非线性电传输线中的五阶 KdV 孤立波

Lo¨ic Fache ,[1] Filip Novkski ,[2] 和 Eric Falcon[1] [1]*Université Paris Cité, CNRS, MSC Laboratory, UMR 7057, F-75013 Paris, France* [2]*PULS, Institute for Theoretical Physics, FAU Erlangen-Nürnberg, 91058 Erlangen, Germany*（日期：2026年11月24日）

我们报告了对受五阶色散 Korteweg-de Vries（KdV）方程支配的孤立波进行的受控实验观测。为实现三次色散消失，我们在非线性电传输线中采用最近邻电感器之间的互感耦合。随后，我们通过直接时空测量色散关系、其振荡尾部轮廓、振幅-宽度标度关系及振幅-速度关系，对产生的孤立波进行实验表征，发现结果与半解析预测吻合良好。两个（同向或反向传播的）孤立波之间的碰撞实验也表明，经过相互作用后，其自相似轮廓仍得以保持，仅发生时间平移。我们还对耗散效应进行了量化。

arXiv:2611.31074v1 [nlin.PS] 23 Nov 2026

引言。 孤子是非线性与色散相互平衡所产生的普适非线性激发。它们构成现代非线性与波动物理学的基石，在众多领域中都很容易观测到，从流体 [1–7], 等离子体 [8], 颗粒物质 [9], 和光纤 [10–12] 到玻色-爱因斯坦凝聚体 [13] 和电学晶格 [14]。对于可积系统，孤子是某些非线性偏微分方程的基本非线性模态，例如科特韦格-德弗里斯（KdV）方程；在这类系统中，孤子碰撞具有弹性，仅产生相移 [15, 16]。因此，可积性使孤子不只是局域脉冲。

在不可积系统中，稳定的局域波同样存在，但它们之间的相互作用是非弹性的，并伴有辐射发射和振幅再分配 [17–20]。河原方程（一种广义 KdV 模型） [21, 22] 能够支持这类相干结构。当三阶色散项变得很小或消失时，二次非线性与五阶色散达到平衡，从而得到五阶科特韦格-德弗里斯（KdV5）方程 [23]。与具有三阶色散的经典 KdV 孤子不同，KdV5 孤波解无法写成闭式解析表达式，通常必须通过数值方法求得 [21]。此外，五阶色散项会改变孤立波的轮廓：它呈现渐近振荡尾部，而非 KdV 孤子的单峰局域脉冲。这一特征对它们之间的弱相互作用以及可能形成的束缚态起着重要作用 [21, 24]。

在浅水毛细重力波中，预计 KdV5 区域会出现在通常的隆起型 KdV 孤子向凹陷型 KdV 孤子转变的附近 [25–28]。当几何形状和边界条件改变有效的色散平衡时，也应出现该区域 [29], , 例如在流体环面中 [30]。对于在冰覆盖的海洋表面上传播的弱非线性浅水波 [31], , 以及三阶色散项消失的磁化等离子体，KdV5 方程同样适用 [32]。然而，这样的五阶色散区域至今仍难以通过实验实现。尽管早在 1970年代 [24, 33], 就曾进行过实验尝试，但迄今尚未对 KdV5 孤立波轮廓、其标度律或其已解析的碰撞动力学进行系统定量表征。文献 [33] 仅基于一张示波器快照进行了简要报道。该文声称振幅-速度标度关系是线性的，但未提供支持性数据，也未提供任何关于脉冲宽度标度的数据。该文还指出，脉冲在碰撞后仍保持各自的特征，但没有给出相关数据。文献 [24] 报道了孤子束缚态和孤子晶格的形成。

在此，我们对 KdV5 孤立波进行了全面的实验表征。为此，我们利用非线性电传输线（NLTL）的可调性，实现三次色散消失。直接的时空测量首先揭示了 KdV5 色散关系。随后，我们观测并量化了单个 KdV5 孤波。其振荡尾部轮廓、振幅-宽度关系和振幅-速度关系均与 KdV5 方程的半解析预测高度吻合。最后，我们研究了两个（同向或反向传播）孤立波之间的碰撞。

实验装置。 我们的实验平台如图所示。 1（a）所示，由一维非线性电传输线组成，该传输线包含 $N = 64$ 个相同的单元。每个单元 n 包含一个串联电感 $L \simeq 330\,\mu\text{H}$（内阻为 $R_L \simeq 0.9\,\Omega$）和一个并联非线性电容

C（$U^{(n)}$）由变容二极管实现（其内阻为 $R_C \simeq 12.8\,\Omega$），其电容会随施加电压 $U^{(n)}$ 的增加而减小，并提供所需的弱非线性 [23]。关键因素是最近邻电感器之间的互感耦合 M，这使该器件区别于标准非线性传输线。所需的 M 值由线圈间距决定（在我们的装置中，中心距约为 1。25 cm ）。输入波形由可编程函数发生器（ Rigol DG4102）生成。

对图U所示单元I应用基尔霍夫电压定律和电流定律，忽略内部串联电阻 n 和 R_L，并考虑穿过每个电感器的互感磁通，可得耦合方程 R_C [33],

$$\begin{aligned} L I_t^{(n)} + M\left[I_t^{(n-1)} + I_t^{(n+1)}\right] &= U^{(n-1)} - U^{(n)}, \\ C(U^{(n)}) U_t^{(n)} &= I^{(n)} - I^{(n+1)}, \end{aligned} \tag{1}$$

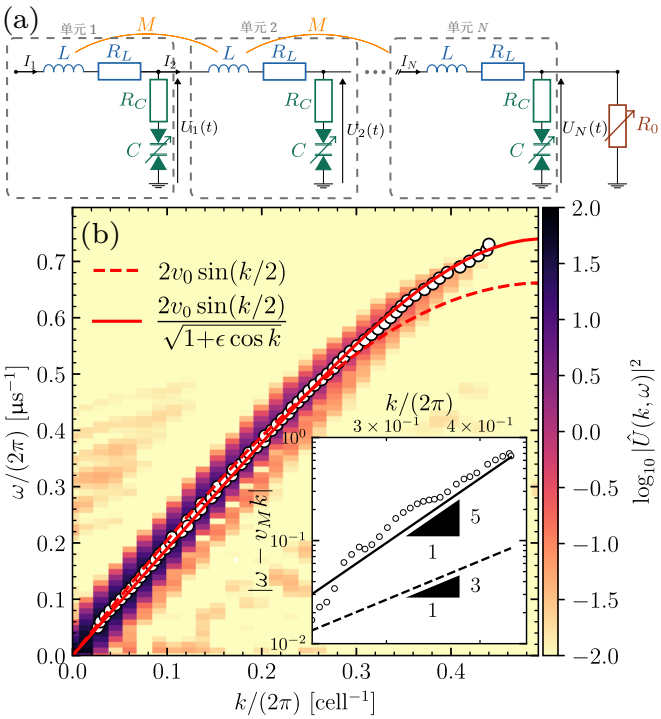

图1。(a) 含有$N = 64$ 个晶格单元的非线性电气晶格示意图。每个单元包含一个串联电感 L （内阻为 R_L）、一个变容二极管电容 $C(U)$（内阻为 R_C），以及最近邻电感器之间的互感耦合 M。线路末端接有负载电阻 R_0。(b) 线性区内电压场的时空功率谱实测结果，$\log_{10}|\hat{U}(k,\omega)|^2$。叉号表示实验色散分支的极大值。红线为式（2）的理论离散色散关系：其中 $\varepsilon = 1/5$（实线）和 $\varepsilon = 0$（虚线）。插图：针对 $k/(2\pi)$的重标度频谱双对数放大图 $\in [0.25, 0.45]$。

其中，t 为实验室时间，下标表示导数，上标 n 标记传输线中相应的单元。实验测得变容二极管的电容为 $C(U^{(n)}) = C_0(1 - 2bU(n))$，其中 $C_0 \equiv C(U = 0) \simeq 683$pF为零偏置电容，$b \simeq 0.21$ V^{-1} 为根据电容-电压特性独立标定的非线性系数（详见补充材料 [34]）。方程（1）中忽略的内部电阻 R_L 和 R_C会引入不同的耗散效应。在长波极限下，R_L 产生与频率无关的阻尼，而 R_C 则会产生与频率相关耗散相对应的扩散项（详情见补充材料 [34] ）。

色散关系。 求平面波解$U^{(n)} \propto e^{i(kn-\omega t)}$ 对方程（1）作线性近似，可得晶格的精确离散色散关系 $\omega(k)$ [33], 如下

$$\omega(k) = \frac{2}{\sqrt{LC_0}} \frac{\sin(k/2)}{\sqrt{1+\varepsilon\cos k}} \quad \text{with} \quad \varepsilon \equiv \frac{2M}{L}. \tag{2}$$

当波数较小 k时，将方程（2）展开可得 [33]

$$\frac{\omega}{v_M} = k - \underbrace{\frac{1-5\varepsilon}{24(1+\varepsilon)}}_{\alpha_3} k^3 + \underbrace{\frac{1-58\varepsilon+121\varepsilon^2}{1920(1+\varepsilon)^2}}_{\alpha_5} k^5 + \cdots, \tag{3}$$

其中，$v_M = [(1+\varepsilon)LC_0]^{-1/2}$ 是线性系统中的长波相速度。互感耦合 ε 由此调节色散系数：三次项系数 α_3在 $\varepsilon = 1/5$处恰好为零，即 $M = L/10$，而五次项系数在该值处满足 $\alpha_5 < 0$。因此，主导色散修正按 k^5标度，这与标准非线性传输线（$\varepsilon \sim 0$）不同。

首先，我们通过测量传输线的线性脉冲响应，实验检验方程（2）的预测。我们在非线性传输线的输入端注入一个短电压脉冲δU，其持续时间为 0.2 μs，振幅为 10 mV。该脉冲的振幅足够小，可确保线性传播；其持续时间很短，因而能够提供宽带激励，在一次测量中探测晶格所支持的全部传播模式。随后，我们沿传输线在连续的晶格单元处记录电压，以重建时空场 $U(n,t)$。

接着，通过计算二维傅里叶功率谱 $|\hat{U}(k,\omega)|^2$，其中 k 为离散波数，ω 为角频率，我们得到实验色散关系。如图1(b)所示，功率集中在（k,ω）平面的一条主曲线上，这直接标识出非线性传输线的线性传播模态，与在 $\varepsilon = 1/5$处求得的方程（2）离散色散关系高度吻合。相比之下，令 $\varepsilon = 0$所得的理论红色虚线对应于不含互感耦合的晶格，与实验谱明显偏离。双对数插图进一步通过绘制 $\omega - v_M k$与 k的关系突显了这一偏差。数据很好地符合 k^5 幂律，证实了五阶色散行为占主导地位。

五阶 *KdV* 方程。 在方程（1的长波长和弱非线性近似下，并在无损极限中，电压场的晶格动力学$U(n,\ t)$表示为（见补充材料 [34]）

$$U_n + \frac{1}{v_M}U_t - \frac{b}{v_M}UU_t + \frac{1}{480v_M^5}U_{ttttt} = 0. \tag{4}$$

前两项描述了以速度 v_M 传播的线性波，后两项则体现了弱二次非线性和五阶色散。我们的实验涵盖最大振幅为 $U_{\mathrm{m}} \in [0.01, 2.24]$ V、持续时间为 $\in [0.47, 1.7]$ μs 的孤波，由此得到的弱非线性参数（$bU_{\mathrm{m}} \in [0.002, 0.47]$）和色散参数（$1/[480v_M^4\tau^4] \in [0.003, 0.44]$）均小于 1，且量级相同，符合 KdV5 平衡的要求，其中τ 为色散时间尺度（见下文和 [35]）。

变换到以v_M 共同传播的参考系，并引入归一化变量 $T =$

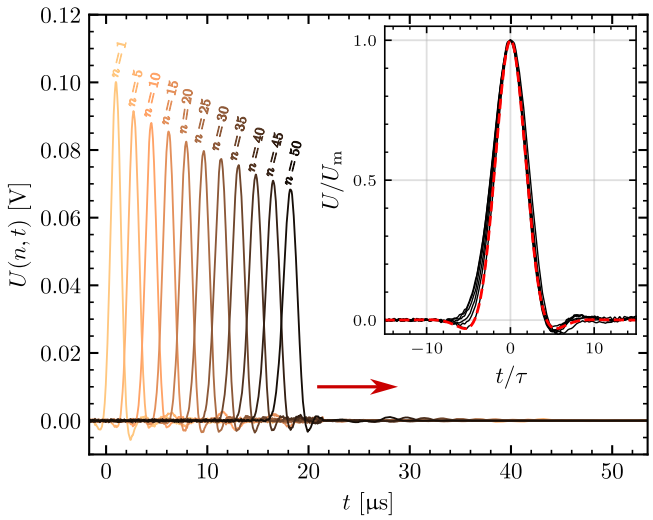

图 2. 注入的 KdV5 孤立波轮廓的传播。主图：电压剖面 $U(n, t)$ 在单元索引 n处，从$n = 1$ (浅橙色) 到 $n = 50$ (黑色)，随实验室时间 t变化。插图：重新缩放后的轮廓 U/U_m 相对于 t/τ 的关系；若干选定单元（实线）的数据与式 (5) 的归一化KdV5孤立波解重合（红色虚线）。

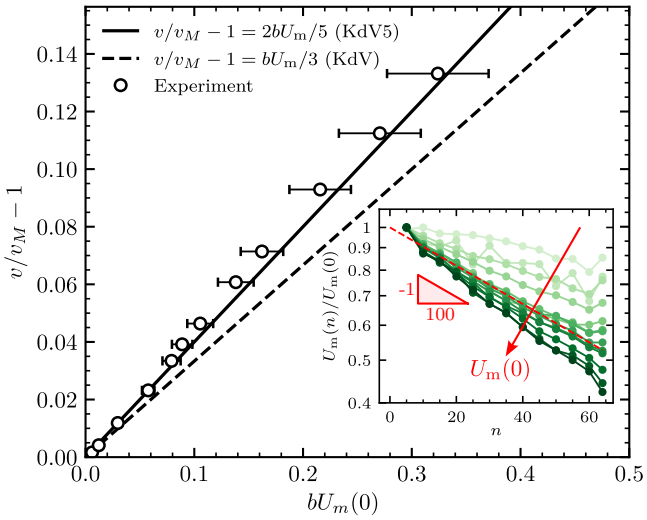

图 3. KdV5 孤立波的速度-振幅标度关系。测量得到的归一化速度 $v/v_M - 1$ 与 $bU_\mathrm{m}(0)$（圆圈）作图。实线：方程（6）的KdV5预测。虚线：标准KdV预测。水平误差条反映了传播过程中振幅的变化。插图：沿非线性传输线的归一化峰值电压 U_m（n）/U_m（0）对应不同输入 U_m（0）振幅的半对数图y。

$480^{1/4}(bU_\mathrm{m})^{5/4}n$ 和 $x = (480bU_\mathrm{m})^{1/4}(n - v_M t)$，连同无量纲电压 $u = U/U_\mathrm{m}$，方程（4）随后化简为无量纲KdV5方程

$$u_T + uu_x - u_{xxxxx} = 0. \tag{5}$$

孤立波：轮廓与速度。 与经典 KdV 方程不同，式 (5) 不存在闭式孤立波解。五阶色散项通常会产生振荡尾部，使简单的双曲正割试探解无法成立；一般情况下尚未找到精确的局域解 [21]。尽管如此，仍可利用傅里叶空间中的 Petviashvili不动点迭代数值求得局域行波解 [20, 37](见补充材料 [34])。该迭代收敛于一个局域轮廓，其主峰为正，并带有正负交替、指数衰减的振荡尾部。在实验中，通过上述缩放关系将这一数值轮廓映射回物理电压波形，并将其作为输入电压注入 $U(n = 0)$。

图 2 展示了单个注入脉冲的传播过程。电压剖面 $U(n, t)$ 在连续的单元索引 n （颜色从浅橙色到黑色依次变化）处记录，呈现出以恒定速度传播的局域波形，并在整个传播范围内保持自相似形状（见插图）。轻微偏差是由耗散效应造成的。五阶色散的一个关键特征是孤立波的振幅-持续时间标度关系，这与 KdV 情形有本质区别。对于标准 KdV 方程，孤子持续时间与 $\tau \approx 1/[v_0(24\,bU_\mathrm{m})^{1/2}]$ [23] 成比例， U_m 为其最大振幅，反映了二次非线性与三阶色散之间的平衡。对于方程（4），相同非线性与五阶色散之间的平衡则要求 $\tau \approx 1/[v_M(480bU_\mathrm{m})^{1/4}]$。将测得的轮廓按 U/U_m 进行缩放，并以 t/τ [为横坐标绘制（见图 2],），所得波形便塌缩到一条主曲线上，并与方程（5）的数值解（红色虚线）重合。请注意，实验宽度略大于后者，这是由耗散效应造成的。还需注意，该轮廓在波峰两侧呈现波谷，这是 KdV5 剖面的特征。附录中进一步研究了这种演化对注入波形的敏感性，其中采用不同宽度的局域输入来探测脉冲传播、晶格离散性和耗散效应 [图 A1]。

还将脉冲的测量速度随其振幅的标度关系与约化 KdV5 动力学的预测进行了直接比较。使用重标度变量和 $x - c_\mathrm{KdV5}T =$ 常数。，其中 $c_\mathrm{KdV5} = 2/5$ [36]，可预测孤立波速度与其振幅呈线性标度关系，即

$$v = v_M\left(1 + \frac{2}{5}bU_\mathrm{m}(0)\right). \tag{6}$$

实验脉冲速度是根据所有非线性传输线单元中相邻波形峰值之间的飞行时间推断得出的。测量结果见图 3，与方程（6）吻合良好（见实线）。请注意，在标准 KdV 动力学的情况下，标度关系预测 $v = v_0(1 + bU_\mathrm{m}/3)$ [23] （见虚线）。图3 中的插图显示了系统耗散：在

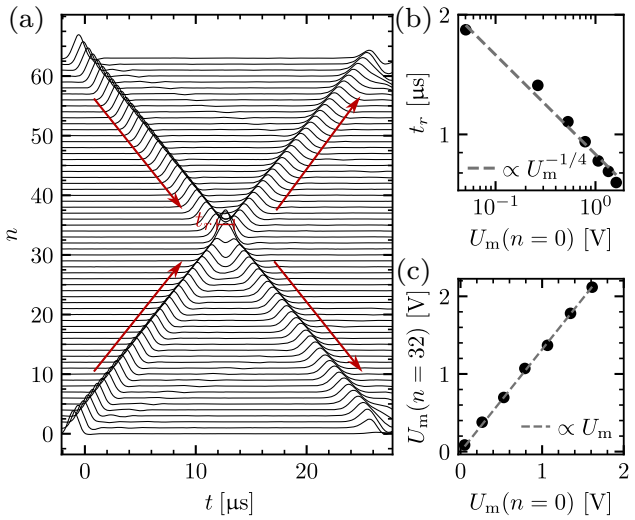

图 4. 非线性传输线中的两个 KdV5 孤立波迎头碰撞。(a) 碰撞过程中电压场 $U(n,\ t)$ 的时空演化。两个反向传播的孤立波由相同的输入参数生成，峰值振幅为 0.26 V，持续时间为 0.84 μs。(b) 驻留时间按 $t_r \propto U_{\rm m}(n=0)^{-1/4}$ 标度变化（双对数坐标）。(c) 碰撞峰值振幅（在 $n = 32$ 处）与注入振幅成正比（斜率为 ~ 1.3）。(b、c) 振幅扫描驱动。虚线表示幂律标度。

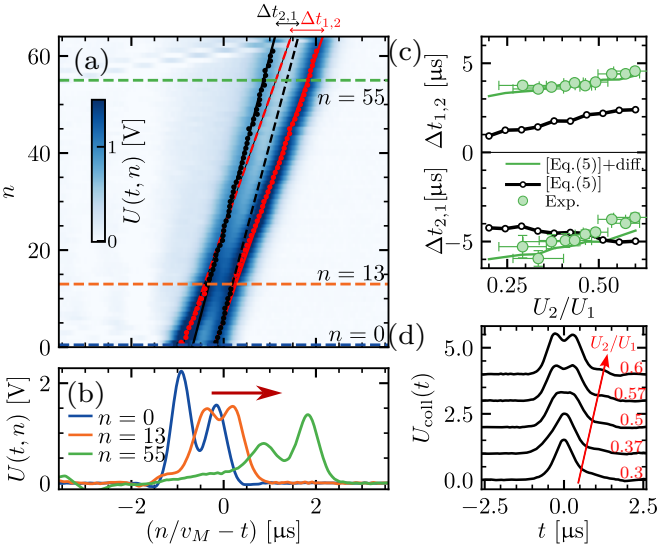

图 5. 两个 KdV5 孤立波之间的追赶碰撞。（a）在以 v_M 运动的参考系中，电压场 $U(n,\ t)$ 的时空演化。（b）在晶格单元 $n = 0$（蓝色）、13（橙色）和 55（绿色）处测得的时间信号。初始的大（小）孤立波的峰值振幅为 2.24 V（1.56 V），持续时间为 0.47 μs（0.52 μs）。（c）大波（$\Delta t_{1,\,2} > 0$）和小波（$\Delta t_{2,\,1} < 0$）的碰撞诱导的时间偏移与其振幅比 U_2/U_1 的关系。绿色圆圈：实验。黑色分段线：KdV5 模拟。绿色实线：耗散型 KdV5 方程的模拟。（d）不同 U_2/U_1 下最大相互作用时的轮廓，为便于观察进行了垂直平移。

最坏情况下，孤立波振幅以约 10^{-2} 单元$^{-1}$为速率呈指数衰减。这种衰减主要源于电感器和变容二极管的内部串联电阻R_L 和 R_C （分别如此，详情见补充材料 [34] ）。

孤子碰撞。孤立波的一个显著特征是，它们在相互作用后仍能保持自身特性。我们通过研究 KdV5 区域中两个反向传播或同向传播孤立结构之间的迎头碰撞和追越碰撞，检验这一特性。

图 4（a）展示了一次典型的正面碰撞实验。两个 KdV5 孤立波从非线性传输线的相对两端发射，并在晶格中心附近发生碰撞。相互作用前后的轨迹表明，碰撞后两个波都几乎恢复了未改变的轮廓和速度。相互作用区域的特征是瞬态非线性叠加，并伴随着振幅的局部增加。方程（5）是单向模型，而非线性传输线支持沿两个方向传播的波。非线性传输线的双向长波描述，在投影到单一传播方向之前，更自然地应在 Boussinesq型方程层面进行 [23]。

利用驻留时间的概念， [30, 38], 我们将碰撞的局部持续时间定义为以下时间：t_r 在此期间，空间轮廓 $U(n)$ 无法区分为两个独立的极大值。由于 KdV5 平衡给出的特征时间宽度标度为$U_{\rm m}^{-1/4}$，而非经典 KdV标度 $U^{-1/2}$ m[23],

因此预期 $t_r \propto U_{\rm m}^{-1/4}$。这一标度与图4(b) 报告的实验结果一致。图4(c) 显示，在碰撞位置测得的峰值电压 $n = 32$与注入振幅保持正比。

与可积KdV方程中的经典孤子不同，数值研究表明，KdV5 孤立波预计不会发生弹性碰撞 [39]。在此，局域结构在相互作用后仍然存在，并伴有微弱扰动，这些扰动可归因于碰撞动力学和不可避免的NLTL耗散。然而，在我们的实验中，无法将这两种影响分别区分开来。

图5(a,b)展示了两个振幅不同、同向传播的KdV5孤立波之间的一次追赶碰撞。与图3中报告的速度标度关系一致，振幅较大的波传播得更快，追上振幅较小的波并超过它。在相互作用过程中，两个局域结构短暂合并，随后再次分离成两个孤立波波包 [见图5(a,b)]。

这种相互作用产生了明显的碰撞诱导的时间偏移：较大的波（No. 1）相对于其未受扰轨迹提前，而较小的波（No. 2）则延迟。图5(c)显示，对于不同的振幅比 U_2/U_1，测得的偏移量$\Delta t_{1,2}$ 和$\Delta t_{2,1}$ 与数值模拟呈现出相同的整体趋势

，如方程 (5)（黑线）所示。此外，$\Delta t_{1,2} < |\Delta t_{2,1}|$ 由于较小的脉冲（即速度最慢的脉冲）相互作用时间更长。与方程 (5) 的偏离归因于实验传输线中的耗散；耗散会在传播过程中改变孤立波的振幅和速度，这一点也体现在耗散型 KdV5 方程的模拟中（见补充材料 [34]）。最后，图5(d)展示了不同脉冲振幅比下的孤子相互作用轮廓。

结论。 我们证明了，具有互感耦合的非线性电传输线实现了一种实验区域：在该区域中，晶格色散关系的长波长展开中的三次项消失，五阶色散成为主导的色散修正。通过时空测量，我们在实验上突出展示了与理论预测高度一致的 KdV5 孤立波：振荡尾轮廓、振幅-宽度标度关系以及线性振幅-速度关系。我们还研究了两个（同向和反向传播的）孤立波之间的碰撞。未来，我们可以探索另一种孤立波碰撞类型，即两个孤立波仅通过其振荡尾部发生相互作用 [40]。还可以在我们的非线性传输线中研究作为色散冲击波的新型 KdV5 解 [41]。

除了孤立碰撞之外，未来还可以使用由大量此类孤立波组成的集合进行实验，即非可积孤子气体 [42], 这可能需要采用损耗更低的实现方案。迄今为止，孤子气体实验已在近可积系统中开展（例如流体力学 [43], 、光学 [44], 和电学晶格 [45]），而 KdV5 区域提供了一种易于研究的非可积对应体系。因此，这引出了一个问题：能否建立一种有效动理学，如同为可积系统 [46], 推导出的有效动理学一样。另一个引人关注的开放问题是，非线性离散链（例如非线性传输线）能否呈现统计平衡区域 [47], ，正如最近在三维湍流 [48] 和波湍流 [49]的大尺度上观察到的那样。最后，我们的研究结果为在包括内波 [22], 、冰覆盖海洋 [31], 和磁化等离子体 [32], 在内的各种物理系统中观测 KdV5 孤立波铺平了道路，而在这些系统中，探测 KdV5 孤立波仍是一项开放挑战。

致谢

致谢。我们感谢 C.-T. Pham 的讨论。本研究得到西蒙斯基金会波湍流项目（项目编号：MPS-WT-00651463，美国）以及法国国家研究机构的支持（ANR Sogood 项目编号：ANR-21-CE30-0061-04、ANR Lascaturb 项目编号：ANR-23-CE30-0043-02，以及 ANR Provebact ANR-24-CE09-1394-02）。F.N. 感谢亚历山大·冯·洪堡基金会提供博士后奖学金。

数据可用性。 支持本文研究结果的数据未公开。相关数据可根据合理请求向作者获取。

附录

非孤子局域输入的演化。—为检验动力学对注入波形的敏感性，我们在峰值电压固定为 $U_m(n=0)$ 的条件下进行了实验，采用了稳态 KdV5 孤立波轮廓或半高全宽分别为 $W/2$, W, $2W$，以及 $4W$ 的高斯脉冲，其中 $W \simeq 0.96$ µs 为孤立波半高全宽 [图 A1(a1)–(a5)]。第一列以透明青色遮罩突出显示，对应正文中研究的 KdV5 孤立波情形，并在此作为参照。相应的空间宽度约为 0.9、1.9、3.7 和 7.4 个晶格单元。

实验揭示了三种不同的行为。具有与 KdV5 孤波相同振幅和宽度的高斯脉冲，其演化趋向于一种与精确孤立波输入所产生的波形非常接近的波形 [见 (a1) 和 (a3)], 这表明，在这一尺度下，传播对输入形状的细节并不敏感。相比之下，$W/2$ 脉冲显著展宽并发展出振荡尾部，同时在经过 $n = 40$ 晶格单元 [见 (a2)], 后仍保留一个局域核心，表明存在晶格色散辐射分量。对于更宽的 $2W$ 和 $4W$ 输入，其轮廓变陡，并裂变为一个占主导地位的局域脉冲，同时伴有次级结构，令人联想到 KdV 动力学中的孤子裂变 [15, 23]。

图 A1中的 (b1)–(b5) 所示相应时空傅里叶谱进一步阐明了这些观察结果。以近似恒定速度传播的相干结构会在一条直线分支上产生谱能量$\omega = vk$，而色散辐射则遵循精确的离散线性色散关系，即公式 (2)。KdV5 输入和宽度为 W 的高斯脉冲显示出非常相似的相干分支，仅有微弱的色散辐射 [见 (b1) 和 (b3)]。然而，对于 $W/2$ 输入，其初始谱延伸至较大的波数，并且沿离散线性色散曲线形成了清晰的分量，直接揭示了晶格辐射的发射 [见 (b2)]。幸存的局域分量对应于另一条独立的相干分支。有限的传播距离使我们无法确定其是否渐近收敛到精确的孤立波，但测量结果清楚地表明，系统发生了伴随色散波发射的非线性重新调整。

最后，图A1(c1)–(c5)显示了移除电阻元件后离散电路方程的相应模拟 [，即方程（1）]。与(a1)–(a5)中的实验和耗散模拟进行比较，可以分离出内部电阻的作用 R_C 以及 R_L。在无损晶格中，色散结构和次级结构得以更强地维持，而耗散则会衰减相干脉冲和发射辐射。

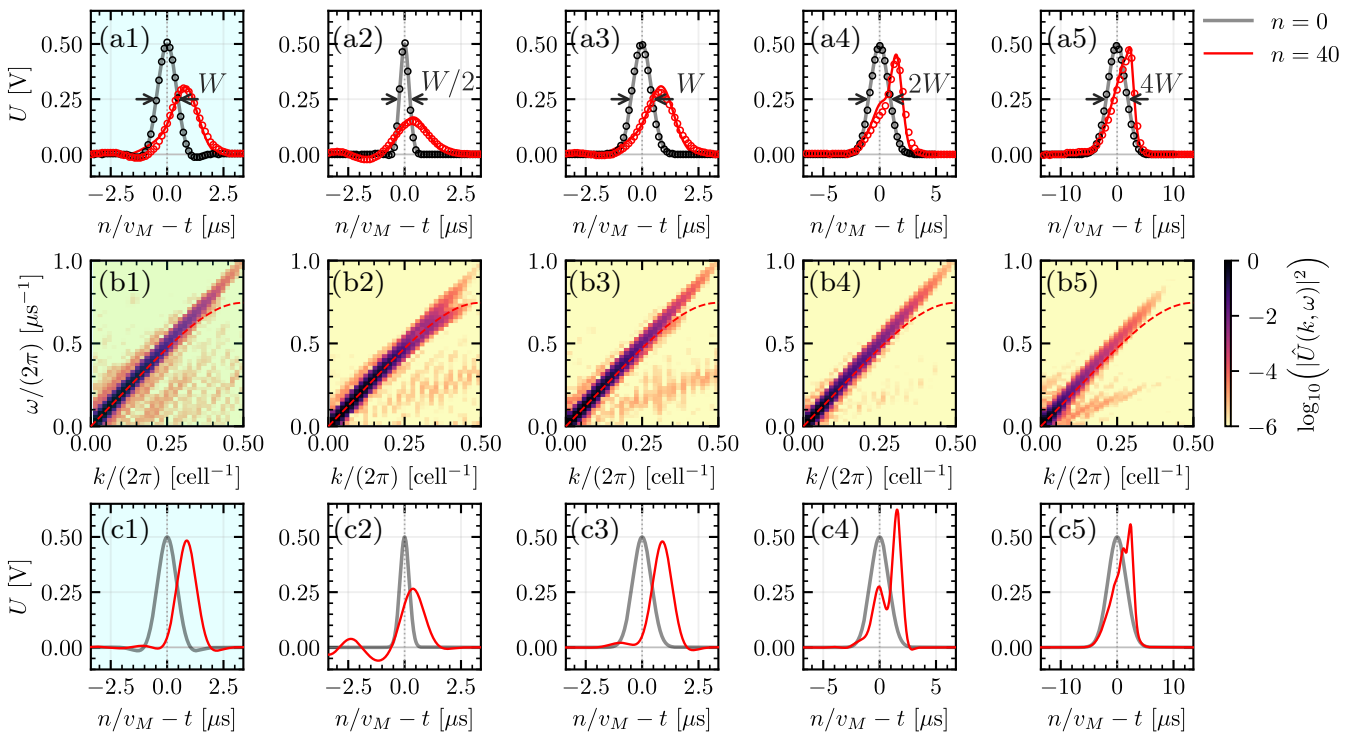

图 A1. 注入时具有不同局域波形的演化 $n = 0$ （灰色）沿非线性传输线传播时 $n = 40$ （红色）。从左至右各列分别显示半高全宽为 W的 KdV5 孤波，以及半高全宽为 $W/2$、 W、 $2W$和 $4W$的高斯脉冲，峰值电压固定为 U_{m}（$n = 0$） $\simeq 0.5\,\mathrm{V}$。 $W \simeq 0.96$ μ（a1–a5）实验结果（空心圆）及相应的耗散离散非线性传输线模拟（实线）。（b1–b5）实验时空傅里叶谱，以及精确的离散线性色散关系 [方程（2）——红色虚线]。（c1–c5）离散非线性传输线方程（1）的无损模拟。

[1] J. S. Russell, *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*（Taylor，伦敦，1845）。[2] D. J. Korteweg 和 G. de Vries，《关于矩形运河中传播的长波形状变化及一种新型长驻波》，《哲学杂志》**39**，422（1895）。[3] J. L. Hammack 和 H. Segur，《Korteweg–de Vries 方程与水波。第二部分：与实验的比较》，《流体力学杂志》**65**，289（1974）。[4] E. Bourdin、J.-C. Bacri 和 E. Falcon，《铁磁流体表面轴对称孤波的观测》，《物理评论快报》**104**，094502（2010）。[5] A. Chabchoub、N. P. Hoffmann 和 N. Akhmediev，《水波槽中的怪波观测》，《物理评论快报》**106**，204502（2011）；A. Chabchoub、O. Kimmoun、H. Branger、N. Hoffmann、D. Proment、M. Onorato 和 N. Akhmediev，《水面暗孤子的实验观测》，《物理评论快报》**110**，124101（2013）。[6] A. Cazaubiel、G. Michel、S. Lepot、B. Semin、S. Aumaˆıtre、M. Berhanu、F. Bonnefoy 和 E. Falcon，《深水表面波中孤子与极端事件的共存》，Phys. Rev. Fluids **3**，114802（2018）；G. Michel、F. Bonnefoy、G. Ducrozet、G. Prabhudesai、A. Cazaubiel、F. Copie、A. Tikan、P. Suret、S. Randoux 和 E. Falcon，深水重力波的可积湍流中 Peregrine孤子的涌现，Phys. Rev. Fluids **5**，082801(R)（2020年）。[7] G. Ricard 和 E. Falcon，紊乱地形上的孤子动力学，《物理评论快报》**133**，264002（2024年）。[8] H. Ikezi、R. J. Taylor 和 D. R. Baker，离子声孤子的形成与相互作用，《物理评论快报》**25**，11 1970( )；H. Schamel，共振电子导致离子声波的修正的Korteweg–de Vries方程，J. Plasma Phys. **9**，377（1973年）。[9] V. F. Nesterenko，颗粒介质中非线性压缩脉冲的传播，J. Appl. Mech. Tech. Phys. **24**，733–743（1983年）；A. N. Lazaridi 和 V. F. Nesterenko，一维颗粒介质中新型孤立波的观测，J. Appl. Mech. Tech. Phys. **26**，405–408（1985年）；C. Coste、E. Falcon 和 S. Fauve，赫兹接触珠链中的孤立波，《物理评论 E》**56**，6104（1997年）；S. Sen、J. Hong、J. Bang、E. Avalos 和 R. Doney，颗粒链中的孤立波，Phys. Rep. **462**，21（2008年）。[10] L. F. Mollenauer、R. H. Stolen 和 J. P. Gordon，光纤中皮秒脉冲压缩与孤子的实验观测，《物理评论快报》**45**，1095（1980年）。

[11] B. Kibler、J. Fatome、C. Finot、G. Millot、F. Dias、G. Genty、N. Akhmediev 和 J. M. Dudley，非线性光纤光学中的 Peregrine孤子，Nat. Phys. 6，790（2010年）。[12] F. Copie、P. Suret 和 S. Randoux，循环光纤环中孤子碰撞动力学的时空观测，Opt. Commun. 545，129647（2023年）。[13] S. Burger、K. Bongs、S. Dettmer、W. Ertmer、K. Sengstock、A. Sanpera、G. V. Shlyapnikov 和 M. Lewenstein，玻色-爱因斯坦凝聚体中的暗孤子，《物理评论快报》83，5198（1999年）。[14] R. Hirota 和 K. Suzuki，利用电网络研究晶格孤子，日本物理学会誌28，1366（1970年）。[15] N. J. Zabusky 和 M. D. Kruskal，无碰撞等离子体中的孤子相互作用与初始状态复现，《物理评论快报》15，240（1965年）。[16] C. S. Gardner、J. M. Greene、M. D. Kruskal 和 R. M. Miura，求解Korteweg–de Vries方程的方法，《物理评论快报》19，1095（1967年）。[17] K. A. Gorshkov 和 L. A. Ostrovsky，不可积系统中的孤子相互作用：直接摄动法及其应用，物理学D辑3，428（1981年）。[18] V. G. Makhankov，经典孤子的动力学（在不可积系统中），Phys. Rep. 35，1（1978年）。[19] Y. S. Kivshar 和 B. A. Malomed，近可积系统中的孤子动力学，Rev. Mod. Phys. 61，763（1989年）。[20] J. Yang，*Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems* 2010 （SIAM，费城）。[21] T. Kawahara，色散介质中的振荡孤立波，日本物理学会誌33，260（1972年）。[22] K. R. Khusnutdinova、Y. A. Stepanyants 和 M. R. Tranter，五阶 Korteweg–de Vries方程的孤子解及其在表面水波和内水波中的应用，Phys. Fluids 30，022104（2018年）。[23] M. Remoissenet，*Waves called solitons: Concepts and experiments* 1994 （Springer-Verlag，柏林）。[24] K. A. Gorshkov、L. A. Ostrovskiĭ 和 V. V. Papko，孤子作为经典粒子的相互作用与束缚态，苏联物理学JETP 44，306（1976年）；K. A. Gorshkov 和 V. V. Papko，孤子晶格的动态与随机振荡，苏联物理学 JETP 46，92（1977年）。[25] E. Falcon、C. Laroche 和 S. Fauve，薄液层上凹陷型表面孤立波的观测，《物理评论快报》89，204501（2002年）。[26] A. R. Champneys、J.-M. Vanden-Broeck 和 G. J. Lord，真实的上升型重力-毛细孤立波是否存在？一项数值研究，《流体力学杂志》454，403（2002年）。[27] J. K. Hunter 和 J.-M. Vanden-Broeck，有限振幅的孤立与周期性重力-毛细波，《流体力学杂志》134，205（1983年）。[28] J. A. Zufiria，有限深度水面上的周期性与孤立重力-毛细波的对称性破缺，《流体力学杂志》184，183（1987年）。[29] G. Le Doudic、S. Perrard 和 C.-T. Pham，沿液体圆柱传播的表面波。第2部分：变径、蛇形、晃荡和非线性波，《流体力学杂志》923，A13（2021年）。[30] F. Novkoski、C.-T. Pham 和 E. Falcon，流体环面上周期性 Korteweg-de Vries孤子的实验观测，EPL 139，53003（2022年）。[31] X. Xia 和 H. T. Shen，冰盖与水道中浅水波的非线性相互作用，《流体力学杂志》467，259（2002）。[32] T. Kakutani 和 H. Ono，冷无碰撞等离子体中的弱非线性磁流体波，《日本物理学会誌》26，1305（1969）。[33] H. Nagashima，关于由方程 $u_\tau + uu_\xi - u_{\xi\xi\xi\xi\xi} = 0$ 描述的非线性传输线中孤立波的实验，《日本物理学会誌》47，1387（1979）。[34] 有关实验装置（第 S1 节）、动力学方程的推导（第 S2 节）和数值方法（第 S3 节）的详情，请参见 [URL] 处的补充材料。[35]请注意，孤立波的持续时间为 3.578τ [36]。[36] Y. Yamamoto 和 ´E. I. Takizawa，关于五阶非线性时间演化方程的一个解，《日本物理学会誌》50，1421（1981）。[37] V. I. Petviashvili，奇异孤子的方程，Fiz. Plazmy 2，469（1976）；T. I. Lakoba 和 J. Yang，任意形式非线性的标量和向量哈密顿方程的广义 Petviashvili迭代法，计算物理学杂志226，1668（2007）。[38] H. Power 和 A. T. Chwang，平面孤立波在垂直壁面处的反射，波动6，183（1984）。[39] B. Malomed 和 J. M. Vanden-Broeck，五阶 KdV 方程中的孤立波相互作用，当代数学200，133（1996）。[40] H. Nagashima 和 M. Kuwahara，非线性波方程 $u_t + uu_x - \gamma^2 u_{5x} = 0$ **50**, 3792 1981 的孤立波计算机模拟，《日本物理学会誌》（）。[41] P. Sprenger 和 M. A. Hoefer，Whitham调制方程的不连续激波解作为行波的零色散极限，非线性33，3268（2020）。[42] M. V. Flamarion、E. Pelinovsky 和 E. Didenkulova，非可积孤子气体：Schamel方程框架，Chaos Soliton Fract. 180，114495（2024）；E. Didenkulova、M. V. Flamarion 和 E. Pelinovsky，KdV类孤子气体：可积模型与非可积模型中的相似性与差异，物理学D辑481，134815（2025）。[43] I. Redor、E. Barth´elemy、H. Michallet、M. Onorato 和 N. Mordant，流体动力学孤子气体的实验证据，《物理评论快报》122，214502（2019）；P. Suret、A. Tikan、F. Bonnefoy、F. Copie、G. Ducrozet、A. Gelash、G. Prabhudesai、G. Michel、A. Cazaubiel、E. Falcon、G. El 和 S. Randoux，深水表面重力波中孤子气体的非线性谱合成，《物理评论快报》125，264101（2020）；L. Fache、F. Bonnefoy、G. Ducrozet、F. Copie、F. Novkoski、G. Ricard、G. Roberti、E. Falcon、P. Suret、G. El 和 S. Randoux，深水表面重力波中孤子气体的相互作用，《物理评论E》109，034207（2024）。[44] P. Suret、M. Dufour、G. Roberti、G. El、F. Copie 和 S. Randoux，光学孤子气体引起的孤子折射，《物理评论研究》5，L042002（2023）；L. Fache、F. Copie、P. Suret 和 S. Randoux，光学孤子气体的受扰非线性演化：可积湍流中的增长与衰减，《物理评论快报》135，157201（2025）。[45] L. Fache、H. Damart、F. Copie、T. Bonnemain、T. Congy、G. Roberti、P. Suret、G. El 和 S. Randoux，耗散驱动的非线性电传输线中孤子凝聚态的形成，《物理评论快报》134，147201（2025）。[46] V. E. Zakharov，孤子的动力学方程，苏联物理学。

JETP **33**，538（1971）；G. A. El 和 A. M. Kamchatnov，致密孤子气体的动力学方程，《物理评论快报》**95**，204101（2005）。[47] M. Onorato、Y. V. Lvov、G. Dematteis 和 S. Chibbaro，一维链中的波湍流与热化，Phys. Rep. **1040**，1（2023）；M. Przedborski、S. Sen 和 T. A. Harroun，平衡态赫兹链中的涨落，《物理评论E》**95**，032903（2017）。[48] J.-B. Gorce 和 E. Falcon，三维流体湍流中大尺度的统计平衡

度，《物理评论快报》**129**，054501（2022）。[49] G. Michel、F. P´etr´elis 和 S. Fauve，《毛细波湍流中的热平衡观测》，《物理评论快报》**118**，144502（2017）；B. Miquel、A. Naert 和 S. Aumaˆıtre，《弯曲波湍流的低频谱》，《物理评论E》**103**，L061001（2021）；M. Vernet 和 E. Falcon，《大尺度流固耦合波湍流的热力学与统计平衡》，《物理评论快报》**135**，024004（2025）。