/2}>0$ 给出 $N_{1/2}(Z)$。 <0 这就证明了该定理。□

推论 **A.31 推论** （反向标量引理的一个局部充分条件）。固定 $a\in[\theta_p/2,\theta_p]$。$I$ f

$$aJ''(a)\le\frac{9}{4}T(a),$$

then

$$J(2a)-J(a)-aJ'(a)<aT(a).$$

证明。加权衰减定理给出 $J''(s)\le J''(a)(a/s)^{\frac{1}{2}}$ 对 $a\le s\le 2a$成立。因此，积分泰勒公式得到

$$J(2a)-J(a)-aJ'(a)=\int_a^{2a}(2a-s)J''(s)\,ds\le a^2J''(a)\frac{8\sqrt{2}-10}{3}\le aT(a)\frac{3}{4}(8\sqrt{2}-10)<aT(a).$$

最后一个严格符号是不等式 $12\sqrt{2}<17$。局部曲率条件通过引理A.34 和定理A.35，以及小q 情形中使用的下位置定理，对每个这样的a 得以证明。□

A.24. **小指数下峰值位置的一个显式下界。**

引理 A.32. 对于 $0<q=p-1\le 1/20$，连续二元极小值点满足

$$r_p>\frac{2q^2}{8+9q+23q^2}>\frac{q^2}{4+5q+10q^2}.$$

证明。令 $D=4+9q/2+23q^2/2$、 $r=q^2/D\log(1/r)$、以及 $x=qL$。单峰性证明中的严格凹导数分子具有上界 $K(r)<-q^2+r\{c_2e^x+b_2+e^{-x}\}$，其中$c_2=1+\frac{q}{(1-q)_2}$ 以及 $b_2=2+\frac{q}{(1-q)_2^{\,2}}$。只需证明大括号内的量小于 D。

由于 $r\le 1/1600$，有 $L>4$。此外， $L'=\frac{D'}{D}-\frac{2}{q}>-\frac{2}{q}$。因此， qL 和 qL^2 在所示区间内关于 q 均严格递增：它们的导数分别大于 $L-2$和 $L(L-4)$。在 $q=1/20$处，有 $L=\log(3403/2)<\log 1710<15/2$。于是， $0<x<\frac{3}{8}$和 $qL^2<\frac{45}{16}$。初等界 $\log(3/2)>2/5>3/8$ 给出 $e^x<3/2$ 和 $\cosh x<9/8$。对于双曲余弦界，不等式 $(2j)!\ge 2^j$ 给出 $\cosh x\le(1-x^2/2)^{-1}\le 128/119<9/8$。逐项比较幂级数可得 $2(\cosh x-1)\le x^2\cosh x$。因此

$$c_2e^x+b_2+e^{-x}\le 4+2(\cosh x-1)+\frac{q}{2}e^x+\frac{q}{2}<4+q\left(\frac{45}{16}\frac{9}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=4+\frac{565}{128}q<4+\frac{9}{2}q<D.$$

因此， $K(r)<0$。由于 K 的符号与 H_p' 的符号相同，且 r_p 是其唯一零点，第一个下界由此得出。第二个下界则由 $4+9q/2+23q^2/2<4+5q+10q^2$ 在 $q<1/3$ 时得出。

反双曲正切级数的首个正项给出 $\log(3/2)>2/5$。为验证 $\log 1710<15/2$，指数级数的前十三项给出 $e^{\frac{15}{2}}>\sum_{j=0}^{12}\frac{(15/2)^j}{j!}=\frac{559014132443}{322961408}>1710$。□

A.25. **每个指数下的定量下界位置。**

定理 A.33. 对于每个 $0<q=p-1<1$，唯一的二元极小值点满足

$$r_p>\frac{2q^2}{8+9q+23q^2}.$$

因此，如果 $\theta_p/2\le a\le\theta_p$和 $r=a/(1-a)$，那么

$$\frac{q^2}{8+9q+24q^2}<r\le r_p.$$

证明。引理 A.32 证明了 $0 < q \le 1/20$时的第一个断言。对于剩余的紧区间（包括其极限端点 $q = 1$），我们给出一个精确的有限证书。令 $d(q) = 4 + \frac{9}{2}q + \frac{23}{2}q^2$和 $\rho(q) = \frac{q^2}{d(q)}$。只需证明 $H'_{1+q}(\rho(q)) < 0$，因为该导数仅在 r_p处发生一次符号变化。

对于 $1/20 \le q \le 1/2$，唯一最小值证明中的二项式展开给出 $K(\rho) < -q^2 + \rho\{c_2 e^x + b_2 + e^{-x}\}$ $x = q\log(1/\rho)$，其中 $c_2 = 1 + q(1-q)/2$， $b_2 = 2 + q(1-q)^2/2$。精确的区间证书证明了 $c_2 e^x + b_2 + e^{-x} - d(q) < 0$ 对于 $1/20 \le q \le 1/2$。因此 $K(\rho) < 0$，这就是所需的导数符号。

对于 $1/2 \le q < 1$，令 $\alpha = 1 - q$，$A = \log(1/(1-\rho))$，以及 $B = \log(1/\rho)$。精确的分子$\mathcal{N} = (\rho + \rho^{1+q})^2 H'_{1+q}(\rho)$为

$$\begin{aligned}\mathcal{N} = {} & (1-\rho)\{1 + \rho + 2\rho^2 - \alpha(\rho + \rho^2)\}e^{\alpha A} \\ & + (1-\rho)\rho\{2 + \rho + \rho^2 - \alpha(1 + \rho)\}e^{\alpha(A+B)} \\ & - 1 + \rho(1-\rho^2)(-2 + \alpha)e^{\alpha B} + \rho^4 e^{2\alpha B}.\end{aligned}$$

α 中的常数项对每个 ρ恒等为零。为避免任何端点除法，将四个指数项写成$(a_i + b_i\alpha)e^{\alpha\lambda_i}$，并使用恒等式

$$\frac{\mathcal{N}}{\alpha} = \sum_{i=1}^{4} \left\{ a_i\lambda_i \operatorname{exprel}(\alpha\lambda_i) + b_i e^{\alpha\lambda_i} \right\}, \qquad \operatorname{exprel}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(j+1)!}.$$

右侧可连续延拓至 $q = 1$。证书证明其在 $1/2 \le q \le 1$上严格为负。区间界已在 `turn3_root_lower_peak_certificate.py`中得到验证。所有区间的端点均位于有理数网格 $10^{-70}\mathbb{Z}$上，并且每次运算都使用整数运算向外舍入。为界定对数，将其自变量规约至 $[1, 2]$，并使用

$$2\sum_{j=0}^{54} \frac{z^{2j+1}}{2j+1} < \log\frac{1+z}{1-z} < 2\sum_{j=0}^{54} \frac{z^{2j+1}}{2j+1} + \frac{2z^{111}}{111(1-z^2)}.$$

$z = 0$ 处的不等式按非严格意义解释。 e^x 和 $\operatorname{exprel}(x)$ 的级数均保留至60次。对于 $0 \le x \le M < 8$，函数值尾项至多为 $3^8 \frac{M^{61}}{61!}$ 和 $3^8 \frac{M^{61}}{62!}$，而导数尾项分别至多为$3^8 \frac{M^{60}}{60!}$和 $3^8 \frac{M^{60}}{61!}$；这是通过对正泰勒级数尾项和 $e^M < 3^8$进行逐项估计得到的。

对于每个有理数区间 $[a, b]$，程序通过对相关指数范围内的显式表达式 $H'_{1+q}(\rho(q))$ 进行自动微分，在其中点处包围目标函数，并在整个区间上包围其导数。仅当 $\sup F\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2}\sup_{[a,b]}|F'| < 0$ 时，程序才接受该区间。否则，程序将该区间二分。中值定理保证了中点检验在每个被接受的区间内处处有效。区间 $1/20 \le q \le 1/2$ 由 25 个子区间认证，而 $1/2 \le q \le 1$ 由 240 个子区间认证。二分深度的最大值分别为 5 和 9。每个被接受的区间都具有严格裕量。因此，两个初始区间均被完全覆盖，并且对于其中的每个实指数，所要求的导数符号都成立。

这证明了三个指数范围内的第一条断言。对于其推论，$a \mapsto a/(1-a)$ 的单调性给出 $r \ge \frac{r_p}{2+r_p} > \frac{q^2}{8+9q+24q^2}$，而 $a \le \theta_p$ 给出 $r \le r_p$。 □

A.26. **小指数的局部曲率比。**

引理 A.34。 设 $0 < q = p - 1 \le 1/20$，并假设

$$\frac{q^2}{8 + 9q + 24q^2} \le r \le r_p, \qquad \theta = \frac{r}{1+r}.$$

对于 $J(\theta) = H_p(r)$ 以及 $T(\theta) = 16E_+(1-2\theta)/D(1-2\theta)$，有

$$\theta J''(\theta) < \frac{9}{4}T(\theta).$$

证明。令 $X = r^q$、 $Z = (1-r)^q$，以及 $D_0 = 8 + 9q + 24q^2$。方程 (A.2) 给出 $r \le r_p < \frac{q^2}{4} \le \frac{1}{1600}$。我们首先注意到 $X > 1/2$。对于 $R = q^2/D_0$，函数 $q\log(D_0/q^2)$ 在 $(0, 1/20]$上严格递增，因为其导数为 $\log(D_0/q^2) + qD'_0/D_0 - 2 > 0$。其端点值为 $\log 3404/20 < \log 4096/20 < \log 2$。因此 $X \ge R^q > 1/2$。

曲率的上界。$K(r) = r^{1-q}(1+r^q)^2 H_p'(r)$ 的严格凹性，结合 $K(0+) = -q^2$，给出$H_p''(r) - {}^{q}(1-X)\,{}_{r}(1+X)\,H_p'(r) \le {}^{q^2 r^{q-2}}\!\!\!

可复现的有理区间证书。所有区间端点均位于有理数网格 $10^{-60}\mathbb{Z}$ 上。加法、乘法、倒数、整数幂和除法均使用整数向下取整和向上取整运算向外舍入。任何浮点值都不会参与符号判定。

对于（A.46）中的三个区域，分别使用参数化 $r = L(q) + (U(q) - L(q))v$，其中 $0 \le v \le 1$。两个有理函数均采用向外舍入区间算术计算。正有理端点的对数被化为 $[1, 2]$, 中的自变量，并加上 log 2 的整数倍。对于 $z = (x-1)/(x+1) \in [0, 1/3]$, $\log x = 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{2j+1}$ 的前 80 项余项介于 0 和 $2z^{161}/(161(1-z^2))$ 之间。随后利用单调性，在每个区间盒上界定 $\Lambda = \log(1/r)$。

设 $x = (1-q)\Lambda \ge 0$。使用 $V = \Lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j+1()!}$ 对正则化幂进行界定。校验器保留第 0 项至第 49 项。若 m 是 x 的区间上界的整数向上取整，则剩余的正尾项至多为 $\frac{x^{50}}{51}$! 3^m，因为 $e^x \le 3^m$ （零的情形直接解释）。该界定在 $q = 1$ 处仍保持正则。

整系数多项式 $\mathcal{R}$ 通过嵌套霍纳法则进行计算。仅当其区间下端点严格为正时，单元才会被接受。否则，校验器会按照固定的确定性规则对两个参数区间之一进行二分，并继续执行。它从三个完整的有理矩形开始，在 8309 次计算后接受了 4156 个单元；所有被接受的下界均超过 200。最大深度保护从未触发。每次二分都会将其父矩形精确划分，因此被接受的单元覆盖整个所需参数域。

A.28. **后向余项与完整的有限次数锐常数。** 定理 A.26中的导数符号、定理 A.30中的加权曲率估计，以及引理 A.34和定理A.35 中的曲率界，共同证明了整数舍入所需的标量不等式。

令 $q = p - 1$、 $\theta_p = r_p/(1 + r_p)$，以及

$$J(\theta) = H_p\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right), \qquad T(\theta) = \frac{16E_+(1-2\theta)}{D(1-2\theta)}.$$

峰值单元上的右锚点弦比较为

$$J(\theta) + nT(\theta)(\theta - a)(b - \theta) \ge \frac{b-\theta}{b-a}J(a) + \frac{\theta-a}{b-a}J(b), \quad a = \frac{k}{n}, \quad b = \frac{k+1}{n}, \tag{A.48}$$

其中 $k \ge 1$ 和 $a \le \theta_p \le b$。

引理 A.36 （后向余项充分判据）。 假设

$$J(2a) - J(a) - aJ'(a) \le aT(a) \quad \textit{for every } a \in [\theta_p/2, \theta_p]. \tag{A.49}$$

则（ A.48） 对每个峰值单元均成立，其中每个实数 $n > 0$ 和整数 $k \ge 1$ 使得该单元存在 *ts.*

证明。定理 A.26 在下文所需的整个区间内给出 $J'' > 0$、 $J''' < 0$ 和 $T' > 0$ 。记$h = b - a = 1/n$。由于 $a = kh$ 且 $k \ge 1$，可得 $h \le a$。峰值条件给出 $a \le \theta_p \le a + h \le 2a$，因此 $\theta_p/2 \le a \le \theta_p$。线性插值的误差为 $\frac{b-\theta}{h}J$ （a） $+\frac{\theta-a}{h}J$ （b） $-J$ （θ） $= (\theta - a)$ （$b-\theta$） $J[a, \theta, b]$。由于$J''' \le 0$，二阶差商关于每个节点均非增。（这可直接由差商的单纯形积分公式推出，包括节点重合的情形。）因此 $J[a, \theta, a + h] \le J[a, a, a + h]$。此外， $hJ[a, a, a + h] = {}^{J}$ （$a+h$） $-J$ （a $-hJ'$ a $= \int_0^h \left(1 - \frac{s}{h}\right) J''$） （） （$a + s$） ds。其关于 h 的导数等于 $h^{-2}\int_0^h sJ''$ （$a + s$） $ds \ge 0$。因此 $hJ[a, \theta, a + h] \le aJ[a, a, 2a] = {}^{J}$ （$2a$） $-J$ （a） $-aJ'$ （a） $_a$ $\le T$ （a） $\le T$ （θ）。由于 $n = 1/h$，这正是（A.48）。□

定理 **引理 A.37** （严格后向余项不等式）。 对于 $0 < q < 1$ 以及 $a \in [\theta_p/2, \theta$ $_p]$,

$$J(2a) - J(a) - aJ'(a) < aT(a).$$

证明。对于 $q \ge 1/20$, 定理 A.35 给出 $aJ''(a) < 9T(a)/4$。对于 $q \le 1/20$, 写作 $r = a/(1-a)$。定理 A.33 给出 $r \ge \frac{r_p}{2+r_p} \geqslant \frac{q^2}{8+9q+24q^2}$ 以及 $r \le r_p$。因此，引理 A.34 给出 $aJ''(a) < 9T(a)/4$ 对于 $0 < q \le 1/20$。加权衰减定理及其皮亚诺积分推论——推论 A.31——现在推出所断言的严格后向余项不等式。□

推论 A **.38 (完整有限次数最佳常数).** 完整有限次数最佳常数公式为

$$C_{n,p} = \max\{S_{n,p}, \mathcal{B}_{n,p}\} \qquad (n \ge 4,\ 1 < p < 2).$$

证明。 定理 A.37 对每个指数都给出（A.49）。 $n\theta_p \le 1$ 和 $n\theta_p \in \mathbb{Z}$ 的情形已经证明。对于非整数的 $n\theta_p > 1$，引理 A.36 给出带有 E_+的弦界，这比端点最小值比较更强。定理 A.28 表明，在 $E_- \le E_+$ 成立的任何位置，未经修正的亏量已经超过重数为 k时的格点值。于是， E_- 和 E_+ 在该单元上的正性给出带有 $\min(E_-, E_+)$ 的界。定理 A.25 给出上界 $\mathcal{B}_{n,p}$ ，适用于该单元及其补集。稀疏例子和二元例子达到所示最大值。□

不等式（A.49）与次数和整数单元指标无关。在原半径坐标中，它写作

$$H_p\!\left(\frac{2r}{1-r}\right) - H_p(r) - r(1+r)H_p'(r) \le \frac{r}{1+r}\,\mathcal{T}_q(r), \qquad \frac{r_p}{2+r_p} \le r \le r_p,$$

其中

$$\mathcal{T}_q(r) = \frac{(1+r)^2}{r^3(1+r^q)}\big[r^{q+3} + (1-r)^q\{r^3 + qr^2 + (q+1)r + 2\} + qr^2 + qr - r - 2\big].$$

这些恒等式是显式 E_+ 公式的代数推论。

A.29. **每个有限次数下的完整等号分类。**

定理 A.39 （所有等号构型）。 令 $n \ge 4$、 $1 < p < 2$，并令 $\Lambda_{n,\,p} = \text{最大值}\{S_{n,\,p}, B_{n,\,p}\} = C_{n,\,p}$。除全零根列表外，等号在

$$\sum_{j=1}^{n-1} |w_j|^p \le \Lambda_{n,p} \sum_{i=1}^{n} |z_i|^p, \qquad \sum_{i=1}^{n} z_i = 0,$$

以下根列表中恰好成立（允许置换及乘以一个公共非零复数标量）：

$$(1, -1, 0^{[n-2]}) \quad \textit{if } S_{n,p} = \Lambda_{n,p},$$

and

$$((n-k)^{[k]}, (-k)^{[n-k]}) \quad \textit{for each } 1 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor \textit{ with } R_{n,p}(k) = \Lambda_{n,p}.$$

所有指明的族都会出现，包括平局时的所有族。等价地，除去 $p(z) = Az^n$ 外，等号多项式为

$$p(z) = Az^{n-2}(z^2 - a^2) \quad \text{or} \quad p(z) = A(z - (n-k)a)^k (z + ka)^{n-k}, \qquad A, a \ne 0,$$

对于第一个族，$S_{n,p} = \Lambda_{n,p}$ ；对于第二个族，$R_{n,p}(k) = \Lambda_{n,p}$ 。

证明。推论 A.38 给出了最佳常数。现在我们确定所有等号情形。我们首先对其非零实极值元进行分类。对这样的根列进行缩放，并在必要时进行反射，使其极端根为 $t-1$、$t+1$，其中 $0 \le t \le c = (n-2)/n$。端点梯度约化给出谱概率测度 μ，满足 $m_1 = 0$、 $m_2 = c$、 $m_3 = -(1-c)t$，以及 $G(t,\ \mu) = \Lambda_{n,\ p}$。对于其余 $n-2$ 个根，记为 $y_i = x_i - t \in [-1, 1]$。精确的根亏量恒等式 (4.9) 为

$$\Delta(t, \mu) := \int (1-y^2)(y-t)^2\, d\mu(y) = \frac{2}{n^2} \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \text{ internal}}} (1 - y_i^2). \tag{A.50}$$

特别地， $\Delta = 0$ 迫使每个根都只能取两个极端值之一。

若 $n\theta_p \le 1$，推论 A.20 中的完整等号结论恰好给出稀疏列表和单离群根列表，具体取决于哪个值等于 $\Lambda_{n,\ p}$。具体而言，它的两个可能的矩极大化子分别是在 $t = 0$ 和 $t = c$处的高斯分布。在 $t = 0$处，高斯性给出 $m_4 = c^2$；四阶矩恒等式（4.12）继而迫使所有内部根都为零。在 $t = c$处，它们的和为 $-(n-2)$，且每个都至少为 -1，因此它们必全都等于 -1。

接下来，假设 $n\theta_p > 1$ 是一个整数。精确的无上限三矩定理（定理 A.19）可直接应用。其唯一的极值构型是在 $\{-1,\ t_p,\ 1\}$ 上的内在上限测度，取值于 $t = t_p$。其值为 $1 - H_p(r_p)/n = \mathcal{B}_{n,\ p}$，因为这个连续型最大值是一个允许的二元格点值。它严格大于 $S_{n,\ p}$ 以及 $R_{n,\ p}(1)$。内在上限测度满足 $\Delta = 0$，因此（A.50）迫使这些根均为二元值。其重数随后由中心化确定，其中 $k = n\theta_p$。此论证使用无上限矩定理，无需另行使用加权等号定理。

接下来考虑非整数的 $n\theta_p > 1$。令 $k = \lfloor n\theta_p \rfloor$ and $\ell = 1 - {}^{2}{}_{(k+1)}{}_{n} < t_p < u = 1 - \frac{2k}{n}$。定理 A.25 的证明给出 $\mathcal{B}_{n,\ p} > S_{n,\ p}$。我们证明，等号成立要求存在一个极大化格点端点。

首先考虑 $\ell < t < u$，或等价地考虑 $a < \theta < b$，其中 $\theta = (1-t)/2$， $a = k/n$，且 $b = (k+1)/n$。若 $E_-(t) \le E_+(t)$，定理 A.28 给出 $H_p((1-t)/(1+t)) > H_p(k/(n-k))$。未校正梯度

界因此已经严格小于二元包络。若 $E_+(t) < E_-(t)$，严格的反向余项定理及其差商证明给出严格的弦比较。更明确地说，当$\rho = \frac{3}{4}(8\sqrt{2}-10) < 1$时，曲率证明给出 $hJ[a,\theta,b] \le \rho T(\theta)$，其中 $h = 1/n$。因此

$$J(\theta) + nT(\theta)(\theta-a)(b-\theta) \ge \frac{b-\theta}{b-a}J(a) + \frac{\theta-a}{b-a}J(b) + (1-\rho)nT(\theta)(\theta-a)(b-\theta) > \min\{J(a), J(b)\}.$$

最后一项严格为正。因此，在任一锚点分支中，每个开峰值单元点都有 $G(t,\mu) < \mathrm{B}_{n,p}$。接下来，定理 A.25 中所采用的无上限矩分类表明，单元外的等号只能出现在 $t = \ell$ 或 $t = u$处。事实上，在 $[0,\ell]$ 上，每个非退化右 Radau 极大点都必须位于右端点，因为其关于递增 t 的可行导数严格为正。内部左 Radau 点不是局部极大值。高斯值严格小于 $\max\{S_{n,p}, R_{n,p}(1)\} \le \mathrm{B}_{n,p}$ for$0 < t < c$，且零点处的高斯值为 $S_{n,p} < \mathrm{B}_{n,p}$。内禀上限值在$[0,\ell]$上严格递增。严格高斯界、为正的右 Radau 导数以及 R_{cont}的严格单调性排除了每个 $0 \le t < \ell$处的等号。在 $[u,c]$上，定理 A.16 中严格为正的 t-导数排除了所有非退化非激活帽极大点，包括位于其左端点的极大点。内禀上限值对于 $t > u$严格递减。如果 $k > 1$，那么 $R_{n,p}(1) < \mathrm{B}_{n,p}$，因此高斯端点 c 也被排除。如果 $k = 1$，那么 $u = c$ 已经成立。这就证明了所断言的限制，即只能取两个格点端点。

在任一 $t \in \{\ell, u\}$ 处，锚点系数 $E_*(t) = \min\{E_-(t)\ E_+(t)\}$ 严格为正。四次锚点在应用缺陷的整数下界之前，给出 $G(t,\mu) \le R_{\mathrm{cont}}(t) - {}^{2E_*}(t)_{D_t}\ \Delta(t,\mu) \le \mathrm{B}_{n,p}$。因此，等号成立要求同时满足$R_{\mathrm{cont}}(t) = \mathrm{B}_{n,p}$ 和 $\Delta = 0$。由 (A.50)，每个根都是端点。若正端点的重数为 j，则中心化给出 $t = 1 - 2j/n$。因此，该列表是 $((n-j)^{[j]}, (-j)^{[n-j]})$ 的非零实数倍，其中 $R_{n,p}(j) = \mathrm{B}_{n,p}$。至此，实数分类完成。

最后，设某个复数列表达到等号。在角向 Schur–Jensen 约化中，积分量相等迫使厄米 Schur 对角 Jensen 不等式对几乎每个角度都取等号。 $|x|^p$ 的严格凸性意味着，对每个这样的角度，相应的厄米矩阵在固定的 Schur 基下都是对角矩阵。若上三角 Schur 矩阵有一个非零的非对角元素 T_{ij}，则其厄米部分的对应元素对每个角度都将是 $e^{-i\varphi}T_{ij}/2 \neq 0$。因此，临界点压缩是正规矩阵。

将 $e = n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}$、$Q = I - ee^*$、$D =$ 写成 $\mathrm{diag}(z_i)$，并令 $A = QDQ|_{e^\perp}$。由于根是中心化的，在 e 上将交换子延拓为零可得 $[A, A^*] = \frac{1}{n}\left(z\,z^T - zz^*\right)$。对于 $z \neq 0$,正规性因此意味着对于某个 $|\omega| = 1$，有 $z = \omega z$。所有根都位于一条经过零点的公共直线上。除以一个非零复数标量后，可将列表化简为本证明实数部分中的实数分类。

反过来，对所展示的两个多项式族求导，分别恰好得到 $S_{n,\ p}$ 和 $R_{n,\ p}(k)$。因此，它们恰好在所述极大化条件下取得等号。多项式 Az^n 则单独给出平凡的等号情形。□

A.30. **两个最小的非平凡次数。**

命题 *are* **A.40.** 对于 $1 < p < 2$，次数为二和 *th* 中的尖锐中心化复多项式常数 *ree*

$$C_{2,p} = 0, \qquad C_{3,p} = 3^{-\frac{p}{2}}.$$

三次时，唯一的非零等号根列表为 $(a、\ -a、\ 0)$ 其中 $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，在置换意义下成立。因此，稀疏／双值尖锐常数公式 (4.19) 对 $n = 2、3$ 也成立。

证明。 中心化二次多项式的唯一临界点为零，因此 $C_{2、\ p} = 0$。

对于实中心化三元组 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$，有代数恒等式 $\sum_{j=1}^3 x_j^4 = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^3 x_j^2\right)^2$。令 $\lambda = p/(4-p)$ $\in (0、\ 1)$。利用赫尔德插值，当 $1/2 = \lambda/p + (1-\lambda)/4$ 时，得到 $\|x\|_2 \le \|x\|_p^{\lambda}\|x\|_4^{1-\lambda} = 2^{-\frac{1-\lambda}{4}}\|x\|_p^{\lambda}\|x\|_2^{1-\lambda}$。对于非零三元组，这等价于

$$\sum_{j=1}^3 x_j^2 \le 2^{1-\frac{2}{p}}\left(\sum_{j=1}^3 |x_j|^p\right)^{\frac{2}{p}}. \tag{A.51}$$

赫尔德插值中的等号要求所有非零 $|x_j|$ 都相等。由于奇数个相等的非零带符号项不可能相加为零，因此这里的等号要求一个稀疏对（$a,\ -a,\ 0$）。

现在令 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 为一个复数三元组。临界点为 $w_\pm = \pm\sqrt{\frac{z_1^2+z_2^2+z_3^2}{6}}$。如果平方和为零，那么除非所有根都为零，否则所需的不等式为严格不等式。否则，将所有根旋转，使这个

和为正实数，并记作 $z_j = x_j + iy_j$。于是

$$\left|\sum_{j=1}^{3} z_j^2\right| = \sum_{j=1}^{3} x_j^2 - \sum_{j=1}^{3} y_j^2 \le \sum_{j=1}^{3} x_j^2 \le 2^{1-\frac{2}{p}} \left(\sum_{j=1}^{3} |x_j|^p\right)^{\frac{2}{p}} \le 2^{1-\frac{2}{p}} \left(\sum_{j=1}^{3} |z_j|^p\right)^{\frac{2}{p}}.$$

因此

$$|w_+|^p + |w_-|^p = 2\left(\frac{|\sum_{j=1}^{3} z_j^2|}{6}\right)^{\frac{p}{2}} \le 3^{-\frac{p}{2}} \sum_{j=1}^{3} |z_j|^p.$$

等号成立要求所有 $y_j = 0$，随后在（A.51）中取等号；因此，所述稀疏族构成了完整的非零等号类。它达到该常数。三次二元族有三个非零根，因此其比值严格小于该稀疏值。因此，最大值公式可推广至三次情形，而在二次情形中，公式的两项都等于零。□

附录 B. 关于 $2 < p < 3$ 的对数比较与辅助证明

B.1. $2 < p < 3$ 的精确界。

定理 B.1. 设 $n = 2m+1 \ge 5$、$2 < p < 3$，且 $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ 是多项式 $p(z)$ 的零点（按重数计），其次数为 n。设 $w_1, \dots, w_{n-1}$ 是其临界点。若 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$，则

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p \le C_{n,p} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^p,$$

其中

$$C_{n,p} = \frac{(n-3)(n+1)^p + (n-1)^{p+1} + 2^{p+1}}{(n-1)(n+1)^p + (n+1)(n-1)^p} = \frac{(m-1)(m+1)^p + m^{p+1} + 1}{m(m+1)^p + (m+1)m^p}.$$

该系数是最佳的。等号在以下情形下成立：

$$p(z) = (z - (n+1))^{\frac{n-1}{2}} (z + (n-1))^{\frac{n+1}{2}}.$$

矩阵压缩将复数不等式化为实零点问题。梅林恒等式 (B.4) 随后将实数情形的不等式化为 $\mathcal{J}_s \ge 0$。根据定理 B.15，负最小值至多在四个不同根值处取得。小节 B.17 利用定理 B.10 和 B.16以及推论 B.18排除了这些构型。

B.2. 压缩与截断估计。

令 $e = n^{-\frac{1}{2}}(1, \dots, 1)^T$、$H = e^{\perp}$ 和 $Q = I - ee^*$。对于$D = \mathrm{diag}(z_1, \dots, z_n)$，令 $A = QDQ|_H$。若 $p(\zeta) = \prod_{j=1}^{n}(\zeta - z_j)$，由余子式恒等式可得

$$\det(\zeta I_H - A) = \det(\zeta I - D)\, e^*(\zeta I - D)^{-1} e = \frac{p'(\zeta)}{n}.$$

起初，该恒等式在根之外成立，随后根据多项式恒等式可知它处处成立。因此，A的特征值就是临界点。

引理 B.2. 假设 $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$，并令 $s_1, \dots, s_{n-1}$ 为 A 的奇异值。那么，对于每个 $t \ge 0$，

$$\sum_{i=1}^{n-1} (s_i^2 - t)_+ \le \frac{n-2}{n} \sum_{j=1}^{n} (|z_j|^2 - t)_+.$$

证明. 设 $a_j = |z_j|^2$ 和 $u = D^* e \in H$。在 H 上，$A^*A = Q\mathrm{diag}(a_j)Q - uu^*$。令 $b_j = (a_j - t)_+$，$r_j = \min(a_j, t)$，$\beta = \sum_{j=1}^{n} b_j$ 和 $\rho = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} r_j$。那么

$$A^*A - tI_H \le M := Q\,\mathrm{diag}(b_j)Q - uu^*, \qquad \mathrm{Tr}_H\, M = \frac{n-2}{n}\beta - \rho.$$

正部迹关于厄米序单调递增：这由 $\mathrm{Tr}\, X_+ = \max_{0 \le E \le I} \mathrm{Tr}(EX)$ 得出。因此，只需对 $\mathrm{Tr}\, M_+$ 给出上界。

正算子 $Q\mathrm{diag}(b_j)Q$ 减去秩一算子 uu^* 至多有一个负特征值。此外，$M \ge -\rho I_H$。为验证后一断言在 $\rho > 0$ 时成立，使用加权柯西–施瓦茨不等式以及

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b_j + \rho} = n + \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j - \rho}{b_j + \rho} \le n + \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{n} (r_j - \rho) = n.$$

事实上，当 $b_j = 0$ 时，相关不等式取等号；当 $b_j > 0$ 时，我们有 $r_j = t \geq \rho$，因此将 $b_j + \rho$ 替换为 ρ 会增大该加项。于是，对任意 $v \in H$，$\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^n z_j v_j\right|^2 \leq \sum_{j=1}^n (b_j+\rho)|v_j|^2$，这就证明了 $M \geq -\rho I_H$。如果 $\rho = 0$，则要么 $t = 0$，此时 $M = A^*A \geq 0$；要么所有 a_j 都为零。因此，在所有情况下 $\operatorname{Tr} M_- \leq \rho$，并且

$$\operatorname{Tr} M_+ = \operatorname{Tr} M + \operatorname{Tr} M_- \leq \frac{n-2}{n}\beta.$$

□

B.2.1. 矩恒等式与反向凹比较。对于中心化实数列表 x 及其临界列表 y，展开 $\operatorname{Tr}(Q\operatorname{diag}(x)Q)^j$，当 $j = 2,\ 3$ 时，得到

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = \frac{n-2}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} y_i^3 = \frac{n-3}{n}\sum_{i=1}^n x_i^3.$$

在 $\operatorname{span}(\mathbf{1})$ 上增加的零特征值没有影响。对于三次恒等式，含有一个秩一投影的迹项贡献为 $-3\sum_{i=1}^n x_i^3/n$；其余所有项都含有 $\sum_{i=1}^n x_i = 0$。Subtract由相等的二阶矩得到平方铰链不等式，并结合 $c_n = (n-2)/n$，

$$\sum_{i=1}^{n-1} \min(y_i^2, t) \geq c_n \sum_{j=1}^{n} \min(x_j^2, t), \qquad t \geq 0. \tag{B.1}$$

令 $h:\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 为递增且凹函数，且 $h(0) = 0$。在线性地插值 h 于零点和 x_j^2、y_k^2中的不同正数节点处，并将插值函数在最大节点之后延拓为常数。其连续斜率非负且不递增。在每个节点处斜率的下降量 t 是插值函数中$\min(u,t)$ 的系数。因此，对（B.1）取非负线性组合，得到以下界；即使 h在零点处有跳跃时也成立。若所有节点均为零，则两边都为零。

$$\sum_{i=1}^{n-1} h(y_i^2) \geq c_n \sum_{j=1}^{n} h(x_j^2). \tag{B.2}$$

B.2.2. 从复根归约到实根。假设系数 C 对所有中心化实数列表都成立。对于复数列表，令 $A = Q\operatorname{diag}(z)Q|_{\mathbf{1}^\perp}$。为 A 选取一个 Schur 基。在该基下，$\operatorname{Re}(e^{-i\theta}A)$ 的对角元素由 $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}w_k)$ 组成。将标量詹森不等式应用于这个厄米矩阵的谱分解，可得 $\sum_{k=1}^{n-1} |\operatorname{Re}(e^{-i\theta}w_k)|^p \leq \operatorname{Tr} |\operatorname{Re}(e^{-i\theta}A)|^p$。右侧的矩阵是关于中心化实根 $x_j(\theta) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta}z_j)$ 的临界点压缩。应用假设的实数情形不等式，并对 θ 积分。对于 $\gamma_p = \int_0^{2\pi} |\cos\theta|^p\, d\theta > 0$，$\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}(e^{-i\theta}\zeta)|^p\, d\theta = \gamma_p |\zeta|^p$。消去 γ_p 后，便可证明复根也适用同一系数。

B.3. **对数比较及其梅林推论**。令 $a = m+1$，$b = m$，并使用参考列表

$$x_* = (a^{[b]}, (-b)^{[a]}), \qquad y_* = (a^{[b-1]}, (-b)^{[b]}, 1).$$

方括号表示重数。对于中心化实数列表 x 及其临界列表 y，定义非负乘积多重集

$$U = |x| \otimes |y_*|, \qquad V = |y| \otimes |x_*|.$$

两者均有 $n(n-1)$ 个元素，且平方和相同。令

$$\ell_s(t) = \frac{|t|}{s} - \log(1 + |t|/s), \qquad \mathcal{J}_s(x) = \sum_{v \in V} \ell_s(v) - \sum_{u \in U} \ell_s(u).$$

等价地，令 $Z_f = \sum_{j=1}^n f(x_j)$ 且 $W_f = \operatorname{Tr} f(A_x)$，

$$\mathcal{J}_s = bW_{\ell_{s/a}} + aW_{\ell_{s/b}} - (b-1)Z_{\ell_{s/a}} - bZ_{\ell_{s/b}} - Z_{\ell_s}.$$

一些分量证明使用 $K_s = -\mathcal{J}_s$。对两个参考列表进行共同缩放只会重新缩放 s，不会改变任何逐点符号断言。有理辅助泛函为 $T_s(x) = \sum_{v \in V} \frac{v^2}{s+v} - \sum_{u \in U} \frac{u^2}{s+u}$。直接求导并作无穷远处展开可得

$$\partial_s \mathcal{J}_s = -T_s/s^2, \qquad \mathcal{J}_s = \int_s^\infty T_t/t^2\, dt. \tag{B.3}$$

由（B.3），只需对 T_s 给出一个逐点下界即可，但下面的论证直接估计$\mathcal{J}_s$。

对于 $2 < p < 3$ 和 $r \geq 0$，应用分部积分 给出

$$r^p = \frac{p\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^\infty s^{p-1} \left[\log(1 + r/s) - r/s + \frac{r^2}{2s^2} \right] ds.$$

系数为正。被积函数在两个端点处均可积。对两个有限乘积列表求和，并消去相等的二阶矩，得到

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_{*,j}|^p \right) \left(C_{n,p} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p - \sum_{k=1}^{n-1} |y_k|^p \right) = \frac{p\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^\infty s^{p-1} \mathcal{J}_s(x)\, ds. \tag{B.4}$$

因此定理 B.19蕴含实数幂不等式。

B.4. 适用于任意二值列表的有理比较。 以下逐点有理结果蕴含了适用于任意中心化二值列表的对数比较。

证明 B.3。 每个非零的奇数长度中心化二值实根列表均满足 $T_s \geq 0$，对所有 $s > 0$均成立。对于某一个（等价地，对于每一个） $s > 0$，等号成立当且仅当重数为平衡重数 m、$m+1$。

证明。 经过反射和缩放后，将根写为 $h^{[r]}$，$(-r)^{[h]}$，其中

$$m = r + d, \quad h = r + 2d + 1, \quad g = 2d + 1, \qquad r \geq 1, \quad d \geq 0.$$

临界列表为 $h^{[r-1]}$，$(-r)^{[h-1]}$，g。消去交叉列表后，有理比较为 $T_s = \sum_{i=1}^{8} \frac{\omega_i v_i^2}{s+v_i}$，其中

v_i	$(m+1)h$	mh	h	$(m+1)r$	mr	r	$(m+1)g$	mg
ω_i	$-d$	$-d-1$	$-r$	$d+1$	d	$-h$	m	$m+1.$

乘以 $D(s) = \prod_{i=1}^{8}(s + v_i) > 0$，并将分子写为 $N(s) = \sum_{j=0}^{6} N_j s^j$。精确验证器 `turn2_two_value_T_certificate.py` 根据八对 $(v_i,\ \omega_i)$ 重构出 N。经过 $r = R + 1$后，每个 N_j 在 R，d 中都只有非负整数系数。它们各自的非零系数数量分别为 140、127、111、87、64、43、26。这证明了 $N \geq 0$对于 R，d，$s \geq 0$。此外，$N_0 = 4d\,r^4 m^4 (2d+1)^2 (m+1)^3 h^3$。对于 $d > 0$，它严格为正，因此 $T_s > 0$。当 $d = 0$ 时，两个交叉列表相同，且 $T_s = 0$。□

由于 $\widetilde{K}_s' = T_s/s^2$ 和 $\widetilde{K}_s \to 0$ 在无穷远处，该定理对每个二值列表逐点证明了 $\widetilde{K}_s \leq 0$。特别地，关于具有正残差压缩的平坦多数的舒尔凹性论证证明了点态断言 $\widetilde{K}_s(a_1, \ldots, a_r) \leq \widetilde{K}_s((h/r)^{[r]}) \leq 0$。因此，非正-~中三值证明中的单调性也在该处逐点给出了 $K_s \leq 0$，而不仅仅是其积分幂结论。

B.5. **具有正残差压缩的平坦多数。**

定理 B.4. 设 $n = 2m + 1$、$m \geq 2$，并令 $1 \leq r \leq m$、$h = n - r$。假设 $a_1, \ldots, a_r > 0$满足

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = h, \qquad \sum_{i=1}^{r} a_i^{-1} \leq h.$$

那么，中心化多项式 $p(z) = (z+1)^h \prod_{i=1}^{r}(z - a_i)$ </style}满足 ,$_p Z_p$ 对每个 $2 < p < 3$均成立。对于这一族，等号恰好在 $r = m$ 且 $a_1 = \cdots = a_m = (m+1)/m$时成立。

在均匀向量处，定理 B.3 和（B.3）给出了逐点对数比较。我们将其推广到满足定理 B.4的所有向量。

令 $D = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_r)$，$u_i = \sqrt{(a_i + 1)}/n$、$B = D - uu^T$，以及 $q(z) = \prod_{i=1}^{r}(z - a_i)$。行列式引理给出

$$\det(zI - B) = q(z) \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i + 1}{z - a_i} \right) = \frac{hq(z) + (z+1)q'(z)}{n} = \frac{p'(z)}{n(z+1)^{h-1}}.$$

中间的表达式是一个多项式，因此该恒等式对每个 z都成立。因此，临界点为-1 重复 $h - 1$ 次，以及 r B的特征值。倒数和的条件等价于 $B \succeq 0$。事实上，$B \succeq 0$ 等价于 $u^T D^{-1} u = (r + \sum_{i=1}^{r} a_i^{-1})/n \leq 1$。因此，绝对根和临界点列表为

$$X = (a_1, \ldots, a_r, 1^{[h]}), \qquad Y = (\lambda_1(B), \ldots, \lambda_r(B), 1^{[h-1]}).$$

令 $c = (m+1)/m$，$d = 1/m$，并令

$$X_* = (c^{[m]}, 1^{[m+1]}), \qquad Y_* = (c^{[m-1]}, d, 1^{[m]}).$$

定义叉积列表 $U = X \otimes Y_*$ 和 $V = Y \otimes X_*$。它们的一阶矩差为常数$\Delta_1 = \sum_{v\in V} v - \sum_{u\in U} u = 4($$h-m-1$$)$，与 a无关，而 $\sum_{u\in U} u^2 = \sum_{v\in V} v^2$。对于 $s>0$，置

$$K_s(a) = \sum_{v\in V} \log(1+v/s) - \sum_{u\in U} \log(1+u/s), \qquad \widetilde{K}_s = K_s - \Delta_1/s.$$

~我们将证明，K_s，等价地说，K_s，在可容许 a的凸集上严格 Schur 凹。设

$$R(t) = \sum_{i=1}^{r} (a_i+t)^{-1}, \qquad \rho(t) = \frac{r+(1-t)R(t)}{n}.$$

行列式引理给出 $\det(sI+B) = \prod_{i=1}^{r}(s+a_i)(1-\rho(s))$。约去叉积中的公因子后，

$$\begin{aligned} K_s(a) = \sum_{i=1}^{r} &\big[\log(s+ca_i) + \log(s+a_i) - \log(s+da_i)\big] \\ &+ (h-m)\log(s+c) + (h-m-1)\log(s+1) - h\log(s+d) \\ &+ m\log(1-\rho(s/c)) + (m+1)\log(1-\rho(s)). \end{aligned}$$

对于固定的 s，此公式可光滑延拓到任意可容许向量的邻域，即使 B 是奇异的，因为对于 $t>0$，$1-\rho(t)>0$。

设 $t = s/c$。坐标导数具有如下形式：

$$\partial_i K_s = g(a_i), \qquad g(x) = \frac{1}{x+t} + \frac{1}{x+s} - \frac{1}{x+ms} + \frac{A_1}{(x+t)^2} + \frac{A_2}{(x+s)^2},$$

比较坐标时，系数保持不变：

$$A_1 = \frac{m(1-t)}{n(1-\rho(t))}, \qquad A_2 = \frac{(m+1)(1-s)}{n(1-\rho(s))}.$$

设 $\eta = h/r > 1$。詹森不等式给出 $R(t) \ge r/(t+\eta)$，因此，令 $\rho_0(t) = 1/(t+\eta)$，可得

$$\frac{w(1-t)}{n(1-\rho(t))} \ge \frac{w(1-t)(t+\eta)}{n(t+\eta-1)} \quad (w>0).$$

当 $t \le 1$ 时以及当 $t \ge 1$时，这个不等式都成立：当 $1-t$ 改变符号时，$\rho(t)$ 与 $\rho_0(t)$ 的比较方向也随之改变。因此，$g'(x) \le g_0'(x)$，其中 g_0 使用均匀系数。初等恒等式 $\frac{(1-t)(t+\eta)}{t+\eta-1} = -t + \frac{\eta}{t+\eta-1}$ 得出

$$g_0'(x) = -\frac{x+t/n}{(x+t)^3} - \frac{x-s/n}{(x+s)^3} + \frac{1}{(x+ms)^2} - \frac{2m\eta}{n(t+\eta-1)(x+t)^3} - \frac{2(m+1)\eta}{n(s+\eta-1)(x+s)^3}.$$

最后两项严格为负。第一行的相反数等于 $s^{-2}H_m(x/s)$，其中令$\alpha = m/(m+1)$，

$$H_m(y) = \frac{y+\alpha/n}{(y+\alpha)^3} + \frac{y-1/n}{(y+1)^3} - \frac{1}{(y+m)^2} = \frac{yP_m(y)}{(m+y)^2 n(y+1)^3(my+m+y)^3}.$$

这里 $P_m(y) = \sum_{j=0}^{5} b_j y^j$ 并且

$$\begin{aligned} b_5 &= (m+1)^3(2m+1), \\ b_4 &= (m+1)^2(8m^3+12m^2+4m-1), \\ b_3 &= m(m+1)^2(4m^3+30m^2+8m-5), \\ b_2 &= 2m^2(m+1)(6m^3+24m^2+7m-5), \\ b_1 &= 2m^3(6m^3+19m^2+8m-3), \\ b_0 &= 4m^5(m+2). \end{aligned}$$

该脚本 num_p1_face_scalar_check.py 验证了这个恒等式，其中 H_m。对于$m \ge 1$，每个系数都为正，因此 $g'(x) < 0$ 对于 $x>0$成立。因此，标准的坐标梯度判据证明了严格的舒尔凹性。等价地，沿着平均路径 $a_i(\tau) = (1-\tau)a_i + \tau\eta$，倒数和条件的凸性保证可行性得以保持，并且 K_s 严格增大，除非所有坐标都相等。因此

$$\widetilde{K}_s(a) \le \widetilde{K}_s(\eta \mathbf{1}_r), \qquad s>0.$$

~ ~双值结果给出 $K_s(\eta \mathbf{1}_r) \le 0$。因此，对于每个$s>0$， $K_s(a) \le 0$，或者等价地，$\mathcal{J}_s(a) \ge 0$。这个逐点断言是后续论证所用的依据。

对于 $2<p<3$ 积分恒等式

$$x^p = \frac{p\sin(\pi p)}{\pi}\int_0^\infty s^{p-1}\left[\log(1+x/s) - x/s + \frac{x^2}{2s^2}\right] ds$$

具有正的前因子。将其应用于两个交叉列表后，它们的二阶矩相互抵消，而它们的一阶矩差恰好等于被减去的项 Δ_1/s。因此

$$\sum_{u\in U} u^p - \sum_{v\in V} v^p \ge \left(\sum_{u\in U} u^p - \sum_{v\in V} v^p\right)_{a_i=\eta}. \tag{B.5}$$

根据定理 B.3、（B.3）和（B.4），右侧非负。仅当 $r=m$时取零。严格的舒尔凹性使得（B.5）对于非均匀的 a为严格不等式。除以 $\sum_{x\in X_*} x^p > 0$ 即完成证明，包括等号情形。

B.6. 平衡三值族的精确证书。 对于该族，以下逐点平方对数比较是必要的

$$p_\tau(z) = (z+m+\tau)^m(z-2m\tau)(z-m+\tau)^m, \qquad |\tau| \le \frac{m}{2m+1}, \quad m \ge 2.$$

对于该族$W_p \le B_{n,\ p}Z_p$ 始终满足 $2<p<4$。我们展开行列式平方，并在所提供的脚本 num_balanced_threevalue_certificate.py 中验证所得的伯恩斯坦系数检验。

令 $n=2m+1$、 $a=m+1$、 $b=m$ 和 $v=1-(n\tau/m)^2 \in [0,1]$。两个并非由重根继承的临界点，记为 $\xi_\pm$，满足

$$\xi_+ + \xi_- = 2(m-1)\tau, \qquad \xi_+\xi_- = -\frac{m^2}{n} - (2m-1)\tau^2.$$

对于当前的绝对值根 X 和绝对值临界点 Y，令 $U = X\times|y^*|$ 和 $V = Y\times|x^*|$表示乘积多重集。考虑差值 $E(t) = \prod_{v_1\in V}(t+v_1^2) - \prod_{u_1\in U}(t+u_1^2)$。约去公因子正因子后，令 $t = m^4Y_0/n^2$，再去掉另一个公因子常数，得到$\mathcal{E} = A^{m-1}D - B^{m-1}F$。此处使用的所有多项式均明确给出如下（变量 Y_0 非负）：

$$\begin{aligned}
S &= (2m^2-2m+1)(1-v)+n, & T &= (2m-1)(1-v)+n,\\
Q_0 &= n^2+1-v, & R_0 &= n^2-1+v,\\
L_A &= m^4Y_0^2 + 2a^2m^2SY_0 + a^4T^2, & L_B &= Y_0^2 + 2SY_0 + T^2,\\
R_1 &= m^4Y_0^2 + 2m^2Q_0Y_0 + R_0^2, & R_B &= Y_0^2 + 2Q_0Y_0 + R_0^2,\\
F_a &= Y_0 + 4a^2(1-v), & F_b &= Y_0 + 4m^2(1-v),\\
F_1 &= Y_0 + 4(1-v).
\end{aligned}$$

定义

$$A = L_AL_B, \quad B = R_1F_aF_b, \quad D = L_AL_B^2, \quad F = R_BR_1F_bF_1, \quad H = A-B,$$

并且，对于 $m\ge 3$， $J = B^2(D-F) + (m-1)BHD + \frac{(m-1)(m-2)}{2}H^2D$。记 $m = r+3$。将 H/v和 J/v^2按 r, Y_0 的幂展开。对于每个系数多项式 $\sum_{j=0}^d c_j v^j$，其在 $[0,1]$ 上的伯恩斯坦系数为

$$\beta_k = \sum_{j=0}^{k} c_j \frac{\binom{k}{j}}{\binom{d}{j}}, \qquad 0\le k\le d.$$

该脚本检查了 H/v 和 J/v^2 的伯恩斯坦系数均为非负。对于 H/v，共有 32 组、85 个此类系数；对于 J/v^2，共有 334 组、2520 个系数。因此，对于所有 $m\ge 3$、$Y_0\ge 0$ 和 $v\in[0,1]$， H， $J\ge 0$。其他所有显示出的因子都直接为非负。二项式展开给出$A^{m-1}D - B^{m-1}F \ge B^{m-3}J \ge 0$。对于 $m=2$，该脚本直接检查了 $(AD-BF)/v^2$ 中分为 9 组的 45 个伯恩斯坦系数。因此，在每种情况下， $E(t)\ge 0$。

因此

$$K(t) = \sum_{v_1\in V}\log(1+v_1^2/t) - \sum_{u_1\in U}\log(1+u_1^2/t) \ge 0.$$

由于两个构型都满足精确的实二阶矩恒等式，它们的一阶矩平方相等。因此，对于 $r = p/2 \in (1,\ 2)$，收敛的梅林恒等式给出

$$\sum_{u\in U} u^p - \sum_{v\in V} v^p = -\frac{r\sin(\pi r)}{\pi}\int_0^\infty t^{r-1}K(t)\,dt \geq 0.$$

由于 $\sum_{u\in U} u^p = (\sum_{x\in X} x^p)(\sum_{y\in Y_*} |y|^p)$ 且 $\sum_{v\in V} v^p = (\sum_{y\in Y} y^p)(\sum_{x\in X_*} |x|^p)$，这便是所述三值族上所需的不等式。此证书不对其他重数模式作出任何断言。

B.7. **从行列式平方到正则化对数的桥梁。** 此前的平衡三值证书比单独的幂不等式更强。它证明，对于相应的交叉列表，

$$K_2(t) = \sum_{v\in V}\log(1+v^2/t) - \sum_{u\in U}\log(1+u^2/t) \geq 0, \qquad t>0.$$

这也证明了定理 B.15 中使用的逐点正则化对数比较。

引理 B.5. *L et U, V 是长度相等且二阶矩相等的有限非负列表。若 $K_2(t) \geq 0$ 对每个 $t>0$，then*

$$\widetilde{K}_s = \sum_{v\in V}\log(1+v/s) - \sum_{u\in U}\log(1+u/s) - \frac{\sum_{v\in V} v - \sum_{u\in U} u}{s} \leq 0, \qquad s>0.$$

证明。 对于 $r \geq 0$ 集合 $q_s(r) = \log(1 + \sqrt{r}/s) = \sqrt{r}/s + \frac{r}{2s^2}$。其导数为 $q_s'(r) = \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2s\,(s+\sqrt{r})}$。初等的斯蒂尔切斯恒等式 $\frac{1}{s+\sqrt{r}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{-s^2+t}\,dt$ 可通过令 $t = y^2$ 并对部分分式积分得到；参数重合的情形由连续性得到。从 0 积分到 r 得到 $q_s(r) = \frac{r}{2s^2} - \frac{1}{2\pi s}\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{s^2+t}\log(1+r/t)\,dt$。$q_s(r)$ 的积分表示在 $r = 0$ 处也收敛。将该恒等式应用于 $r = v^2, u^2$ 并作差。二阶矩相互抵消，因此

$$\widetilde{K}_s = -\frac{1}{2\pi s}\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{s^2+t}K_2(t)\,dt \leq 0.$$

□

因此 $\widetilde{\mathcal{J}}$ 整个平衡三值族逐点满足 $\mathcal{J}_s = -K_s \geq 0$，对于每个 $s>0$。

B.8. **中间根为非正的不平衡三值区域。**

定理 B.6. 设 $n = 2m+1$、$1 \leq k \leq m-1$ 和 $\ell = 2m-k$。对于

$$p(z) = (z+1)^\ell (z-a)^k (z-b), \qquad a > b \geq 0, \quad ka+b = \ell,$$

任意 $2 < p < 3$，均有 ，。对于满足所述重数和排序条件的每个列表，不等式均为严格不等式。

这是中间根为非正的不平衡三值族中，中间根重数为一的整个区域在反射和缩放后的形式。当残余压缩为半正定时，结论由第 B.5 节推出。我们通过一个有理平均不等式证明剩余区域。该不等式的有限精确证书见 `turn2_restricted_gradient_exact_check.py`。

两个非持久临界点。 假设残余压缩不是半正定的。其特征值由重复 $k-1$ 次的 a 以及两个值 $\lambda > 0$ 和 $-c < 0$ 组成。交错性给出

$$0 < c < 1, \qquad b < \lambda < a, \qquad \lambda = a+b+c-1.$$

负特征值满足

$$\frac{k}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{\ell}{1-c}. \tag{B.6}$$

代入 $d = m-k \geq 1$。由于 $a > \ell/(k+1) > 1$，式（B.6）给出

$$\frac{1}{b+c} = \frac{\ell}{1-c} - \frac{k}{a+c} > \ell - k = 2d, \qquad b+c < \frac{1}{2d}. \tag{B.7}$$

向上改变 b 并令 $a = (\ell - b)/k$。于是 $a' = -1/k$。两个非持久临界点所满足的二次方程为 $nc(a+b+c-1) = kb + a - \ell ab$。进行隐式微分得

$$c' = -\eta, \quad \lambda' = \frac{k-1}{k} - \eta, \qquad \eta = \frac{4md + 1 - 2\ell b + n(k-1)c}{n\{2d + (k-1)b + 2kc\}} > 0. \tag{B.8}$$

Indeed, (B.7) 得到 $2\ell b<\ell/d$；由于 $\ell=m+d$ 且 $m,\ d\ge 1$，(B.8) 中的分子为正。

精确的正则化对数。令 $c_*=(m+1)/m$、$d_*=1/m$，并构造绝对值列表

$$X=(a^{[k]},b,1^{[\ell]}),\quad Y=(a^{[k-1]},\lambda,c,1^{[\ell-1]}),$$
$$X_*=(c_*^{[m]},1^{[m+1]}),\quad Y_*=(c_*^{[m-1]},d_*,1^{[m]}).$$

令 $U=X\otimes Y_*$、$V=Y\otimes X_*$，并且对于 $s>0$，

$$\widetilde{K}_s=\sum_{v\in V}\log(1+v/s)-\sum_{u\in U}\log(1+u/s)-\frac{\Delta_1}{s},\quad \Delta_1=4(\ell-m-1)+4(m+1)c.$$

两个交叉矩相等。对这些有限乘积直接求导，并令 $t=sm/(m+1)$，得到

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{K}_s}{db}&=\frac{d}{k(a+t)}+\frac{d+1}{k(a+s)}+\frac{1}{a+ms}-\frac{m-1}{b+t}-\frac{m}{b+s}-\frac{1}{b+ms}\\&\quad+\left(\frac{k-1}{k}-\eta\right)\left(\frac{m}{\lambda+t}+\frac{m+1}{\lambda+s}\right)-\eta\left(\frac{m}{c+t}+\frac{m+1}{c+s}\right)+\frac{4(m+1)\eta}{s}.\end{aligned}\tag{B.9}$$

特别地，包含了依赖于 c 的正则化项；省略该项将得到不同且错误的单调性断言。

引理 *B.7.* 对任意实数 k、$d\ge 1$，令 $m=k+d$、$n=2m+1$、$\ell=k+2d$。若 b、$c>0$、$b+c\le 1/(2d)$、$a=(\ell-b)/k$、$\lambda=a+b+c-1$，且 η 由 *(B.8)* 给出，则 *(B.9)* 右侧的有理表达式对每个 $s>0$ 都严格为正。

有理引理的精确证书。该断言比所需的更强：本引理不假设 b 与 c之间存在世俗二次关系。令

$$B=2db,\quad C=2dc,\quad z=2dks,\quad B,C\ge 0,\quad B+C\le 1,$$
$$A=2d(k+2d)-B,\quad L=4d^2+(k-1)B+kC,$$
$$E=2d(4md+1)-2\ell B+n(k-1)C,\qquad F=n\{4d^2+(k-1)B+2kC\}.$$

这里，$2dk(a,b,c,\lambda)=(A,kB,kC,L)$，且 $\eta=E/F$。尺度因子和分母均为正。特别地，$E\ge 2m(4d^2-1)>0$。将 (B.9) 除以 $2dk$ 并乘以 kF后，得到$\sum_{i=1}^{11}w_i/P_i(z)$，其显式分子–分母对如下：

w_i	$P_i(z)$
$dF(m+1)$	$(m+1)A+mz$
$(d+1)F$	$A+z$
kF	$A+mz$
$-k(m-1)F(m+1)$	$(m+1)kB+mz$
$-kmF$	$kB+z$
$-kF$	$kB+mz$
$m(m+1)((k-1)F-kE)$	$(m+1)L+mz$
$(m+1)((k-1)F-kE)$	$L+z$
$-km(m+1)E$	$(m+1)kC+mz$
$-k(m+1)E$	$kC+z$
$4k(m+1)E$	z

设 $D(z)=\prod_{i=1}^{11}P_i(z)$，且 $N(z)=\sum_{i=1}^{11}w_i\prod_{1\le j\le 11}P_j(z)$。精确乘法给出 $\deg_z N=8$。其$j\ne i$

常数系数为 $N_0=4k^6(m+1)^5EA^3B^3C^2L^2>0$。对于 $1\le j\le 8$，从 N_j中去除显然非负的因子 $A^{\max(3-j,0)}B^{\max(3-j,0)}C^{\max(2-j,0)}L^{\max(2-j,0)}$。剩余多项式在 $B,C\ge 0,B+C\le 1$ 上具有三角形伯恩斯坦展开式。每个伯恩斯坦系数都是 k,d 的多项式，在经过 $k=1+K$, $d=1+H$ 后，其普通幂系数均为非负数。精确检查结果如下：

j	1	2	3	4	5	6	7	8
$\deg_{B,C}$	4	7	8	7	6	5	4	3
已检查的标量系数	2223	7142	10182	7858	5669	3630	2107	1108
负系数	0	0	0	0	0	0	0	0

所提供的脚本根据显示的十一个数对构造 N，检查常数项恒等式，执行精确多项式除法，并使用有理数运算检查系数的符号。为确保可复现性，如果 $P(B,C)=\sum p_{ij}B^iC^j$ 的总次数为 q，则其索引为 (r,t) 的伯恩斯坦系数为

$$\sum_{i\le r,\,j\le t} p_{ij}\,\frac{(r)_i(t)_j}{(q)_{i+j}},\qquad r,t\ge 0,\quad r+t\le q,$$

其中 $(x)_j$ 是 下降阶乘。因此，该证书是一个具有明确规定的有限精确恒等式 ed 正基 。它证明了 $N(z)>0$，从而得到引理 B.7。

完成幂不等式。 当 $k/a+1/b$ 向 ℓ/递增时，函数 b $(k+1)$ 严格递减，因为其导数为 $a^{-2}-b^{-2}<0$。因此存在唯一的阈值 b_*，在该阈值处 $c=0$，且剩余块变为半正定。沿着 $b<b_*$，引理 B.7 给出

$$\widetilde{K}_s(b)<\widetilde{K}_s(b_*),\qquad s>0.$$

~ ~在该阈值处，定理 B.4 证明中的逐点界给出 $K_s(b_*)\le 0$。因此，当 $b<b_*$ 且 $s>0$时，$K_s(b)<0$

F或 $2<p<3$，x^p 关于 $\log(1+x/s)$ 的正梅林表示 $-x/s+x^2/(2s^2)$ 给出

$$\sum_{u\in U(b)}u^p-\sum_{v\in V(b)}v^p>\sum_{u\in U(b_*)}u^p-\sum_{v\in V(b_*)}v^p\ge 0.$$

最后一个不等式就是已经证明的平坦多数半正定定理。情形 $b=0$ 可由连续性得到，或者通过在任意区间 $(0,\ b_*)$ 上对严格单调性进行积分得到。这就证明了该定理。

B.9. 具有非负中间根的不平衡三值区域。 这里我们证明一个具有三个不同根值的中心化实多项式的有理迹比较。外侧根值的重数为 k，ℓ，非负中间值是单根，并且 $1\le k<m$, $\ell=2m-k$。反射和正比例缩放给出了下文所使用的归一化。

B.9.1. 有理泛函。 令 $n=2m+1$, $a=m+1$, $b=m$。令 X_* 为绝对根值列表（$a^{[m]}$，$b^{[m+1]}$），并令 Y_* 为绝对临界点列表（$a^{[m-1]}$，$b^{[m]}$，1）。对于任意中心化实根列表X 及其临界点列表 Y，所有绝对值均按重数计，记 $U=|X|\otimes Y_*$ 和$V=|Y|\otimes X_*$，并定义

$$\mathcal{T}_X(s)=\sum_{v\in V}\frac{v^2}{s+v}-\sum_{u\in U}\frac{u^2}{s+u},\qquad s>0.$$

U和 V的平方和相等，因为对于中心化实根，$\sum Y^2=(n-2)\sum X^2/n$，且参考列表也满足同一恒等式。

定理 B.8。 设 k、$d\ge 1$ 为整数，令 $m=k+d$、$n=2m+1$、$\ell=k+2d$，并令 $0\le r\le 1$。定义

$$A=n\ell+kr,\qquad B=2mkr,\qquad C=k(n-r).$$

对于中心化根列表 $X=(-A)^{[k]}$、B、$C^{[\ell]}$，对每个 $s>0$，均有 $T_X(s)>0$。因此，锐不等式

$$\sum_{y\in Y}|y|^p\le\frac{(m-1)(m+1)^p+m^{p+1}+1}{m(m+1)^p+(m+1)m^p}\sum_{x\in X}|x|^p$$

对每个 $2<p<3$都严格成立。

每个具有简单非负中间值的不平衡三值配置，都可通过正比例缩放和反射表示为以下形式：$-kA+B+\ell C=0$、$A>C\ge B\ge 0$，且参数 r 的范围从$B=0$ 到 $B=C$。

B.9.2。 化简 平方根位于两个有理界之间。继承临界点的重数为 $-A$ $k-1$和 C的重数为 $\ell-1$。剩下的两个临界点是 $-u$，v，其中 u，$v>0$。令

$$S=B+C-A,\quad M=\frac{AC+\ell AB-kBC}{n},\quad D=S^2+4M,\quad V_2=S^2+2M.$$

Then

$$v-u=S,\qquad uv=M>0,\qquad u+v=L=\sqrt{D},\qquad u^2+v^2=V_2.$$

特别地，对于任意 $c>0$,

$$\frac{(cu)^2}{s+cu}+\frac{(cv)^2}{s+cv}=\frac{c^2(sV_2+cML)}{s^2+cLs+c^2M}.\tag{B.10}$$

特殊表达式

$$L_0 = B + A - C = 2nd + 2k(m+1)r > 0, \qquad H_0 = 2mn - B, \qquad E = \ell + kr$$

满足 $\delta := D - L_0^2 = 4k(1-r)nE = 2(H_0 - L_0)E \geq 0$。因此

$$L_- := L_0 + \frac{2L_0\delta}{4L_0^2 + \delta} \leq L \leq L_+ := L_0 + \frac{\delta}{2L_0}. \tag{B.11}$$

事实上，由平方根的凹性可得上界，而 $L - L_0 = \delta/(L + L_0) \geq \delta/(L_+ + L_0)$ 给出下界。(B.11) 中的所有分母都严格为正。

B.9.3. 分子关于平方根是仿射的。消去持久重数后，对 $\mathcal{T}_X$ 的非成对贡献为 $\sum_{i=1}^{9} \omega_i z_i^2/(s+z_i)$，如下表所示：

z_i	aA	bA	A	aC	bC	C	aB	bB	B
ω_i	$-d$	$-(d+1)$	$-k$	d	$d-1$	$-\ell$	$-(m-1)$	$-m$	$-1.$

定义多项式

$$D_r(s) = \prod_{i=1}^{9}(s+z_i), \qquad N_r(s) = \sum_{i=1}^{9} \omega_i z_i^2 \prod_{j\neq i}(s+z_j).$$

保留权函数为零的因子不会造成问题。利用（B.10），剩下的两个成对贡献为 $m\,\frac{a^2(sV_2+aML)}{s^2+aLs+a^2M} + (m+1)\frac{b^2(sV_2+bML)}{s^2+bLs+b^2M}$。将 L^2 替换为 D后，它们的公分母为

$$D_c(s;L) = s^4 + (a+b)Ls^3 + \big((a^2+b^2)M + abD\big)s^2 + ab(a+b)MLs + a^2b^2M^2.$$

相应的分子为

$$\begin{aligned} N_c(s;L) = {} & \big(ma^2 + (m+1)b^2\big)V_2 s^3 \\ & + L\big[ma^2(bV_2 + aM) + (m+1)b^2(aV_2 + bM)\big]s^2 \\ & + \big[ma^2(b^2MV_2 + abMD) + (m+1)b^2(a^2MV_2 + abMD)\big]s \\ & + a^2b^2M^2\big(ma + (m+1)b\big)L. \end{aligned}$$

Thus

$$\mathcal{T}_X(s) = \frac{N(s;L)}{D_r(s)D_c(s;L)}, \qquad N(s;L) = N_r(s)D_c(s;L) + D_r(s)N_c(s;L).$$

对于实际值 $L = \sqrt{D}$，当 $s > 0$ 时，分母严格为正。多项式 N 关于 s 的次数为 **11**，并且关于 L是仿射的。记

$$N(s;L) = \sum_{j=0}^{11} c_j(L)s^j, \qquad P_j = c_j(L_0), \quad Q_j = c_j(H_0).$$

由于 c_j 是仿射的，将（L_+ 和 L_- **B.11**）中的 代入可得

$$L_0 c_j(L_+) = (L_0 - E)P_j + EQ_j =: U_j, \tag{B.12}$$

$$(4L_0^2 + \delta)c_j(L_-) = (4L_0^2 + \delta - 4L_0E)P_j + 4L_0EQ_j =: W_j. \tag{B.13}$$

每个 U_j、W_j 都是关于 k、d、r 的整数系数多项式。

B.9.4. 有限精确正性证书。

引理 B.9。对于所有 $j = 0, \ldots\ldots, 11$，在 U_j和 W_j 中，式 （B.12）–（B.13）中的多项式在k、$d \geq 1$ 和 $0 \leq r \leq 1$时均为非负。

证明。集合 $k = K + 1$, $d = H + 1$。对于任意 U_j 或 W_j，设 R 是其在 r中的次数，并将其按基展开

$$K^\alpha H^\beta r^t (1-r)^{R-t}, \qquad \alpha, \beta \geq 0, \quad 0 \leq t \leq R.$$

所有系数均为非负整数。这是一个有限多项式恒等式，已由随附的独立脚本 `turn2_three_caseIII_T_certificate.py` 验证。该脚本根据 U_j, W_j 由（B.12）和（B.13）使用精确算术构造。每个恒等式中的严格正系数数量为：

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
U_j	11512	10530	9477	8378	6667	5177	3906	2845	1980	1305	794	436
W_j	13640	12526	11336	10094	8137	6419	4938	3685	2647	1816	1168	694

总共有 140107 个非零系数，且全部为正数。对于 $j = 11$，仅带有$K = H = 0$ 的系数在每个 Bernstein指标处就已经严格为正。它们分别为（288900，1548000，2889600，2295040，667648）以及

$$(14904000, 94046400, 235238400, 290375680, 176926720, 42729472).$$

因此， U_{11} 和 W_{11} 在整个区域（包括边界）上始终严格为正。为明确验证规则，若平移后的多项式为 $\sum_{i=0}^{R} f_i(K,\ H)r^i$，则其$r^t(1-r)^{R-t}$ 的系数为 $\sum_{i=0}^{t} \binom{R-i}{t-i} f_i(K,\ H)$。该脚本恰好计算这些整数二项式变换，并检查 K，H中每个所得多项式的每个系数。每个基函数在所需区域上均为非负，从而证明了引理。□

由引理B.9 以及（B.12）–（B.13）中的正归一化因子， c_j（L_-） c_j（L_+） ≥ 0。由于 c_j 是仿射的，且 $L_- \leq L \leq L_+$，因此也有 c_j（L）。 ≥ 0根据证书的最后一部分，首项系数严格为正，因此 N（s；L） > 0 对于 $s > 0$，从而证明了定理B.8中的有理不等式。该论证包含首项系数；它没有调用已知的尖锐三次多项式不等式。

B.9. 5. 从有理不等式到幂不等式。令 $\Delta_1 = \sum_{v\in V} v - \sum_{u\in U} u$ 以及 pu t

$$\mathcal{K}_X(s) = \sum_{v\in V} \log(1 + v/s) - \sum_{u\in U} \log(1 + u/s) - \frac{\Delta_1}{s}.$$

直接求导得到

$$\mathcal{K}'_X(s) = \frac{\mathcal{T}_X(s)}{s^2} \geq 0, \qquad \lim_{s\to\infty} \mathcal{K}_X(s) = 0.$$

因此，对于所有 $s > 0$，$\mathcal{K}_X(s) < 0$。对于 $2 < p < 3$,

$$t^p = \frac{p\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^\infty s^{p-1} \left[\log(1 + t/s) - \frac{t}{s} + \frac{t^2}{2s^2}\right] ds.$$

该常数为正。 U 与 V之间的二次项相互抵消，因此

$$\sum_{u\in U} u^p - \sum_{v\in V} v^p = -\frac{p\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^\infty s^{p-1}\mathcal{K}_X(s)\, ds \geq 0.$$

除以 $\sum_{x\in X_*} x^p = m(m + 1)^p + (m + 1)m^p$ 后，这正是所声称的尖锐幂不等式。

B.10. 三**个值的完整比较**。

定理 B.10。 对于每个奇数 $n \geq 5$，对每个 $s > 0$，在所有至多含有两个不同值的中心化实数列表上，以及在中间值为单重的所有中心化三值列表上，都有 $J_s \geq 0$。

证明。 常数中心化列表由零组成，因此有 $\mathcal{J}_s = 0$。对于两个不同值，使用定理 B.3和（B.3）。对于三个值，反射零点，使外部重数满足 $k \leq \ell$。如果 $k = \ell$，引理 B.5将平方对数比较转换为所需的不等式。对于 $k < \ell$，定理 B.6 的证明以及定理 B.8 中结合（B.3）的逐点界涵盖了中间零点的两种符号。 □

B.11. **一阶矩与排除零根**。 设 $n = 2m + 1 \geq 5$、 $a = m + 1$、 $b = m$，且令 $x \in \mathbb{R}^n$ 为中心化的。其临界点是 $A_x = Q\,\mathrm{diag}(x)Q|_{e^\perp}$的特征值，其中 $e = n^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}$和$Q = I - ee^T$。对于 $\tau > 0$，令 $f_\tau(t) = t^2/(\tau + |t|)$，并记为

$$Z_\tau(x) = \sum_{j=1}^{n} f_\tau(x_j), \qquad W_\tau(x) = \mathrm{Tr}\, f_\tau(A_x).$$

辅助有理泛函为

$$T_s(x) = ab(W_{s/a} + W_{s/b}) - (ab - a)Z_{s/a} - (ab - b)Z_{s/b} - Z_s. \tag{B.14}$$

引理 B.11。 对于每个长度为奇数 $n = 2m + 1$ 的中心化实数列表，

$$\sum_{k=1}^{n-1} |y_k| \geq \frac{m}{m+1} \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

如果一个非零列表包含零坐标，则该不等式是严格的。

证明。令 r、s、t 分别为正根、负根和零的个数，并令 $S>0$ 为正根之和。在正组和负组内取平均，根据迹范数的凸性和置换不变性，用重复 r 次的 S/r、重复 s 次的 $-S/s$ 以及重复 t 次的 0 替换这些根时，临界迹范数不会增加。根的迹范数保持为 $2S$。

若 $t=0$，则平均列表的临界迹范数为 $2S-2\min(S/r,S/s)$，因此比值为 $1-1/\max(r,s)\geq m/(m+1)$。

若 $t\geq 1$，令 $u=S/r$，$v=S/s$，且 $k=r+s=n-t$。除重复根外，其余两个临界点满足方程 $z^2-(u-v)z-\frac{tuv}{n}=0$。它们的绝对值之和为 $\sqrt{(u-v)^2+4tuv/n}$。因此，平均比值等于 $1-\frac{2/n}{1+\sqrt{1-4rs/(nk)}}$。由于 $rs\leq k^2/4$，它至少为

$$1-\frac{2}{n+\sqrt{nt}}\geq 1-\frac{2}{n+\sqrt{n}}>1-\frac{2}{n+1}=\frac{m}{m+1}.$$

这就证明了两个断言。 □

引理 B.12。设 $k:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是递增且凹的，且 $k(0)=0$。令 g 为满足 $g'=k(|t|)$ 的奇函数。那么对所有实数 u,v，

$$g[u,v]\geq\frac{k(|u|)+k(|v|)}{4},$$

其中，对角差商按通常的导数方式解释。

证明。如果 u、v 同号，则由凹性可得分母为 2 的更强界。如果 $u\geq 0\geq v$，令 $w=-v\geq 0$。由凹性和 $k(0)=0$ 可得 $g(u)\geq uk(u)/2$ 以及 $g(w)\geq wk(w)/2$。因此，利用 k 的单调性可得 $\frac{g(u)+g(w)}{u+w}\geq\frac{uk(u)+wk(w)}{2(u+w)}\geq\frac{k(u)+k(w)}{4}$。零值情形和对角情形由连续性得出。□

命题 B.13。对于 $n\geq 5$ 为奇数的情形，对于任意 $s>0$，不含全零的中心化实根列表若包含一个零坐标，都不可能是 T_s 的局部极小值。

证明。定义偶函数

$$q_\tau(t)=\frac{t^2}{\tau}-f_\tau(t)=\frac{|t|^3}{\tau(\tau+|t|)},\qquad k_\tau(t)=q_\tau''(t)=\frac{2}{\tau}-\frac{2\tau^2}{(\tau+|t|)^3}.$$

作为 $|t|$ 的函数，k_τ 非负、递增、凹，并且在零点处为零。平方矩压缩恒等式 $\sum_{k=1}^{n-1}y_k^2=(n-2)\sum_{j=1}^n x_j^2/n$ 表明，(B.14) 中的二次项恰好相消。因此，将其中每个 f_τ 替换为 q_τ 所形成的泛函恰好等于 $-T_s$。

设 $x_1=0$，并考虑中心化变分 $x_1(t)=-(n-1)t$，$x_j(t)=x_j+t$ 对 $j>1$ 成立。置 $v=Qe_1$，于是矩阵方向在 $e^\perp$ 上为 $H=I-nvv^T$，且 $\|v\|^2=(n-1)/n$。将 A_x 对角化，其特征值为 λ_i，并置 $t_i=|v_i|^2$。根据迹海森矩阵公式和引理 B.12，

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Tr}q_\tau(A_x+tH)\Big|_{t=0}&=\sum_{i=1}^{n-1}k_\tau(\lambda_i)-2n\sum_{i=1}^{n-1}k_\tau(\lambda_i)t_i+n^2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}q_\tau'[\lambda_i,\lambda_j]t_it_j\\&\geq\operatorname{Tr}k_\tau(A_x)+\frac{n(n-5)}{2}\langle v,k_\tau(A_x)v\rangle\\&\geq\operatorname{Tr}k_\tau(A_x).\end{aligned}$$

在根这一侧，$k_\tau(0)=0$ 恰好给出 $\frac{d^2}{dt^2}\sum_{j=1}^n q_\tau(x_j(t))\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^n k_\tau(x_j)$。

函数 $z\mapsto k_\tau(\sqrt{z})$ 是递增的、凹的，并且在零点处为零。将（B.2）应用于此函数，得到 $\operatorname{Tr}k_\tau(A_x)\geq\frac{n-2}{n}\sum_{j=1}^n k_\tau(x_j)$。令 $\alpha=s/a$ 且 $\beta=s/b$，则 $-T_s$ 沿该变分的二阶导数至少为

$$\sum_j\left[\frac{a}{n}k_\alpha(x_j)-\frac{b}{n}k_\beta(x_j)-k_s(x_j)\right]. \tag{B.15}$$

每个加项都非负，并且当 $x_j\neq 0$ 时严格为正。为此，令 $z=|x_j|/s$。该加项为 $\frac{2}{ns}\left[-\frac{a^2}{1+az}+\frac{b^2}{(1+bz)^3}+\frac{n}{(1+z)^3}\right]$。对于 $z>0$ 和 $c\in[b,a]$，由于 $b\geq 2$，$\frac{d}{dc}\frac{c^2}{(1+cz)^3}=-\frac{2c}{(1+cz)^3}-\frac{3zc^2}{(1+cz)^4}<\frac{2c}{(1+z)^3}$。从 b 积分到 a，并利用 $a^2-b^2=n$，即可证明其严格为正。在 $z=0$ 处，该加项为零。由于根列表非零，(B.15) 严格为正。因此，在此中心方向上 $T_s''<0$，这与极小性相矛盾。 □

B.12. 反射对数核估计。 这是一个核估计，而不是对对数迹泛函全局非负性的证明。

对于 $t>0$ 集合

$$G_t(x)=\operatorname{sgn}(x)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+|x|}\right),\qquad D_t(x,\xi)=\frac{G_t(\xi)-G_t(x)-G_t'(x)(\xi-x)}{(\xi-x)^2}.$$

固定 $1\le k\le 3/2$，并在 $x>0$ 上定义

$$h(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{k}{(x+k)^2},\qquad D(x,\xi)=D_1(x,\xi)+kD_k(x,\xi),\qquad \mathcal{L}F=F''-\frac{h''}{h'}F'.$$

写作

$$B_k(x)=(x+k)^3+k(x+1)^3,\qquad K_k(x)=\frac{6k(k-1)^2}{(x+1)(x+k)B_k(x)}.$$

引理 B.14。 对于每个 $v\ge 0$ 和 $x>0$,

$$\mathcal{L}D(x,v)=-\frac{K_k(x)}{(1+v)(k+v)},$$

and

$$\mathcal{L}D(x,-v)\ge-\left(1+\frac{(k^2-1)^2}{8k^2}\right)\frac{K_k(x)}{(1+v)(k+v)}.$$

括号中的因子在 $1\le k\le 3/2$上至多为 $313/288$。

证明。对于 $v\ge 0$，布雷格曼差商为 $D_t(x,\ v)=-[(x+t)^2(v+t)]^{-1}$，通过直接求导即可得到第一个恒等式。对于反射差，精确计算为

$$\mathcal{L}\{D(x,-v)-D(x,v)\}=\frac{12vP_k(x,v)}{(k+v)(k+x)(v+1)(x+1)B_k(x)(x+v)^4},$$

其中

$$\begin{aligned}P_k(x,v)&=-(k-1)^2(k+1)x^4+vP_{1,k}(x)+v^2P_{2,k}(x),\\ P_{1,k}(x)&=4kx^4+(8k^2+8k)x^3+(12k^3+12k)x^2\\&\quad+(4k^4+4k^3+4k^2+4k)x+k^5+2k^3+k,\\ P_{2,k}(x)&=(2k+2)x^4+16kx^3+(12k^2+12k)x^2\\&\quad+(8k^3+8k)x+k^4+k^3+k^2+k.\end{aligned}$$

它们的所有系数均为非负数，并且 $P_{1,\ k}(x)\ge 4kx^4$。令 $A=(k-1)^2(k+1)$。如果 $P_k(x,\ v)\ge 0$，则所声称的下界显然成立。否则

$$-P_k(x,v)\le x^4(A-4kv),\qquad \frac{v[-P_k(x,v)]}{(x+v)^4}\le v(A-4kv)\le\frac{A^2}{16k}.$$

将所得下界除以 $K_k(x)/[(1+v)(k+v)]$，可知其额外的相对负部至多为 ${}_{8k^2}{}^{A^2}{}_{(k-1)^2}=(k^2-1)_{8k^2}{}^2$。对于 $k=1$，该公式可直接由非负多项式得到，或由连续性得到。最后，$(k-k^{-1})^2/8$ 在 $[1,3/2]$ 上递增，并在 $k=3/2$处等于 $25/288$。□

缩放。 对于次数为 $2m+1$ 的对数补项，各尺度之比为 $k=(m+1)/m$，权重为 $m,\ m+1=mk$。共同尺度变换并乘以 m 后，该引理仍成立，且具有相同的无量纲因子。一旦某个独立估计控制住临界留数的加权和，这就给出了实际临界留数所需的下界。所需的补偿估计将在下一节中证明。

B.13. 假设存在负对数极小值及其支撑集。 设 $n=2m+1\ge 5$、$a=m+1$、$b=m$，且 $x\in\mathbb{R}^n$ 居中。其临界点压缩为 A_x。对于 $t>0$，令$\ell_t(u)=\frac{|u|}{t}-\log(1+|u|/t)$。在固定的 $s>0$ 处，记 $\alpha=s/a$、$\beta=s/b$，并定义 —

$$\mathcal{J}_s(x)=b\operatorname{Tr}\ell_\alpha(A_x)+a\operatorname{Tr}\ell_\beta(A_x)-(b-1)\sum_{i=1}^n\ell_\alpha(x_i)-b\sum_{i=1}^n\ell_\beta(x_i)-\sum_{i=1}^n\ell_s(x_i).$$

对于未缩放的候选根列表（$a^{[b]},\ \ (-b)^{\ [a]}$），这恰好就是 $-\widetilde{K}_s$。

定理 B.15. 如果 J_s 在某处为负，则它在中心化子空间上的全局负最小值可以取到。每个这样的极小化点都没有零根，正根值至多有两个不同值，负根值也至多有两个不同值。如果任一符号的根有两个不同值，则其中更接近零的值的重数为一。

每个这样的极小化点还满足有理尺度驻定恒等式 $T_s(x) = 0$。此外，若最小根幅值 r 满足 $r \le s/(m+1)$，则不同根值总数至多为三。

定理 B.10 排除了负最小值处至多有三个根值的情形。定理B.16和推论 B.18排除了四值情形。

取到性与零根的排除。对于非零的中心化实数列表，反向一阶矩界为 $W_1 \ge mZ_1/(m+1)$。等号成立要求存在一个由 $m+1$ 个相等根组成的符号组，并且在必要时经过反射后，补压缩为半正定。含有零根的非零列表满足严格不等式。为说明等号成立条件，令 I 表示一个大小为 $r \ge m+1$、总幅值为 S 的负号组的索引。由 I 支撑且其分量之和为零的向量构成的子空间 K 满足 $-2\mathrm{Tr}(P_K A_x) = 2(r-1)S/r$。负部的变分刻画给出 $W_1 \ge 2(r-1)S/r \ge 2mS/(m+1)$。等号成立迫使$r = m+1$ 和 K 约化 A_x，且补块非负。对于 $v \in K$，组外的 $A_x v$坐标均为 $-\sum_{i\in I} x_i v_i/n$。因此，约化迫使多数根相等。等号情形下排除零根，是由第 B.11 节中的严格反向一阶矩引理得出的。

构造绝对值张量列表 $U = |x| \otimes |w_*|$ 和 $V = |w| \otimes |x_*|$。然后

$$\mathcal{J}_s = \frac{\Delta_1}{s} - \sum_{v\in V} \log(1 + v/s) + \sum_{u\in U} \log(1 + u/s), \qquad \Delta_1 = \sum_{v\in V} v - \sum_{u\in U} u \ge 0.$$

考虑 $x_j = L_j \xi_j$，其中有 $L_j \to \infty$、$\|\xi_j\|_2 = 1$ 和 $\xi_j \to \xi$。若 $\Delta_1(\xi) > 0$，线性项将主导$O(\log L_j)$ 对数项。否则，ξ 是一个一阶矩等号情形，因此没有零根。于是，每个 $U(\xi)$ 都非零。在约去数量相等的 $\log L_j$ 项后，若某个 $V(\xi)$ 为零，则对数差趋于 $+\infty$。若它们全都非零，则其极限为 $\log(\prod_{u\in U}(\xi)\ u/\prod_{v\in V}(\xi)\ v) \ge 0$。事实上，$\Delta_1 = 0$ 在极限平坦多数构型上成立。将 B.5 节中证明的逐点比较里的对数参数减小到零，可得乘积界。因此 $\liminf_{\|x\|\to\infty} J_s(x) \ge 0$。连续性和 $J_s(0) = 0$ 保证任何负下确界都能取到。

对于 B.11 小节中的有理比较 T_t，(B.3) 给出 $J_s(x) = \int_s^\infty T_t(x) t^{-2}\,dt$。若 $x_1 = 0$，则沿中心方向（$-(n-1), 1, \dots, 1$）改变这些根。命题 B.13 的证明表明，对于每个 $t > 0$，沿同一方向都有 $T_t'' < 0$。为便于在积分号下求导，写成 $f_t(u) = u^2/(t + |u|)$。其二阶导数为 $2t^2/(t+|u|)^3 \le 2/t$，在零点处也成立。因此，迹海森矩阵公式对厄米 A, H 给出 $|(\mathrm{Tr}\, f_t(A + \varepsilon H))''|$不超过 $2\,\mathrm{Tr}(H^2)/t$。标量项及其平方方向速度也有相同的界。T_t 中的有限个固定伸缩只会改变常数。因此，T_t/t^2的二阶导数在 $[s, \infty$ 上的绝对值不超过 C/t^3。由此得到 $J''_s < 0$，其中排除了负最小值处的零坐标。最后，$\frac{d}{dL} J_s(Lx)\big|_{L=1} = {}^{T_s}(x)\ s$。缩放是一种中心可容许变分，因此在最小值处 $T_s(x) = 0$。

欧拉函数。令

$$g(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - x_i}, \qquad H(z) = z - \frac{1}{g(z)} = \sum_{\nu} \frac{\rho_\nu}{z - \xi_\nu}, \quad \rho_\nu > 0.$$

在重数为 q 的实际根 x_0 处，

$$\sum_{\nu} \frac{\rho_\nu}{(x_0 - \xi_\nu)^2} = \frac{n}{q} - 1 \le n - 1. \tag{B.16}$$

令 $\mathcal{F} = b\ell_\alpha + a\ell_\beta$ 和 $\mathcal{D} = (b-1)\ell_\alpha + b\ell_\beta + \ell_s$。在 $x > 0$ 集合上

$$h = \mathcal{F}'' = \frac{b}{(x+\alpha)^2} + \frac{a}{(x+\beta)^2}, \quad G_t(x) = \ell_t'(x),$$

$$D(x,\xi) = \frac{\mathcal{F}'(\xi) - \mathcal{F}'(x) - h(x)(\xi - x)}{(\xi - x)^2},$$

其中 $D(x,\ x) = \mathcal{F}'''(x)/2$ 对于 $x \ne 0$。定义

$$e(x) = aG_\alpha(x) + bG_\beta(x) - nG_s(x) - xh(x), \qquad E(x) = e(x) + \sum_{\nu} \rho_\nu D(x, \xi_\nu).$$

在 $x < 0$ 中采用 D, e, E 的相同定义，其中 $h(x) = \mathcal{F}''(x)$，且 $G_t(x) = \ell_t'(x)$。记 a_i 为不同根值，记 r_i 为它们的重数。临界点由每个 a_i 的 $r_i - 1$ 个副本以及简单的

零点组成， ξ_ν 位于 $\sum_i r_i/(z-a_i)$ 的每对相邻值之间各一个。令 $A_\nu=\sum_i r_i/(\xi_\nu-a_i)^2$。对 $H=z-1/g$ 应用留数公式和隐式微分可得

$$\rho_\nu=\frac{n}{A_\nu},\qquad \frac{\partial \xi_\nu}{\partial a_i}=\frac{r_i}{A_\nu(a_i-\xi_\nu)^2}.$$

Mov将所有 r_i 副本与 a_i 一并处理。对临界点和与根和求导可得

$$\frac{n}{r_i}\frac{\partial \mathcal{J}_s}{\partial a_i}=n(1-1/r_i)\mathcal{F}'(a_i)-n\mathcal{D}'(a_i)+\sum_\nu \frac{\rho_\nu \mathcal{F}'(\xi_\nu)}{(a_i-\xi_\nu)^2}.$$

这就是 $E(a_i)$。事实上，将 $H(a_i)=a_i$ 以及 (B.16) 代入 D的定义，并使用 $(n-1)\mathrm{F}'-n\mathrm{D}'=aG_\alpha+bG_\beta-nG_s$。即使存在重根，各个坐标导数仍然存在。实际上，沿着厄米直线 $A+tV$，$\mathrm{Tr}\,\mathrm{F}(A+tV)$ 的导数为 $\mathrm{Tr}(\mathrm{F}'(A+tV)V)$。对于多项式，这首先由迹的循环性得到；随后，在包含这些谱的紧区间上对 F' 进行一致多项式逼近，再对 t积分即可推出一般情形。置换对称性使各个 r_i 坐标导数相等。因此，在中心驻点 $E(x_j)=n\lambda$ 对每个 j都成立，并且具有一个公共乘子 λ。令 $\mathrm{L}=\partial_x^2-(h''/h')\partial_x$。由于 $(1/h)'>0$ 在 $x>0$上成立，恒等式 $(E/h)''-(1/h)''(1/h)'(E/h)'=\mathrm{L}_h^E$ 表明，$\mathrm{L}E>0$ 使 E/h 成为关于 $1/h$的严格凸函数。

核与初等补偿。缩放允许 $s=1$。定义

$$K(x)=\frac{6ab(\beta-\alpha)^2}{(x+\alpha)(x+\beta)\{b(x+\beta)^3+a(x+\alpha)^3\}},$$

$$q_m=1+\frac{(2m+1)^2}{8m^2(m+1)^2},\qquad M(x)=\max(1,x/\alpha)\max(1,x/\beta).$$

第B.12 节证明的初等反射核估计表明

$$\mathcal{L}D(x,\xi)\ge -\frac{q_m K(x)}{(\alpha+|\xi|)(\beta+|\xi|)}. \tag{B.17}$$

对于 $m\ge 3$，精确标量证书 `turn2_log_compensation_certificate.py` 证明

$$\mathcal{L}e(x)>q_m(n-1)K(x)M(x),\qquad x>0. \tag{B.18}$$

它根据各个定义重构有理表达式。在三个区域 $x\le\alpha$、$\alpha\le x\le\beta$、$x\ge\beta$ 上，它分别代入

$$x=\frac{z}{(m+1)(1+z)},\quad x=\frac{m+(m+1)z}{m(m+1)(1+z)},\quad x=\frac{1}{m}+z,\qquad m=3+M_0.$$

消去正分母后，z、M_0 中的全部 160、250 和 199 个系数均为非负数，且常数项为正。这是一份有限的精确有理证书，而不是浮点检验。

取一个实际根 x_0 满足 $|x_0|=r$。由于$(x_0-\xi)^2\le(r+|\xi|)^2\le M(r)(\alpha+|\xi|)(\beta+|\xi|)$，（B.16）给出

$$\sum_\nu \frac{\rho_\nu}{(\alpha+|\xi_\nu|)(\beta+|\xi_\nu|)}\le (n-1)M(r). \tag{B.19}$$

结合（B.17）–（B.18）以及 M（r）$\le M$（x），可得$\mathcal{L}E$（x）>0对每个 $x\ge r$均成立。如果 $r\le\alpha$，则 M（r）$=1\le M$（x）对所有 $x>0$均成立，因此这种严格凸性在整个正半轴上成立。

五次补偿。对于 $m=2$（B.18）在 $x\le\beta$时仍然成立。对于 $x\ge\beta$，同一个精确验证器证明了$\mathcal{L}e>\frac{25}{24}$（$n-1$）$KM$（$x$）。经过尺度变换$\alpha=1$，$\beta=k=3/2$后，所需的强化负核界为

$$\mathcal{L}D(x,-v)\,(x+v)^2\ge -\frac{25}{24}K(x)\frac{x^2}{k},\quad x\ge k,$$

其中默认包含公共的正权重因子。使用小节B.12中定义的多项式 P_k，我们得到分子

$$\frac{25}{24}(k-1)^2x^2(1+v)(k+v)(x+v)^2-k(k-1)^2(x+v)^4+2vP_k(x,v).$$

在 $x=k+z$之后，z中的五个系数分别都是多项式 $c_0+c_1v+c_2v^2+\cdots$，其中 c_0，$c_2>0$，高次系数非负，且 $4c_0c_2-c_1^2>0$。五个边际项为

$$\frac{202985919}{1048576},\quad \frac{2847231}{4096},\quad \frac{5593671}{16384},\quad \frac{4093}{128},\quad \frac{15023}{36864}.$$

因此，对于所有 z，$v\ge 0$，分子均为正。对于 $x\ge r$，$|x_0+v|\le x+v$，因此强化估计的下界为 $-(25/24)K(x)M(x)/(x_0+v)^2$。对于 $\xi\ge 0$，使用小节B.12中的同号公式

以及加权留数界（B.19）。利用（B.16）求和可证明$\mathcal{L}E > 0$ 对于 $x \geq r$，即使在 $m = 2$时也成立。如果 $r \leq \alpha$，则证明同样涵盖所有 $x > 0$。

支撑集与重数。 欧拉方程变为 $E(x)/h(x) = n\lambda/h(x)$。凸函数与直线至多相交两次，因此至多有两个正根值。反射可得，负值也有相同结论。若有两个正值，严格凸性给出较小值处的 $E'(u) < 0$ u。事实上，$E/h - n\lambda/h$ 关于 $1/h$ 的导数在其第一个零点处为负，且 $(1/h)' > 0$。若 u 是重根，则用 $u + \varepsilon$，$u - \varepsilon$替换两个副本，同时保持其他根不变。将所得欧拉函数记为 E_ε。由刚刚证明的一阶变分可得

$$n \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_s = E_\varepsilon(u + \varepsilon) - E_\varepsilon(u - \varepsilon). \tag{B.20}$$

为计算差商，写作 $\mu_\varepsilon = \sum_\nu \rho_\nu^\varepsilon \delta_{\xi_\nu^\varepsilon}$。这些正测度的支撑集包含在一个固定的紧区间内，且由 H 在无穷远处的展开式可知，其总质量为 $n^{-1} \sum_j x_j(\varepsilon)^2$,。由公式 $H_\varepsilon = z - 1/g_\varepsilon$，其柯西变换 H_ε在实轴之外收敛到 H。因此，根据柯西变换的唯一性，μ_ε 弱收敛到 μ_0。对于 x 在 $u > 0$的某个紧邻域内，$\partial_x D(x, \xi)$关于x、ξ 联合连续；根据泰勒公式，在 $\xi = x$ 处也成立。因此，E'_ε 在该处一致收敛到 E'。将 (B.20) 除以 ε 并取极限，得到 $\mathsf{J}_s''(0) = 2E'(u)/n < 0$，这与极小性矛盾。反射可得负侧上的结论。

若 $r \leq \alpha$，则在两条完整半轴上都成立严格凸性。两个正交点要求 $E(0+) > n\lambda$；两个负交点经反射后要求 $E(0-) < n\lambda$。单侧极限满足 $E(0+) \leq E(0-)$：唯一可能的跳跃来自临界极点 $\xi = 0$，其大小为 $E(0-) - E(0+) = 2\rho_0(b/\alpha^3 + a/\beta^3) \geq 0$。这两个要求彼此不相容，因此在此情形下至多有三个不同的值，从而完成定理 B.15 的证明。

B.14. **四值约化。** 设 $\mathcal{J}_s < 0$ 处于某处。定理 B.15 给出了一个取得的负全局最小值，其中没有零根，每个符号至多有两个值，并且在具有两个值的任一符号侧都有一个简单的内侧值。定理 B.10排除了所有至多含三个值的构型。

因此，经过反射后，最小值具有如下形式

$$x = (-A)^{[k]}, -B, C, D^{[\ell]}, \qquad 0 < B < A, \quad 0 < C < D, \quad kA + B = C + \ell D, \tag{B.21}$$

where $k + \ell = n - 2$ 和 $1 \leq k \leq m - 1$、$\ell \geq m$。加强后的支撑集限制还给出

$$s < (m + 1) \min(B, C). \tag{B.22}$$

设 $B = 1$，$A = -1/k$，且 C，D 固定。这是在每个严格四值列表处的双侧可容许中心化变分。定理 B.16 和推论 B.18 表明，在（$\mathcal{J}_s$ B.22）下，该变分严格减小 $\mathcal{J}_s$，这与驻定性矛盾。

B.15. **具有非负中间临界点的少数项平均。** 设 $n = 2m+1 \geq 5$，$1 \leq k \leq m-1$，$\ell = n - 2 - k$，并考虑

$$x = (-A^{[k]}, -B, C, D^{[\ell]}), \qquad A > B > 0, \quad D > C > 0, \quad kA + B = C + \ell D.$$

少数项的符号为负。以速度 1 改变 B，以速度 $-1/k$ 改变 A，保持 C，D 固定。点号表示这种平均变分。令

$$\ell_t(x) = |x|/t - \log(1 + |x|/t), \qquad G_t(x) = \frac{x}{t(t + x)} \quad (x \geq 0), \qquad \Delta_t = \frac{1}{t + B} - \frac{1}{t + A}.$$

根泛函的导数为 $Z_{\ell_t} = -\Delta_t$。

定理 B.16。 假设三个非持久临界点的中间临界点非负。则

$$\dot{W}_{\ell_t} < -\Delta_t \quad (0 < t \leq B),$$

并且，对于 $\kappa = m/(m+1) = (n-1)/(n+1)$，

$$\dot{W}_{\ell_t} < -\kappa \Delta_t \quad (0 < t \leq B/\kappa).$$

因此，在每个满足 $s < (m + 1)\min(B, C)$ 的此类四值构型中，对数比较泛函 J_s 在少数项平均下严格递减。它不可能在那里具有驻点。

临界速度与两个精确矩。 将三个非持久临界点写为 $-u, v_1, v_2$，其中 $B<u<A$ 且 $0\le v_1<C<v_2<D$。在正的单临界点 v 处，世俗微分给出

$$\dot v=\frac{(v+A)^{-2}-(v+B)^{-2}}{k(v+A)^{-2}+(v+B)^{-2}+(v-C)^{-2}+\ell(v-D)^{-2}}<0.$$

设 $\rho_i=-\dot v_i>0$、$\eta=\rho_1+\rho_2$ 和 $d=(k-1)/k$。迹为零意味着 $\dot u=d-\eta$。令 $K=A-B$。下方的量 q_1,q_2 为正，而当 $k=1$ 时 $q_0=0$，当 $k>1$ 时 $q_0>0$。置

$$q_0=d(A-u),\qquad q_i=\rho_i(u+v_i)\quad(i=1,2).$$

中心化根与临界点的恒等式，

$$W_2=\frac{n-2}{n}Z_2,\qquad \sum_{j=1}^{n-1}w_j^3=\frac{n-3}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^3,$$

及其导数推出，在 $c=(n-2)/n$ 且 $c_3=(n-3)/n$ 时，

$$q_1+q_2=cK-q_0=:Q,\qquad q_1v_1+q_2v_2=ucK+Aq_0-c_3K(A+B)=:M_1. \tag{B.23}$$

$\dot Z_2=-2K$ 且 $\frac{d}{dt_{\rm flow}}\sum_{i=1}^n x_i^3=3K(A+B)$。在临界和中，持久负块对 $-2dA$ 的贡献为 $\dot W_2$，对 $3dA^2$ 带符号三次导数的贡献为。减去持久负块的贡献，便可直接得到（B.23）。

迹泛函的精确导数为

$$-\dot W_{\ell_t}=\frac{q_0}{(t+A)(t+u)}+\sum_{i=1}^{2}q_i\frac{G_t(u)+G_t(v_i)}{u+v_i}. \tag{B.24}$$

方程（B.23）和（B.24）通过 $v_1=0$ 连续性得以延拓。

一个初等的核下界。对于 $u,\ t>0$ 以及 $v\ge 0$,

$$\frac{G_t(u)+G_t(v)}{u+v}\ge\frac{1-v/(4u)}{t(t+u)}. \tag{B.25}$$

事实上，左侧除以 $1/[t(t+u)]$,后为 $1+v(u-v)/[(t+v)(u+v)]$。与 $1-v/(4u)$ 的差为 $v\{t(u+v)+v^2-3uv+4u^2\}$ $4u(t+v)(u+v)\ge 0$，因为 $v^2-3uv+4u^2=(v-3u/2)^2+7u^2/4>0$。结合（B.25）和（B.24）得到

$$-\dot W_{\ell_t}\ge\frac{q_0}{(t+A)(t+u)}+\frac{M}{t(t+u)},\qquad M=Q-\frac{M_1}{4u}. \tag{B.26}$$

The 世俗位置约束。令 $h=\ell+1\ge k+2$ 并通过缩放将 $K=1$ 正规化。Se t

$$p=B/K>0,\qquad z=(u-B)/K\in(0,1),\qquad A=p+1,\quad u=p+z,\quad n=k+h+1.$$

负临界方程为 $\frac{k}{A-u}=\frac{1}{u-B}+\frac{1}{u+C}+\frac{\ell}{u+D}$。它首先给出 $z>1/(k+1)$。对于总和为 $kA+B$ 的 h 正根，应用詹森不等式可得到附加约束

$$F:=hz^2+\{(k+1)p+k-h\}z-p-k/n\ge 0. \tag{B.27}$$

为说明这一点，使用 $1/(u+C)+\ell/(u+D)\ge h^2/(hu+kA+B)$，并将所得不等式乘以正分母。

标量证书。当 $d=(k-1)/k$时，有 $q_0=d(1-z)$ 以及

$$4(p+z)M=\mathcal{M}:=3c(p+z)-d(1-z)(5p+4z+1)+c_3(2p+1).$$

在 z 中进行多项式除法可得 $\mathcal{M}=4(k-1)hk\,F+R_M$。在 $h=k+2+H$、$k=1+K_0$ 之后，R_M 的分子除以其正分母后，在 p、z、K_0、H 中含有 25 个非负系数以及一个正的常数系数。因此，$M>0$ 在所需区域内处处成立。

对于 $\theta=1$ 或 $\theta=(n-1)/(n+1)$，将 (B.26) 与 $\theta\Delta_t$ 进行比较等价于

$$\Phi_\theta(t):=q_0t(t+p)+M(t+p+1)(t+p)-\theta t(t+p+z)>0.$$

其二次项系数为 $c-\theta-M_1/[4(p+z)]<0$，根据 (B.23)；它关于 t 是凹的，且 $\Phi_\theta(0)=p(p+1)M>0$。只需检查其另一个端点 $t=p/\theta$。定义 $E_\theta=4(p+z)p^{\theta^2}\Phi_\theta(p/\theta)$。对于 $k\ge 2$，将 $E_\theta=Q_\theta F+R_\theta$ 除以 z。余式关于 z 是仿射的。精确有理数运算给出

$$Q_1=\frac{4(2kp+k-2p-2)}{hk},$$

$$Q_\kappa=\frac{4(h+k)(2hkp+hk-2hp-2h+2k^2p+k^2-2p-2)}{hk(h+k+2)^2}.$$

对于 $k\ge 2$、 $h\ge k+2$、 $p\ge 0$，二者均为非负数。在 $k=2+K_0$、 $h=k+2+H$之后，精确展开式验证了

$$\partial_z R_\theta\ge 0,\qquad R_\theta\big(1/(k+1)\big)>0.$$

和 $R_\theta(1/(k+1))$ 的分子中正系数的数量分别为 26、8 （当 $\theta=1$时），以及41、30 （当 $\theta=\kappa$时）。结合（B.27）和 $z>1/(k+1)$，即可证明 $E_\theta>0$。所有多项式恒等式和系数符号均由 turn2_minority_positive_center_certificate.py通过精确有理数运算重构并检查。它没有缓存的输入，也不进行浮点计算。

对于 $k=1$、 $q_0=0$ 和 $M=3c/4+c_3\,(2p+1)\,/[4\,(p+z)\,]$。固定端点 $t=p/\theta$时，原始 $\Phi_\theta\,(t)$ 随着 z严格递减。由于 $z<1$，只需使用 $z=1$。两个缩放后的端点可因式分解为

$$E_1\big|_{k=1,z=1}=\frac{2(2p+1)(3hp+2h-6p-5)}{h+2}>0,$$

$$E_\kappa\big|_{k=1,z=1}=\frac{2(2hp+h+4p+1)(3hp+2h-4p-3)}{(h+3)^2}>0,$$

由于 $h\ge 3$。关于 t 的凹性现在证明了定理 B.16中的两个单尺度不等式。

对数比较的应用。 由于 $\ell\ge k+1$，中心化意味着 $A>D$。中间临界点的非负性等价于 $k/A+1/B-1/C-\ell/D\ge 0$，因此有 $B<C$。令 $a=m+1$、$b=m$、 $\alpha=s/a$、 $\beta=s/b$。最小值的尺度约束给出 $\alpha<B$ 和 $\beta<B/\kappa$。因此

$$\dot{J_s}=b\,\dot W_{\ell_\alpha}+a\dot W_{\ell_\beta}+(b-1)\Delta_\alpha+b\Delta_\beta+\Delta_s<-b\Delta_\alpha-a\kappa\Delta_\beta+(b-1)\Delta_\alpha+b\Delta_\beta+\Delta_s=-\Delta_\alpha+\Delta_s<0.$$

这证明了最后一个断言，并排除了整个四值分支成为负的全局
对数最小值。

B.16. **负中间分支：留数证明**。 固定 $n=2m+1\ge 5$ 和整数

$$1\le k\le m-1,\qquad \ell=n-2-k,\qquad h=\ell+1=n-k-1\ge k+2.$$

考虑根列表如下的中心化实根多项式

$$(-A)^{[k]},\ -B,\ C,\ D^{[\ell]},\qquad A>B>0,\quad D>C>0,\quad kA+B=C+\ell D.$$

这里，负号组是少数符号组。特别地， $\ell\ge k+1$，而中心化意味着$A>D$，因为$(k+1)$
$A>kA+B=C+\ell D>\ell D\ge(k+1)D$。使用中心化平均变分

$$\dot A=-\frac{1}{k},\qquad \dot B=1,\qquad \dot C=\dot D=0,\tag{B.28}$$

并令 $K=A-B$。对于 $t>0$，定义

$$\ell_t(x)=\frac{|x|}{t}-\log\left(1+\frac{|x|}{t}\right),\qquad W_t=\sum_{j=1}^{n-1}\ell_t(w_j),\qquad \Delta_t=\frac{K}{(t+A)(t+B)},\qquad L(t)=-\frac{\dot W_t}{\Delta_t}.$$

相应的根和满足 $\frac{d}{d\tau}\sum_{i=1}^{n}\ell_t(x_i)=-\Delta_t$。假设中间非持久临界点非正。将三个非持久临界点写为

$$-u,\ -v,\ w,\qquad B<u<A,\quad 0\le v<B,\quad C<w<D.$$

T持久临界点为 $-A$，重数为 $k-1$，以及 D，重数为 $\ell-1$。

定理 B.17。 对于每个这样的根列表，

$$\frac{d}{dt}\big(tL(t)\big)>0\qquad (t>0).$$

此外，

$$L(t)>\min\left\{1,\frac{C}{t}\right\}\qquad (t>0).\tag{B.29}$$

证明。 首先假设 $v>0$。在估计 $v=0$ 之后，我们由 $(tL(t))'$ 根据（B.31）得到 。将世俗导数公式应用于 $g(z)=\frac{k}{z+A}+\frac{1}{z+B}+\frac{1}{z-C}+\frac{\ell}{z-D}$，可得

$$\zeta=\dot v>0,\qquad \eta=-\dot w>0.$$

事实上，在 $z=-v$ 或 $z=w$ 处，带符号的临界速度为

$$\frac{(z+A)^{-2}-(z+B)^{-2}}{k(z+A)^{-2}+(z+B)^{-2}+(z-C)^{-2}+\ell(z-D)^{-2}}<0.$$

临界点迹为零，因此，由 $d=(k-1)/k$， $\dot{u}=d-\zeta-\eta$。

精确留数恒等式。对于速度为 $\dot{z}$ 的绝对临界幅值 $z>0$，其对$L(t)$的贡献可写为

$$-\frac{\dot{z}}{K}\frac{z(t+A)(t+B)}{t(t+z)}=-\frac{z\dot{z}}{K}-\frac{AB\dot{z}}{Kt}+\frac{\dot{z}(z-A)(z-B)}{K(t+z)}.$$

中心化二次恒等式为

$$\sum_{j=1}^{n-1}w_j^2=c_n\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\qquad c_n=\frac{n-2}{n}.$$

因此， $\sum z\dot{z}=-c_nK$ 沿着 (B.28)。此外， $\sum\dot{z}=-2\eta$：带符号的临界点迹仍为零，而 w 是唯一移动的正临界点。由此可得

$$L(t)=c_n+\frac{r_0}{t}+\frac{r_u}{t+u}+\frac{r_v}{t+v}+\frac{r_w}{t+w},\tag{B.30}$$

其中

$$r_0=\frac{2\eta AB}{K}>0,\quad r_u=-\frac{\dot{u}(A-u)(u-B)}{K},\quad r_v=\frac{\zeta(A-v)(B-v)}{K}\geq 0,\quad r_w=-\frac{\eta(A-w)(B-w)}{K}.$$

持久临界点不会产生非零的有限极点留数：在 A 处的留数含有因子 $z-A$，而在 D 处的速度为零。对 (B.30) 求导得

$$(tL(t))'=c_n+\frac{r_uu}{(t+u)^2}+\frac{r_vv}{(t+v)^2}+\frac{r_ww}{(t+w)^2}.\tag{B.31}$$

正临界点至多贡献 4/27。由于 $A>D>w$，留数 r_w 只有在 $B>w$ 时才可能为负。设此情形成立，并令

$$S_2(w)=\frac{k}{(w+A)^2}+\frac{1}{(w+B)^2}+\frac{1}{(w-C)^2}+\frac{\ell}{(w-D)^2}.$$

世俗微分给出 $\frac{\eta}{K}=\frac{2w+A+B}{w+A^2\,w+B}(\ )(\ )^2S_2(w)$。由于 $0<C<w$，我们有 $S_2(w)>w^{-2}$。因此 $-\frac{r_w}{w}<\frac{w}{(2w+A+B)(A-w)(B-w)(A+w)^2(B+w)^2}$。令 $P=(A-w)/(A+w)$ 和 $Q=(B-w)/(B+w)$，则 $0<P,Q<1$。$-r_w/w$的上界变为 $\frac{1}{2}PQ(2-P-Q)\leq\frac{4}{27}$。事实上，$PQ\leq(P+Q)^2/4$，且$s^2(2-s)/8$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 4/27，在 $s=4/3$处取得。因此，无论 r_w 是否为负，

$$\frac{r_ww}{(t+w)^2}>-\frac{4}{27}\qquad(t>0).\tag{B.32}$$

外部的 negative 临界点至多贡献 1/2。还需考虑 $r_u<0$，等价于 $\dot{u}>0$。置

$$x=A-u,\qquad y=u-B,\qquad q=\frac{x}{y},\qquad p=\frac{B}{y}.$$

则 $p>0$、 $u=(p+1)y$，以及 $K=(q+1)y$。将正根写作 $a_1=C$和 $a_2=\cdots=a_h=D$，在 $-u$ 处的世俗方程为

$$\frac{k}{x}=\frac{1}{y}+\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{u+a_j}.\tag{B.33}$$

此外，

$$\dot{u}=\frac{y^{-2}-x^{-2}}{S_2(-u)},\qquad S_2(-u)=\frac{k}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{(u+a_j)^2}.$$

因此， $\dot{u}>0$ 意味着 $q>1$，而（B.33）意味着 $q<k$。特别地，当 $k=1$时，有害情形不可能发生。设 $k\geq 2$。定义 $D_0=h(k+q^2)+(k-q)^2$。根据柯西不等式和（B.33）， $y^2S_2(-u)\geq\frac{k}{q^2}+1+\frac{(k/q-1)^2}{h}=\frac{D_0}{hq^2}$。因此

$$-\frac{r_u}{u}=\frac{\dot{u}xy}{Ku}\leq\frac{hq(q-1)}{(p+1)D_0}.\tag{B.34}$$

中心化得到 $\sum_{j=1}^{h}a_j=kA+B$，因此 $\sum_{j=1}^{h}(u+a_j)=y(np+h+k+kq)$。将倒数柯西不等式应用于此和式以及（B.33）可得

$$G:=(k-q)(np+h+k+kq)-h^2q\geq 0.\tag{B.35}$$

Set

$$F=(p+1)D_0-2hq(q-1),\qquad d_0=h-k\ge 2.$$

将差值 $F-G$ 用 $d_0=h-k$ 展开可得

$$F-G=p\big[(h+1)q^2+(d_0+1)q-k\big]+q\big[(h+k)(d_0+1)+2d_0-(d_0-1)q\big]. \tag{B.36}$$

对于 $1<q<k$，第一个括号至少为 $2(d_0+1)>0$，第二个至少为 $h(d_0+3)>0$。现在由方程（B.35）和（B.36）得到 $F>G\ge 0$。由（B.34）可得 $-\frac{r_u}{u}<\frac12$，因此，在允许 $r_u\ge 0$的情形下同样有，

$$\frac{r_u u}{(t+u)^2}>-\frac12\qquad (t>0). \tag{B.37}$$

严格单调性。式（B.31）中的 r_v 项非负。对于 $n\ge 7$，由（B.32）和（B.37）可得 $(tL(t))'>\frac{n-2}{n}-\frac12-\frac{4}{27}\ge\frac{25}{378}>0$。对于 $n=5$，必然有 $k=1$，因此 $r_u\ge 0$ 以及 $(tL(t))'>\frac35=\frac{4}{27}=\frac{61}{135}>0$。定义 L 和 $(tL)'$ 的所有量在 $v\downarrow 0$时都有连续极限：ℓ_t 在零点处连续可微，而在（B.31）中，v 项趋于零。在 $v=0$处，由连续性可得 $(tL)'\ge 25/378$（当 $n\ge 7$时），以及 $(tL)'\ge 61/135$（当 $n=5$时）。

The 基准估计及其推广。为完整起见，我们展示 $L(t)>1$ 对于 $0<t\le C$。L et

$$p(z)=(z+A)^k(z+B)(z-C)(z-D)^\ell,\qquad R(z)=\frac{p(z)}{(z+A)(z+B)},\qquad \psi(z)=\frac{R'(z)}{p'(z)}.$$

变分 (B.28) 满足 $\dot p(z)=KR(z)$。对于 $0<t<C$，世俗函数 $g(z)=p'(z)/p(z)$ 在 $(-B,C)$ 上严格递减，并在 $-v\le 0$ 处取零。因此 $g(t)<0$ 以及

$$\psi(t)=\frac{1}{(t+A)(t+B)}\left(1-\frac{(t+A)^{-1}+(t+B)^{-1}}{g(t)}\right)>\frac{1}{(t+A)(t+B)}.$$

由于 $t\uparrow C$，$g(t)\to-\infty$，因此 $\psi(C)=1/((C+A)(C+B))$。对数行列式变分为 $W_t=-K\psi(t)+{}_t\frac{2w^2}{w^2-t^2}()\dot w$。为说明修正项，首先在带符号的临界谱上使用 $-z/t-\log|1-z/t|$；由于带符号迹的变分为零，其总变分为 $-K\psi(t)$。在正谱上，对 ℓ_t 的修正为 $2z/t+\log|1-z/t|-\log(1+z/t)$，其关于 z 的导数为 $2z^2/[t(z^2-t^2)]$。只有 w 具有非零的正谱速度。由于 $t\le C<w$ 和 $\dot w<0$，该修正项严格为负。因此，$W_t<-\Delta_t$ 且 $L(t)>1$ 对于 $0<t\le C$。

Fi最后，严格单调性 of $tL(t)$ 给出，对于 $t>C$, $tL(t)>CL(C)>C$。这证明了（B.29）。 □

推论 B.18。令 $\kappa=m/(m+1)$。则

$$\dot W_t<-\kappa\Delta_t\qquad whenever\qquad 0<t\le\frac{\min(B,C)}{\kappa}.$$

因此，中间项为负的四值分支不可能是对数比较泛函的负最小值。

证明。第一个断言由所述范围内的 $L(t)>\min\{1,C/t\}\ge\kappa$ 得出。对于最后一个断言，令$a=m+1$、$b=m$，并假设一个假定的负最小值具有谱参数 $s<a\min(B,C)$。写作 $\alpha=s/a$ 和 $\beta=s/b$。对数比较中的根项给出精确变分 $\dot{\mathcal J}_s=bW_\alpha+aW_\beta+(b-1)\Delta_\alpha+b\Delta_\beta+\Delta_s$。这里 $\alpha<\min(B,C)\le C$ 以及 $\beta<\min(B,C)/\kappa$。定理和第一个断言意味着

$$\dot{\mathcal J}_s<-b\Delta_\alpha-a\kappa\Delta_\beta+(b-1)\Delta_\alpha+b\Delta_\beta+\Delta_s=-\Delta_\alpha+\Delta_s<0,$$

因为 $a\kappa=b$、$s>\alpha$ 和 Δ_t 随 t 严格递减。这与驻定性矛盾。 □

B.17. **对数不等式与幂不等式的完成**。

定理 B.19。对于每个奇数 $n=2m+1\ge 5$、每个中心化实根列表 x 以及每个 $s>0$，均有 $J_s(x)\ge 0$。

证明。负值将给出所取得的四值最小值（B.21），其中（B.22）。令 $a=m+1$，$b=m$，$\alpha=s/a$，$\beta=s/b$，$\kappa=b/a$。令 $\Delta_t=(t+B)^{-1}-(t+A)^{-1}>0$。它随 t 严格递减。

若中间非持久临界点非负，则由第一个平均定理可得 $W_{\ell_\alpha}<-\Delta_\alpha$ 和 $W_{\ell_\beta}<-\kappa\Delta_\beta$。若其为负，则第一个界由基准估计给出，第二个界由余数单调性定理给出：当 $\beta\le C$ 时，较强的界中系数为 1；而当 $C<\beta<C/\kappa$ 时，有 $-W_{\ell_\beta}/\Delta_\beta>C/\beta>\kappa$。在这两种情况下，尺度限制均给出 $\alpha<\min(B,\ C)$ 和 $\beta<\min(B,\ C)/\kappa$。

由于 $Z_{\ell_t} = -\Delta_t$，可得

$$\mathcal{J}_s = bW_{\ell_\alpha} + aW_{\ell_\beta} + (b-1)\Delta_\alpha + b\Delta_\beta + \Delta_s < -b\Delta_\alpha - a\kappa\Delta_\beta + (b-1)\Delta_\alpha + b\Delta_\beta + \Delta_s = -\Delta_\alpha + \Delta_s < 0.$$

这与最小值的驻定性矛盾。因此，不存在负值。 □

等式（B.4）现已证明所声称的不等式对每个中心化实数列表以及任意 $2 < p < 3$均成立。角压缩论证则证明，对具有相同系数的任意中心化复根，该不等式也成立。

对于定理 B.1中的等号多项式，直接求导可得临界列表

$$(n+1)^{[\frac{n-3}{2}]}, \quad (-(n-1))^{[\frac{n-1}{2}]}, \quad 2.$$

其根和为零，并且

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p = \frac{(n-1)(n+1)^p + (n+1)(n-1)^p}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} |w_k|^p = \frac{(n-3)(n+1)^p + (n-1)^{p+1} + 2^{p+1}}{2}.$$

它们的比值为 $C_{n,\,p}$，从而证明了等号与锐性。定理 B.1至此得证。

B.18. **精确验证。** 附录D 说明了定理 B.19中所使用的代数检验。在定理B.17的证明中，符号验证器 检查了用于得到留数界（B.32）和（B.37）的恒等式。

附录 C。当 $p \geq 3$ 时奇数次不等式的辅助证明

C.1. **奇数次的锐不等式。** 本附录证明了定理1.7，包括其等号情形，其中 $p \geq 3$。在 $p = 3$ 处的等号情形还用于第 8 节中 $2 < p < 3$。多项式符号检查见附录 D。

定理 C.1。 对于 $n = 2m+1 \geq 5$、$p \geq 3$ 以及任意中心化复数构形，

$$W_p \leq B_{n,p} Z_p. \tag{C.1}$$

除 $p(z) = cz^n$ 在 $c \neq 0$的情形外，等号当且仅当多项式属于 （8.13）。

（8.1）中的表达式是定理 1.7中的系数，约去公因子 2^{p+1} 后所得。在指数 $p = 3$ 处，(8.1) 给出 $B_{n,\,3} = (n^3 - n^2 - n - 7)/((n+1)(n^2+1))$。

C.1.1. 实数极值约化。 对于中心化非零实数配置 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，记 W_p/Z_p为（4.1）中定义的临界点幂和与根幂和之比。由齐次性，最大值在紧集 $\sum_{j=1}^n x_j = 0$，$\sum_{j=1}^n x_j^2 = 1$上取得。

引理 C.2。 设 $n = 2m+1 \geq 5$ 和 $p \geq 3$。使 W_p/Z_p 达到最大值的每个实数构型至多有三个不同的值。若这些值为 $a < b < c$，则 b 的重数为 *1*。

证明。步骤 *1*。正有理表示。 将不同的零点值写为 $a_1 < \cdots < a_s$，其重数为 r_i。由重根强制产生的临界点之外的 $s-1$ 个临界点，记为 ξ_ν，是 $G(z) = n^{-1}\sum_{i=1}^s r_i/(z-a_i)$ 的简单交错零点。定义 $A_\nu = \sum_{i=1}^s r_i/(\xi_\nu - a_i)^2$ 和 $\rho_\nu = n/A_\nu > 0$。部分分式以及在无穷远处进行中心化可得

$$H(z) := z - \frac{1}{G(z)} = \sum_{\nu=1}^{s-1} \frac{\rho_\nu}{z - \xi_\nu}, \qquad H(a_i) = a_i, \qquad H'(a_i) = 1 - \frac{n}{r_i}. \tag{C.2}$$

事实上，$-1/G$ 在 ξ_ν处的留数为 n/A_ν，且 $H(z) = (n^{-1}\sum_{j=1}^n x_j^2)z^{-1} + O(z^{-2})$。特别地，总质量$\sum_{\nu=1}^{s-1}\rho_\nu$ 为正。

步骤 *2*。关于所有不同的零点值的一个方程。令 C_* 为最大比值，并令 $f(t) = |t|^p$。于是，$F = W_p - C_* Z_p$ 取得值为零的约束极大值。非强制根随不同的零点值光滑变化，且有 $\partial\xi_\nu/\partial a_i = r_i/(A_\nu(\xi_\nu - a_i)^2)$。因此，对于某个实数 λ，$\left(1 - \frac{1}{r_i} - C_*\right) f'(a_i) + \sum_{\nu=1}^{s-1} \frac{f'(\xi_\nu)}{A_\nu(\xi_\nu - a_i)^2} = \lambda$。对于 $x \neq y$，定义

$$D_f(x,y) = \frac{f'(y) - f'(x) - f''(x)(y-x)}{(y-x)^2}, \qquad L(x) = \sum_{\nu=1}^{s-1} \rho_\nu D_f(x, \xi_\nu). \tag{C.3}$$

对于 $p>3$ 取对角矩阵上的连续取值 $f'''(x)/2$。对于 $p=3$，当远离零点时采用此约定；当零点是一个原始零点时，所有 ξ_ν 均不为零，并且 $L(0)$ 定义良好。将 (C.2) 和 $xf''(x) = (p-1)f'(x)$ 代入驻点方程可得

$$g(a_i)=0, \qquad g(x)=L(x)-df'(x)-n\lambda, \qquad d=p-n(1-C_*). \tag{C.4}$$

显式构型（8.13）给出$C_* \geq B_{n,\,p} > (m-1)/m$，因为 $B_{n,\,p}-(m-1)/m = (m^{p-1}+1)/D_p > 0$。因此，$n(1-C_*) < n/m \leq 5/2 < p$，且 $d>0$。

步骤 3。当 $p>3$ 时计算零点。 对于 $x\neq 0$，令 $K(x)=L'(x)/f''(x)$。由于 f''' 在 $p>3$上局部绝对连续，(C.3) 中的泰勒积分余项，再作代换 $t=s/(1+s)$ 和$s=xu$，可得对于 $x>0$,

$$K(x)=\frac{(p-2)(p-3)}{x}\sum_{\nu=1}^{s-1}\rho_\nu\int_0^\infty \frac{|1+u\xi_\nu|^{p-4}}{(1+xu)^p}\,\mathrm{d}u. \tag{C.5}$$

在 $1+u\xi_\nu=0$处的奇点是可积的，因为 $p-4>-1$。该积分在无穷远处也收敛。固定u时，因子 $x^{-1}(1+xu)^{-p}$ 关于 $x>0$严格递减。因此，(C.5) 表明 K 在该半轴上从无穷大严格递减至零。在零点处的极限可通过在一个固定的小 u 区间上积分得到；对于 $x\geq x_0$，界 $K(x)\leq (x_0/x)K(x_0)$ 证明了另一个极限。反射表明，在负半轴上，它从零严格递增至无穷大。

根据（C.4），$g'(x)=f''(x)$（$K(x)-d$）。因此，连续函数 g 先严格递减，继而递增，最后递减。它至多有三个不同的实零点。如果它有三个零点且中间零点 b 非零，则$g'(b)>0$。如果 $b=0$ 是一个原始零点，则所有 ξ_ν 均不为零，且直接求导得到

$$g'(0)=2p\sum_{\nu=1}^{s-1}\rho_\nu|\xi_\nu|^{p-4}>0. \tag{C.6}$$

步骤 4。端点 $p=3$。对于 $x>0$，当 $y\geq 0$时，差商等于 3；当 $y<0$时，差商等于 $3-6y^2/(x-y)^2$。因此

$$\frac{L'(x)}{6x}=\frac{2}{x}\sum_{\xi_\nu<0}\frac{\rho_\nu\xi_\nu^2}{(x-\xi_\nu)^3}. \tag{C.7}$$

（C.7）的右侧在其求和项非空时严格从无穷递减至零，否则为零。通过反射可得到负半轴上的相应结论。因此，同样的三个单调区间就足够了，只需允许某一半轴上的递增区间为空。在 $\xi_\nu=0$ 处的质量会在零点处产生 $6\rho_\nu$ 的向上跳跃，但这不会在允许的原始根位置处产生额外的零点。如果两个半轴上的递增区间均为空，则至多有两个零点。否则，递增区间与任何向上跳跃会合并为一个递增区间。至多有三个允许的零点，并且非零中间零点处的导数为正。

如果零点是原始零点，（C.2）给出 $\sum_\nu \rho_\nu/\xi_\nu = 0$。根据（C.7），$g$ 在零点处的右导数为 $12\sum_{\xi_\nu<0}\rho_\nu/|\xi_\nu|$。反射给出左导数 $12\sum_{\xi_\nu>0}\rho_\nu/\xi_\nu$。两个和相等，因此 $g'(0)=6\sum_\nu \rho_\nu/|\xi_\nu|>0$。

步骤5。拆分一个重复的中间值。 假设中间值 b 的重数为 $r\geq 2$，并写作$p_0(z)=(z-b)^r Q(z)$，$Q(b)\neq 0$。将 b的两个副本替换为 $b-\varepsilon$，$b+\varepsilon$：$p_\varepsilon(z)=(z-b)^{r-2}((z-b)^2-\varepsilon^2)Q(z)$。对数导数的变化为 $2\varepsilon^2/((z-b)((z-b)^2-\varepsilon^2))$。因此 $\xi_\nu(\varepsilon)=\xi_\nu+A_\nu\,2\varepsilon^2\,(\xi_\nu-b)_3+O(\varepsilon^4)$。将趋于 b 的 $r-1$ 个临界点写作 $b+u_j$。它们的和满足

$$\sum_{j=1}^{r-1}u_j=-2\varepsilon^2\sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{1}{A_\nu(\xi_\nu-b)^3}+O(\varepsilon^4), \qquad \sum_{j=1}^{r-1}u_j^2=\frac{2(r-2)}{r}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2).$$

第一个公式使用所有临界点之和，且该和保持不变。对于第二个公式，对 $p_\varepsilon(z)$求导并进行缩放$z-b=\varepsilon u$：对于 $r\geq 3$，两个移动的根的主导位移为 $\pm\sqrt{(r-2)/r}\,\varepsilon$；而对于 $r=2$，唯一的邻近位移为 $O(\varepsilon^2)$。

由于 $f\in C^2$，F 的展开式在 $b=0$ 处同样有效，并给出

$$F(p_\varepsilon)-F(p_0)=\left[\left(1-C_*-\frac{2}{r}\right)f''(b)+2\sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{f'(\xi_\nu)-f'(b)}{A_\nu(\xi_\nu-b)^3}\right]\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)=\frac{g'(b)}{n}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)>0. \tag{C.8}$$

对于 $b\neq 0$，第二个等号可通过对（C.3）求导，并利用（C.2）以及 $bf'''(b)=(p-2)f''(b)$得到。在$b=0$处，结论可直接由（C.6）或其三次多项式版本推出。（C.8）与极大性矛盾。中间值是单根。

□

C.1.2. 三次比较与分块和。 引理C.2中的每个中心化三值构型，经反射和正比例缩放后，均为

$$-\ell - t \ (k \text{ copies}), \qquad (n-1)t \ (1 \text{ copy}), \qquad k - t \ (\ell \text{ copies}), \quad -\ell/n \le t \le k/n, \tag{C.9}$$

其中 $1 \le k \le m$ 且 $\ell = 2m - k$。端点包含所有中心化二值构型。事实上，将最小值与最大值之间的间距归一化为 $n-1$，再通过中心化得到（C.9）。

令 $\tau = nt$ 并将（C.9）乘以 n。引入

$$\begin{aligned} A = n\ell + \tau, \quad B = (n-1)\tau, \quad C = nk - \tau, \quad S = n(k-\ell) + (n-3)\tau, \\ D = ((n-1)\tau - n(k-\ell))^2 + 4nk\ell. \end{aligned} \tag{C.10}$$

原始值为 $-A$，B，C，两个未受约束的临界点为 $\lambda_\pm = (S \pm \sqrt{D})/2$。有$A$，$C > 0$ 且 $\lambda_- < 0$。对于 $\overline{B} \le 0$，这由交错性可得。对于 $B \ge 0$，乘积 $\lambda_-\lambda_+ = -(n-2)\tau^2 + n(n-2)(k-\ell)\tau - nk\ell$ 为负。令 $U = -\lambda_- > 0$ 和 $V = |\lambda_+|$。

对于 $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$，按所列顺序对三组数对求和 $(x,\ r) = (A,\ k)$，$(|B|,\ 1)$，$(C,\ \ell)$，包括任何重复的数对。定义

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_f = \sum_{(x,r)} \big[(m-r)f((m+1)x) + (m+1-r)f(mx) + rf(x)\big] \\ - m\big[f((m+1)U) + f((m+1)V)\big] - (m+1)\big[f(mU) + f(mV)\big]. \end{aligned} \tag{C.11}$$

对于 $f(x) = x^p$，展开式（8.1）给出

$$\mathcal{D}_f = N_p Z_p - D_p W_p. \tag{C.12}$$

（C.11）中的系数不必全部为正。我们将每个负项移到另一边，从而得到两个等长的立方向量 X，Y。

引理 C.3。 设 X 和 Y 是等长非负向量，并假设 Y 由有限个常值块指定。只需在 Y 按降序排列的不同值块的累计长度处，验证最大元素和之间的不等式。在每个这样的长度处，可以通过选取 X 的任意子集来获得 X 的最大元素和的一个下界，只要该子集的基数等于该长度。

证明。 将最大元素和关于其基数作线性插值。 X 的插值和是凹的，而 Y 的相应和在连续块端点之间是仿射的。它们的差在该区间内是凹的，因此其最小值位于端点处。选定的子集的和从不超过相同数量的最大元素之和。□

我们用符号 $Y \prec_w X$ 表示这些最大元素不等式。由此可得

$$\sum_{y \in Y} (y - T)_+ \le \sum_{x \in X} (x - T)_+ \qquad (T \ge 0). \tag{C.13}$$

例如，(C.13)可通过将两边分别表示为对整数 j取最大值而得，即最大的 j 个元素之和减去 jT。反过来，通过对 $jT + \sum_{x\in X}(x-T)_+$在 $T \ge 0$上取最小值，即可恢复最大元素之和。

命题 C.4. 对于每个构型 (C.9)，

$$\mathcal{D}_{f_T} \ge 0 \qquad (T \ge 0), \qquad f_T(x) = (x^3 - T)_+. \tag{C.14}$$

在每个内部三值构型处，$D_{f_0} > 0$。

子节 C.1.3 和 C.1.4 分别证明了在外部重数不相等和外侧重数相等的情形下的命题 C.4 。

C.1.3. 重数不等情形。 假设 $k < m$，令 $h = m - k \ge 1$，并保留（C.10）。在下表中，一个块中的幅值 q 表示其在向量中的对应项为 q^3，并重复所示次数。

	X		Y	
索引	幅值	重数	幅值	重数
0	$(m+1)A$	h	$(m+1)C$	h
1	mA	$h+1$	mC	$h-1$
2	A	k	$(m+1)U$	m
3	$(m+1)\lvert B\rvert$	$m-1$	mU	$m+1$
4	$m\lvert B\rvert$	m	$(m+1)V$	m
5	$\lvert B\rvert$	1	mV	$m+1$
6	C	ℓ		

其他长度为 $4m+2h+1$。直接由（C.11）可得，$\mathcal{D}_{f_T}=\sum_{x\in X}(x-T)_+-\sum_{y\in Y}(y-T)_+$
B
.

Y的一个不同值块之后结束的前缀由子集 $J\subseteq\{0、\ldots\ldots、5\}$表示。在所有情况下，

$$1\in J\Rightarrow 0\in J,\quad 3\in J\Rightarrow 2\in J,\quad 5\in J\Rightarrow 4\in J. \tag{C.15}$$

当 $\tau\le 0$、 $S<0$ 和 $U\ge V$时，因此还可得到以下蕴含关系

$$4\in J\Rightarrow 2\in J,\qquad 5\in J\Rightarrow 3\in J. \tag{C.16}$$

相同的块可以同时纳入；重数为零的块不会造成困难。满足（C.15）的非空子集有 26 个，同时满足（C.15）和（C.16）的有 17 个。

引入参数

$$k=K+1,\quad h=H+1,\quad m=K+H+2,\quad \ell=K+2H+3,$$

$$\tau=\begin{cases}kv, & \epsilon=+1,\\ -\ell v, & \epsilon=-1,\end{cases}\qquad K,H\ge 0,\quad 0\le v\le 1. \tag{C.17}$$

对于实际的重数， K、 H 是整数。多项式正性将在整个非负象限上成立。

对于每个可容许的 J，附录 D.1 给出了一个仿射整数分配 $\alpha_j=a_jK+b_jH+c_j$， $0\le j\le 6$，它来自 X的七个块。在每一行中， α_j 的系数以及容量减去 α_j 所得量的系数均为非负数。将七个条目相加，所得结果就是 J 在 Y中所索引各块的重数之和。这些是关于 K、 H 的仿射恒等式，可以直接根据表格加以验证。

令 e_j 为 $j\in J$ 的指示函数，并定义

$$\begin{aligned}\gamma_C&=e_0h(m+1)^3+e_1(h-1)m^3,\\ \gamma_U&=e_2m(m+1)^3+e_3(m+1)m^3,\\ \gamma_V&=e_4m(m+1)^3+e_5(m+1)m^3,\\ Q_0&=A^3\big(\alpha_0(m+1)^3+\alpha_1m^3+\alpha_2\big)\\ &\quad+\epsilon B^3\big(\alpha_3(m+1)^3+\alpha_4m^3+\alpha_5\big)+C^3(\alpha_6-\gamma_C).\end{aligned} \tag{C.18}$$

由于 $\epsilon B^3=|B|^3$，所需的子集比较恰为

$$Q_0\ge\gamma_UU^3+\gamma_VV^3. \tag{C.19}$$

若 $\gamma_U+\gamma_V=0$，则可直接验证 $Q_0\ge 0$。否则令

$$R_+=8Q_0-(\gamma_V-\gamma_U)S(S^2+3D),\qquad T_+=(\gamma_U+\gamma_V)(D+3S^2),\qquad E_+=R_+^2-DT_+^2. \tag{C.20}$$

不等式 R_+， $E_+\ge 0$ 在（C.20）中蕴含将 V^3 替换为 λ_+^3后的比较。对于 $\tau\ge 0$，交错性给出 $\lambda_+\ge B\ge 0$，因此这就是（C.19）。

对于 $\tau\le 0$ 和 $\gamma_V>0$，也令

$$R_-=8Q_0+(\gamma_U+\gamma_V)S(S^2+3D),\qquad T_-=(\gamma_U-\gamma_V)(D+3S^2),\qquad E_-=R_-^2-DT_-^2. \tag{C.21}$$

子集蕴含关系（C.16）给出 $\gamma_U\ge\gamma_V$，因此 $T_-\ge 0$。不等式 R_-， $E_-\ge 0$ 证明了另一个带符号的比较，其中用 $-\lambda_+^3$代替 V^3。若 $\gamma_U=\gamma_V$，则只需 $R_-\ge 0$。若 $\gamma_V=0$，则无需进行这一额外比较。总之，这两个比较无论 λ_+的符号如何，都能确立（C.19）。

引理 C.5。 代入 (C.17)后，附录 (C.18)–(C.21)中所需的所有多项式，按照附录 *D.1*中的分配，均对 K、 $H\ge 0$和 $0\le v\le 1$均为非负。对于完整子集 $J=\{0,\ldots,5\}$，比较式(C.19) 在 $v<1$时为严格不等式。

证明。我们给出 一个精确的有限系数证书，使用 分配数据。对于多项式 Q
$=\sum_{a、b、i}q_{abi}K^aH^b$以及任意整数 $d\ge\deg_vQ$，恒等式

$$Q=\sum_{j=0}^{d}\left(\sum_{a,b}\beta_{abj}K^aH^b\right)\binom{d}{j}v^j(1-v)^{d-j},\qquad \beta_{abj}=\sum_{i=0}^{j}\frac{\binom{j}{i}}{\binom{d}{i}}q_{abi} \tag{C.22}$$

成立。对于每个所需的多项式，每个非零 β_{abj} 都是正有理数。在 v中取其实际次数，但对于 R_- 以及 $\epsilon=-1$ 和 $J=\{2,4\}$，则取 $d=4$ 而不是 3。在这一种情况下进行次数提升，对于式(C.22)中的系数检验至关重要。

26 个正中间分配需要 50 个多项式恒等式，其中包含 44984 个正系数。17 个负中间分配需要 44 个恒等式，其中包含 34736 个正系数。附录中指出的D 重构程序根据分配表计算多项式表达式，并检查

所有伯恩斯坦系数均采用精确算术计算。特别是，正性判定不使用浮点值，也不对 K， H 进行代入。

对于完整子集，常数系数 β_{000} 在 R_+中为正， E_+，在负侧所要求的 R_- 中也为正。因此，对于 $v<1$，这些多项式严格为正。由于 $T_+\geq 0$，这给出了严格根式比较；当 $T_-=0$时，或者说给出了严格的 R_- 比较。这证明了最后的断言。□

引理 C.5 验证了每个可容许子集比较（C.19）。引理 C.3 因此给出 $Y\prec_w X$。方程（C.13）证明了命题 C.4 当 $k<m$时成立，并且在内部具有严格的总体三次比较。

C.1.4. 外侧重数相等。 现在 $k=\ell=m$。通过反射，不妨设 $t\geq 0$。令 $\tau=mv$，其中 $0\leq v\leq 1$，并将（C.10）中的每个值除以 m。为避免携带这一公共尺度，记作

$$A=2m+1+v,\quad C=2m+1-v,\quad B=2mv,$$
$$s=(m-1)v,\quad d=m^2v^2+2m+1,\quad U=\sqrt{d}-s,\quad V=\sqrt{d}+s. \tag{C.23}$$

在（C.23）中， $0<U\leq V$，因为 $d-s^2=(2m-1)v^2+2m+1>0$。

在消去 式（C.11）中的零系数后，正立方向量具有幅值块

$$(mA,1),\ (mC,1),\ ((m+1)B,m-1),\ (mB,m),\ (A,m),\ (C,m),\ (B,1),$$

其中每一对分别指定幅值和重数。负块为（$(m+1)V$， m）、（mV， $m+1$）、（$(m+1)U$， m）、（mU， $m+1$）。两个向量的长度均为 $4m+2$。

按降序排列的第一个负块是（$(m+1)V$）^{3},，最后一个是（mU）^{3}。只有中间两个块的顺序可能改变。令 $a_0=m(m+1)^3$ 和 $b_0=(m+1)m^3$。因此，根据引理 C.3，以下五个比较即已足够：

cardinality	negative sum	chosen positive sum P
m	a_0V^3	$m^3A^3+(m-1)(m+1)^3B^3$
$2m$	$a_0(V^3+U^3)$	$m^3(A^3+C^3)+(m-1)((m+1)^3+m^3)B^3$
$2m+1$	$(a_0+b_0)V^3$	$m^3(A^3+C^3)+((m-1)(m+1)^3+m^4)B^3$
$3m+1$	$(a_0+b_0)V^3+a_0U^3$	$(m^3+m)A^3+m^3C^3+((m-1)(m+1)^3+m^4)B^3$
$4m+2$	$(a_0+b_0)(V^3+U^3)$	$(m^3+m)(A^3+C^3)$ $+((m-1)(m+1)^3+m^4+1)B^3$

(C.24)

每个选取的正和都在其块容量范围内使用（C.24）第一列中的基数。$2m$ 行在 $(m+1)U\geq mV$时是必要的；在相反的排列中则需要 $2m+1$ 行。我们证明这两种情形，且不施加任何附加条件。

对于负项和为 $c_VV^3+c_UU^3$ 的直线，定义

$$R=P-(c_V-c_U)s(3d+s^2),\qquad T=(c_V+c_U)(d+3s^2),\qquad E=R^2-dT^2. \tag{C.25}$$

由于 $T\geq 0$，不等式 $R,E\geq 0$ 蕴含了 (C.24) 中的那条直线。令 $m=K+2$。(C.25) 中的十个多项式都具有 (C.22) 的表示式，且含有 509 个正系数；其中不出现 H。它们关于 v 的次数分别为：R 为 3， E 为 6。每个 R 都有 29 个正系数；按表格顺序，五个 E 多项式分别有 67、96、67、67、67 个正系数。验证器根据 (C.24) 和 (C.25) 构造这十个多项式。

在总和那一行中， $j=0$ 的伯恩斯坦系数 R 和 E 均严格为正。因此，对于 $v<1$，总体三次比较严格成立。五个比较以及引理C.3 证明了 $Y\prec_w X$ 在平衡情形下成立。至此，命题C.4的证明完成。

C.1.5. 所有指数与等号。 对于 $p>3$，令 $q=p/3>1$。初等恒等式

$$r^p=q(q-1)\int_0^\infty (r^3-T)_+T^{q-2}\,\mathrm{d}T\qquad (r\geq 0) \tag{C.26}$$

利用线性性和（C.14），可将其转化为（C.12），从而得到 $N_pZ_p-D_pW_p\geq 0$ 对每个构型（C.9）均成立。在 $p=3$处，使用总和情形 $T=0$。若该构型是内点构型，则其总三次多项式间隙为正。由连续性可知，从 $T=0$ 开始的某个区间上，尾部间隙为正，因此（C.26）表明，对于每个 p， $p>3$ -次幂间隙也严格为正。

根据引理 C.2，实全局最大值点必位于（C.9）中。命题 C.4 和（C.26）对 $p>3$，或（C.14）在 $T=0$ 处对 $p=3$，将其比值界定为 $B_{n,\,p}$。对（8.13）直接求导得到临界值 $(m+1)a$，重数为 $m-1$，$-ma$，重数为 m，以及 a 一次。其比值恰为（8.1），从而证明了锐性。

还需排除其他端点。中心化二值构型可写为 $(z-(n-j))^{\,j}(z+j)^{\,n-j}$，其中 $1\le j\le m$。当指数为三时，其比值为 $1-h_3(r)/n$，其中 $r=j/(n-j)$，并且

$$h_3(r)=\frac{(1+r)(3-3r+2r^2)}{1+r^2},\qquad h_3'(r)=\frac{2r(r-1)(r^2+r+4)}{(1+r^2)^2}<0\quad(0<r<1).$$

因此，只有 $j=m$ 取得 $B_{n,\,3}$。其他所有端点的三次多项式总差值都严格为正。命题 C.4和（C.26）再次推出每个 $p>3$处都严格成立。这证明了所有 $p\ge 3$的实数情形等号分类。

分别沿两个方向应用引理4.1，然后应用（4.4）。任意复零点情形下，系数也相同。如果至少有三个不同的复零点，则几乎所有投影构型都至少有三个不同的值，其实数情形的不等式严格成立。积分后可得（C.1）中的严格性。两个不同的中心化复数值位于经过零点的同一条实直线上。实数分类随后给出恰好（8.13）。定理C.1 得证。

附录 D. 分配表与精确算术证书

D.1. **区块分配**。 在小节 D.1.1和 D.1.2的表格中， J 由整数$\sum_{j\in J}2^j$编码。七个条目按第 α_0、……、 α_6 节中正区块的顺序排列。它们是参数（C.1.3）中的仿射多项式。所有 26 个和 17 个可容许的非空子集均已列出。电子分配文件以 K、 H中的仿射表达式形式给出了相同的数据。

D.1.1. 中间值非负。

J	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	$H+1$	0	0	0	0	0	0
3	$H+1$	H	0	0	0	0	0
4	$H+1$	1	K	0	0	0	0
5	$H+1$	$H+2$	K	0	0	0	0
7	$H+1$	$H+2$	K	H	0	0	0
12	$H+1$	$H+1$	0	0	K	0	$K+3$
13	$H+1$	$H+1$	0	H	K	1	$K+3$
15	$H+1$	$H+1$	0	0	K	1	$K+2H+3$
16	H	2	0	K	0	0	0
17	$H+1$	1	0	$K+H+1$	0	0	0
19	$H+1$	$H+1$	0	$K+H$	1	0	0
20	$H+1$	0	0	K	K	0	$H+3$
21	$H+1$	1	1	K	K	0	$2H+2$
23	$H+1$	$H+1$	1	$K+H+1$	$K+H$	0	1
28	$H+1$	$H+2$	1	$K+1$	K	1	$K+H+1$
29	$H+1$	$H+2$	$K+1$	$K+H$	$K+H$	1	3
31	$H+1$	$H+2$	1	$K+H+1$	$K+2$	1	$K+2H$
48	1	$H+2$	0	$K+1$	$K+H+1$	0	0
49	$H+1$	$H+2$	0	$K+H+1$	$K+2$	0	0
51	$H+1$	$H+2$	0	$K+H+1$	$K+H+2$	0	0
52	$H+1$	2	K	$K+H+1$	$K+H+2$	0	1
53	$H+1$	$H+2$	$K+1$	$K+H+1$	$K+H+2$	0	1
55	$H+1$	$H+2$	0	$K+H+1$	$K+H+2$	0	$K+H+2$
60	$H+1$	$H+2$	$K+1$	$K+H+1$	$K+H+2$	0	$K+3$
61	$H+1$	$H+2$	$K+1$	$K+1$	$K+H+2$	1	$K+2H+3$
63	$H+1$	$H+2$	$K+1$	$K+H+1$	$K+H+2$	1	$K+2H+3$

D.1.2. 中间值非正。

J	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	$H+1$	0	0	0	0	0	0
3	$H+1$	H	0	0	0	0	0
4	$H+1$	0	0	$K+1$	0	0	0
5	$H+1$	$H+1$	0	$K+1$	0	0	0
7	$H+1$	$H+1$	0	$K+H+1$	0	0	0
12	$H+1$	$H+2$	0	$K+1$	$K+1$	0	0
13	$H+1$	$H+2$	0	$K+H+1$	$K+2$	0	0
15	$H+1$	$H+2$	0	$K+H+1$	$K+H+2$	0	0
20	$H+1$	0	1	$K+H+1$	K	1	0
21	$H+1$	1	$K+1$	$K+H+1$	0	1	H
23	$H+1$	$H+2$	0	$K+H+1$	$K+H+1$	0	0
28	$H+1$	$H+2$	K	$K+H+1$	$K+2$	1	0
29	$H+1$	$H+2$	$K+1$	$K+H+1$	$K+2$	1	H
31	$H+1$	$H+2$	$K+1$	$K+H+1$	$K+H+2$	1	H
60	$H+1$	$H+2$	$K+1$	$K+H+1$	$K+H+2$	0	$K+3$
61	$H+1$	$H+2$	$K+1$	$K+H+1$	$K+H+2$	1	$K+H+3$

J	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
63	$H+1$	$H+2$	$K+1$	$K+H+1$	$K+H+2$	1	$K+2H+3$

D.2. **三次尾部证书的精确重构。** 命题 C.4的证明将重数不等情形和重数相等情形归约为多项式不等式（C.20）、（C.21）和（C.25）。经过参数变换（C.17）和（C.23）后，校验器 `certificates/verify_odd_ge_three.py` 使用精确有理数运算重构每个多项式，并在伯恩斯坦基中检验其系数。输入的分配包含在 `certificates/odd_ge_3_allocations.json` 中，并在小节 D.1中重现。

验证器重构了 104 个多项式，其中 50 个对应非负中间零点，44 个对应非正中间零点，10 个对应外侧重数相等的情形。对于次数至多为 d、变量为 v 的多项式 $P(K,\ H,\ v)$，记 $P=\sum_{i=0}^{d} p_i(K,\ H)v^i$。阶数为 d 的伯恩斯坦系数为

$$\beta_j(K,H)=\sum_{i=0}^{j}\frac{\binom{j}{i}}{\binom{d}{i}}p_i(K,H),\qquad 0\le j\le d. \tag{D.1}$$

如果每个 β_j（$K,\ H$）在（D.1）中都具有非负的单项式系数，那么 P（$K,\ H,\ v$）≥ 0 对于 $K,\ H\ge 0$ 和$0\le v\le 1$成立。验证器会检查每个定义多项式的代数重构，包括引理 C.5证明中规定的次数提升。该断言涵盖所有实数非负的 $K,\ H$而不仅仅是整数重数或有限网格上的情形。

D.3. **支持对数比较的精确检查。**定理 B.19 的证明使用附录 B中的解析不等式；随附文件实现了某些有限代数符号检查。下表列出了证明中使用的检查器。

证书	在解析证明中的作用
`turn2_two_value_T_certificate.py`	二值有理符号展开
`num_balanced_threevalue_certificate.py`	平衡三值多项式符号
`turn2_restricted_gradient_exact_check.py`	受限梯度多项式系数
`turn2_three_caseIII_T_certificate.py`	正中间三值有理不等式
`turn2_minority_positive_center_certificate.py`	少数平均标量界
`turn2_negative_center_exact_check.py`	负中间余式恒等式
`turn2_log_compensation_certificate.py`	对数补偿不等式

检查器和分配数据可在 `certificates/` 存档源代码版本 [Zha26c]的目录中获取。多项式符号检查以符号方式进行，而证明紧性、驻定性、交错性和边界行为的解析论证仍见附录B。脚本成功运行仅能验证该脚本所编码的特定代数断言；它并不能独立验证文中的所有解析化简。

西安交通大学数学与统计学院，中华人民共和国西安 710049电子邮箱：teng.zhang@stu.xjtu.edu.cn