arXiv:2611.31071v1 [math.SG] 23 Nov 2026

定量厚纤维性质

Adi Dickstein*

摘要

我们提出了定量厚纤维性质，这是 Entov–Polterovich 不可移位纤维定理的一种类比，适用于坐标函数不必彼此泊松对易的映射。我们证明，对于那些在连续函数空间上存在适当泛函（不一定是线性的）的闭辛流形，该性质成立。反过来，我们建立了一种障碍，并证明该性质在某些无理辛四维环面和 Kodaira–Thurston 流形上不成立。这些结果揭示了一种新的刚性—柔性区别：Entov–Polterovich 定理给出了普适的纤维刚性现象，而其定量对应性质在某些闭辛流形上成立，在另一些流形上则不成立，由此定义了一种新的辛刚性不变量。我们还引入了连续映射的不可置换宽度，将其定义为存在不可置换厚纤维时半径的下确界，并利用它获得关于用泊松括号较小的映射进行一致逼近的定量障碍。

目录

1 引言 **2**

1.1 定义和主要结果.3 1.2 半辛拟态.11 1.3 超重厚纤维.14 1.4 不可位移宽度.16 1.5 定量厚纤维性质的障碍.19 1.6 讨论.23

*部分由 Fondation Courtois 和 Jenny Panitch Beckow Memorial Scholarship Canada 支持，2026年。

2 证明 **29**
2.1 命题 1.20 的证明.29 2.2 定理 1.14 的证明.30 2.3 定理 1.16 的证明.32 2.4 定理 1.10 的证明.36

1 引言

大纤维定理是几何学和拓扑中反复出现的主题。它们断言，从一个足够丰富的空间到一个较简单目标空间的映射，必定存在一个较大的纤维。何谓“大”，取决于具体情形，可以用维数、体积、拓扑、对称性，或与某个特定子集族的交集来表达。

一个经典例子是 Hurewicz维数降低定理，它保证从高维紧致度量空间到低维空间的映射，其某个纤维承载着缺失的维数；参见 [HW48, 定理 VI.7, 第 91–93] 页。Borsuk–Ulam定理则给出了另一种“大”的形式：每个从 S^n 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续映射，都有一个包含两个对踵点的纤维；参见 [Bor33]。因此，在这种情况下，纤维相对于区域的对称性而言是大的。

Gromov 建立了这一原理的度量和上同调版本。他的腰部定理保证存在一个纤维，其邻域具有较大的体积 [Gro03], ；而他的最大纤维定理保证存在一个纤维，承载着区域上同调中定量意义上较大的一部分 [Gro09, Gro10]。在 Karasev 的拓扑中心点定理中，要求一个较大的纤维与单形中每个指定维数的面相交；参见 [Kar14]。若干这类大纤维定理在 [DGPZ24]中从统一的视角进行了讨论。

本文所依据的辛大纤维定理由 Entov– Polterovich 提出。在该定理中，纤维的大小通过其在哈密顿微分同胚作用下的不可位移性来衡量（见定义 1.2）。Entov–Polterovich 证明，若一个光滑映射从闭辛流形映到欧几里得空间，且其坐标函数两两泊松对易（见定义 1.1），那么该映射必有一个不可位移的纤维。

定理 1.4 中关于 F 的各分量两两泊松交换的假设，在哈密顿力学中有着自然的解释。泊松对易函数自然产生于哈密顿动力学，并在可积系统中发挥着基础性作用。从这一角度看，定理 1.4 断言，每个泊松对易函数族都有一个在辛意义下很大的联合水平集，即一个不可位移的联合水平集。

然而，精确的泊松交换性是一种理想化假设。设 $F = (F_1, \dots, F_k)\colon M \to \mathbb{R}^k$ 的各分量两两泊松交换，并且 $G = (G_1, \dots, G_k)\colon M \to \mathbb{R}^k$ 是 F 的小 C^1-扰动。那么，G 各分量的泊松括号都很小，但未必为零。因此，定理 1.4 不再适用于 G。事实上，仅仅这些泊松括号很小，并不能保证存在不可位移的纤维：具有任意小泊松括号的映射，其所有纤维都可能是可位移的。

本文旨在提出并研究不可移位纤维定理的定量稳定性版本。为此，我们在定义 1.6 中引入定量厚纤维性质。我们不再询问近似泊松交换映射是否存在不可位移的厚纤维，而是询问它是否存在不可位移的厚纤维，以及根据各分量的泊松括号和目标空间的维数，必须将纤维加厚多少。所需半径应当在泊松括号一致收敛到零时也收敛到零，从而在泊松交换的情形下恢复 Entov–Polterovich 定理。

这个问题既有积极的一面，也有消极的一面。对于具有适当拟态泛函 的流形（见定义 1.7），我们给出了一个显式上界，该上界根据目标维数和泊松括号的大小，确定保证存在伪重且因而不可位移的厚纤维所需的半径；见定理 1.10。另一方面，我们展示了一些不满足定量厚纤维性质的闭辛流形；见定理 1.16 和第 1.5 节。

从刚性与柔性的角度来看，Entov–Polterovich 定理给出了一条普适的刚性结论：在每个闭辛流形上，精确的泊松交换性都会迫使存在一个不可位移的纤维。定量情形则展现出另一番图景。在某些闭辛流形上，即使放宽精确泊松交换性的条件，并以厚纤维取代精确纤维，这种刚性仍以某种定量形式保留下来。而在另一些闭辛流形上，则不存在所需类型的估计。这种差异是全局性的：定量厚纤维性质并不关注某个固定映射的稳定性，而是要求存在一种估计，适用于从给定辛流形到任意欧几里得空间的每个光滑映射。因此，与 Entov–Polterovich 定理本身不同，定量厚纤维性质能够区分不同的闭辛流形，并构成一种新的辛刚性不变量。

1.1 定义与主要结果

辛流形是一个二元组 $(M,\ \omega)$，其中 M 是一个维数为 $2n$ 的光滑流形，ω 是一个处处不消失的闭二形式。设 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 为

一个光滑函数。其哈密顿向量场 X_H 定义为

$$\omega(X_H, \cdot) = -dH.$$

X_H的流称为 H的**哈密顿流**，记作 $(\varphi_H^t)_{t\in I}$，其中$I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间。本文中，流形 M 均为闭流形。因此， M 上的每个哈密顿向量场都是完备的，其流对每个 $t \in \mathbb{R}$都有定义。

更一般地，设 $H\colon [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑的含时哈密顿量，并对每个 $t \in [0,1]$令 $H_t = H(t, \cdot)$。记 $(\varphi_H^t)_{t\in[0,1]}$ 为由含时向量场 X_{H_t}生成的哈密顿同伦。若 M 上的一个微分同胚是某个哈密顿同伦的时间 1 映射，则称其为**哈密顿微分同胚**。哈密顿微分同胚构成一个群，记作

$$\mathrm{Ham}(M, \omega) = \{\varphi_H^1 : H \in C^\infty([0,1] \times M, \mathbb{R})\}.$$

定义 1.1. 泊松括号是双线性映射

$$\{\cdot, \cdot\}\colon C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

定义为

$$\{F, G\} = dF(X_G)$$

对于每个 F， $G \in C^\infty(M)$。

泊松括号是反对称的。此外，设 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 为一个光滑函数，且 $(\varphi_H^t)_{t\in\mathbb{R}}$为其哈密顿流。那么，对于每个 $F \in C^\infty(M)$、每个$x \in M$以及每个 $t \in \mathbb{R}$，我们有

$$\frac{d}{dt} F(\varphi_H^t(x)) = \{F, H\}(\varphi_H^t(x)).$$

我们还回顾可移动集的概念。

定义 1.2。 子集 $X \subseteq M$ 称为**可移动的**，如果存在 $\varphi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ 使得

$$\varphi(X) \cap \overline{X} = \varnothing.$$

否则， X 称为**不可位移**。

例 1.3. 在球面 S^2 上，光滑嵌入的闭圆盘 D 可置换，当且仅当面积$(D) < \frac{1}{2}$ 面积(S^2)。更一般地，有限个互不相交的光滑嵌入的闭圆盘之并可置换，当且仅当其总面积严格小于$_1$ $_2$面积(S^2)。相比之下，赤道不可位移，尽管其面积为零。

对于每个连续函数 $F\colon M \to \mathbb{R}$，我们用 $\operatorname{supp} F$ 表示其非零集的闭包。若 M 紧致，则令 $\|F\|_\infty = \max_{x\in M} |F(x)|$。

现在我们回顾 Entov–Polterovich 关于不可位移纤维的定理。

定理 1.4 (Entov–Polterovich, [EP06])。设 (M,ω) 是一个闭辛流形，并设

$$F = (F_1, \dots, F_N)\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

是一个光滑映射。假设 $\{F_i, F_j\} = 0$ 对每个 $i,j \in \{1,\dots,N\}$都成立。那么存在 $y_0 \in F(M)$ 使得纤维 $F^{-1}(y_0)$ 不可位移。

自然会问，当 F 的分量并非严格泊松对易，而它们的泊松括号很小时，哪些结论仍然成立。对于每个整数 $k \geq 1$ 以及每个光滑映射

$$F = (F_1, \dots, F_k)\colon M \to \mathbb{R}^k,$$

定义

$$pb(F) = \max_{1\leq i,j\leq k} \|\{F_i, F_j\}\|_\infty.$$

因此，$pb(F) = 0$ 当且仅当 F 的分量两两泊松对易。

定理 1.4 的结论在较弱的假设 $pb(F)$ 很小的情况下不再成立。也就是说，即使所有泊松括号都可以任意小，F 的每个纤维仍可能都是可置换的。这促使我们用厚纤维取代精确纤维。

对每个 $y \in \mathbb{R}^k$ 和每个 $r > 0$，分别用 $B_y(r)$ 和 $B_y(r)$ 表示以 y 为中心、半径为 r 的欧几里得开球和闭球。我们还令 $B_y(0) = \{y\}$。设 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$ 是一个连续映射。对每个 $y \in \mathbb{R}^k$ 和每个 $r \geq 0$，集合

$$F^{-1}\left(\overline{B}_y(r)\right)$$

称为以 为中心的 的**闭 r-厚纤维**。

以下示例说明了为什么必须用厚纤维替代精确纤维，并展示了对泊松括号的平方根依赖。

例 1.5。在单位球面 $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ 上赋予标准面积形式，其总面积为 4π。固定 $\epsilon > 0$，并定义光滑映射 $F_\epsilon\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$，如下：

$$F_\epsilon(x,y,z) = (\epsilon x, 2\epsilon y)$$

对每个 $(x,y,z) \in S^2$。坐标函数的泊松括号满足$\{x,y\} = -z$。因此，

$$pb(F_\epsilon) = \|\{\epsilon x, 2\epsilon y\}\|_\infty = 2\epsilon^2.$$

由于 $pb(F_\epsilon) = 2\epsilon^2 > 0$，定理 1.4 的假设不成立。此外， F_ϵ 的每个纤维至多包含两个点，因此都是可置换的。因此，我们可以使 $pb(F_\epsilon)$ 尽可能小，同时让 F_ϵ 的每个纤维都保持可置换。

对于每个 $r \geq 0$，记 $X_{\epsilon,\, r}$ 为以原点$0 \in \mathbb{R}^2$为中心的闭 r 厚纤维，即

$$X_{\epsilon,r} = F_\epsilon^{-1}\left(\overline{B}_0(r)\right) = \left\{(x,y,z) \in S^2 : \epsilon^2 x^2 + 4\epsilon^2 y^2 \leq r^2\right\}.$$

因此，$X_{\epsilon,\, r}$ 是 S与轴为 z 轴的实心椭圆柱的交集。令 $E = \{y = 0\} \subseteq S^2$ 为赤道。我们有$E \subseteq X_{\epsilon,\, r}$ 当且仅当 $r \geq \epsilon$。因此，对于每个 $r \geq \epsilon$，$X_{\epsilon,\, r}$ 都是不可位移的。

另一方面，对于每个 $0 \leq r < \epsilon$，集合 $X_{\epsilon,\, r}$ 是可置换的。事实上，如果 $0 < r < \epsilon$，那么 $X_{\epsilon,\, r}$ 是两个光滑嵌入的闭圆盘的不交并。此外，

$$X_{\epsilon,r} \subseteq \left\{|y| \leq \frac{r}{2\epsilon}\right\}.$$

右侧的球带面积为 $2\pi r/\epsilon$，因此

$$\operatorname{area}(X_{\epsilon,r}) \leq \frac{2\pi r}{\epsilon} < 2\pi.$$

因此 ，$X_{\epsilon,\, r}$ 是可置换的。根据包含关系，同样的结论也适用于 $r = 0$.

我们得出，$X_{\epsilon,\, r}$ 是不可位移的，当且仅当

$$r \geq \epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{pb(F_\epsilon)}.$$

因此，尽管 F_ϵ 没有不可位移的纤维，但其以原点为中心的厚纤维在半径与 $\sqrt{pb(F_\epsilon)}$ 成正比时，便会变为不可位移。

受此例启发，我们提出这样一个问题：每个近似泊松交换映射是否都必定存在一个不可置换厚纤维，且其半径可根据目标维数及其泊松括号的大小进行估计？以下定义将这一问题形式化。

定义 1.6。 设 $(M,\ \omega)$ 是一个闭辛流形。令

$$f\colon \mathbb{N} \to (0,\infty), \qquad g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$$

为函数，使得 g 连续且 $g(0) = 0$。

如果对于每个整数 $k \geq 1$ 和每个光滑映射 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$，都存在$y \in F(M)$，使得以 y 为中心的 F 的闭 $\cdot g(pb(F))$-厚纤维 $f(k)$，即，(M,ω) 相对于 (f,g) 具有**定量厚纤维性质**，我们就称之为

$$F^{-1}\left(\overline{B}_y\left(f(k)g\left(pb(F)\right)\right)\right),$$

是不可位移的。

我们称（M， ω）具有**定量厚纤维性质**，如果存在如上所述的函数 f 和 g，使得（M， ω）相对于（f， g）具有定量厚纤维性质。

函数 f 记录半径对目标空间维数的依赖关系，而 g 则记录其对 F 的各分量不满足泊松对易程度的依赖关系。条件 $g(0) = 0$ 确保当 F 的各分量两两泊松对易时，半径为零。

定理 1.4 的原始证明使用了部分辛拟态的概念，它是一个不一定线性的泛函 $\zeta\colon C(M) \to \mathbb{R}$，满足若干公理。这里我们定义一个类似的概念，它将在表述主要结果时发挥作用。

定义 1.7。设（M， ω）是一个闭辛流形，且 $C > 0$。若泛函$\zeta\colon C(M) \to \mathbb{R}$ 满足以下公理，则称其为具有常数 C 的**半辛拟态**：

- (归一化) $\zeta(c) = c$ 对每个 $c \in \mathbb{R}$均成立。
- (单调性) 对每个 F， $G \in C(M)$，若 $F \leq G$，则 $\zeta(F) \leq \zeta(G)$。
- (消失性) 对每个 $F \in C(M)$，若 F具有可移动支集，则 $\zeta(F) = 0$。
- (单侧泊松括号不等式) 对每个 F， $G \in C^\infty(M)$，

$$\zeta(F+G) - \zeta(F) - \zeta(G) \leq C\sqrt{\|\{F,G\}\|_\infty}.$$

第 1.2 节中，我们将这一概念与现有的拟态型泛函进行比较 .

我们还将伪重集这一概念推广到半辛拟态中。该概念由 Kawasaki–Orita 在 [KO21]中针对部分辛拟态提出。进一步讨论请参见第 1.3 节。

定义 1.8. 设 (M,ω) 为闭辛流形，且 ζ 是 (M,ω) 上的半辛拟态。称闭子集 $X \subseteq M$ 为 ζ**- 伪重**的，若对 X 的每个开邻域 U，都存在一个支集包含于 U 的连续函数 $F \in C(M)$，使得 $\zeta(F) > 0$。

注记 1.9. Kawasaki–Orita 证明了，相对于部分辛拟态的每个伪重集都不可位移；参见 [KO21，命题 1.6]。半辛拟态也有相同的结论。事实上，如果闭子集 $X \subseteq M$ 可置换，那么它存在一个可置换的开邻域 U。消失性质意味着，对支集包含于 U 的每个连续函数 F，都有 $\zeta(F) = 0$，这与 X 的伪重性矛盾。

现在我们可以陈述主要的厚纤维定理了。

定理 1.10. 设 (M, ω) 是一个闭辛流形，设 $C > 0$，并假设 (M, ω) 配备了一个常数为 C 的半辛拟态 ζ。那么，对于每个整数 $k \geq 1$ 以及每个光滑映射 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$，都存在 $y_0 \in F(M) \subset \mathbb{R}^k$，使得

$$F^{-1}\left(\overline{B}_{y_0}\left(4C \cdot k^{3/2} \cdot \sqrt{pb(F)}\right)\right)$$

是 ζ-伪重的，因而不可位移。

具有半辛拟态的闭辛流形包括闭定向曲面、复射影空间以及球面乘积；详情见第 1.2 节。因此，根据定理 1.10 的直接推论，所有这些流形都满足定量厚纤维性质。

推论 1.11. 设 (M, ω) 是一个闭辛流形，设 $C > 0$，并假设 (M, ω) 配备了一个常数为 C 的半辛拟态。定义函数 $f\colon \mathbb{N} \to (0, \infty)$ 和 $g\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ 如下

$$f(k) = 4Ck^{3/2}, \qquad g(t) = \sqrt{t}$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和每个 $t \in [0, \infty)$。那么 (M, ω) 相对于函数 f 和 g 具有定量厚纤维性质。

注 1.12. 定理 1.10 的证明使用了 M 上的特殊单位分解，其元素被划分为 $k + 1$ 种颜色，其中 k 是映射目标空间的维数。相同颜色对应的函数其正值集两两不相交，因此每个颜色类都可以合并为一个函数。由此，主要的定量论证只涉及 $k + 1$ 个函数。对这些颜色和的泊松括号作适当估计，再结合单侧泊松括号不等式，可推出某个原始单位分解函数具有正的 ζ 值。其支集包含于半径受控的厚纤维中，而极限论证则可得到一个伪重厚纤维。消失性质保证每个伪重集都不可位移。使用 $k + 1$ 种颜色的灵感来自 [DGPZ24 定理 6.1] 的证明。完整证明见第 2.4 节。

注 1.13. 本文的主要定量厚纤维结果得出后，作者了解到 Jun Zhang 在接触几何领域的一项相关工作，题为“接触刚性与泊松括号不变量”。随后，作者与 Zhang 交换了初步稿件。在交换稿件时，本文的辛结果以及 Zhang 的定量接触大纤维定理——后者推广了 [SUV26、UZ25、DUZ26]，中证明的接触大纤维定理——均已由双方独立获得。

这两种论证采用了相同的总体策略：将目标空间分解为直径受控的集合，通过给定映射将所得函数拉回，并结合定量泊松括号估计与消失性质，得到一个不可置换厚纤维。二者的背景设定和定量构造有所不同。Zhang 的定理涉及接触可置换性，同时包含接触括号和 Reeb 导数。本文给出的证明使用 Freudenthal–Kuhn 三角剖分和 $(k+1)$-着色，并产生一个半径阶为 $k^{3/2}\sqrt{pb(F)}$ 的伪重厚纤维。

———

理解 Corollary 1.11 中的函数 f and g 是否为最优是很有趣的。以下结果给出了这两个函数增长率的下界，并且特别表明，Corollary 1.11 中 g 的选取在乘以一个正常数的意义下是最优的。

定理 1.14。 设 (M,ω) 是一个正维数的闭辛流形。设 $f\colon \mathbb{N}\to(0,\infty)$ 和 $g\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$ 为函数，其中 g 连续且满足 $g(0)=0$。假设 (M,ω) 关于 f 和 g 具有定量厚纤维性质。那么存在常数 $c_f, c_g>0$，使得对于每个整数 $k\geq 1$ 和每个 $t\geq 0$，均有

$$f(k)\geq c_f\sqrt{k}, \qquad and \qquad g(t)\geq c_g\sqrt{t}.$$

定理 1.14 的证明见第 2.2 节。

注 1.15. 推论 1.11 中函数 f 的增长率 $k^{3/2}$ 是否最优，仍是一个悬而未决的问题。值得一提的是，在定理 1.10 的证明中，我们通过精细单位分解构造得到了这个函数。在本项目初期使用的更简单的构造会得到函数 f，其增长率随维数呈指数增长。

接下来我们转向定量厚纤维性质的障碍。根据定义 1.6 的否定，若对于每一对函数

$$f\colon \mathbb{N}\to(0,\infty), \qquad g\colon [0,\infty)\to[0,\infty),$$

其中 g 是连续的，并满足 $g(0) = 0$，则存在一个整数 $k \geq 1$ 和一个光滑映射 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$，使得对于每个 $y \in F(M)$，以 y为中心的闭 $f(k)g(pb(F))$-厚纤维 F，即

$$F^{-1}\left(\overline{B}_y\left(f(k)g\left(pb(F)\right)\right)\right),$$

是可置换的。

我们的下一个目标是给出一个充分条件，使闭辛流形不具有定量厚纤维性质。为陈述这一结果，我们引入圆值函数的泊松括号。将 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$视为 q，记 $q\colon \mathbb{R} \to S^1$ 为商映射，并令 $\theta \in \Omega^1(S^1)$ 为满足 $q^*\theta = dt$ 的唯一光滑 1-形式。令 Π 为与 ω相关联的泊松双向量。对于每一对光滑映射 $u,\ v\colon M \to S^1$，定义

$$\{u, v\} = \Pi(u^*\theta, v^*\theta).$$

等价地，若 $\widetilde{u},\ \widetilde{v}\colon U \to \mathbb{R}$ 是 u和 v的局部提升，则

$$\{u, v\}|_U = \{\widetilde{u}, \widetilde{v}\}.$$

特别地，该定义不依赖于局部提升的选取。

定理 1.16. 设 (M, ω) 为一个闭辛流形。假设存在光滑映射 $a, b, c\colon M \to S^1$ 以及常数 A, $B \in \mathbb{R}$，使得

$$\{a, c\} = A, \qquad \{b, c\} = B.$$

如果 $B \neq 0$ and $A/B \notin \mathbb{Q}$，则（M，ω）不具有定量厚纤维性质 .

定理 1.16 的证明见第 2.3 节。在第 1.5 节中，我们给出若干满足定理 1.16 假设的闭辛流形示例，因此这些流形不具有定量厚纤维性质。这些示例包括无理辛四维环面，以及配备某些辛形式的 Kodaira–Thurston 流形。

结合推论 1.11 与定理 1.16，可得到以下关于半辛拟态存在性的障碍。

推论 1.17。 设（M，ω）是一个闭辛流形。假设存在光滑映射 a、b、$c\colon\ M \to S^1$ 以及常数 A、$B \in \mathbb{R}$，使得

$$\{a, c\} = A, \qquad \{b, c\} = B.$$

如果 $B \neq 0$ 以及 $A/B \notin \mathbb{Q}$，那么 (M, ω) 不承认半辛拟态 .

这个推论与 Entov–Polterovich 在 [EP08] 提出的问题有关：标准辛4-环面，或者更一般地，任何维数大于 2 且满足 $[\omega]|_{\pi_2(M)} = 0$ 的闭辛流形，是否承认非线性真正辛拟态。据我们所知，这个问题仍未解决。我们的推论并未解决这一问题，因为泊松括号不等式是一项额外性质，并未包含在真正辛拟态的公理中。不过，它阻碍了某些闭辛流形（包括下文讨论的无理辛4-环面）承认满足泊松括号不等式的真正辛拟态。

论文结构。引言的其余部分安排如下。第 1.2 节中，我们介绍半辛拟态的例子，包括定义在闭定向曲面上的部分辛拟态。第 1.3 节中，我们讨论定理 1.10 给出的伪重厚纤维成为超重纤维的条件。接下来，第 1.4 节中，我们引入不可位移宽度，并利用它为逼近给定连续映射的光滑映射的泊松括号给出定量下界。第 1.5 节中，我们介绍不具有定量厚纤维性质的辛流形的例子。引言最后在第 1.6 节讨论黎曼目标空间以及纤维的位移能量。第 2 节包含证明。我们首先证明关于曲面上的部分辛拟态以及定量厚纤维性质中出现的函数下界的结果。随后证明障碍定理，最后证明定理 1.10；其证明包括构造论证中使用的特殊单位分解。

1.2 半辛拟态

准态这一概念源于围绕量子力学冯·诺伊曼公理的讨论；参见 [EP06，第 10]，[节But22，第 1]，节及其中的参考文献。1991 年，Aarnes 将这一概念引入拓扑和泛函分析，提出了拓扑拟态。这类拟态不一定是紧豪斯多夫空间 X 上实值连续函数空间上的线性泛函，并由此提出了几何分类定理；参见 [Aar91]。拓扑拟态在 $C(X)$ 的单生成子代数上是线性的；这一性质称为**拟线性**。

2006年，Entov–Polterovich 利用 Floer理论，在闭辛流形上实值连续函数空间中构造了某些不一定是线性的泛函，称为部分辛拟态。在满足某些辛流形相关假设的情况下，这些部分拟态也是拓扑拟态；在这种情况下，我们称它们为真正辛拟态。这些真正辛拟

态满足拟线性性质的强形式：每个态在 $C^\infty(M) \subseteq C(M)$ 的每个泊松交换子代数上都是线性的。

给定一个闭辛流形（M, ω），部分辛拟态 ζ：$C(M) \to \mathbb{R}$满足若干公理，包括以下各项：

- （归一化） $\zeta(c) = c$ 对每个 $c \in \mathbb{R}$均成立。
- （单调性）对于任意 $F, G \in C(M)$，若 $F \leq G$，则 $\zeta(F) \leq \zeta(G)$。
- （消失性）对于任意 $F \in C(M)$，若 F具有可移动支集，则 $\zeta(F) = 0$。
- （拟次可加性）对于任意 $F, G \in C^\infty(M)$，若 $\{F, G\} = 0$，则
$$\zeta(F + G) \leq \zeta(F) + \zeta(G).$$

如上文所述，Entov–Polterovich 在 [EP06] 中证明，在某些假设下，他们构造的部分辛拟态会产生一个真正的辛拟态，该拟态还满足以下公理：

- （拟线性）对于每个 F， $G \in C^\infty(M)$，如果 $\{F, G\} = 0$，那么ζ 在 span(F， G) 上的限制是线性的。

在 [EPZ07], Entov–Polterovich–Zapolsky 证明，在相同假设下，拟线性性质的一个定量版本可表述为以下**泊松括号不等式**：存在一个常数 $C > 0$，其取决于 ζ，使得对于每个F， $G \in C^\infty(M)$,
$$|\zeta(F + G) - \zeta(F) - \zeta(G)| \leq C\sqrt{\|\{F, G\}\|_\infty}. \tag{1}$$
有趣的是，可以考察部分辛拟态是否满足类似的不等式。由于拟次可加性意味着
$$\zeta(F + G) - \zeta(F) - \zeta(G) \leq 0$$
只要 $\{F, G\} = 0$，考虑**单侧泊松括号不等式**便是自然的：存在一个常数 $C > 0$，其仅取决于部分辛拟态ζ，使得对于每个 F， $G \in C^\infty(M)$,
$$\zeta(F + G) - \zeta(F) - \zeta(G) \leq C\sqrt{\|\{F, G\}\|_\infty}.$$
这个单边不等式促使我们引入半辛拟态这一概念，定义见定义 1.7。

在本节余下部分，我们将讨论几个半辛拟态的例子。我们先从一个二维例子——中位数拟态——谈起。很难确切指出是谁最先引入了它，但可以肯定的是，到了20世纪90年代末，专家们已经知道这一概念。

例1.18. 中位数拟态是一种真正的辛拟态 ζ，定义在配备归一化标准面积形式的 S^2 上。其定义如下：设F：$S^2 \to \mathbb{R}$ 是一个Morse函数。那么，$\zeta(F)$是 F 的唯一一个值，其水平集包含一个连通分支 C，且 $S^2 \setminus C$ 的每个连通分支的面积都不超过$_{1\ 2}$。这样的值总是存在。

泛函 ζ 关于 Morse函数空间上的一致范数是 1-利普希茨的。因此，它有一个唯一的连续延拓，定义在整个空间$C(S^2)$上。

文献 [EPZ07] 证明了，中位数拟态满足泊松括号不等式。最近，文献 [HKKKR26] 证明了，中位数拟态的泊松括号不等式的最优常数是$_{1\ 2}$。

我们来回顾 Entov–Polterovich 构造，并假设读者熟悉 Floer理论中的谱不变量概念。相关背景请参见 [EP03, Oh97, Oh99, Oh05, Sch00] 。设 (M, ω) 是一个闭辛流形，且 e 是量子同调 $QH_*(M, \omega)$ 中的一个非零幂等元，也就是说，$e * e = e$。记 $c(e, \cdot) : C^\infty(S^1 \times M) \to \mathbb{R}$ 为与 e相关的谱不变量。对于每个自治哈密顿量 $F \in C^\infty(M)$，定义

$$\zeta_e(F) = \lim_{k\to\infty} \frac{c(e, kF)}{k}.$$

泛函 $\zeta_e : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ 关于 $C^\infty(M)$ 上的一致范数是 1-利普希茨的。因此，它可以唯一延拓为定义在 $C(M)$ 上的泛函。

Entov–Polterovich 证明了 ζ_e 是一个部分辛拟态。此外，如果e 是 $QH_*(M, \omega)$ 的某个域因子的单位元，那么 ζ_e 就是真正辛拟态。量子同调含有域因子的辛流形，其基本例子包括 $\mathbb{C}P^n$ 和球面乘积。在 S^2上，他们的构造得到了例1.18中的中位数拟态。还有一些闭辛流形，例如 $S^2 \times S^2$，其量子同调包含多个域因子。因此，Entov–Polterovich 构造先验上会在这类流形上产生多个不同的真正辛拟态。更多讨论请参见 [EP10] 。

Entov–Polterovich–Zapolsky 在 [EPZ07] 中证明，如果 e 是 $QH_*(M, \omega)$ 的域因子的单位元，那么对于某个常数 $C > 0$，ζ_e 满足泊松括号不等式 (1)。根据定义可立即得出，满足泊松括号不等式的真正辛拟态，尤其也是半辛拟态。

例 1.19。设 (M, ω) 是一个闭辛流形，设 $k \geq 1$，并设 $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ 是 (M, ω) 上常数为 $C_1, \dots, C_k > 0$ 的半辛拟态。定义泛函 $\zeta : C(M) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\zeta(F) = \max_{1\leq i\leq k} \zeta_i(F)$$

对每个 $F \in C(M)$，并令

$$C = \max_{1 \le i \le k} C_i.$$

证明 ζ 是常数为 C的半辛拟态。根据定义， ζ 的归一化、单调性和消失性质显然成立。

令 F， $G \in C^\infty(M)$。存在 $i \in \{1, \dots, k\}$ 使得 $\zeta(F+G) = \zeta_i(F+G)$。根据 ζ的定义，我们有 $\zeta_i(F) \le \zeta(F)$，且 $\zeta_i(G) \le \zeta(G)$。因此，

$$\zeta(F+G)-\zeta(F)-\zeta(G) \le \zeta_i(F+G)-\zeta_i(F)-\zeta_i(G) \le C_i\sqrt{\|\{F,G\}\|_\infty} \le C\sqrt{\|\{F,G\}\|_\infty}.$$

因此， ζ 满足常数为 C的单侧泊松括号不等式。

曲面上的部分辛拟态是半辛拟态的一个非平凡例子。

命题 1.20. 设(Σ, σ) 是配备面积形式σ的闭定向曲面，并令 $A = \int_\Sigma \sigma$。那么，(Σ, σ) 上的每个部分辛拟态都是常数为 $2\sqrt{2A}$的半辛拟态。

命题 1.20 的证明见第 2.1 节。

注 1.21. 如果 Σ 具有正亏格，那么 Entov–Polterovich 构造会在 Σ上产生一个非真正的部分辛拟态；例如参见[HLRS16]。因此，这类准态提供了非平凡的半辛拟态例子，而它们并非真正的准态。

1.3 超重厚纤维

Kawasaki–Orita 在 [KO21]中引入了相对于部分辛拟态的伪重集。这一概念融入了 Entov–Polterovich 在 [EP09]中引入的重集与超重集层级。在同一篇论文中，Kawasaki–Orita 通过证明存在一个相对于部分辛拟态的伪重纤维，强化了 Entov–Polterovich 纤维定理。后来，Mak–Sun–Varolgüneş 进一步强化了这一结论：对于由 Entov–Polterovich 构造得到的部分辛拟态，他们证明了重纤维的存在；参见 [MSV24]。

在我们的设定中，相应的超重结论可由定理 1.10 和已有结果直接推出。现在我们回顾重、超重和伪重子集的概念，以及它们之间导出这一结论的关系。

定义 1.22。 设 (M, ω) 是一个赋有部分辛拟态 ζ 的闭辛流形，且 $X \subseteq M$ 是一个非空闭子集。

- ([EP09]) 集合 X 称为 **ζ-重的**，如果对于每个连续函数 $H \in C(M)$，都有 $\zeta(H) \geq \min_X H$。
- ([EP09]) 如果对每个连续函数$H \in C(M)$，都有 $\zeta(H) \leq \max_X H$，则称集合 X 为 **ζ-超重**。
- ([KO21]) 如果对 X的每个开邻域 U，都存在一个连续函数 $H \in C(M)$，其支集包含于 U 且满足$\zeta(H) > 0$，则称集合 X 为 **ζ-伪重**。

Entov–Polterovich 在 [EP09] 中证明，每个超重集都是重集，每个重集都不可位移，并且每个超重集都与每个重集相交。他们还证明，若 ζ 是一个真正的辛拟态，则每个重集都是超重集。Kawasaki–Orita 在 [KO21] 中证明，每个重集都是伪重集，每个伪重集都不可位移，并且每个超重集都与每个伪重集相交。此外，在部分辛拟态满足简单性的假设下，他们证明每个伪重集都是重集。

对于部分辛拟态 ζ，可以在 M 的紧子集上定义一个与之关联的集合函数 τ_ζ。对于每个紧子集 $K \subseteq M$，定义

$$\tau_\zeta(K) = \inf\{\zeta(a) : a \in C(M, [0,1]),\ a|_K \equiv 1\}.$$

若部分辛拟态 ζ 满足：对于每个紧子集 $K \subseteq M$，要么 $\tau_\zeta(K) = 0$，要么 $\tau_\zeta(K) = 1$，则称其为**简单的**。[1] 因此，根据 [KO21，命题 1.9]，若 ζ 是简单的部分辛拟态，则每个伪重集都是重集。结合上述事实可得，若 ζ 是简单的真正辛拟态，则每个伪重集都是超重集。

此外，[MSV24, 推论 1.10] 证明了，通过 Entov–Polterovich 构造得到的每个真正辛拟态都是简单的。[2] 如前所述，通过 Entov–Polterovich 构造得到的每个真正辛拟态也满足泊松括号不等式；参见 [EPZ07]。由此得到定理 1.10 的以下推论。

---

[1] Aarnes 在 [Aar93] 中为准态定义了另一种简单性概念。对于真正辛准态，这一定义等价于本文给出的定义；参见 [Aar93，定理 2.3] 和 [KO21，注 4.3]。[2] 作为比较，Kawasaki–Orita 指出，由 Entov–Polterovich 构造得到的闭定向曲面上的部分辛拟态，按照上述定义是简单的；参见[KO21，第 3–4] 页。在高维中，这个问题仍未解决。然而，当曲面为正亏格时，[HLRS16，第 1.3] 节证明，由 Entov–Polterovich 构造得到的部分辛拟态不满足这样一个条件：对于真正辛准态而言，该条件等价于 Aarnes 意义下的简单性。

推论 1.23。 设 (M,ω) 是一个闭辛流形，设 $C>0$，并假设 (M,ω) 配备了一个简单的真正辛准态 ζ，且满足常数为 C 的泊松括号不等式。那么，对于每个整数 $k\geq 1$ 和每个光滑映射 $F\colon M\to\mathbb{R}^k$，都存在 $y_0\in F(M)$ 使得

$$F^{-1}\left(\overline{B}_{y_0}\left(4C\cdot k^{3/2}\cdot\sqrt{pb(F)}\right)\right)$$

是 ζ-超重的。

证明。 由于 ζ 满足常数为 C的泊松括号不等式，因此它是一个常数为 C的半辛拟态。根据定理 1.10，存在 $y_0\in F(M)$，使得 $F^{-1}\left(B_{y_0}\left(4C\cdot k^{3/2}\cdot\sqrt{pb(F)}\right)\right)$ 是 ζ-伪重的。由于 ζ是简单的，根据 KO21，命题 1.9]，该集合是ζ-重的。最后，由于 ζ 是真正的，该集合是 ζ-超重的，证毕。 □

1.4 不可位移宽度

设 $(M,\ \omega)$ 是一个闭辛流形。对于每个整数 $k\geq 1$ 以及每个连续映射 $F\colon M\to\mathbb{R}^k$，令

$$\|F\|_\infty=\max_{x\in M}\|F(x)\|,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^k$上的欧几里得范数。

定义 1.24。 设 $F\colon M\to\mathbb{R}^k$ 是一个连续映射。我们将 F 的**不可位移宽度**定义为

$$w(F):=\inf\left\{r>0:F^{-1}\left(\overline{B}_p(r)\right)\text{ is non-displaceable for some }p\in\mathbb{R}^k\right\}.$$

M 的紧致性保证了不可位移宽度有限。

如果 (M,ω) 关于函数 $f\colon\mathbb{N}\to(0,\infty)$ 和 $g\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ 具有定量厚纤维性质，那么根据定义，每个光滑映射 $F\colon M\to\mathbb{R}^k$都满足

$$w(F)\leq f(k)\cdot g\left(pb(F)\right). \tag{2}$$

特别地，如果在 (M,ω) 上赋予一个常数为$C>0$的半辛拟态，那么定理 1.10 蕴含每个光滑映射 $F\colon M\to\mathbb{R}^k$ 都满足

$$w(F)\leq 4Ck^{3/2}\cdot\sqrt{pb(F)}.$$

不可位移宽度满足以下基本性质。

命题 1.25。 设 $F, G\colon\ M \to \mathbb{R}^k$ 为连续映射。那么

$$|w(F) - w(G)| \leq \|F - G\|_\infty.$$

此外，对于每个 $\lambda > 0$,

$$w(\lambda F) = \lambda w(F).$$

证明。 令 $\delta = \|F - G\|_\infty$。 首先，我们来证明

$$w(G) \leq w(F) + \delta.$$

设 $p \in \mathbb{R}^k$ 和 $r > 0$，并假设 $F^{-1}\left(B_p(r)\right)$ 不可位移。若 $x \in F^{-1}\left(B_p(r)\right)$，则

$$\|G(x) - p\| \leq \|G(x) - F(x)\| + \|F(x) - p\| \leq \delta + r.$$

因此,

$$F^{-1}\left(\overline{B}_p(r)\right) \subseteq G^{-1}\left(\overline{B}_p(r+\delta)\right).$$

由于任何包含不可位移集的集合都是不可位移的，因此集合 $G^{-1}\left(B_p(r+\delta)\right)$ 不可位移。于是，$w(G) \leq r + \delta$。对所有此类 p 和 r 取下确界，得到 $w(G) \leq w(F) + \delta$。交换 F 和 G，也可得到 $w(F) \leq w(G) + \delta$。因此，$|w(F) - w(G)| \leq \delta$。

对于第二个断言，注意到对于每个 $p \in \mathbb{R}^k$ 和每个 $r > 0$,

$$(\lambda F)^{-1}\left(\overline{B}_p(r)\right) = F^{-1}\left(\overline{B}_{p/\lambda}\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right).$$

由于 p/λ 遍历 $\mathbb{R}^k$ 且 r/λ 遍历 $(0, \infty)$，根据定义可直接得到 $w(\lambda F) = \lambda w(F)$。 □

命题 1.25 将有助于定理 1.14 的证明，也将应用于涉及泊松括号的 C^0-逼近问题，正如我们将在下文看到的那样。

C^0-逼近与泊松括号

假设 (M, ω) 赋有常数为 $C > 0$ 的半辛拟态。上述稳定性给出了几乎泊松交换性的如下定量障碍。对于每个 $t \in \mathbb{R}$，令 $t_+ := \max\{t, 0\}$。

推论 1.26。 设 $F\colon\ M \to \mathbb{R}^k$ 是连续映射，且 $G\colon\ M \to \mathbb{R}^k$ 是光滑映射。那么

$$pb(G) \geq \frac{\left(w(F) - \|F - G\|_\infty\right)_+^2}{16C^2k^3}.$$

证明。 由命题 1.25 可得

$$w(F) \leq w(G) + \|F - G\|_\infty.$$

另一方面，定理 1.10 给出

$$w(G) \leq 4Ck^{3/2} \cdot \sqrt{pb(G)}.$$

因此，

$$(w(F) - \|F - G\|_\infty)_+ \leq 4Ck^{3/2} \cdot \sqrt{pb(G)}.$$

两边平方即可完成证明。 □

特别地，若 $w(F) > 0$，则每个满足 $\|F - G\|_\infty < w(F)$ 的光滑映射 $G\colon M \to \mathbb{R}^k$ 也满足

$$pb(G) \geq \frac{(w(F) - \|F - G\|_\infty)^2}{16C^2k^3} > 0.$$

对于每个连续映射 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$，定义

$$\liminf_{\substack{G \xrightarrow{C^0} F \\ G \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)}} pb(G) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \inf \left\{ pb(G) : G \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k),\ \|F - G\|_\infty < \epsilon \right\}.$$

推论 1.27。 对于每个连续映射 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$，有

$$\liminf_{\substack{G \xrightarrow{C^0} F \\ G \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)}} pb(G) \geq \frac{w(F)^2}{16C^2k^3}.$$

特别地，如果 $w(F) > 0$，那么

$$\liminf_{\substack{G \xrightarrow{C^0} F \\ G \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)}} pb(G) > 0.$$

证明。 设 $\epsilon > 0$。根据推论 1.26，每个满足 $\|F - G\|_\infty < \epsilon$ 的光滑映射 $G\colon M \to \mathbb{R}^k$ 也满足

$$pb(G) \geq \frac{(w(F) - \|F - G\|_\infty)_+^2}{16C^2k^3} \geq \frac{(w(F) - \epsilon)_+^2}{16C^2k^3}.$$

因此，

$$\inf \left\{ pb(G) : G \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k),\ \|F - G\|_\infty < \epsilon \right\} \geq \frac{(w(F) - \epsilon)_+^2}{16C^2k^3}.$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，所需的不等式得证。 □

当 F 光滑、 $k=2$，且 $w(F)>0$ 时，下极限的正性也可由 [CV08 中证明的泊松交换性的 C^0刚性推出，见定理 1.2]。关于函数对的定量下界也在 [EPZ07 的推论 1.5], 中得到，其表述涉及辛拟态的非可加性。相比之下，推论 1.27 适用于极限映射 F 仅为连续且目标维数k 任意的情形，其下界以 F 的不可位移宽度表示。

1.5 定量厚纤维性质的障碍

现在我们介绍几族满足定理 1.16 假设的闭辛流形，因此它们不具有定量厚纤维性质。在本小节中，我们采用以下约定

$$\omega(X_H,\cdot)=-dH,\qquad \{F,G\}=dF(X_G).$$

对于光滑映射 u， v: $M\to S^1$，其泊松括号为

$$\{u,v\}=\Pi(u^*\theta,v^*\theta),$$

其中， Π 是与 ω 相关联的泊松双向量， θ 是 $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上的标准角一形式。根据这些约定，与 $dx\wedge dy$ 相关联的泊松双向量为

$$-\frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y},$$

因此 $\{x,y\}=-1$。

例 1.28. 设 $\alpha>0$ 为无理数，并在 $\mathbb{T}^4=(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^4$ 上赋予辛形式

$$\omega_\alpha=dx_1\wedge dy_1+\alpha\,dx_2\wedge dy_2.$$

坐标一形式 dx_1,dy_1,dx_2,dy_2 以及相应的坐标向量场从 $\mathbb{R}^4$ 下降到 $\mathbb{T}^4$。定义光滑映射 a, b,c: $\mathbb{T}^4\to S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，使得

$$a([x_1,y_1,x_2,y_2])=x_1+\mathbb{Z},\qquad b([x_1,y_1,x_2,y_2])=x_2+\mathbb{Z},\qquad c([x_1,y_1,x_2,y_2])=y_1+y_2+\mathbb{Z},$$

对每个 $[x_1,y_1,x_2,y_2]\in\mathbb{T}^4=\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ 都成立。与 ω_α 相关联的泊松双向量为

$$\Pi_\alpha=-\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\frac{\partial}{\partial y_1}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_2}\wedge\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

此外,

$$a^*\theta=dx_1,\qquad b^*\theta=dx_2,\qquad c^*\theta=dy_1+dy_2.$$

Th因此，根据圆值函数的泊松括号定义 ，

$$\{a,c\}=\Pi_\alpha(dx_1,dy_1+dy_2)=-1,\qquad \{b,c\}=\Pi_\alpha(dx_2,dy_1+dy_2)=-\frac{1}{\alpha}.$$

因此，

$$\frac{\{a,c\}}{\{b,c\}}=\alpha\notin\mathbb{Q}.$$

因此，根据定理 1.16，$(\mathbb{T}^4,\ \omega_\alpha)$ 不具有定量厚纤维性质。

上一个例子的推广如下：

例 1.29。对于每个整数 $q\geq 0$，令 M_q 为 $\mathbb{R}^4$ 在由以下关系生成的等价关系下的商空间，其坐标为 $(x,\ y,\ z,\ t)$：

$$\begin{aligned}&(x,y,z,t)\sim(x+1,y,z+qy,t),\\&(x,y,z,t)\sim(x,y+1,z,t),\\&(x,y,z,t)\sim(x,y,z+1,t),\\&(x,y,z,t)\sim(x,y,z,t+1).\end{aligned}$$

将商映射记为 π_q：$\mathbb{R}^4\to M_q$。那么 $M_0=\mathbb{T}^4$，而 M_1 是 Kodaira– Thurston 流形；参见 [EK15，定义 1.1]。

1-形式 $\eta_q=dz-qx\,dy$ 在这些识别下保持不变，因此下降为 M_q 上的光滑 1-形式。令 $\alpha>0$ 为无理数，并定义

$$\Omega_{\alpha,q}=(dx+(\alpha-1)dy)\wedge\eta_q+\alpha\,dy\wedge dt. \tag{3}$$

由于 $d\eta_q=-q\,dx\wedge dy$，我们有 $d\Omega_{\alpha,\ q}=0$。此外，

$$\frac{1}{2}\Omega_{\alpha,q}^2=\alpha\,dx\wedge\eta_q\wedge dy\wedge dt\neq 0,$$

因此 $\Omega_{\alpha,\ q}$ 是非退化的。因此，$\Omega_{\alpha,\ q}$ 是 M_q 上的辛形式。

定义光滑映射 $a,\ b,\ c$：$M_q\to S^1$，使得

$$a([x,y,z,t])=y-x+\mathbb{Z},\qquad b([x,y,z,t])=y+\mathbb{Z},\qquad c([x,y,z,t])=t+\mathbb{Z},$$

对每个 $[x,y,z,t]\in M_q$ 都成立。在定义 M_q 的所有等同关系下，这些映射都是良定义的。

Put

$$e^1=dx+(\alpha-1)dy,\qquad e^2=\eta_q,\qquad e^3=\alpha\,dy,\qquad e^4=dt.$$

Then

$$\Omega_{\alpha,q} = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4,$$

而

$$a^*\theta = -e^1 + e^3, \qquad b^*\theta = \frac{1}{\alpha}e^3, \qquad c^*\theta = e^4.$$

令 E_1, E_2, E_3, E_4 为 e^1, e^2, e^3, e^4的框架对偶。根据我们的符号约定，与 $\Omega_{\alpha,q}$ 相关的泊松双向量为

$$\Pi_{\alpha,q} = -E_1 \wedge E_2 - E_3 \wedge E_4.$$

由此可得

$$\{a, c\} = -1, \qquad \{b, c\} = -\frac{1}{\alpha}.$$

因此，

$$\frac{\{a, c\}}{\{b, c\}} = \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

因此，根据定理 1.16，对于每个整数 $q \geq 0$ 和每个无理数 $\alpha > 0$，$(M_q, \Omega_{\alpha,q})$ 都不具有定量厚纤维性质。

例 1.30. 设 $q \geq 0$ 为一个整数，(N, σ) 为一个闭辛流形，且 $\psi_1, \ldots, \psi_4 \colon N \to N$是两两可交换的辛同胚，并满足$\psi_3^q = \mathrm{id}_N$。我们将这些辛同胚用作单值化变换，从而在例 1.29 中的流形 M_q 上构造一个以 N 为纤维的纤维丛。

我们先说明条件 $\psi_3^q = \mathrm{id}_N$的作用。按它们在例 1.29 中出现的顺序，记 $\tau_1, \ldots, \tau_4$为定义 M_q的 $\mathbb{R}^4$ 的四个变换，并采用约定 $\tau_1\tau_2 = \tau_1 \circ \tau_2$。我们有

$$\tau_1\tau_2(x, y, z, t) = (x + 1, y + 1, z + qy + q, t) = \tau_3^q\tau_2\tau_1(x, y, z, t).$$

因此，$\tau_1\tau_2 = \tau_3^q\tau_2\tau_1$。除 $\{\tau_1, \tau_2\}$这一对外，变换 τ_i中的所有变换对都彼此可交换。由于 ψ_i 两两可交换且 $\psi_3^q = \mathrm{id}_N$，我们有

$$\psi_1\psi_2 = \psi_2\psi_1 = \psi_3^q\psi_2\psi_1.$$

因此，赋值 $\tau_i \mapsto \psi_i$ 满足用于构造 M_q的变换之间的所有定义关系。

令 M 为 $\mathbb{R}^4 \times N$ 关于以下生成的等价关系的商空间，其坐标为（x，y，z，t，u）：

$$\begin{aligned}
&(x, y, z, t, u) \sim (x + 1, y, z + qy, t, \psi_1(u)),\\
&(x, y, z, t, u) \sim (x, y + 1, z, t, \psi_2(u)),\\
&(x, y, z, t, u) \sim (x, y, z + 1, t, \psi_3(u)),\\
&(x, y, z, t, u) \sim (x, y, z, t + 1, \psi_4(u)).
\end{aligned}$$

上文验证的相容性确保投影到前四个坐标可诱导出一个光滑纤维丛

$$p\colon M \to M_q$$

以 N 为纤维。由于 M_q 和 N 是闭的， M 是一个闭光滑流形。

令 $\pi_q\colon \mathbb{R}^4 \to M_q$ 为商映射，令 $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^4}\colon \mathbb{R}^4 \times N \to \mathbb{R}^4$ 和 $\mathrm{pr}_N\colon \mathbb{R}^4 \times N \to N$ 为投影映射。令 $\alpha > 0$ 为无理数，令 $\Omega_{\alpha,\,q}$ 为 M_q 上的辛形式，如式 (3) 所示，并定义

$$\widetilde{\Omega} = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^4}^*(\pi_q^*\Omega_{\alpha,q}) + \mathrm{pr}_N^*\,\sigma$$

在 $\mathbb{R}^4 \times N$ 上。对于每个 $i \in \{1,\dots,4\}$，都有 $\pi_q \circ \tau_i = \pi_q$，因此 $\tau_i^*(\pi_q^*\Omega_{\alpha,\,q}) = \pi_q^*\Omega_{\alpha,\,q}$。此外， $\psi_i^*\sigma = \sigma$ ，因为 ψ_i 是辛同胚。因此，定义 M 的四个$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$变换均保持 Ω 不变，所以 Ω 可下降为 M 上的一个光滑二形式 Ω。$\widetilde{\ }$形式 Ω 是由 $\pi_q^*\Omega_{\alpha,\,q}$ 和 σ 确定的乘积辛形式，因此是辛的。因此，下降得到的形式 Ω 也是辛形式。

定义光滑映射 $a,\ b,\ c\colon \overline{M}_q \to S^1$，如下所示

$$\overline{a}([x,y,z,t]) = y - x + \mathbb{Z}, \qquad \overline{b}([x,y,z,t]) = y + \mathbb{Z}, \qquad \overline{c}([x,y,z,t]) = t + \mathbb{Z}$$

对每个 $[x,y,z,t] \in M_q$ 均成立。这些就是例 1.29 中考虑的圆值映射。定义光滑映射 $a,\ b,\ c\colon M \to S^1$，如下所示： $a = a \circ p$、 $b = b \circ p$ 和 $\overline{c} = c \circ p$。$\overline{\ }$ $\overline{\ }$

由于 Ω 是由 $\Omega_{\alpha,\,q}$ 与 σ 的乘积诱导的，从 M_q 拉回的映射的泊松括号与它们在基空间上的泊松括号一致。因此，

$$\{a,c\}_\Omega = \{\overline{a},\overline{c}\}_{\Omega_{\alpha,q}} \circ p = -1, \qquad \{b,c\}_\Omega = \{\overline{b},\overline{c}\}_{\Omega_{\alpha,q}} \circ p = -\frac{1}{\alpha}.$$

因此，

$$\frac{\{a,c\}_\Omega}{\{b,c\}_\Omega} = \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

因此，根据定理 1.16，$(M,\ \Omega)$ 不具有定量厚纤维性质。

举一个具体的非平凡例子，取 $q = 0$，并令 $N = \mathbb{T}^2$ 带有其标准面积形式。定义辛同胚 $\psi\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$，如下所示:

$$\psi(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u \pmod{\mathbb{Z}^2}$$

对每个 $u \in \mathbb{T}^2$。取 $\psi_1 = \psi$ 和 $\psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^2}$。令

$$Y_\psi = (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2)/\big((x,u) \sim (x+1, \psi(u))\big)$$

为 ψ 的映射环面。定义 M 的第一个等同关系，根据坐标（x, u）得到 Y_ψ ；其余三个等同关系则将坐标 y、z 和 t 对 $\mathbb{Z}$ 取模。因此，

$$M \cong Y_\psi \times \mathbb{T}^3.$$

此外，注意到 M 与 $\mathbb{T}^6$并非微分同胚。事实上，根据 [Fri19，命题 15.25 及第 479], 页上的例子

$$\pi_1(M) \cong \left(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\psi_*} \mathbb{Z}\right) \times \mathbb{Z}^3.$$

这个群是非阿贝尔群，而 $\pi_1(\mathbb{T}^6) \cong \mathbb{Z}^6$ 是阿贝尔群。因此， M 与 $\mathbb{T}^6$并非微分同胚。

1.6 讨论

1.6.1 非紧辛流形

自然会想到，半辛拟态和定量厚纤维定理能否推广到非紧辛流形。在这种情形下，函数空间的选择需要格外谨慎。遵循 [Lan13，第 1.2], 节，令$C_{cc}(M)$表示 M 上在某个紧子集之外取常值的连续函数空间。该空间包含常函数，因此适用于归一化公理。可以将非紧辛流形上的半辛拟态定义为泛函 $\zeta\colon C_{cc}(M) \to \mathbb{R}$，它满足归一化、单调性、对具有可置换支集的紧支集函数的消失性质，以及以下单侧泊松括号不等式：存在常数$C > 0$，使得对任意 F, $G \in C^\infty_{cc}(M)$，都有

$$\zeta(F+G) - \zeta(F) - \zeta(G) \leq C\sqrt{\|\{F,G\}\|_\infty}.$$

Lanzat 在某些开凸辛流形上构造了部分辛拟态；参见 [Lan13，推论 3.15]。该推论之后的例子包括闭连通流形的余切丛和开Stein流形；参见 [Lan13，第 5354] 页。他还在余切丛的适当一点爆破上构造了真正辛拟态；参见 [Lan13，定理 1.6 和注记 6]。

另一方面，Zapolsky 证明了，连通完备李乌维尔流形上紧支撑哈密顿微分同胚群的万能覆盖上的每个稳定齐次拟同态都恒等于零；参见 [Zap26, 定理 1.2]。由于稳定齐次拟同态的标准构造会产生满足泊松括号不等式的真正辛拟态，因此，这种构造无法在此类流形上产生非平凡的真正辛拟态；另见 [Zap26, 命题 2.8]。这并不排除部分拟态或半辛

拟态。这也不与 Lanzat 的结果矛盾：他在上述弱正合例子上构造的拟态是部分拟态，而他的非平凡真实例子则定义在非正合 blowup 上。

接下来，我们考察定理 1.10 是否存在适用于非紧辛流形的类似结论。设 $\zeta\colon C_{cc}(M) \to \mathbb{R}$ 是上述类型的泛函。在讨论这种推广之前，我们指出，ζ-伪重子集和 ζ-超重子集的概念可以原封不动地推广到非紧致情形；Lanzat 在 [Lan13，定义 4.6] 中推广了超重子集的概念。可置换性应相对于紧支撑哈密顿微分同胚来理解。与闭情形一样，每个 ζ-伪重子集都与每个紧致 ζ-超重子集相交，证明与 [KO21，命题 1.6] 的证明相同。

现在可以为光滑映射 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$ 提出一个看似合理的定理 1.10 的非紧致类似结论，其中坐标函数属于 $C^\infty_{cc}(M)$。这样的映射在某个紧子集之外为常值；将其在该处的取值记为 $p_\infty \in \mathbb{R}^k$。看来，对定理 1.10 的证明作适当修改，就能得到一个 ζ-伪重闭厚纤维

$$F^{-1}\left(\overline{B}_{y_0}(R_0)\right), \qquad R_0 = 4Ck^{3/2}\sqrt{pb(F)}.$$

如果 $p_\infty \in B_{y_0}(R_0)$，则该结论可能是平凡的，因为此时厚纤维包含某个紧子集的补集，并且通过紧支撑哈密顿微分同胚必然不可位移。排除这种情况的一种可能方法是假设存在一个紧的 ζ-超重子集 $K \subseteq M$ 满足

$$\operatorname{dist}\left(p_\infty, F(K)\right) > 2R_0.$$

于是，伪重厚纤维将与 K 相交。考虑一点

$$x \in K \cap F^{-1}\left(\overline{B}_{y_0}(R_0)\right).$$

我们有

$$\|y_0 - p_\infty\| \geq \|F(x) - p_\infty\| - \|F(x) - y_0\| > 2R_0 - R_0 = R_0.$$

因此，$p_\infty \notin \overline{B_{y_0}(R_0)}$。由于 $F = p_\infty$ 在某个紧子集之外，故可得

$$F^{-1}\left(\overline{B}_{y_0}(R_0)\right)$$

是紧致的。这启发了定量厚纤维定理一个有意义的非紧致版本：若一个紧致超重子集的像与映射在无穷远处的取值定量分离，则应能推出存在一个紧致的伪超重、因而不可位移的厚纤维。

1.6.2 作为目标空间的黎曼流形

厚纤维的定义自然地扩展到取值于黎曼流形的映射。设 $(N,\ g)$ 是一个 k 维黎曼流形，且 $F\colon\ M \to N$ 是一个光滑映射。对于每个 $y \in N$ 和每个 $r \geq 0$，都可以考虑厚纤维

$$F^{-1}\left(\overline{B}_y^g(r)\right),$$

其中，$\overline{B}_y^g(r)$ 是以 y 为中心、半径为 r 的闭度量球。要在此背景下表述定量厚纤维问题，我们首先需要一种与坐标无关的度量，用以衡量 F 的各分量不满足泊松对易的程度。

设 Π 为与 ω 相关联的泊松双向量。将拉回丛 $F^*\left(\bigwedge^2 TN\right) \to M$ 的截面 $\mathcal{P}_F$ 定义为 Π 在 F 下的推前。更确切地说，对于每个 $x \in M$ 和每个 $\alpha,\ \beta \in T^*_{F(x)}N$，定义

$$(\mathcal{P}_F)_x(\alpha,\beta) = \Pi_x\left((d_xF)^*\alpha, (d_xF)^*\beta\right).$$

黎曼度量 g 在 $\bigwedge^2 TN$ 上诱导出一个范数。定义 F **的泊松括号大小 相对于** g为

$$pb_g(F) = \max_{x\in M} \|(\mathcal{P}_F)_x\|_g.$$

在 N 上的局部坐标 $(y_1,\ \ldots\ldots,\ y_k)$ 中，我们有

$$\mathcal{P}_F(x) = \sum_{1\leq i<j\leq k} \{y_i\circ F, y_j\circ F\}(x)\ \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{F(x)}.$$

因此，$pb_g(F)$ 以与坐标无关的方式，同时衡量 F 的所有局部坐标函数的泊松括号。

当 $N = \mathbb{R}^k$ 配备欧几里得度量，且 $F = (F_1,\ \ldots\ldots,\ F_k)$ 时，我们有

$$pb_g(F) = \max_{x\in M}\left(\sum_{1\leq i<j\leq k} |\{F_i, F_j\}(x)|^2\right)^{1/2}.$$

因此，

$$pb(F) \leq pb_g(F) \leq \sqrt{\frac{k(k-1)}{2}}\, pb(F).$$

特别地，$pb_g(F) = 0$ 当且仅当 F 的坐标函数两两泊松对易。

定理 1.10 也给出了黎曼目标空间的一个局部结果。假设 $F(M)$ 包含在一个坐标图中，且该坐标图在两个方向上的畸变均有界于$L \geq 1$。在此坐标图中应用定理 1.10，我们得到一个点 $y \in F(M)$，使得

$$F^{-1}\left(\overline{B}_y^g\left(4Ck^{3/2}L^2\sqrt{pb_g(F)}\right)\right)$$

包含一个 ζ-伪重子集，因此不可位移。事实上，坐标图使泊松括号大小至多增加 L^2 倍，开平方后会带来 L 倍的因子，而换回黎曼距离则会再带来 L 倍的因子。

对于一般的黎曼目标空间，局部坐标论证不能立即给出全局估计。要得到这样的估计，需要一组受到定量控制的坐标邻域覆盖 N 的相关部分，并且需要一种方法来组合相应的局部估计。所得常数应取决于维数以及单射半径、曲率界或坐标图的双 Lipschitz 畸变等几何量。由于 $F(M)$ 是紧致的，当 N 非紧致时，相关的应只有 $F(M)$ 邻域的几何性质。

在这种情形下，平方根依赖仍然是自然的。事实上，若度量按 $g_\lambda = \lambda^2 g$ 进行缩放，其中 $\lambda > 0$ 为某个参数，则

$$pb_{g_\lambda}(F) = \lambda^2 pb_g(F),$$

而

$$d_{g_\lambda} = \lambda d_g.$$

因此，与黎曼距离相同，半径与 $\sqrt{pb_g(F)}$ 成正比。这表明，对泊松括号大小的平方根依赖应保持不变，而对维数的依赖则应补充一个由目标空间的几何学决定的定量常数。

确定 (N, g) 上哪些几何假设能够保证存在常数 $C(N, g) > 0$，使得对于每个光滑映射 $F\colon M \to N$，都存在 $y \in F(M)$，满足

$$F^{-1}\left(\overline{B}_y^g\left(C(N,g)\sqrt{pb_g(F)}\right)\right)$$

是不可位移的。特别是，可以探讨有界几何流形是否存在仅依赖于维数和相关有界几何常数的估计，以及目标空间的拓扑是否会产生欧几里得目标空间中已有障碍之外的其他障碍。

1.6.3 纤维的位移能量

Let $X \subseteq M$ 是一个闭子集。 X 的**位移能量**定义为 b y

$$e(X) = \inf\left\{\|H\|_{\text{Hofer}} : H \in C^\infty(S^1 \times M),\ \varphi_H^1(X) \cap X = \varnothing\right\},$$

wh其中 φ_H^1 是由 H 生成的哈密顿流的时一映射，并且

$$\|H\|_{\text{Hofer}} = \int_{S^1} \left(\max_{x\in M} H(t,x) - \min_{x\in M} H(t,x)\right) dt.$$

我们约定，如果 X 不可位移，则 $e(X) = \infty$ 。

对于每个连续映射 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$，定义其纤维的最大位移能量为

$$e_{\text{fib}}(F) = \sup_{p\in\mathbb{R}^k} e\left(F^{-1}(p)\right).$$

仅根据 $pb(F)$ 无法对这个量作出有用的估计。事实上，如果 F 是光滑嵌入，且 M 具有正维数，那么每个非空纤维都是单元素集合，因此

$$e_{\text{fib}}(F) = 0.$$

此外，对于每个 $\lambda > 0$，映射 F 和 λF 的纤维相同（至多重新标记），然而

$$pb(\lambda F) = \lambda^2 pb(F).$$

另一方面，如果 $pb(F) = 0$，那么定理 1.4 给出一个不可位移的纤维，因此

$$e_{\text{fib}}(F) = \infty.$$

因此，要对 $e_{\text{fib}}(F)$ 作出估计，需要对该映射或其纤维的几何学作出额外假设。

厚纤维的位移能量可以用函数 $\mathcal{E}_F$ 记录： $[0,\infty) \to [0,\infty]$ 定义为

$$\mathcal{E}_F(r) = \sup_{p\in\mathbb{R}^k} e\left(F^{-1}\left(\overline{B}_p(r)\right)\right)$$

对每个 $r \geq 0$都成立。函数 $\mathcal{E}_F$ 是非递减的，并且

$$\mathcal{E}_F(0) = e_{\text{fib}}(F).$$

此外，利用 M 的紧致性，可以验证不可位移宽度为

$$w(F) = \inf\left\{r > 0 : \mathcal{E}_F(r) = \infty\right\}.$$

在此记号下，定理 1.10 给出

$$\mathcal{E}_F\left(4Ck^{3/2}\sqrt{pb(F)}\right)=\infty.$$

位移能量剖面也具有 C^0-稳定性。若 F，G: $M\to\mathbb{R}^k$是连续的，且

$$\|F-G\|_\infty\le\epsilon,$$

那么，对每个 $r\ge 0$,

$$\mathcal{E}_F(r)\le\mathcal{E}_G(r+\epsilon),\qquad \mathcal{E}_G(r)\le\mathcal{E}_F(r+\epsilon).$$

这是由厚纤维之间相应的包含关系以及位移能量的单调性得出的。

问题 1.31。 对光滑映射 F: $M\to\mathbb{R}^k$施加哪些额外假设，才能估计 $e_{\mathrm{fib}}(F)$? 更一般地，对于 $0\le r<w(F)$，能否利用关于纤维或包含这些纤维的子集的辛信息来估计 $\mathcal{E}_F(r)$?

致谢。 我感谢 Yaniv Ganor 与我进行了许多有趣的数学讨论，并就本文的撰写以及在研究过程中使用 AI 提出了建议。我也感谢 Jun Zhang 分享其著作《接触刚性与泊松括号不变量》的初稿，并就我们的研究结果之间的关系进行了有益的讨论；此外，他以开放、友好的方式与我协调了相关工作的呈现。我还要感谢 Michael Entov、Leonid Polterovich、Egor Shelukhin 和 David Keren Yaar 与我进行了有益的讨论。

在蒙特利尔大学 Centre de Recherches Mathématiques 从事博士后研究期间，我获得了 Fondation Courtois 的部分资助，也获得了加拿大 2026年 Jenny Panitch Beckow 纪念奖学金的资助。我还要感谢 Centre de Recherches Mathématiques 的热情接待和出色的工作环境。

AI 披露。本文的作者构思并指导了本研究项目。他提出了定量厚纤维性质和半辛拟态的概念，指出单侧泊松括号不等式是相关假设，并指导了本文所探讨的存在性、障碍、最优性和逼近问题研究。他揭示了定理 1.16 背后的普遍机制，并在 [DGPZ24 定理 6.1]和 Milnor 引理的启发下，于第 2.4.1 小节中构建了最终的（$k+1$）着色单位分解；参见 [Pal66 引理 2.4]。

OpenAI 的 ChatGPT 和 Codex 提出了初步的数学论证和例子。具体而言，它们为定理 1.10 的证明提出了一个初步的、使用2^k 种颜色的单位分解论证，并给出了最初的无理环面例子，后者引出了定理 1.16。它们还协助准备了定理 1.14 的初步论证、第 1.4 节中关于不可位移宽度的应用，以及第 1.5 节中的例子。此外，它们还用于核查计算、查找参考文献、起草初步证明、润色英文以及准备 LaTeX 源文件。

作者对 AI 生成的材料进行了批判性评估，选取需要保留的部分，对其进行了大幅修改并纳入自己的研究计划，纠正了错误，并独立核实了所有数学论证和参考文献。论文的最终陈述、证明、结构和表述均由作者确定。

2 证明

2.1 命题 1.20 的证明

命题 1.20 的证明基于两个事实。首先，部分辛准态关于一致范数是 1-利普希茨的。其次，以下结果归功于 Zapolsky [Zap10]。

定理 2.1（Zapolsky, [Zap10，定理 1.3]）。设 F, $G \in C^\infty(\Sigma)$ 并设 $\epsilon \geq 0$。若

$$\int_\Sigma |\{F, G\}|\sigma \leq \epsilon,$$

then 存在光滑函数 $F', G' \in C^\infty(\Sigma)$ 满足 $\{F', G'\} = 0$ 且

$$\|F - F'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}, \qquad \|G - G'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}.$$

*命题 1.20 的证明。*由于 ζ 是部分辛拟态，它满足归一化、单调性和消失性质。下面证明 ζ 满足常数为 $2\sqrt{2A}$ 的单侧泊松括号不等式。

令 F, $G \in C^\infty(\Sigma)$。我们有

$$\int_\Sigma |\{F, G\}|\sigma \leq \int_\Sigma \|\{F, G\}\|_\infty \sigma = A\|\{F, G\}\|_\infty.$$

根据定理 2.1，存在彼此泊松对易的光滑函数 F', $G' \in C^\infty(\Sigma)$，使得

$$\|F - F'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{A}{2}}\sqrt{\|\{F, G\}\|_\infty}, \qquad \|G - G'\|_\infty \leq \sqrt{\frac{A}{2}}\sqrt{\|\{F, G\}\|_\infty}.$$

特别地，

$$\|(F+G)-(F'+G')\|_\infty \le \sqrt{2A}\sqrt{\|\{F,G\}\|_\infty}.$$

由于 F' 与 G' 泊松对易，ζ 的拟次可加性意味着

$$\zeta(F'+G') \le \zeta(F')+\zeta(G').$$

最后，由于 ζ 关于一致范数是 1-利普希茨的，我们得到

$$\begin{aligned}\zeta(F+G) &\le \zeta(F'+G')+\sqrt{2A}\sqrt{\|\{F,G\}\|_\infty}\\ &\le \zeta(F')+\zeta(G')+\sqrt{2A}\sqrt{\|\{F,G\}\|_\infty}\\ &\le \zeta(F)+\zeta(G)+2\sqrt{2A}\sqrt{\|\{F,G\}\|_\infty}.\end{aligned}$$

因此，

$$\zeta(F+G)-\zeta(F)-\zeta(G) \le 2\sqrt{2A}\sqrt{\|\{F,G\}\|_\infty},$$

正如所要求的。 □

2.2 定理 1.14 的证明

证明定理 1.14 的第一步是证明不可位移宽度非平凡。

引理 2.2. 设 $U_1,\dots,U_k$ 是 M 的一个有限开覆盖，由可移动集构成，且 $\rho_1,\dots,\rho_k\colon M\to[0,1]$ 是从属于该覆盖的光滑单位分解。定义光滑映射 $F\colon M\to\mathbb{R}^k$，使得对每个 $x\in M$，都有 $F(x)=\big(\rho_1(x)\dots,\rho_k(x)\big)$。那么 $w(F)\ge\frac{1}{2k}$。

证明。我们证明，对每个 $p\in\mathbb{R}^k$ 以及每个 $r\in(0,1/(2k))$，集合 $F^{-1}\big(B_p(r)\big)$ 都是可置换的。固定 $p\in\mathbb{R}^k$ 和 $r\in(0,1/(2k))$，并令 $X=F^{-1}\big(B_p(r)\big)$。若 X 为空，则它是可置换的。设 X 非空，并选取 $x_0\in X$。由于 $\sum_{i=1}^k\rho_i(x_0)=1$，存在 $i\in\{1,\dots,k\}$ 使得 $\rho_i(x_0)\ge\frac{1}{k}$。对每个 $x\in X$，我们有

$$|\rho_i(x)-\rho_i(x_0)| \le \|F(x)-F(x_0)\| \le \|F(x)-p\|+\|p-F(x_0)\| \le 2r<\frac{1}{k}.$$

由此可得 $\rho_i(x)\ge\rho_i(x_0)-2r\ge\frac{1}{k}-2r>0$。这表明

$$X\subseteq\{\rho_i>0\}\subseteq\operatorname{supp}\rho_i\subseteq U_i.$$

由于 U_i 是可置换的，集合 X 是可置换的。因此，$w(F)\ge\frac{1}{2k}$。 □

注 2.3. 结合定理 1.10 和引理 2.2，我们得到了可置换集合的开覆盖的泊松括号不变量的一个下界；参见 [EPZ07]。然而，这个下界并未改进该论文中得到的下界。

定理 *1.14* 的证明。 M 中的每个点都有一个可置换的开邻域，该邻域包含于某个达布图中。由 M的紧致性可知，存在一个整数 $q \geq 2$ 和一个由可置换集构成的 M的有限开覆盖 $U_1, \ldots, U_q$。令 $\rho_1, \ldots, \rho_q \colon M \to [0,1]$ 为从属于该覆盖的光滑单位分解。定义光滑映射 $\Phi \colon M \to \mathbb{R}^q$如下：

$$\Phi(x) = \big(\rho_1(x), \ldots, \rho_q(x)\big)$$

对每个 $x \in M$，并令 $\delta = pb(\Phi)$。由引理 2.2，我们有 $w(\Phi) \geq \frac{1}{2q} > 0$。由于 (M, ω) 相对于 f 和 g具有定量厚纤维性质，我们还得到

$$w(\Phi) \leq f(q)g(\delta).$$

若 $\delta = 0$，则 $g(\delta) = g(0) = 0$，因此前述不等式给出 $w(\Phi) \leq 0$，这与 $w(\Phi) > 0$这一事实矛盾。因此， $\delta > 0$。此外，由于 $w(\Phi) > 0$ 且$f(q) > 0$，同一不等式蕴含 $g(\delta) > 0$。我们分两个阶段证明所需的界。

(i) 我们首先证明 g 的下界。考虑 $c_g = \frac{w(\Phi)}{f(q)\sqrt{\delta}} > 0$。令 $t \geq 0$。若$t = 0$，则 $g(t) = 0 = c_g\sqrt{t}$。假设 $t > 0$，并令 $\lambda = \sqrt{\frac{t}{\delta}} > 0$。我们有$pb(\lambda\Phi) = \lambda^2 pb(\Phi) = t$，而命题 1.25 给出 $w(\lambda\Phi) = \lambda w(\Phi)$。将定量厚纤维性质应用于光滑映射 $\lambda\Phi$: $M \to \mathbb{R}^q$，可得

$$\lambda w(\Phi) = w(\lambda\Phi) \leq f(q)g\big(pb(\lambda\Phi)\big) = f(q)g(t).$$

因此，

$$g(t) \geq \frac{\lambda w(\Phi)}{f(q)} = \frac{w(\Phi)}{f(q)\sqrt{\delta}}\sqrt{t} = c_g\sqrt{t}.$$

这就证明了所需的 g 下界。

(ii) 现在证明 f 的下界。令 $k \geq q$，并设 $m = \lfloor k/q \rfloor$。定义光滑映射 $F_k \colon M \to \mathbb{R}^k$ 为

$$F_k(x) = \left(\underbrace{\Phi(x), \ldots, \Phi(x)}_{m \text{ copies}}, 0, \ldots, 0\right)$$

对每个 $x \in M$ 均成立。我们有 $pb(F_k) = \delta$。根据定量厚纤维性质，存在 $y \in F_k(M)$，使得

$$F_k^{-1}\left(\overline{B}_y\left(f(k)g(\delta)\right)\right)$$

是不可位移的。选取 $x_0 \in M$ 使得 $y = F_k(x_0)$。对于每个 $x \in M$，我们有

$$\|F_k(x) - F_k(x_0)\| = \sqrt{m}\|\Phi(x) - \Phi(x_0)\|.$$

因此，

$$F_k^{-1}\left(\overline{B}_y\left(f(k)g(\delta)\right)\right) = \Phi^{-1}\left(\overline{B}_{\Phi(x_0)}\left(\frac{f(k)g(\delta)}{\sqrt{m}}\right)\right).$$

由于该集合是不可位移的，根据不可位移宽度的定义和引理 2.2，可得

$$\frac{1}{2q} \le w(\Phi) \le \frac{f(k)g(\delta)}{\sqrt{m}}.$$

由于 $m = \lfloor k/q \rfloor \ge k/(2q)$，我们得到

$$f(k) \ge \frac{1}{2q\sqrt{2q}\, g(\delta)}\sqrt{k}$$

对每个整数 $k \ge q$。定义

$$c_f = \min\left\{\frac{1}{2q\sqrt{2q}\, g(\delta)}, \min_{1 \le k < q} \frac{f(k)}{\sqrt{k}}\right\} > 0.$$

那么，对于每个整数 $k \ge 1$，都有 $f(k) \ge c_f\sqrt{k}$。这证明了 f 所需的下界，并完成了证明。

□

2.3 定理 1.16 的证明

定理 1.16 的证明用到了圆值函数的泊松括号的一些基本性质。我们来回顾其定义，并列出这些性质。

我们使用引言中引入的记号 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 和 $\theta \in \Omega^1(S^1)$。回想一下，Π 是与 ω相关联的泊松双向量，其特征为

$$\Pi(dF, dG) = \{F, G\}$$

对于每个 $F,\ G \in C^\infty(M)$。如果 $f,\ g\colon\ M \to S^1$ 是光滑映射，回忆

$$\{f, g\} = \Pi(f^*\theta, g^*\theta).$$

如果 $f\colon\ M \to S^1$ 和 $G\colon\ M \to \mathbb{R}$ 光滑，则定义

$$\{f, G\} = \Pi(f^*\theta, dG).$$

对于每个光滑函数 $h\colon S^1 \to \mathbb{R}$，记 $h'\colon S^1 \to \mathbb{R}$ 为由 $dh = h'\theta$确定的光滑函数。若 f, $g\colon M \to S^1$ 均为光滑函数，则

$$\{f, h \circ g\} = h'(g)\{f, g\}.$$

此外，若 h_1, $h_2\colon S^1 \to \mathbb{R}$ 均为光滑函数，则

$$\{h_1 \circ f, h_2 \circ g\} = h_1'(f)h_2'(g)\{f, g\}.$$

由于 Π 是反对称的，我们有 $\{f, f\} = 0$。因此，$\{h_1 \circ f, h_2 \circ f\} = 0$。

设 m, $n \in \mathbb{Z}$，并定义光滑映射 $w\colon M \to S^1$ 为 $w = mf + ng$，其中加法和整数乘法均在 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$中逐点进行。于是

$$w^*\theta = mf^*\theta + ng^*\theta.$$

因此，对于每个光滑映射 $q\colon M \to S^1$ 以及每个光滑函数 $H\colon M \to \mathbb{R}$，我们有

$$\{w, q\} = m\{f, q\} + n\{g, q\}, \qquad \{w, H\} = m\{f, H\} + n\{g, H\}.$$

最后，设 $f\colon M \to S^1$ 和 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 为光滑的，设 $(\varphi_H^t)_{t\in\mathbb{R}}$ 为 H的哈密顿流，并设 $x \in M$。定义光滑路径 $\gamma_x\colon \mathbb{R} \to S^1$ 为

$$\gamma_x(t) = f(\varphi_H^t(x))$$

对每个 $t \in \mathbb{R}$。如果 $\widetilde{\gamma}_x\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 γ_x的光滑提升，则

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\gamma}_x(t) = \{f, H\}(\varphi_H^t(x))$$

对每个 $t \in \mathbb{R}$。特别地，如果 $\{f, H\} = 0$，则 H 的哈密顿流保持 f不变，即

$$f(\varphi_H^t(x)) = f(x)$$

对每个 $x \in M$ 和每个 $t \in \mathbb{R}$。

定理 *1.16* 的证明。反设 (M, ω) 关于函数 $f\colon \mathbb{N} \to (0, \infty)$ 和 $g\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ 具有定量厚纤维性质，其中 g 连续且在 0 处为零。由于 g 连续且 $g(0) = 0$，存在$\eta > 0$，使得对每个 $t \in [0, \eta]$，都有 $g(t) \leq 1/(4f(4))$。

由于 A/B 是无理数，鸽巢原理意味着存在 $m, n \in \mathbb{Z}$，使得

$$0 < mA + nB < \frac{\eta}{4\pi^2}.$$

令 $\delta = mA + nB$，并定义光滑映射 $w\colon M \to S^1$，使得

$$w(x) = ma(x) + nb(x)$$

对每个 $x \in M$ 都成立，其中加法在 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 中进行。根据上述线性性质，我们有

$$\{w, c\} = m\{a, c\} + n\{b, c\} = mA + nB = \delta.$$

定义光滑映射 $F\colon M \to \mathbb{R}^4$，使得

$$F(x) = \big(\cos(2\pi w(x)), \sin(2\pi w(x)), \cos(2\pi c(x)), \sin(2\pi c(x))\big)$$

对每个 $x \in M$ 都成立。

注意，$pb(F) < \eta$。事实上，F 的前两个坐标彼此泊松对易，后两个坐标也彼此泊松对易。此外，根据上述链式法则性质，我们有

$$\{\cos(2\pi w), \cos(2\pi c)\} = 4\pi^2 \sin(2\pi w)\sin(2\pi c)\{w, c\} = 4\pi^2 \sin(2\pi w)\sin(2\pi c)\delta.$$

因此，

$$\|\{\cos(2\pi w), \cos(2\pi c)\}\|_\infty \leq 4\pi^2\delta.$$

类似地，F 中其他任意一对坐标的泊松括号的一致范数均由上界 $4\pi^2\delta$ 控制。因此 $pb(F) \leq 4\pi^2\delta < \eta$。

由于 (M, ω) 关于 f 和 g 具有定量厚纤维性质，存在 $y_0 \in F(M)$ 使得

$$F^{-1}\left(\overline{B}_{y_0}\left(f(4)g\left(pb(F)\right)\right)\right)$$

是不可位移的。由于 $pb(F) < \eta$，我们有 $g(pb(F)) \leq 1/(4f(4))$，因此$f(4)g(pb(F)) \leq \frac{1}{4}$。Consequently，该集合

$$K = F^{-1}\left(\overline{B}_{y_0}\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

是不可位移的，因为它包含前述不可位移集 .

由于 $y_0 \in F(M)$，存在 $y_1, y_2 \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，使得

$$y_0 = \big(\cos(2\pi y_1), \sin(2\pi y_1), \cos(2\pi y_2), \sin(2\pi y_2)\big).$$

考虑对称开区间

$$I = \left\{ y_1 + t \in S^1 : -\frac{1}{8} < t < \frac{1}{8} \right\}, \qquad J = \left\{ y_2 + t \in S^1 : -\frac{1}{8} < t < \frac{1}{8} \right\},$$

其中加法模 $\mathbb{Z}$ 进行。

我们来证明 $K \subseteq (w,\ c)^{-1}(I \times J)$。设 $x \in K$。存在 $t_1,\ t_2 \in [-1/2, 1/2]$ 使得 $w(x) = y_1 + t_1$ 且 $c(x) = y_2 + t_2$ 于 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 中。根据 K 的定义，有 $\|F(x) - y_0\| \leq \frac{1}{4}$。利用恒等式

$$(\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{u - v}{2} \right),$$

该恒等式对每个 $u,\ v \in \mathbb{R}$ 都成立，我们得到

$$4 \sin^2(\pi t_1) + 4 \sin^2(\pi t_2) = \|F(x) - y_0\|^2 \leq \frac{1}{16}.$$

因此，对每个 $i \in \{1, 2\}$，都有 $2|\sin(\pi t_i)| \leq \frac{1}{4}$。回顾一下，对每个 $u \in [0, 1/2]$，我们有 $2u \leq \sin(\pi u)$。由于 $|t_i| \leq \frac{1}{2}$，我们推出

$$4|t_i| \leq 2 \sin(\pi |t_i|) = 2|\sin(\pi t_i)| \leq \frac{1}{4}.$$

因此，对每个 $i \in \{1, 2\}$，都有 $|t_i| \leq \frac{1}{16} < \frac{1}{8}$。于是 $w(x) \in I$ 且 $c(x) \in J$。

这表明

$$K \subseteq (w, c)^{-1}(I \times J).$$

选取一个光滑函数 $h\colon S^1 \to \mathbb{R}$，使其导数在 J 的某个邻域内等于 $\frac{1}{2\delta}$。这样的函数存在，因为 J 包含在 S^1 的一个真开弧中。定义哈密顿量 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 为 $H = h \circ c$，并令 $(\varphi_H^t)_{t \in \mathbb{R}}$ 为其哈密顿流。我们证明其时间 1 映射 φ_H^1 将 K 移离自身。

令 $x \in K$。由于

$$\{c, H\} = h'(c)\{c, c\} = 0,$$

H 的哈密顿流保持 c。因此，

$$c(\varphi_H^t(x)) = c(x) \in J$$

对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都成立。

对每个 $t \in [0, 1]$，定义光滑路径 $\gamma_x\colon [0, 1] \to S^1$ by $\gamma_x(t) = w(\varphi_H^t(x))$，并令 $\widetilde{\gamma}_x\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ be 为 γ_x 的光滑提升。根据上述性质，我们有

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\gamma}_x(t) = \{w, H\}(\varphi_H^t(x)) = h'(c(\varphi_H^t(x)))\{w, c\}(\varphi_H^t(x)) = \frac{1}{2\delta}\delta = \frac{1}{2}$$

对每个 $t \in [0,1]$ 均成立。对这个等式积分，得到 $\widetilde{\gamma}_x(1) = \widetilde{\gamma}_x(0) + \frac{1}{2}$。取极限至 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，可得

$$w(\varphi_H^1(x)) = w(x) + \frac{1}{2}.$$

因此，

$$\varphi_H^1(K) \subseteq (w,c)^{-1}\left(\left(I + \frac{1}{2}\right) \times J\right).$$

区间 I 的长度为$1\ 4$，因此

$$I \cap \left(I + \frac{1}{2}\right) = \varnothing.$$

由此可得

$$\varphi_H^1(K) \cap K = \varnothing.$$

因此， K 是可置换的，这与其不可位移性矛盾。因此，(M,ω) 不具有定量厚纤维性质。

□

2.4 定理 1.10 的证明

本节中，我们将使用 $\mathbb{R}^k$ 上的若干范数、函数空间上的若干范数，以及 1-形式空间上的若干范数。这里先对它们进行介绍。

我们为 $\mathbb{R}^k$ 赋予与标准基相关联的坐标 $y = (y_1, \ldots, y_k)$。对于每个 $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$，定义

$$\|y\|_\infty = \max_i |y_i|.$$

对于每个 $p \in [1,\infty)$，定义 $\mathbb{R}^k$ 上的 ℓ^p-范数为

$$\|y\|_p = \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^p\right)^{1/p},$$

对于每个 $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$。$\ell^2$-范数就是欧几里得范数，我们将其记为 $\|y\| = \|y\|_2$。

对于每个余向量 $\xi = \sum_{i=1}^k \xi_i\, dy_i$，令 $\|\xi\|_1 = \sum_{i=1}^k |\xi_i|$。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ 是一个区域。对于每个有界连续函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$，定义

$$\|f\|_{\infty,\Omega} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

对于 Ω 上满足 $\sup_{x\in\Omega}\|\alpha(x)\|_1 < \infty$ 的每个连续 1-形式 α，记 $\alpha(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x)\, dy_i$，并定义

$$\|\alpha\|_{1,\infty} = \sup_{x\in\Omega}\|\alpha(x)\|_1 = \sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^k |\alpha_i(x)|.$$

特别地，对于每个满足 $\sup_{x\in\Omega}\|du(x)\|_1 < \infty$ 的 $u \in C^1(\Omega)$，

$$\|du\|_{1,\infty} = \sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^k |\partial_i u(x)|.$$

当区域明确时，我们在一致范数的记号中省略该区域。

2.4.1 特殊单位分解

本小节将在 $\mathbb{R}^k$ 上构造一个特殊单位分解，这一构造对于定理 1.10 的证明至关重要。该构造使用 $\mathbb{R}^k$ 的 Freudenthal–Kuhn 三角剖分；参见 [Fre42, Kuh60]。采用 $k+1$ 颜色，并要求每种颜色对应的函数的正值集两两不交，这一做法受到 [DGPZ24, 定理 6.1] 的证明以及 [Kar14] 中覆盖维数论证的启发。这两种论证都使用了 Milnor 的一个引理，该引理见于 [Pal66, 引理 2.4]，，它将一个适当的开覆盖细分分解为 k 维副紧空间中若干族两两不交的开集。下面给出的显式构造是针对这里所需的定量微分估计而调整的。

记 S_k 为集合 $\{1,\dots,k\}$ 的对称群。因此，S_k 的元素是 $\{1,\dots,k\}$ 的置换。对于每个 $\sigma \in S_k$，定义单形

$$\Delta_\sigma = \left\{t = (t_1,\dots,t_k) \in [0,1]^k : 1 \geq t_{\sigma(1)} \geq \cdots \geq t_{\sigma(k)} \geq 0\right\}.$$

集合 $(\Delta_\sigma)_{\sigma\in S_k}$ 构成 $[0,1]^k$ 的一个三角剖分。

在本小节余下部分固定 $h > 0$。对于每个 $m \in \mathbb{Z}^k$，定义仿射变换 $T_m\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$，使得对每个 $v \in \mathbb{R}^k$，$T_m(v) = h(m+v)$。对于每个 $m \in \mathbb{Z}^k$ 和每个 $\sigma \in S_k$，定义 $\Delta_{m,\sigma} = T_m(\Delta_\sigma)$。集合 $(\Delta_{m,\sigma})_{m\in\mathbb{Z}^k,\ \sigma\in S_k}$ 构成 $\mathbb{R}^k$的一个三角剖分，称为**尺度为** h 的 Freudenthal–Kuhn 三角剖分。其元素称为**尺度为** h 的 Freudenthal–Kuhn 单形。

定义 2.4。对于每个 $v \in h\mathbb{Z}^k$，定义 $\beta_v\colon \mathbb{R}^k \to [0,1]$ 为满足以下条件的唯一连续函数：它在 $(\Delta_{m,\sigma})$ 中的每个单形上都是仿射函数$_{m\in\mathbb{Z}^k,\ \sigma\in S_k}$ 并且对于每个 $w \in h\mathbb{Z}^k$，满足 $\beta_v(w) = 1$ 当$w = v$ 以及 $\beta_v(w) = 0$ 否则。

我们将证明，族 $(\beta_v)_{v\in h\mathbb{Z}^k}$ 是 $\mathbb{R}^k$ 上的一个局部有限非负单位分解。可以利用以下范数对这一函数族进行明确描述。对于每个 $x=(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k$，定义其 **Freudenthal–Kuhn 范数** 为

$$\|x\|_{\mathrm{FK}}=\max\{0,x_1,\ldots,x_k\}-\min\{0,x_1,\ldots,x_k\}. \tag{4}$$

如果 $x_0=0$，那么 $\|x\|_{\mathrm{FK}}=\max_{0\le i,\ j\le k}|x_i-x_j|$。这个恒等式表明 $\|\cdot\|_{\mathrm{FK}}$ 是一个范数。采用这一记号，对于每个 $v\in h\mathbb{Z}^k$ 和每个 $x\in\mathbb{R}^k$，我们有

$$\beta_v(x)=\max\left\{0,1-\frac{1}{h}\|x-v\|_{\mathrm{FK}}\right\}. \tag{5}$$

事实上，直接验证每个 Freudenthal–Kuhn 单形即可看出，(5) 的右侧在该单形上是仿射的。此外，在每个点 $w\in h\mathbb{Z}^k$处，当且仅当 $w=v$ 时，它的值为 1，否则为 0。因此，由 β_v定义中的唯一性可得 (5)。

我们定义着色 $c\colon\ h\mathbb{Z}^k\to\mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$ 如下：

$$c(v)=\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{k}v_i+(k+1)\mathbb{Z}$$

对于每个 $v=(v_1,\ldots,v_k)\in h\mathbb{Z}^k$。该函数定义良好，因为对于每个 $1\le i\le k$，$v_i/h\in\mathbb{Z}$。

引理 2.5。族$(\beta_v)_{v\in h\mathbb{Z}^k}$ 满足以下性质：

(i) 对于任意 v、$w\in h\mathbb{Z}^k$，若 $c(v)=c(w)$ 且函数 β_v 和 β_w 有一个共同的正点，则 $v=w$。特别地，对于任意 $x\in\mathbb{R}^k$，集合 $\{v\in h\mathbb{Z}^k:\beta_v(x)>0\}$ 至多包含 $k+1$ 个元素。

(ii) 对于任意 $x\in\mathbb{R}^k$，有 $\sum_{v\in h\mathbb{Z}^k}\beta_v(x)=1$。

(iii) 对于任意 $v\in h\mathbb{Z}^k$，有

$$\operatorname{supp}\beta_v\subseteq v+[-h,h]^k,\qquad \operatorname{diam}(\operatorname{supp}\beta_v)\le 2h\sqrt{k}.$$

此处的直径是相对于欧几里得范数而言的。

证明。(i) 设 $v,w\in h\mathbb{Z}^k$ 满足 $c(v)=c(w)$，并假设存在 $x\in\mathbb{R}^k$，使得 $\beta_v(x)>0$ 且 $\beta_w(x)>0$。由 (5)，我们有

$$\|x-v\|_{\mathrm{FK}}<h,\qquad \|x-w\|_{\mathrm{FK}}<h.$$

因此，由三角不等式可得 $\|v-w\|_{\mathrm{FK}} < 2h$。令 $q = (v-w)/h \in \mathbb{Z}^k$。根据 Freudenthal–Kuhn 范数的齐次性，我们有 $\|q\|_{\mathrm{FK}} < 2$。由于 q 的坐标均为整数，(4) 表明 $\|q\|_{\mathrm{FK}}$ 是非负整数。因此 $\|q\|_{\mathrm{FK}} \le 1$。

写出 $q = (q_1, \ldots\ldots, q_k)$。由 (4) 可知，要么对于每个 $1 \le i \le k$，都有 $q_i \in \{0, 1\}$；要么对于每个 $1 \le i \le k$，都有 $q_i \in \{0, -1\}$。特别地，$\left|\sum_{i=1}^k q_i\right| \le k$。

另一方面，等式 $c(v) = c(w)$ 蕴含 $\sum_{i=1}^k q_i \in (k+1)\mathbb{Z}$。绝对值不超过 k 的 $k+1$ 的倍数只有零。因此 $\sum_{i=1}^k q_i = 0$。由于 q 的所有坐标要么非负，要么非正，可知对于每个 $1 \le i \le k$，都有 $q_i = 0$。因此 $q = 0$，进而 $v = w$。

对于每个 $x \in \mathbb{R}^k$，前面的论证表明，每种颜色至多有一个 $v \in h\mathbb{Z}^k$使得 $\beta_v(x) > 0$。由于着色有 $k+1$ 种可能取值，集合 $\{v \in h\mathbb{Z}^k : \beta_v(x) > 0\}$ 至多包含 $k+1$ 个元素。

(ii) 设 $x \in \mathbb{R}^k$。由于集合族 $(\Delta_{m,\sigma})_{m\in\mathbb{Z}^k,\,\sigma\in S_k}$ 覆盖了 $\mathbb{R}^k$，因此存在一个包含 x的单形Δ。将其顶点记为 $p_0, \ldots, p_k \in h\mathbb{Z}^k$。

设 $v \in h\mathbb{Z}^k \setminus \{p_0, \ldots, p_k\}$。函数 β_v在 Δ的每个顶点处都为零。由于β_v 在 Δ上是仿射的，因此它在 Δ上恒为零。特别地，$\beta_v(x) = 0$。由此可得 $\sum_{v\in h\mathbb{Z}^k} \beta_v(x) = \sum_{j=0}^k \beta_{p_j}(x)$。

函数 $\sum_{j=0}^k \beta_{p_j}$ 在 Δ上是仿射的。此外，对于每个 $0 \le i \le k$，我们有$\sum_{j=0}^k \beta_{p_j}(p_i) = 1$。由于单形上的仿射函数由其在顶点处的取值唯一确定，因此函数 $\sum_{j=0}^k \beta_{p_j}$ 在 Δ上恒等于 1。特别地，$\sum_{v\in h\mathbb{Z}^k} \beta_v(x) = 1$，证毕。

(iii) 令 $v \in h\mathbb{Z}^k$。由 (5)，对于每个 $x \in \mathbb{R}^k$，我们有 $\beta_v(x) > 0$当且仅当 $\|x - v\|_{\mathrm{FK}} < h$。由于 Freudenthal–Kuhn 范数是连续的，我们有

$$\operatorname{supp}\beta_v \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^k : \|x - v\|_{\mathrm{FK}} \le h\right\}.$$

令 $x \in \operatorname{supp}\beta_v$。记 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_k)$和 $v = (v_1, \ldots\ldots, v_k)$。由 (4)，对于每个 $1 \le i \le k$，我们有 $|x_i - v_i| \le \|x - v\|_{\mathrm{FK}} \le h$。因此，$x \in v + [-h, h]^k$。这表明 $\operatorname{supp}\beta_v \subseteq v + [-h, h]^k$。

立方体 $v + [-h, h]^k$的欧几里得直径为 $2h\sqrt{k}$。由于 $\overline{\operatorname{supp}}\,\beta_v$包含在这个立方体中，我们得出 $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\beta_v) \le 2h\sqrt{k}$。证毕。

□

性质 (3) 也意味着族 $(\beta_v)_{v\in h\mathbb{Z}^k}$ 是局部有限的。事实上，设$Q \subseteq \mathbb{R}^k$ 为紧致集。若 $Q \cap \operatorname{supp}\beta_v \neq \varnothing$，则 $v \in Q + [-h,h]^k$。由于这个集合是紧致的，它只包含 $h\mathbb{Z}^k$ 中有限多个点。

对于每种颜色 $a \in \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$，定义函数 $H_a^0\colon \mathbb{R}^k \to [0,1]$ 如下：

$$H_a^0 = \sum_{\substack{v\in h\mathbb{Z}^k \\ c(v)=a}} \beta_v.$$

$(\beta_v)_{v\in h\mathbb{Z}^k}$ 的局部有限性意味着该函数定义良好且连续。此外，引理 2.5 意味着，在 $\mathbb{R}^k$ 的每个点处，这个和中至多有一项非零。对于每个子集 $A \subseteq \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$，定义函数 $H_A^0\colon \mathbb{R}^k \to [0,1]$如下： $H_A^0 = \sum_{a\in A} H_a^0$。这些函数连续且分段仿射。引理 2.5 还意味着，$(H_0^0, \ldots\ldots, H_k^0)$ 是 $\mathbb{R}^k$ 上的一个非负单位分解。

$\mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$ 中的循环区间是空集、整个群，或形如 $\{a, a+1, \ldots\ldots, a+\ell-1\}$ 的集合，其中余数以 $k+1$ 为模，并且 $1 \le \ell \le k$。

断言 2.6。 对于每种颜色 $a \in \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$，我们有

$$\{H_a^0 > 0\} = \bigsqcup_{\substack{v\in h\mathbb{Z}^k \\ c(v)=a}} \{\beta_v > 0\}.$$

此外，此并集中出现的集合 $\{\beta_v > 0\}$ 恰好是 $\{H_a^0 > 0\}$ 的连通分支，并且

$$\overline{\{\beta_v > 0\}} = \operatorname{supp}\beta_v \subseteq v + [-h,h]^k.$$

证明。 引理 2.5 意味着，在 $\mathbb{R}^k$ 的每个点处，至多有一个颜色为 a 的函数 β_v 为正。因此，

$$\{H_a^0 > 0\} = \bigsqcup_{\substack{v\in h\mathbb{Z}^k \\ c(v)=a}} \{\beta_v > 0\}.$$

由 (5)，我们有 $\{\beta_v > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^k\colon \|x-v\|_{\mathrm{FK}} < h\}$。该集合是凸的，因此是连通的。此外，它在 $\{H_a^0 > 0\}$ 中的补集是这个不交并中其余开集的并。因此，$\{\beta_v > 0\}$ 在 $\{H_a^0 > 0\}$中既是开集又是闭集，故这些集合恰好是它的连通分支。由于 β_v 非负，其非零集为 $\{\beta_v > 0\}$。因此，根据支集的定义，

$$\overline{\{\beta_v > 0\}} = \operatorname{supp}\beta_v \subseteq v + [-h,h]^k.$$

□

断言 2.7. 设 $A \subseteq \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$ 是一个循环区间。对于几乎所有的点 $x \in \mathbb{R}^k$，函数 H_A^0 在 x处可微，并且满足

$$\|d_x H_A^0\|_1 \leq \frac{2}{h}.$$

此外， H_A^0 关于 ℓ^∞ 范数是 $\frac{2}{h}$ -利普希茨的。

证明。首先，我们证明，对于三角剖分中的每个单形 $\Delta_{m,\sigma}$ ，函数 H_A^0 在每个点 $x \in \mathrm{Int}(\Delta_{m,\sigma})$ 处可微，并满足 $\|d_x H_A^0\|_1 \leq \frac{2}{h}$ 。令 $m \in \mathbb{Z}^k$ 和 $\sigma \in S_k$。 H_A^0 在$\Delta_{m,\sigma}$ 上的限制是仿射的。这意味着存在一个线性映射 $L_{m,\sigma,A}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 以及一个常数 $b_{m,\sigma,A} \in \mathbb{R}$ ，使得对每个 $x \in \Delta_{m,\sigma}$ 都有$H_A^0(x) = L_{m,\sigma,A}(x) + b_{m,\sigma,A}$ 。特别地，对于每个 $x \in \mathrm{Int}(\Delta_{m,\sigma})$，函数 H_A^0 在 x 处可微，并满足 $d_x H_A^0 = L_{m,\sigma,A}$。

将 $\Delta_{m,\sigma}$ 的顶点记为 $p_0, \ldots, p_k$，其中 $p_0 = hm$ 和

$$p_j = h\left(m + e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(j)}\right)$$

对每个 $1 \leq j \leq k$。对于每个 $0 \leq j \leq k$，令

$$\epsilon_j = \begin{cases} 1, & c(p_j) \in A, \\ 0, & c(p_j) \notin A, \end{cases}$$

并注意到 $H_A^0(p_j) = \epsilon_j$。此外，对于每个 $1 \leq j \leq k$，我们有 $p_j - p_{j-1} = he_{\sigma(j)}$，且 $c(p_j) = c(p_{j-1}) + 1$ 属于 $\mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$。因此， $p_0, \ldots, p_k$ 的颜色恰好是 $\mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$ 中按循环顺序排列的所有元素。由于 A 是一个循环区间，序列 $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k$ 的取值至多变化两次。因此，

$$\sum_{j=1}^{k} |\epsilon_j - \epsilon_{j-1}| \leq 2.$$

对于每个 $1 \leq j \leq k$，我们有

$$L_{m,\sigma,A}(e_{\sigma(j)}) = \frac{1}{h} L_{m,\sigma,A}(p_j - p_{j-1}) = \frac{1}{h}\left(H_A^0(p_j) - H_A^0(p_{j-1})\right) = \frac{1}{h}\left(\epsilon_j - \epsilon_{j-1}\right).$$

因此，对于每个 $x \in \mathrm{Int}(\Delta_{m,\sigma})$，我们有

$$\|d_x H_A^0\|_1 = \|L_{m,\sigma,A}\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |L_{m,\sigma,A}(e_i)| = \sum_{j=1}^{k} |L_{m,\sigma,A}(e_{\sigma(j)})| = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{k} |\epsilon_j - \epsilon_{j-1}| \leq \frac{2}{h}.$$

Freudenthal–Kuhn 单形内点的并集的补集，等于它们的真面的并集。由于单形有可数多个，且每个真面的勒贝格测度均为零，因此该补集的勒贝格测度为零。因此，H_A^0 几乎处处可微，并且对几乎所有$x \in \mathbb{R}^k$，$\|d_x H_A^0\|_1 \le \frac{2}{h}$。 _

剩下的就是证明利普希茨估计。设 $x, y \in \mathbb{R}^k$。若 $x = y$，则无需证明。假设 $x \neq y$。由于三角剖分是局部有限的，连接 x和 y 的线段只与有限多个单形相交。因此，存在沿该线段按此顺序出现的互不相同的点 $x = z_0, z_1, \dots, z_N = y$，使得对每个 $1 \le j \le N$，连接 z_{j-1} 和 z_j 的线段都包含在某个 Freudenthal–Kuhn 单形中。由于这些点沿线段按顺序出现，存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_N > 0$，使得对每个 $1 \le j \le N$，$z_j - z_{j-1} = \lambda_j(y - x)$，且 $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$。因此，

$$\sum_{j=1}^N \|z_j - z_{j-1}\|_\infty = \sum_{j=1}^N \|\lambda_j(y-x)\|_\infty = \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j\right) \|y - x\|_\infty = \|y - x\|_\infty.$$

对每个 $1 \le j \le N$，选取一个包含连接 z_{j-1} 和 z_j的线段的 Freudenthal–Kuhn 单形。H_A^0 在该单形上的限制是仿射的，且其微分的 ℓ^1 范数至多为 $\frac{2}{h}$。因此，

$$|H_A^0(z_j) - H_A^0(z_{j-1})| \le \frac{2}{h}\|z_j - z_{j-1}\|_\infty.$$

将这些不等式相加，得到

$$|H_A^0(x) - H_A^0(y)| \le \frac{2}{h} \sum_{j=1}^N \|z_j - z_{j-1}\|_\infty = \frac{2}{h}\|x - y\|_\infty.$$

这表明，H_A^0 关于 ℓ^∞ 范数是$\frac{2}{h}$-利普希茨的。 □

固定一个非负的紧支撑光滑函数 $\eta\colon \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$，满足$\int_{\mathbb{R}^k} \eta(z)\, dz = 1$。对于每个 $\tau > 0$，定义函数 $\eta_\tau\colon \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$，使得对每个 $y \in \mathbb{R}^k$，$\eta_\tau(y) = \tau^{-k}\eta(y/\tau)$。对于每个 $\tau > 0$ 以及每个颜色 $a \in \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$，通过卷积定义函数$H_a^\tau\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$：

$$H_a^\tau(y) = (H_a^0 * \eta_\tau)(y) = \int_{\mathbb{R}^k} \eta_\tau(z) H_a^0(y - z)\, dz$$

对每个 $y \in \mathbb{R}^k$。最后，对每个 $\tau > 0$ 以及每个子集 $A \subseteq \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$，定义函数 $H_A^\tau\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$，其定义为 $H_A^\tau = \sum_{a \in A} H_a^\tau$。

Prop命题 2.8. 上述定义的函数满足以下性质：

(i) 对于每个 $\tau > 0$，族 $(H_0^\tau, \dots, H_k^\tau)$ 是 $\mathbb{R}^k$上的光滑非负单位分解。

(ii) 对于每个 $\tau > 0$、每个循环区间 $A \subseteq \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$以及每个 $x \in \mathbb{R}^k$，我们有

$$\|d_x H_A^\tau\|_1 \le \frac{2}{h}.$$

(iii) 对于每个颜色 $a \in \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$，我们有 $\lim_{\tau\to 0^+} \|H_a^\tau - H_a^0\|_\infty = 0$。

证明。(i) 设 $\tau > 0$。由于 η_τ 且函数 H_a^0 非负，函数H_a^τ 也非负。根据卷积的标准性质，它们是光滑的。此外，

$$\sum_{a=0}^{k} H_a^\tau = \sum_{a=0}^{k} (H_a^0 * \eta_\tau) = \left(\sum_{a=0}^{k} H_a^0\right) * \eta_\tau = 1 * \eta_\tau = 1.$$

这就证明了第一个断言。

(ii) 设 $\tau > 0$，并设 $A \subseteq \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$是一个循环区间。由于卷积是线性的，我们有 $H_A^\tau = H_A^0 * \eta_\tau$。设 $x, y \in \mathbb{R}^k$。由于 H_A^0关于 ℓ^∞ 范数是 $\frac{2}{h}$-利普希茨的，我们有

$$|H_A^\tau(x) - H_A^\tau(y)| \le \int_{\mathbb{R}^k} \eta_\tau(z) |H_A^0(x-z) - H_A^0(y-z)|\, dz \le \frac{2}{h}\|x-y\|_\infty.$$

因此，H_A^τ 相对于 ℓ^∞ 范数也是$\frac{2}{h}$-利普希茨的。由于 H_A^τ 是光滑的，因此对每个 $x \in \mathbb{R}^k$，都有$\|d_x H_A^\tau\|_1 \le \frac{2}{h}$。这就证明了第二个断言。

(iii) 设 $\tau > 0$，并令 $a \in \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$。由于单元素集合 $\{a\}$ 是一个循环区间，函数 H_a^0 相对于 ℓ^∞ 范数是 $\frac{2}{h}$-利普希茨的。因此，对每个$x \in \mathbb{R}^k$，

$$|H_a^\tau(x) - H_a^0(x)| \le \int_{\mathbb{R}^k} \eta_\tau(z) |H_a^0(x-z) - H_a^0(x)|\, dz \le \frac{2}{h} \int_{\mathbb{R}^k} \eta_\tau(z)\|z\|_\infty\, dz.$$

变量替换 $z = \tau w$给出$\int_{\mathbb{R}^k} \eta_\tau(z)\|z\|_\infty\, dz = \tau \int_{\mathbb{R}^k} \eta(w)\|w\|_\infty\, dw$。因此，

$$\|H_a^\tau - H_a^0\|_\infty \le \frac{2\tau}{h} \int_{\mathbb{R}^k} \eta(w)\|w\|_\infty\, dw.$$

右侧的积分有限，因为 η 是紧支撑的。令 $\tau \to 0^+$，即可证明第三个断言。

□

2.4.2 泛函与逼近引理

本小节将证明半辛拟态的一些基本性质，这些性质将在定理 1.10 的证明中派上用场。在本节余下部分，设 $(M,\ \omega)$ 是一个闭辛流形，设 $C>0$，并设 $\zeta\colon C(M)\to\mathbb{R}$是常数为 C 的半辛拟态。我们先介绍两个部分辛拟态众所周知的基本性质。在我们的情形下，证明几乎完全相同。

引理 2.9。半辛拟态 ζ 满足以下性质：

(i) 对每个 $F\in C(M)$ 以及每个 $c\in\mathbb{R}$，都有 $\zeta(F+c)=\zeta(F)+c$。

(ii) 对每个 $F,G\in C(M)$，都有

$$|\zeta(F)-\zeta(G)|\leq\|F-G\|_\infty.$$

证明。(i) 我们先考虑 $F\in C^\infty(M)$ 的情形。令 $c\in\mathbb{R}$。由于 $\{F,c\}=0$，先对 F 和 c 应用单侧泊松括号不等式，再对$F+c$ 和 $-c$ 应用该不等式，得到

$$\zeta(F+c)\leq\zeta(F)+\zeta(c)=\zeta(F)+c$$

and

$$\zeta(F)\leq\zeta(F+c)+\zeta(-c)=\zeta(F+c)-c.$$

因此，对于每个 $F\in C^\infty(M)$ 和每个 $c\in\mathbb{R}$，都有 $\zeta(F+c)=\zeta(F)+c$。

现在考虑一般情形。设 $F\in C(M)$ 且 $c\in\mathbb{R}$。令 $\epsilon>0$，并选取一个光滑函数 $Q\in C^\infty(M)$，使得 $\|Q-F\|_\infty<\epsilon$。我们有

$$Q-\epsilon\leq F\leq Q+\epsilon$$

and

$$Q+c-\epsilon\leq F+c\leq Q+c+\epsilon.$$

由单调性以及上文证明的光滑情形，可得

$$\zeta(Q)-\epsilon\leq\zeta(F)\leq\zeta(Q)+\epsilon$$

and

$$\zeta(Q)+c-\epsilon\leq\zeta(F+c)\leq\zeta(Q)+c+\epsilon.$$

因此，

$$|\zeta(F+c)-\zeta(F)-c|\leq 2\epsilon.$$

由于此不等式对每个 $\epsilon>0$ 都成立，我们得出 $\zeta(F+c)=\zeta(F)+c$。

(ii) 令 $F, G \in C(M)$，并设 $d = \|F - G\|_\infty$。我们有 $G - d \le F \le G + d$。根据单调性和第一项，

$$\zeta(G) - d \le \zeta(F) \le \zeta(G) + d.$$

因此，

$$|\zeta(F) - \zeta(G)| \le d = \|F - G\|_\infty.$$

证明至此完成。

□

下面的命题是针对我们所处情形调整后的连续函数次可加性版本。能够证明的形式并非最一般的形式。[3] 不过，下面这个形式已足以满足我们的需要。

命题 2.10（正值集互不相交时的次可加性）。设 $N \ge 1$ 为整数，且 u_1、…、$u_N \in C(M)$ 为满足条件 $u_i(x)u_j(x) = 0$ 的非负函数，其中条件对每个$x \in M$以及任意不同的 i、$j \in \{1, \dots, N\}$均成立。那么

$$\zeta\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right) \le \sum_{i=1}^{N} \zeta(u_i).$$

为证明命题 2.10，我们需要下面这个辅助引理。

引理 2.11。对于每个非负连续函数 $u \in C(M)$，都存在一个由非负光滑函数组成的序列$(u_\ell)_{\ell \ge 1}$，其元素属于 $C^\infty(M)$，且一致收敛于 u，并满足$\operatorname{supp} u_\ell \subseteq u^{-1}((0, \infty))$，对每个整数 $\ell \ge 1$均成立。

证明。令 $\ell \ge 1$，并选取满足 $\|q_\ell - u\|_\infty < \frac{1}{2\ell}$ 的光滑函数 $q_\ell \in C^\infty(M)$。再选取光滑函数 χ_ℓ: $M \to [0, 1]$，使其在 $u^{-1}([2/\ell, \infty))$ 上等于 1，并满足 $\operatorname{supp} \chi_\ell \subseteq u^{-1}((1/\ell, \infty))$. 定义光滑函数 u_ℓ: $M \to \mathbb{R}$，令其满足 $u_\ell = \chi_\ell \cdot q_\ell$。

我们先证明 u_ℓ 非负。令 $x \in M$。若 $\chi_\ell(x) = 0$，则 $u_\ell(x) = 0$。若 $\chi_\ell(x) > 0$，则 $x \in \operatorname{supp} \chi_\ell$，因此 $u(x) > 1/\ell$。因此，

$$q_\ell(x) > u(x) - \frac{1}{2\ell} > \frac{1}{2\ell} > 0.$$

[3] Cardin–Viterbo 在 [CV08, Definition 1.1] 中，利用泊松括号一致收敛到零的光滑逼近，定义了连续的泊松对易函数。泊松括号不等式和引理 2.9 随即推出次可加性。更一般地，作者与 Y. Ganor、L. Polterovich 和 F. Zapolsky 在 [DGPZ24, Definition 1.27] 中定义了连续对合映射ρ: $M \to Y$。同样的论证可推出形如 $f_1 \circ \rho$、……、$f_N \circ \rho$ 的函数具有次可加性。

由于 $\chi_\ell(x) \geq 0$，可得 $u_\ell(x) \geq 0$。此外，

$$\operatorname{supp} u_\ell \subseteq \operatorname{supp} \chi_\ell \subseteq u^{-1}((1/\ell, \infty)) \subseteq u^{-1}((0, \infty)).$$

现在证明 $\|u_\ell - u\|_\infty \leq \frac{5}{2\ell}$。令 $x \in M$。如果 $u(x) \geq 2/\ell$，那么 $\chi_\ell(x) = 1$，因此

$$|u_\ell(x) - u(x)| = |q_\ell(x) - u(x)| \leq \|q_\ell - u\|_\infty < \frac{1}{2\ell}.$$

否则，$u(x) < 2/\ell$，因此

$$|u_\ell(x) - u(x)| \leq \chi_\ell(x)|q_\ell(x) - u(x)| + (1 - \chi_\ell(x))u(x) < \frac{1}{2\ell} + \frac{2}{\ell} = \frac{5}{2\ell}.$$

这表明 $\|u_\ell - u\|_\infty \leq \frac{5}{2\ell}$。因此，序列 $(u_\ell)_{\ell \geq 1}$ 一致收敛到 u，如所需。

□

命题 *2.10* 的证明。对于每个 $i \in \{1, \dots, N\}$，将引理 2.11 应用于 u_i，得到一个非负光滑函数序列 $(u_{i,\ell})_{\ell \geq 1}$，它一致收敛到 u_i，并且对每个整数 $\ell \geq 1$ 都满足 $\operatorname{supp} u_{i,\ell} \subseteq u_i^{-1}((0, \infty))$。

固定一个整数 $\ell \geq 1$。由于 $u_1, \dots, u_N$ 的正值集两两不相交，$u_{1,\ell}, \dots, u_{N,\ell}$ 的支集两两不相交。因此，对于任意不同的 $i, j \in \{1, \dots, N\}$，都有 $\{u_{i,\ell}, u_{j,\ell}\} = 0$。根据泊松括号的双线性，函数 $\sum_{i=1}^{j} u_{i,\ell}$ 和 $u_{j+1,\ell}$ 对任意 $1 \leq j \leq N-1$ 均泊松对易。反复应用单侧泊松括号不等式可得

$$\zeta\left(\sum_{i=1}^{N} u_{i,\ell}\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \zeta(u_{i,\ell}).$$

由于 N 是有限的，$\sum_{i=1}^{N} u_{i,\ell}$ 一致收敛于 $\sum_{i=1}^{N} u_i$，当 $\ell \to \infty$ 时。因此，引理 2.9 允许我们在前面的不等式中取极限，得到

$$\zeta\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \zeta(u_i).$$

证明至此完成。 □

2.4.3 伪重厚纤维定理

我们继续使用上文及第 2.4 节开头引入的记号 .

引理 2.12. 设 $k \geq 1$ 是一个整数，设 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$ 是一个光滑映射，并设 $u, v\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 是满足 $\|du\|_{1,\infty} < \infty$ 和 $\|dv\|_{1,\infty} < \infty$ 的光滑函数。那么

$$\|\{u \circ F, v \circ F\}\|_\infty \leq pb(F)\|du\|_{1,\infty}\|dv\|_{1,\infty}.$$

证明。设 $x \in M$。根据链式法则和泊松括号的双线性，我们有

$$\{u \circ F, v \circ F\}(x) = \sum_{i,j=1}^{k} \partial_i u(F(x)) \partial_j v(F(x)) \{F_i, F_j\}(x).$$

因此，

$$|\{u \circ F, v \circ F\}(x)| \leq pb(F) \left(\sum_{i=1}^{k} |\partial_i u(F(x))| \right) \left(\sum_{j=1}^{k} |\partial_j v(F(x))| \right) \leq pb(F) \|du\|_{1,\infty} \|dv\|_{1,\infty}.$$

由此，我们推得

$$\|\{u \circ F, v \circ F\}\|_\infty \leq pb(F) \|du\|_{1,\infty} \|dv\|_{1,\infty},$$

如所要求的。 □

对于每个 $h > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$，考虑第 2.4.1 节中构造的单位分解 $(\beta_v)_{v \in h\mathbb{Z}^k}$。我们还使用其中定义的颜色和 H_a^τ，其中 $a \in \mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$ 且 $\tau \geq 0$。下面的论证也与[EPZ07，定理 1.7]中使用的逐次加法论证有关。

命题 2.13。设 $k \in \mathbb{N}$，设 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$ 为光滑映射，并设 $h > 0$。对于每个 $v \in h\mathbb{Z}^k$，定义连续函数 $u_v\colon M \to [0,1]$ 为 $u_v = \beta_v \circ F$。那么，族 $(u_v)_{v \in h\mathbb{Z}^k}$ 中只有有限多个函数非零，并且有

$$1 \leq \sum_{v \in h\mathbb{Z}^k} \zeta(u_v) + \frac{2C(k-1)\sqrt{pb(F)}}{h}. \tag{6}$$

证明。令 $K = F(M)$，并令 $\delta = pb(F)$。由于 K 是紧致的，且族 $(\beta_v)_{v \in h\mathbb{Z}^k}$ 是局部有限的，因此只有有限多个函数 β_v 的支集与 K 相交。因此，只有有限多个函数 $(u_v)_{v \in h\mathbb{Z}^k}$ 非零。对于每个 $a \in \{0, \ldots, k\}$，定义连续函数 $g_a\colon M \to [0,1]$ 为

$$g_a = H_a^0 \circ F = \sum_{\substack{v \in h\mathbb{Z}^k \\ c(v) = a}} u_v.$$

根据引理 2.5，同一颜色的非零函数 u_v 的正值集两两不相交。因此，由命题 2.10 可得

$$\zeta(g_a) \leq \sum_{\substack{v \in h\mathbb{Z}^k \\ c(v) = a}} \zeta(u_v) \tag{7}$$

对每个 $a \in \{0, \dots, k\}$ 均成立。对于每个 $\tau > 0$ 和每个 $a \in \{0, \dots, k\}$，定义光滑函数 $g_a^\tau \colon M \to [0,1]$，其定义为 $g_a^\tau = H_a^\tau \circ F$。我们证明，对于每个 $\tau > 0$，有

$$1 \leq \sum_{a=0}^{k} \zeta(g_a^\tau) + \frac{2C(k-1)\sqrt{\delta}}{h}. \tag{8}$$

固定 $\tau > 0$。对于每个 $m \in \{0, \dots, k-1\}$，定义光滑函数 $P_m^\tau \colon M \to [0,1]$，使得

$$P_m^\tau = \sum_{a=0}^{m} g_a^\tau = H_{\{0,\dots,m\}}^\tau \circ F.$$

我们断言，对于每个 $m \in \{0, \dots, k-1\}$，都有

$$\zeta(P_m^\tau) \leq \sum_{a=0}^{m} \zeta(g_a^\tau) + \frac{2Cm\sqrt{\delta}}{h}. \tag{9}$$

若 $k = 1$，则由等式 $P_0^\tau = g_0^\tau$ 立即得到 (9)。假设 $k \geq 2$。我们对 $m \in \{0, \dots, k-1\}$ 归纳证明 (9)。当 $m = 0$ 时，由于 $P_0^\tau = g_0^\tau$，这是一个等式。令 $m \in \{1, \dots, k-1\}$，并假设

$$\zeta(P_{m-1}^\tau) \leq \sum_{a=0}^{m-1} \zeta(g_a^\tau) + \frac{2C(m-1)\sqrt{\delta}}{h}.$$

我们有 $P_m^\tau = P_{m-1}^\tau + g_m^\tau$。集合 $\{0, \dots, m-1\}$ 和 $\{m\}$ 是 $\mathbb{Z}/(k+1)\mathbb{Z}$ 中的循环区间。因此，命题 2.8 和引理 2.12 推出

$$\|\{P_{m-1}^\tau, g_m^\tau\}\|_\infty \leq \frac{4\delta}{h^2}.$$

单侧泊松括号不等式给出

$$\zeta(P_m^\tau) \leq \zeta(P_{m-1}^\tau) + \zeta(g_m^\tau) + \frac{2C\sqrt{\delta}}{h}.$$

将此不等式与归纳假设结合，我们得到

$$\zeta(P_m^\tau) \leq \sum_{a=0}^{m} \zeta(g_a^\tau) + \frac{2Cm\sqrt{\delta}}{h}.$$

这就证明了 (9)。由于 $(H_0^\tau, \dots\dots, H_k^\tau)$ 是一个单位分解，因此有 $P_{k-1}^\tau + g_k^\tau = 1$。于是，

$$\{P_{k-1}^\tau, g_k^\tau\} = \{1 - g_k^\tau, g_k^\tau\} = 0.$$

根据归一化和单侧泊松括号不等式，

$$1 = \zeta(1) = \zeta(P_{k-1}^{\tau} + g_k^{\tau}) \leq \zeta(P_{k-1}^{\tau}) + \zeta(g_k^{\tau}).$$

将 $m = k-1$ 代入 (9)，得到

$$1 \leq \sum_{a=0}^{k} \zeta(g_a^{\tau}) + \frac{2C(k-1)\sqrt{\delta}}{h}.$$

这就证明了 (8)。根据命题 2.8，H_a^{τ} 对每个 $a \in \{0, \ldots, k\}$ 都一致收敛到 H_a^0，当 $\tau \to 0^+$ 时。因此，g_a^{τ} 一致收敛到 g_a，当 $\tau \to 0^+$ 时。由引理 2.9 可将极限传入并得到

$$1 \leq \sum_{a=0}^{k} \zeta(g_a) + \frac{2C(k-1)\sqrt{\delta}}{h}.$$

将 (7) 对所有颜色求和，得到

$$1 \leq \sum_{v \in h\mathbb{Z}^k} \zeta(u_v) + \frac{2C(k-1)\sqrt{\delta}}{h}.$$

这就证明了 (6)。 □

定理 *1.10* 的证明。取一个整数 $k \geq 1$ 和一个光滑映射 $F\colon M \to \mathbb{R}^k$。令 $\delta = pb(F)$ 且 $R_0 = 4Ck^{3/2}\sqrt{\delta}$。我们分两步证明所需断言。

步骤 1： 我们来证明：对于每个 $R > R_0$，都存在一个连续函数 $w\colon M \to \mathbb{R}$ 和一个点 $p \in F(M)$，使得

- $\zeta(w) > 0$;
- 支撑 $w \subseteq F^{-1}(B_p(R))$。

事实上，令 $R > R_0 = 4Ck^{3/2}\sqrt{\delta}$。由于 $k - 1 \leq k$，我们有

$$2C(k-1)\sqrt{\delta} \leq 2Ck\sqrt{\delta} = \frac{R_0}{2\sqrt{k}} < \frac{R}{2\sqrt{k}}.$$

因此，存在 $h > 0$ 使得

$$2C(k-1)\sqrt{\delta} < h < \frac{R}{2\sqrt{k}}.$$

考虑第 2.4.1 小节中定义的 $\mathbb{R}^k$ 的单位分解 $(\beta_v)_{v\in h\mathbb{Z}^k}$。对于每个$v \in h\mathbb{Z}^k$，定义连续函数 u_v：$M \to \mathbb{R}$，使其满足 $u_v = \beta_v \circ F$。根据命题 2.13，我们有

$$0 < 1 - \frac{2C(k-1)\sqrt{\delta}}{h} \leq \sum_{v\in h\mathbb{Z}^k} \zeta(u_v).$$

这表明存在 $v \in h\mathbb{Z}^k$ 使得 $\zeta(u_v) > 0$。由单调性，存在$x_0 \in M$ 使得 $u_v(x_0) > 0$。事实上，否则 $u_v \leq 0$，于是 $\zeta(u_v) \leq \zeta(0) = 0$，这就产生了矛盾。考虑 $w = u_v$ 和 $p = F(x_0)$。

根据 w的选取，我们知道 $\zeta(w) > 0$ 且 $p \in F(M)$。此外，$\beta_v(p) = u_v(x_0) > 0$，因此 $p \in \operatorname{supp} \beta_v$。由引理 2.5，我们得到

$$\operatorname{diam}(\operatorname{supp} \beta_v) \leq 2\sqrt{k}h < R.$$

由于 $p \in \operatorname{supp} \beta_v$，这表明 $\operatorname{supp} \beta_v \subseteq B_p(R)$。

我们来证明 $\operatorname{supp} w \subseteq F^{-1}(B_p(R))$。事实上，设 $x \in M \setminus F^{-1}(B_p(R))$。那么

$$F(x) \in \mathbb{R}^k \setminus B_p(R) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus \operatorname{supp} \beta_v.$$

集合 $\mathbb{R}^k \setminus \operatorname{supp} \beta_v$是开集，且 β_v在该集合上为零。因此，$w = \beta_v \circ F$在 x的开邻域 $F^{-1}(\mathbb{R}^k \setminus \operatorname{supp} \beta_v)$上为零。于是 $x \notin \operatorname{supp} w$。这表明 $\operatorname{supp} w \subseteq F^{-1}(B_p(R))$，并完成了步骤 1的证明。

步骤 2： 通过证明存在 $y \in F(M)$ 使得 $F^{-1}(B_y(R_0))$ 是 ζ-伪重的，从而特别是不可位移的，我们完成定理 1.10 的证明。

对于每个整数 $j \geq 1$，令 $R_j = R_0 + \frac{1}{j}$。根据步骤 1，存在一个点 $p_j \in F(M)$ 和一个连续函数 w_j：$M \to \mathbb{R}$ 使得 $\zeta(w_j) > 0$ 且 $\operatorname{supp} w_j \subseteq F^{-1}(B_{p_j}(R_j))$。

由于 $F(M)$ 是紧致的，序列 $(p_j)_{j\geq 1}$有一个收敛子列；将其极限记为 $y \in F(M)$。考虑 y，我们来证明

$$X = F^{-1}\left(\overline{B}_y(R_0)\right)$$

是 ζ-伪重的。事实上，设 $U \subseteq M$ 是 X的一个开邻域，并证明存在一个连续函数 w：$M \to \mathbb{R}$，使得 $\operatorname{supp} w \subseteq U$ 且 $\zeta(w) > 0$。如果 $U = M$，则常值函数 1 满足所需性质。否则，假设 $M\setminus U \neq \varnothing$。由于 $M\setminus U$是紧致的，并且与 $X = F^{-1}\left(B_y(R_0)\right)$不相交，我们推得

$$d = \min_{x\in M\setminus U} \|F(x) - y\|$$

严格大于 R_0，因此

$$F^{-1}\left(B_y(d)\right) \subseteq U.$$

此外，由于 $(R_j)_{j\geq 1}$ 收敛到 R_0，且 $(p_j)_{j\geq 1}$ 有一个子序列收敛到 y，我们推得存在一个整数 $j \in \mathbb{N}$，使得

$$R_j + \|p_j - y\| < d.$$

考虑 w_j。我们知道 $\zeta(w_j) > 0$，且 $\operatorname{supp} w_j \subseteq F^{-1}(B_{p_j}(R_j))$。注意，对于每个 $z \in B_{p_j}(R_j)$，我们有

$$\|z - y\| \leq \|z - p_j\| + \|p_j - y\| < R_j + \|p_j - y\| < d,$$

因此 $B_{p_j}(R_j) \subseteq B_y(d)$，这意味着

$$\operatorname{supp} w_j \subseteq F^{-1}(B_{p_j}(R_j)) \subseteq F^{-1}(B_y(d)) \subseteq U.$$

因此 $X = F^{-1}(\overline{B_y}(R_0))$ 是 ζ-伪重的。最后，由于 $F^{-1}(B_y(R_0))$ 是 ζ-伪重的，注记 1.9 推出它是不可位移的。证毕。 □

参考文献

[Aar91] Johan F. Aarnes。《准态与拟测度》。《数学进展》，86(1):41–67，1991年。[Aar93] Johan F. Aarnes。《纯拟态与极端拟测度》。《数学年刊》，295(4):575–588，1993年。[Bor33] Karol Borsuk。《关于 n 维欧几里得球面的三个定理》。《数学基础》，20:177–190，1933年。[But22] S. V. Butler。《半实集与拓扑测度》。《拓扑学及其应用》，310:108036，2022年。[CV08] Franco Cardin 和 Claude Viterbo。《对易哈密顿量与 Hamilton–Jacobi 多时间方程》。《杜克数学杂志》，144(2):235–284，2008年。[DGPZ24] Adi Dickstein、Yaniv Ganor、Leonid Polterovich 和 Frol Zapolsky。《辛拓扑与理想值测度》。《数学精选·新系列》，30:88，2024年。

[DUZ26] Danijel Djordjević、Igor Uljarević 和 Jun Zhang。《定量接触哈密顿动力学》。《拓扑与分析杂志》，页码 1–56，2026年。在线发表。[EK15] Jonathan David Evans 和 Jarek Kędra。《Kodaira–Thurston 流形中的伪全纯环面》。《数学汇编》，151(12):2212–2250，2015年。[EP03] Michael Entov 和 Leonid Polterovich。《Calabi 准同态与量子同调》。《国际数学研究通报》，2003(30):1635–1676，2003年。[EP06] Michael Entov 和 Leonid Polterovich。《准态与辛交》。《瑞士数学评论》，81(1):75–99，2006年。[EP08] Michael Entov 和 Leonid Polterovich。《辛拟态与量子同调的半简单性》。载于《环面拓扑》，第 460 卷《当代数学》，第 47–70 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2008年。[EP09] Michael Entov 和 Leonid Polterovich。《辛流形的刚性子集》。《数学汇编》，145(3):773–826，2009年。[EP10] Yakov Eliashberg 和 Leonid Polterovich。《二次曲面上的辛拟态与拉格朗日子流形》，2010年。arXiv:1006.2501。[EPZ07] Michael Entov、Leonid Polterovich 和 Frol Zapolsky。《准同态与泊松括号》。《纯粹与应用数学季刊》，3(4):1037–1055，2007年。[Fre42] Hans Freudenthal。《有界平坦度的单纯剖分》。《数学年鉴·第二辑》，43(3):580–582，1942年。[Fri19] Stefan Friedl。《代数拓扑 I–IV.5》，2019年。讲义，2019年版。[Gro03] Mikhail Gromov。《腰部的等周不等式与映射的集中现象》。《几何与泛函分析》，13(1):178–215，2003年。[Gro09] Mikhail Gromov。《奇点、扩张图与映射的拓扑。第一部分：循环空间中的同调与体积》。《几何与泛函分析》，19(3):743–841，2009年。

[Gro10] Mikhail Gromov。《奇点、扩张图与映射的拓扑》。第二部分：通过代数等周理论从组合学到拓扑。《几何与泛函分析》，20(2):416–526，2010年。[HKKKR26] Pazit Haim-Kislev、Michael Khanevsky、Asaf Kislev 和 Daniel Rosen。伪全纯三角形与中位数拟态。《当代数学通讯》，第2650017页，2026年。[HLRS16] Vincent Humilière、Frédéric Le Roux 和 Sobhan Seyfaddini。关于曲面上哈密顿谱不变量的动力学诠释。《几何与拓扑》，20(4):2253–2334，2016年。[HW48] Witold Hurewicz 和 Henry Wallman。维数理论，普林斯顿数学丛书第4卷。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，修订版，1948年。[Kar14] Roman N. Karasev。利用环面簇研究覆盖维数。《拓扑学及其应用》，177:59–65，2014年。[KO21] Morimichi Kawasaki 和 Ryuma Orita。矩映射的伪重纤维的存在性。《当代数学通讯》，23(5):2050047，2021年。[Kuh60] Harold W. Kuhn。拓扑学中的一些组合引理。《*IBM*研究与开发杂志》，4(5):518–524，1960年。[Lan13] Sergei Lanzat。凸辛流形上的准同态与辛准态。《国际数学研究通报》，2013(23):5321–5365，2013年。[MSV24] Cheuk Yu Mak、Yuhan Sun 和 Umut Varolgüneş。以相对辛上同调刻画重性。《拓扑学杂志》，17(1):e12327，2024年。[Oh97] Yong-Geun Oh。辛拓扑即作用泛函的几何。I. 余切丛上的相对弗洛尔理论。《微分几何杂志》，46(3):499–577，1997年。[Oh99] Yong-Geun Oh。辛拓扑即作用泛函的几何。II. 裤子乘积与上同调不变量。《分析与几何通讯》，7(1):1–55，1999年。

[Oh05] Yong-Geun Oh。闭辛流形上哈密顿路径谱不变量的构造。载于 Jerrold E. Marsden 和 Tudor S. Ratiu 编，《辛几何与泊松几何的广度》，数学进展第232卷，第525–570页。Birkhäuser，波士顿，2005年。[Pal66] Richard S. Palais。无限维流形的同伦论。《拓扑》，5(1):1–16，1966年。[Sch00] Matthias Schwarz。关于闭辛渐近流形的作用谱。《太平洋数学杂志》，193(2):419–461，2000年。[SUV26] Yuhan Sun、Igor Uljarević 和 Umut Varolgüneş。接触大纤维定理。《几何与泛函分析》，36(1):301–350，2026年。[UZ25] Igor Uljarević 和 Jun Zhang。接触拟态及其应用，2025年。arXiv:2503.18750。[Zap10] Frol Zapolsky。二维中的几乎泊松可交换性。《数学科学电子研究公告》，17:155–160，2010年。[Zap26] Frol Zapolsky。李维尔流形上的霍费尔连续拟态射。《美国数学会会刊》，2026年9月。在线优先发表。