# 奥恩斯坦–乌伦贝克过程的有理扩展

Alexey Kuznetsov、Minjian Yuan*

2026年11月24日

arXiv:2611.31075v1 [math.PR] 23 Nov 2026

**摘要**

我们介绍并分类了可由多项式求解的奥恩斯坦–乌伦贝克过程的有理扩展。这些扩散过程与例外厄米多项式及量子谐振子的有理扩展密切相关。我们得到了它们的转移密度、基本解和格林函数的显式公式。我们还证明，每个这类扩散过程都可以通过对杀死布朗运动依次施行有限次达布变换，再进行 Doob $h$ 变换来构造。最后，我们推导出广义迈勒公式中连接多项式的显式公式，并利用该公式证明了关于这些多项式的若干猜想。

关键词：奥恩斯坦–乌伦贝克过程、例外厄米多项式、迈勒公式、Darboux 变换、转移密度、量子谐振子

*2020*年数学主题分类：60J60, 60J35, 33C45

## 1 引言与主要结果

奥恩斯坦和乌伦贝克研究的奥恩斯坦–乌伦贝克（OU）过程 1930 [37], 起源于布朗运动理论。它描述了一个受到线性摩擦和随机驱动力作用的粒子的速度，其运动遵循朗之万1908年运动方程 [26]。在本文采用的标准化形式下，该过程$Y = \{Y_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足随机微分方程（SDE）

$$\mathrm{d}Y_t = -Y_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad Y_0 = x,$$

其中 $W$ 是标准布朗运动。OU 过程特别有用，因为它在数学上易于处理。相对于Lebesgue测度，其转移概率密度为

$$p_t^{\mathrm{OU}}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-e^{-2t})}}\exp\left(-\frac{(y-xe^{-t})^2}{1-e^{-2t}}\right), \qquad t>0, \quad x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

其不变分布是均值为零、方差为 $1/2$的高斯分布，而厄米多项式 $H_n$构成了与该不变测度 [5, 7, 30]相关的 $L_2$ 空间中其无穷小生成元的特征函数正交基。

OU 过程及其扩展在物理学、生物学、气候科学和金融学等领域均有应用。在湍流中，OU 速度模型及其扩展用于拉格朗日描述

*约克大学数学与统计系，加拿大安大略省多伦多市基尔街4700号，邮编 M3J 1P3。电子邮件：akuznets@yorku.ca，yuanm@yorku.ca

粒子弥散 [36]。在活性物质模型中，OU过程表示具有指数相关性的自推进速度 [15]。在化学动力学和系统生物学中，多元 OU 过程在线性噪声近似下描述反应网络确定性稳定稳态附近的涨落 [12, 38]。在气候科学中，OU 模型描述缓慢变化的气候变量，例如海表温度异常；这些变量受快速天气波动驱动，并受到线性稳定化反馈的影响 [21, 16]。其他生物学应用包括描述数量性状在稳定化选择下向适应最优值演化的系统发育模型 [20], ，以及基于 OU 过程及其扩展的动物移动和家域估计模型 [14]。在数学神经科学中，OU 过程用于建模阈下膜电位，而神经元放电则由穿越阈值的首次通过时间描述 [34]。在数理金融中，OU 过程用于建模 Vasicek期限结构模型中的瞬时短期利率 [39]。

OU 过程与量子谐振子密切相关。其无穷小生成元$\mathcal{L}^{\mathrm{OU}}$ 通过基态变换 [30, 与谐振子哈密顿量 $\mathcal{H} := -\partial_x^2 + x^2$ (见 [35, 第 8.3]节)相关4]第 4.3]节

$$\mathcal{L}^{\mathrm{OU}} := \frac{1}{2}\partial_x^2 - x\partial_x = -\frac{1}{2}e^{x^2/2}(\mathcal{H} - 1)e^{-x^2/2}.$$

这种对应关系将厄米多项式 $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\partial_x^n e^{-x^2}$ 与厄米函数 $\psi_n(x) := e^{-x^2/2}H_n(x)$联系起来：它们分别满足 $\mathcal{L}^{\mathrm{OU}}H_n = -nH_n$ 和 $\mathcal{H}\psi_n = (2n+1)\psi_n$。此外，它还为构造 OU 过程的有理扩展提供了一个自然框架。可通过达布变换 [17], 对能够由多项式精确求解的谐振子有理扩张进行分类，而且已有其传播子的显式公式 [32]。我们的目标之一是利用这些结果构造并研究 OU 过程的有理扩展，下面给出其定义。

设 $R = P/Q$ 是一个没有实极点的有理函数，其中 $P,\ Q \in \mathbb{R}[x]$ 且 $\deg P < \deg Q$。OU 过程的有理扩张是在 $\mathbb{R}$ 上的扩散 $X$ ，满足

$$\mathrm{d}X_t = -(X_t + R(X_t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t.$$

由于 $R$ 和 $R'$ 有界，漂移是全局利普希茨的，且至多呈线性增长。因此，对于每个初始值 $X_0 = x \in \mathbb{R}$，该随机微分方程都有唯一的全局强解 [29, 定理 5.2。1]。

$X$ 的无穷小生成元为

$$\mathcal{L}_R := \frac{1}{2}\partial_x^2 - (x + R(x))\partial_x. \tag{2}$$

定义权函数

$$\mu_R(x) := \exp\left(-x^2 - 2\int_0^x R(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

由于 $R(x) = O(|x|^{-1})$，我们有 $\mu_R(x) = O(|x|^{\alpha}e^{-x^2})$，当 $|x| \to \infty$ 时，对某个 $\alpha > 0$ 成立，因此 $\mu_R \in L_1(\mathbb{R},\ \mathrm{d}x)$。通过 $\sqrt{\mu_R}$ 进行共轭变换，将 $-2\mathcal{L}_R$ 酉等价地映射为一个薛定谔算子

$$\sqrt{\mu_R}\,(-2\mathcal{L}_R)\,\frac{1}{\sqrt{\mu_R}} = -\partial_x^2 + (x + R(x))^2 - 1 - R'(x).$$

该薛定谔算子的势函数为 $x^2 + O(1)$，其中 $|x| \to \infty$。加藤–雷利希定理 [35,定理 6.4] 表明， $\mathcal{L}_R$ 在 $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ 上于 $L_2(\mathbb{R},\ \mu_R(x)\mathrm{d}x)$ 中本质自伴。其闭包（仍用同一符号表示）具有纯离散谱，且其特征函数构成标准正交基 [33,定理 XIII.67]。这些特征函数在以下定义中发挥重要作用，该定义改编自 [17, 定义 1.1]。

**定义 1.** 如果存在一个固定函数 $w \neq 0$，使得对于除有限多个整数 $n \geqslant 0$之外的所有整数，都存在一个次数为 $n$ 的多项式 $p_n \in \mathbb{R}[x]$，且 $\phi_n = wp_n$ 是 $\mathcal{L}_R$ 在 $L_2(\mathbb{R}, \mu_R(x)\mathrm{d}x)$中的特征函数，则称 *OU* 过程的有理扩张可由多项式求解，或简称可解。

我们为 OU 过程可解有理扩展的分类引入一些记号。记 $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ 和 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0} = \{0\} \cup \mathbb{N}$。光滑函数 $f_1, \ldots, f_m$ 的朗斯基行列式为

$$\mathrm{Wr}[f_1, \ldots, f_m] := \det[\partial_x^{i-1} f_j]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}.$$

对于 $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^m$，记 $H_{\boldsymbol{j}}(x) := \mathrm{Wr}[H_{j_1}, \ldots, H_{j_m}](x)$。全文中，$\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$表示一个长度为 $\ell$的严格递增序列，并记作 $\boldsymbol{k} - 1 := (k_1 - 1, \ldots, k_\ell - 1)$。约定 $H_\varnothing = 1$，并将空乘积视为 1。

这样的序列 $\boldsymbol{k}$称为 *Krein–Adler* 序列，如果 $\ell \geqslant 2$为偶数，且 $k_{2i} = k_{2i-1} + 1$对于 $1 \leqslant i \leqslant \ell/2$成立。对于每个 Krein–Adler 序列 $\boldsymbol{k}$，多项式 $H_{\boldsymbol{k}}$ 和 $H_{\boldsymbol{k}-1}$ 在 $\mathbb{R}$上均为偶函数且严格为正（见引理 2）。以下定理是 [17, 定理 1。1], 的扩散类比，该定理对谐振子的可解正则有理扩展进行了分类。

**定理 1.** *OU* 过程的有理扩张可解，当且仅当 $R \equiv 0$ 或者存在一个 *Krein–Adler* 序列 $\boldsymbol{k}$ 使得

$$R(x) = \frac{H'_{\boldsymbol{k}}(x)}{H_{\boldsymbol{k}}(x)} - \frac{H'_{\boldsymbol{k}-1}(x)}{H_{\boldsymbol{k}-1}(x)}. \tag{3}$$

对于一个 Krein–Adler 序列 $\boldsymbol{k}$，令 $X^{\boldsymbol{k}}$ 表示相应的扩散，其无穷小生成元为

$$\mathcal{L}^{\boldsymbol{k}} := \frac{1}{2}\partial_x^2 - \left(x + \frac{H'_{\boldsymbol{k}}(x)}{H_{\boldsymbol{k}}(x)} - \frac{H'_{\boldsymbol{k}-1}(x)}{H_{\boldsymbol{k}-1}(x)}\right)\partial_x.$$

对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，记作 $H_{\boldsymbol{k},n}(x) := \mathrm{Wr}[H_{k_1}, \ldots, H_{k_\ell}, H_n](x)$。这一族中对应于 $n \notin \boldsymbol{k}$的非零成员称为例外厄米多项式。它们的微分方程、正交性和完备性给出以下结果 [11, 17, 19]。

**定理 2.** 设 $\boldsymbol{k}$ 为一个 *Krein–Adler* 序列。有理函数 $\varphi_{\boldsymbol{k},n} := H_{\boldsymbol{k},n}/H_{\boldsymbol{k}-1}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \setminus \boldsymbol{k}$满足

$$\mathcal{L}^{\boldsymbol{k}}\varphi_{\boldsymbol{k},n} = -n\varphi_{\boldsymbol{k},n}.$$

它们构成 $L_2(\mathbb{R}, \nu_{\boldsymbol{k}}(x)\mathrm{d}x)$的一个正交基，其中

$$\nu_{\boldsymbol{k}}(x) := e^{-x^2}\frac{H_{\boldsymbol{k}-1}(x)^2}{H_{\boldsymbol{k}}(x)^2}.$$

对于 $n, m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \setminus \boldsymbol{k}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\boldsymbol{k},n}(x)\varphi_{\boldsymbol{k},m}(x)\nu_{\boldsymbol{k}}(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{n,m}\sqrt{\pi}\,2^{\ell+n}n!\prod_{j=1}^{\ell}(n - k_j). \tag{4}$$

我们的下一个目标是确定 $X^{\boldsymbol{k}}$的转移概率密度。主要工具是广义迈勒公式，该公式表明，对于每个严格递增序列$\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^\ell$，都存在连接多项式 $Q_n^{\boldsymbol{k}}(x, y)$、$0 \leqslant n \leqslant k_\ell + 1$，使得对于所有 $z$，$x$，$y \in \mathbb{C}$且满足 $|z| < 1$时，

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \setminus \boldsymbol{k}} \frac{z^n H_{\boldsymbol{k},n}(x)H_{\boldsymbol{k},n}(y)}{2^{n+\ell}n!\prod_{j=1}^{\ell}(n - k_j)} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}\exp\left(\frac{2zxy - z^2(x^2 + y^2)}{1 - z^2}\right)\sum_{n=0}^{k_\ell+1} z^n Q_n^{\boldsymbol{k}}(x, y). \tag{5}$$

该公式最初由 Pupasov-Maksimov 针对 Krein–Adler 序列建立 [32] ， 随后在 [25]中推广到任意严格递增序列。根据 [25,命题 1。3],我们有

$$Q_0^{\boldsymbol{k}}(x,y) = (-2)^{\ell}\Big[\prod_{j=1}^{\ell} k_j\Big] H_{\boldsymbol{k}-1}(x) H_{\boldsymbol{k}-1}(y). \tag{6}$$

其余多项式 $Q_n^{\boldsymbol{k}}(x,\ y)$、 $1 \leqslant n \leqslant k_\ell + 1$，可利用 [25, 式 (1.7)] 递归计算。我们的下一个结果给出了连接多项式的闭式表达式。

定理 3. 设 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^\ell$ 严格递增，且 $\ell \geqslant 1$。令 $\boldsymbol{k} \setminus k_i := (k_j)_{1\leqslant j\leqslant \ell,\ \ j\neq i}$ 且 $T_n(x,y) := H_n(x)H_n(y)/(2^n n!)$，其中 $n \geqslant 0$ ，以及 $T_n(x,y) := 0$ ，其中 $n < 0$。那么，对于 $1 \leqslant n \leqslant k_\ell + 1$,

$$Q_n^{\boldsymbol{k}}(x,y) = 2^{\ell-1}\sum_{i=1}^{\ell} 2^{k_i} k_i! \Big[\prod_{j\neq i}(k_i - k_j)\Big] H_{\boldsymbol{k}\setminus k_i}(x) H_{\boldsymbol{k}\setminus k_i}(y)\big(T_{k_i+1-n}(x,y) - T_{k_i-1-n}(x,y)\big). \tag{7}$$

在第 2 节中，我们使用显式公式 (7) 证明猜想 1.7 和 1.8，以及猜想 1.9 的第一个断言，见 [25]。在下一个定理中，我们使用连接多项式，显式求得 $X^{\boldsymbol{k}}$ 的转移密度。

**定理 4。** 设 $\boldsymbol{k}$ 为一个 *Krein–Adler* 序列。对于 $t > 0$ 和 $x$、$y \in \mathbb{R}$， $X^{\boldsymbol{k}}$关于 *Lebesgue*测度的转移密度为

$$p_t^{\boldsymbol{k}}(x,y) = p_t^{\mathrm{OU}}(x,y)\frac{H_{\boldsymbol{k}-1}(y)}{H_{\boldsymbol{k}}(y)^2 H_{\boldsymbol{k}-1}(x)}\sum_{n=0}^{k_\ell+1} e^{-nt} Q_n^{\boldsymbol{k}}(x,y). \tag{8}$$

过程 $X^{\boldsymbol{k}}$ 是正常返的，其不变概率密度为

$$\pi_{\boldsymbol{k}}(x) = \frac{2^\ell}{\sqrt{\pi}}\Big[\prod_{j=1}^{\ell} k_j\Big] e^{-x^2}\frac{H_{\boldsymbol{k}-1}(x)^2}{H_{\boldsymbol{k}}(x)^2}. \tag{9}$$

归一化常数由（4）结合 $n = m = 0$得到。由于 $R$ 在（3）中为奇函数（见引理 2），因此 $X^{\boldsymbol{k}}$ 在 $\mathbb{P}_x$ 下的分布与 $-X^{\boldsymbol{k}}$ 在 $\mathbb{P}_{-x}$下的分布相同。

接下来我们确定 $X^{\boldsymbol{k}}$的基本解和 Green函数。对于 $\lambda > 0$，基本解是 $\mathcal{L}^{\boldsymbol{k}} f = \lambda f$的正递增解和递减解，它们在正乘法常数意义下确定。对于 OU 过程，基本解为 $g_\lambda^{\pm}(x) = F_\lambda(\pm x)$，其中

$$F_\lambda(x) := e^{x^2/2} D_{-\lambda}(-\sqrt{2}x),$$

并且 $D_p$ 是抛物柱函数 [10, 第 12 节中的函数2]。恒等式 [10, 式（12.2.5）和（12.2.11）]给出

$$\mathrm{Wr}[g_\lambda^-, g_\lambda^+](x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} e^{x^2}. \tag{10}$$

The 以下定理给出了 $X^{\boldsymbol{k}}$ 的相应基本解 .

**定理 5**。 设 $\boldsymbol{k}$ 为 *Krein–Adler* 序列，且 $\lambda > 0$。定义

$$F_{\boldsymbol{k},\lambda}(x) := \mathrm{Wr}[H_{k_1}, \dots, H_{k_\ell}, F_\lambda](x). \tag{11}$$

递 $reas$增和递减基本解可选为

$$f_\lambda^+(x) := \frac{F_{\boldsymbol{k},\lambda}(x)}{H_{\boldsymbol{k}-1}(x)}, \qquad f_\lambda^-(x) := f_\lambda^+(-x). \tag{12}$$

它们的朗斯基行列式为

$$\mathrm{Wr}[f_\lambda^-, f_\lambda^+](x) = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{\ell+1} \prod_{j=1}^{\ell}(\lambda + k_j)}{\Gamma(\lambda)\nu_{\boldsymbol{k}}(x)}. \tag{13}$$

基本解在扩散过程的研究中发挥着核心作用（参见 [7]）。我们给出两个应用。定义运行最大值 $M_t$ ： =最大$\{X_s^{\boldsymbol{k}}$ : $0 \leqslant s \leqslant t\}$ 以及首次通过时间$h_y$ ： = 下确界$\{t \geqslant 0$ ： $X_t^{\boldsymbol{k}} = y\}$。那么，若 $y \geqslant x$且 $T$ 独立于 $X^{\boldsymbol{k}}$ 且服从速率为 $\lambda > 0$的指数分布，则有

$$\mathbb{P}_x(M_T \geqslant y) = \mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda h_y}\right] = \frac{f_\lambda^+(x)}{f_\lambda^+(y)}.$$

在 $X^{\boldsymbol{k}}$ 的运行最小值以及 $f_\lambda^-$ 的情形 $y \leqslant x$下，也有类似公式。参见 §II.10 和 §II.19，见 [7]。接下来，定理 5 和标准格林函数公式（参见 [7, 第 19] 页）给出，对于$\lambda > 0$ 和 $x$， $y \in \mathbb{R}$,

$$G_\lambda^{\boldsymbol{k}}(x,y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t^{\boldsymbol{k}}(x,y)\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\lambda)\nu_{\boldsymbol{k}}(y)}{\sqrt{\pi}\, 2^\ell \prod_{j=1}^{\ell}(\lambda + k_j)} f_\lambda^+(x \wedge y) f_\lambda^-(x \vee y),$$

其中 $x \wedge y =$最小值$\{x, y\}$ 且 $x \vee y =$最大值$\{x, y\}$。

接下来，我们给出定理 1 中分类的可解有理扩张的一种概率构造。自然的出发点是以速率 $x^2/2$ 杀死的布朗运动：其生成元为 $-\mathcal{H}/2$，而其 Doob $h$-变换（其中 $h(x) = e^{-x^2/2}$ ）就是 OU 过程。在 [24], 中，我们引入了扩散过程的 Darboux 变换。在适当条件下，这种构造以一个以~速率 $c(x)$ 杀死的布朗运动 $Z$ 和一个正的 $\lambda$-不变函数 $h$为输入，生成一个以新的~速率 $\tilde{c}(x)$ 杀死的布朗运动 $Z$ 。 $Z$ 的转移密度可以用 $Z$ [24, 的转移密度显式表示，见定理 4.8]。以下结果表明，对这一构造进行迭代，然后再施以 Doob $h$-变换，即可得到 OU 过程的所有非平凡可解有理扩张。

**定理 6.** 设$\boldsymbol{k}$ 是一个 *Krein–Adler* 序列。过程 $X^{\boldsymbol{k}}$ 可由以速率 $x^2/2$ 杀死的布朗运动，通过按*[24]*,所述连续施行 $k_\ell + 1 - \ell$ 次扩散过程的 *Darboux* 变换，再施以 *Doob* $h$-变换得到。

现在，我们来介绍本文结果的一些概率应用。

**命题 1**。 令 $\boldsymbol{k}$ 为 *Krein–Adler* 序列。对于 $t > 0$ 和 $x$、 $y \in \mathbb{R}$，令 $\mathbb{E}^{\mathrm{OU}}{}_{,x\to y}^{\,t}$ 表示从 $x$ 到 $y$ 、历经 $[0,t]$ 的 *OU* 桥下的期望。则

$$\mathbb{E}_{x\to y}^{\mathrm{OU},t}\left[\exp\left(\int_0^t (\log H_{\boldsymbol{k}})''(Y_s)\,\mathrm{d}s\right)\right] = \frac{1}{H_{\boldsymbol{k}}(x)H_{\boldsymbol{k}}(y)} \sum_{n=0}^{k_\ell+1} e^{(\ell-n)t} Q_n^{\boldsymbol{k}}(x,y). \tag{14}$$

对于 $\boldsymbol{k} = (1,2)$，该恒等式变为

$$\mathbb{E}^{\mathrm{OU},t}_{x\to y}\left[\exp\left(\int_0^t \frac{4(1-2Y_s^2)}{(1+2Y_s^2)^2}\,\mathrm{d}s\right)\right] = 1 + \frac{2(e^{2t}-1) - 8xy\sinh t}{(1+2x^2)(1+2y^2)}.$$

利用布朗运动与 OU 过程之间标准的时空变换，我们可以得到布朗桥的相应恒等式（参见 [3, 4] 关于 OU 桥的表示）。更确切地说，固定 $t > 0$ 并令 $T := \frac{1}{2}\log(1+2t)$。设 $\{B_s\}_{0\leqslant s\leqslant t}$ 为一条从 $x$ 到 $y$、历时 $[0,t]$ 的布朗桥，并令 $\mathbb{E}^{\mathrm{BB}^-_{,x\to y}\,t}$ 表示在此桥测度下的期望。于是

$$Y_u := e^{-u}B_{(e^{2u}-1)/2}, \qquad 0 \leqslant u \leqslant T,$$

是从 $x$ 到 $y/\sqrt{1+2t}$、历时 $[0,T]$ 的 OU 桥。应用前面的恒等式并作变量替换，我们得到

$$\mathbb{E}^{\mathrm{BB},t}_{x\to y}\left[\exp\left(\int_0^t \frac{4(1+2s-2B_s^2)}{(1+2s+2B_s^2)^2}\,\mathrm{d}s\right)\right] = 1 + \frac{4t(1+2t-2xy)}{(1+2x^2)(1+2t+2y^2)}.$$

为介绍　我们接下来的应用，给定严格递增序列 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^\ell$，定义

$$\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda) := \frac{\Gamma((\lambda+1)/2)}{\Gamma(\lambda/2)}\frac{\prod_{j:\,k_j\ \mathrm{odd}}(\lambda+k_j)}{\prod_{j:\,k_j\ \mathrm{even}}(\lambda+k_j)}.$$

函数 $\Phi_{\boldsymbol{k}}$ 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，并满足以下魏尔斯特拉斯乘积:

$$\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda\frac{\prod_{j:\,k_j\ \mathrm{odd}}k_j}{\prod_{j:\,k_j\ \mathrm{even}}k_j}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{\lambda}{2n}\mathbf{1}_{\{2n\notin\boldsymbol{k}\}})}{(1+\frac{\lambda}{2n-1}\mathbf{1}_{\{2n-1\notin\boldsymbol{k}\}})}.$$

此公式由无穷乘积恒等式 [10, 式（5.8.5）]得出。我们将此留作练习：验证 $\Phi_{\boldsymbol{k}}$ 的零点与极点交错，当且仅当 $\boldsymbol{k}$ 是 Krein–Adler 序列。零点与极点交错的实亚纯函数与 Pick 函数密切相关（参见 [8, 27] 或 [23, 定理2]）。

**命题 2。** 设$\boldsymbol{k}$ 是一个 *Krein–Adler* 序列。那么对于 $\lambda > 0$,

$$\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda) = \frac{1}{2}\frac{(f_\lambda^+)'(0)}{f_\lambda^+(0)},$$

其中 $f_\lambda^+$ 定义于 (12)。

基本解的对数导数在研究一维扩散的局部时、占据时间和游程时起着重要作用。下面给出几个例子。对于接下来的三个应用，假设 $X_0^{\boldsymbol{k}} = 0$，并将 $X^{\boldsymbol{k}}$ 在零点处的局部时定义为

$$L_t^0 := \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t \mathbf{1}_{\{|X_s^{\boldsymbol{k}}|<\epsilon\}}\,\mathrm{d}s.$$

令 $\tau_a := \inf\{t \geqslant 0\colon\ L_t^0 > a\}$ 为局部时间逆过程。由 [31, 定理 1，式 (14)–(17)]，$\{\tau_a\}_{a\geqslant 0}$ 是一个子 ordinator，其拉普拉斯指数为 $2\Phi_{\boldsymbol{k}}$:

$$\mathbb{E}_0[e^{-\lambda\tau_a}] = e^{-2a\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda)}, \qquad a, \lambda \geqslant 0.$$

接下来，将正半轴上的占用时间定义为 $A_t := \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^k>0\}}\,\mathrm{d}s$。根据 [31, 推论 8，式 (68)] 可得联合拉普拉斯变换

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{E}_0\left[e^{-\alpha L_t^0 - qA_t}\right]\,\mathrm{d}t = \frac{\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda)/\lambda + \Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda+q)/(\lambda+q)}{\alpha + \Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda) + \Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda+q)},$$

其中 $\lambda>0$ 和 $\alpha,\ q\geqslant 0$。

关于独立指数时间之前的最后一次零点，也有一些简单的表达式。令$T$与 $X^k$ 独立，且服从速率为 $\lambda>0$的指数分布。定义 $T$之前的最后一次零点为$g_T := \sup\{s<T:\ X_s^k=0\}$。根据 [31, 推论 8，式（66）–（67）], 随机变量 $g_T$ 和 $T-g_T$相互独立，且它们的拉普拉斯变换为

$$\mathbb{E}_0[e^{-qg_T}] = \frac{\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda)}{\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda+q)},\qquad \mathbb{E}_0[e^{-q(T-g_T)}] = \frac{\lambda\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda+q)}{(\lambda+q)\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda)},\qquad q\geqslant 0.$$

最后，考虑首次到达零点时间，$h_0 := \inf\{t\geqslant 0:\ X_t^k=0\}$。假设 $X^k$ 的初始分布为其平稳分布 $\pi_k$，见（9）。将一般恒等式[31, 式（33）] 应用于平稳扩散过程 $X^{\mathbf{k}}$，并利用零点处局部时间逆过程的拉普拉斯指数为 $2\Phi_{\mathbf{k}}$这一事实，可得

$$\mathbb{E}_{\pi_k}[e^{-\lambda h_0}] = \frac{\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda)}{\lambda\Phi_{\boldsymbol{k}}'(0)},\qquad \lambda>0.$$

特别地，如果 Krein–Adler 序列$\boldsymbol{k}$由连续整数$\boldsymbol{k}$ = （1，2，……，$\ell$）组成，那么

$$\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda) = \frac{\lambda}{2}\frac{\Gamma((\lambda+\ell+1)/2)}{\Gamma((\lambda+\ell+2)/2)}.$$

因此，在平稳初始分布 $X_0^k\sim\pi_k$ 下，随机变量 $\exp(-2h_0)$ 服从 Beta $((\ell+1)/2,\ 1/2)$ 分布。

本文组织如下。在第 2 节中，我们研究连接多项式 $Q_n^k(x,\ y)$，并证明定理 3。我们针对任意严格递增序列 $\boldsymbol{k}$ 建立这些结果，因为它们在厄米朗斯基行列式理论中具有独立的研究价值。第 3 节包含其余所有结果的证明。

## 2 多项式 $Q_n^k(x,\ y)$

我们首先证明厄米多项式的朗斯基行列式的一个恒等式。

**引理 1**。 设 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^\ell$ 为严格递增的，并且满足 $\ell\geqslant 1$。对于所有 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\setminus\boldsymbol{k}$ 和 $x$、$y\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\frac{H_{\boldsymbol{k},n}(x)H_{\boldsymbol{k},n}(y)}{\prod_{j=1}^\ell(n-k_j)} &= \mathbf{1}_{\{\ell\text{ even}\}}2^\ell H_{\boldsymbol{k}}(x)H_{\boldsymbol{k}}(y)H_n(x)H_n(y)\\ &\quad + 2^{2\ell-2}\sum_{i=1}^{\ell}\frac{\prod_{j\neq i}(k_i-k_j)}{n-k_i}H_{\boldsymbol{k}\setminus k_i}(x)H_{\boldsymbol{k}\setminus k_i}(y)H_{k_i,n}(x)H_{k_i,n}(y).\end{aligned}\tag{15}$$

此外，对每个 $a=1$、……、$\ell$，式 (15) 的右端在 $n=k_a$处为零，前提是有限和中省略项$i=a$ 。

证明。 固定 $n \geqslant 0$。我们首先利用 Hermite微分算子 $\mathcal{D} := 2\mathcal{L}^{\mathrm{OU}} = \partial_x^2 - 2x\partial_x$ 重写 $H_{\boldsymbol{k},\,n}(x)$ 的各行。由于 $\mathcal{D}H_m = -2mH_m$，我们有

$$\mathcal{D}^r H_m = (-2m)^r H_m, \qquad \partial_x \mathcal{D}^r H_m = (-2m)^r H'_m, \qquad r \geqslant 0.$$

算子 $\mathcal{D}^r$ 和 $\partial_x \mathcal{D}^r$ 的首项分别为 $\partial_x^{2r}$和 $\partial_x^{2r+1}$。其余所有导数的阶数都较低。因此，将第 $2r$ 行中的算子 $\partial_x^{2r}$替换为 $\mathcal{D}^r$ （并将第$2r+1$ 行中的算子 $\partial_x^{2r+1}$替换为 $\partial_x \mathcal{D}^r$）相当于进行初等行变换，因而行列式保持不变。将行从 0 编号至 $\ell$，得到以下行模式:

$$\begin{array}{r|cccc} \text{row } 2r & (-2k_1)^r H_{k_1} & \cdots & (-2k_\ell)^r H_{k_\ell} & (-2n)^r H_n \\ \text{row } 2r+1 & (-2k_1)^r H'_{k_1} & \cdots & (-2k_\ell)^r H'_{k_\ell} & (-2n)^r H'_n \end{array} \tag{16}$$

其中仅包括指标不大于 $\ell$ 的行。此处及下文中，行列式里的自变量 $x$ 均省略。

引入参数 $s$ ： 将最后一列中的 $(-2n)^r$ 替换为 $(-2s)^r$，并将所得行列式记为 $P_{\boldsymbol{k},\,s}(x)$。在整个构造过程中， $n$ 保持固定：函数 $H_n(x)$ 和 $H'_n(x)$保持不变。特别地， $P_{\boldsymbol{k},\,n}(x) = H_{\boldsymbol{k},\,n}(x)$。只有最后一列依赖于 $s$，且其元素的次数至多为 $\lfloor \ell/2 \rfloor$。因此，沿该列展开可知，$\deg_s P_{\boldsymbol{k},\,s}(x) \leqslant \lfloor \ell/2 \rfloor$。若 $\ell$ 为偶数，则只有最后一个元素会对 $s^{\ell/2}$的系数作出贡献。其余子式为 $H_{\boldsymbol{k}}(x)$，因此该系数为 $(-2)^{\ell/2} H_{\boldsymbol{k}}(x) H_n(x)$。

接下来计算 $P_{\boldsymbol{k},k_i}(x)$。执行以下行变换

$$\text{row } r \longleftarrow (\text{row } r) + 2k_i \times (\text{row } r-2), \qquad r = \ell, \ell-1, \ldots, 2. \tag{17}$$

按降序进行可确保每次操作都使用原始行 $r-2$。对于偶数行 $r = 2q$，第 $j$ 列中的元素变为

$$(-2k_j)^q H_{k_j} + 2k_i (-2k_j)^{q-1} H_{k_j} = 2(k_i - k_j)(-2k_j)^{q-1} H_{k_j}.$$

奇数行的计算方法相同，只需用 $H'_{k_j}$ 替换 $H_{k_j}$。由于 $s = k_i$，第 $i$ 列和最后一列在前两个元素以下均为零。

沿这两列展开，得到因子 $H_{k_i,n}(x)$ 以及符号 $(-1)^{\ell+i}$。在余子式行列式中，我们从每一列 $k_i - k_j$中提取 2( $j \neq i$。剩下的行列式具有行模式 (16)，其值为 $H_{\boldsymbol{k}\setminus k_i}(x)$。因此

$$P_{\boldsymbol{k},k_i}(x) = (-1)^{\ell+i} 2^{\ell-1} \Big[ \prod_{j \neq i} (k_i - k_j) \Big] H_{\boldsymbol{k}\setminus k_i}(x) H_{k_i,n}(x). \tag{18}$$

我们用 $\ell = 4$ 和 $i = 2$来演示这一计算。经过行变换（17）后，行列式变为

$$P_{\boldsymbol{k},k_2}(x) = \begin{vmatrix} H_{k_1} & H_{k_2} & H_{k_3} & H_{k_4} & H_n \\ H'_{k_1} & H'_{k_2} & H'_{k_3} & H'_{k_4} & H'_n \\ 2(k_2-k_1)H_{k_1} & 0 & 2(k_2-k_3)H_{k_3} & 2(k_2-k_4)H_{k_4} & 0 \\ 2(k_2-k_1)H'_{k_1} & 0 & 2(k_2-k_3)H'_{k_3} & 2(k_2-k_4)H'_{k_4} & 0 \\ -4k_1(k_2-k_1)H_{k_1} & 0 & -4k_3(k_2-k_3)H_{k_3} & -4k_4(k_2-k_4)H_{k_4} & 0 \end{vmatrix}.$$

我们沿第 2 列和第 5 列展开。它们的前两个元素为

$$\begin{vmatrix} H_{k_2} & H_n \\ H'_{k_2} & H'_n \end{vmatrix} = H_{k_2,n}(x).$$

余因子符号为 $(-1)^{4+2}=1$，因此

$$P_{\boldsymbol{k},k_2}(x) = H_{k_2,n}(x) \begin{vmatrix} 2(k_2-k_1)H_{k_1} & 2(k_2-k_3)H_{k_3} & 2(k_2-k_4)H_{k_4} \\ 2(k_2-k_1)H'_{k_1} & 2(k_2-k_3)H'_{k_3} & 2(k_2-k_4)H'_{k_4} \\ -4k_1(k_2-k_1)H_{k_1} & -4k_3(k_2-k_3)H_{k_3} & -4k_4(k_2-k_4)H_{k_4} \end{vmatrix}.$$

Ext从三列中分别减去 $2(k_2-k_1)$、$2(k_2-k_3)$ 和 $2(k_2-k_4)$，得到 s

$$P_{\boldsymbol{k},k_2}(x) = 8(k_2-k_1)(k_2-k_3)(k_2-k_4)H_{k_2,n}(x) \begin{vmatrix} H_{k_1} & H_{k_3} & H_{k_4} \\ H'_{k_1} & H'_{k_3} & H'_{k_4} \\ -2k_1H_{k_1} & -2k_3H_{k_3} & -2k_4H_{k_4} \end{vmatrix}.$$

将 $2x$ 倍的第二行加到第三行上，可将每个元素 $-2k_jH_{k_j}$ 替换为 $H''_{k_j}$。因此，最后一个行列式为 $H_{(k_1,k_3,k_4)}(x)=H_{\boldsymbol{k}\setminus k_2}(x)$，于是得到

$$P_{\boldsymbol{k},k_2}(x) = 8(k_2-k_1)(k_2-k_3)(k_2-k_4)H_{\boldsymbol{k}\setminus k_2}(x)H_{k_2,n}(x),$$

与（18）一致。

现在，我们利用次数界和数值（18）得到一个部分分式恒等式，由此可推出（15）。设 $\pi(s):=\prod_{j=1}^{\ell}(s-k_j)$，且 $R(s):=P_{\boldsymbol{k},\,s}(x)P_{\boldsymbol{k},\,s}(y)/\pi(s)$。$R$ 的分子次数至多为 $\ell$，分母的互异零点为 $k_1,\ldots,k_\ell$。因此，$R$ 的部分分式分解形式为

$$R(s) = A + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{P_{\boldsymbol{k},k_i}(x)P_{\boldsymbol{k},k_i}(y)}{(s-k_i)\pi'(k_i)}. \tag{19}$$

这里 $A$ 是 $s^\ell$ 在 $P_{\boldsymbol{k},s}(x)P_{\boldsymbol{k},s}(y)$中的系数。当 $\ell$ 为奇数时，多项式 $s\mapsto P_{\boldsymbol{k},s}(x)P_{\boldsymbol{k},s}(y)$的次数至多为 $2\lfloor \ell/2\rfloor = \ell-1$，因此在此情况下有 $A=0$。当 $\ell$ 为偶数时，我们发现$A=2^\ell H_{\boldsymbol{k}}(x)H_{\boldsymbol{k}}(y)H_n(x)H_n(y)$，因为我们在上面已经证明，多项式$s\mapsto P_{\boldsymbol{k},s}(x)$中 $s^{\ell/2}$ 的系数为 $(-2)^{\ell/2}H_{\boldsymbol{k}}(x)H_n(x)$。代入（18），利用 $\pi'(k_i)=\prod_{j\neq i}(k_i-k_j)$，并令 $s=n$，即可证明对于 $n\notin\mathbf{k}$，(15)成立。

最后，假设 $n=k_a$。在 $s=k_a$处，第 $a$ 列与最后一列重合。因此，$P_{\boldsymbol{k},\,s}(x)$和$P_{\boldsymbol{k},\,s}(y)$都能被 $s-k_a$整除。它们的乘积具有至少为二的零点重数，而 $\pi(s)$具有一个单零点。因此，当 $R(s)\to 0$ 时，$s\to k_a$。此外，项 $i=a$ 在（19）中的系数为零。在其余各项中取 $s\to k_a$，即可证明最后一个断言。 □

如同 [25], 对于 $|z|<1$ 和 $x,\ y\in\mathbb{C}$ 我们记

$$E(z,x,y) := \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{2^n n!}H_n(x)H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\exp\left(\frac{2xzy-z^2(x^2+y^2)}{(1-z^2)}\right), \tag{20}$$

$$E_{\boldsymbol{k}}(z,x,y) := \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\setminus\boldsymbol{k}} \frac{z^n H_{\boldsymbol{k},n}(x)H_{\boldsymbol{k},n}(y)}{2^{n+\ell}n!\prod_{j=1}^{\ell}(n-k_j)}. \tag{21}$$

显式表达式　　对于 $E(z,\ x,\ y)$ 是经典的迈勒公式（参见 [10, 公式（18.18.28）] ）.

**定理 3的证明：** 由引理 1，恒等式 (15) 可推广到所有 $n \geqslant 0$，若将其左端在 $n \in \boldsymbol{k}$ 时设为零，并在 $n = k_a$时省略项 $i = a$。将该恒等式乘以 $z^n/(2^{n+\ell}n!)$，并对 $n \geqslant 0$求和。级数在 $|z| < 1$ 和 $x$时绝对收敛，$y \in \mathbb{C}$ [25, 引理 2.1(ii)], 给出

$$E_{\boldsymbol{k}}(z,x,y) = \mathbf{1}_{\{\ell \text{ even}\}} H_{\boldsymbol{k}}(x)H_{\boldsymbol{k}}(y)E(z,x,y) + 2^{\ell-1}\sum_{i=1}^{\ell}\Big[\prod_{j\neq i}(k_i-k_j)\Big]H_{\boldsymbol{k}\setminus k_i}(x)H_{\boldsymbol{k}\setminus k_i}(y)E_{(k_i)}(z,x,y). \tag{22}$$

单指标情形的　　广义迈勒公式 [25,定理 1.1 和命题 1.5] 给出

$$E_{(k_i)}(z,x,y) = E(z,x,y)\sum_{n=0}^{k_i+1} z^n Q_n^{(k_i)}(x,y),$$

其中，对于 $n \geqslant 1$,

$$Q_n^{(k_i)}(x,y) = 2^{k_i}k_i!\big[T_{k_i+1-n}(x,y) - T_{k_i-1-n}(x,y)\big].$$

我们令 $Q^{(k_i)}{}_n = 0$ 对于 $n > k_i + 1$，与该公式保持一致。

将这些恒等式代入（22）可知，$E_{\boldsymbol{k}}$ 等于 $E$ 乘以关于 $z$ 的一个次数至多为 $k_\ell + 1$的多项式。对于 $n \geqslant 1$，该多项式中 $z^n$ 的系数为

$$2^{\ell-1}\sum_{i=1}^{\ell}\Big[\prod_{j\neq i}(k_i-k_j)\Big]H_{\boldsymbol{k}\setminus k_i}(x)H_{\boldsymbol{k}\setminus k_i}(y)Q_n^{(k_i)}(x,y).$$

将系数与（5）进行比较，并代入前面得到的 $Q_n^{(k_i)}$ 的表达式，可得（7）。 □

公式（7）简短地证明了猜想 1.7 和 1.8，以及猜想 1.9 在[25]中的第一项断言。

令 $n = k_\ell + 1$，注意到在（7）中所有含有 $i < \ell$ 的项都消失了。由于 $T_0(x,\ y) = 1$ 以及$T_{-2}(x,\ y) = 0$，我们得到

$$Q^{\boldsymbol{k}}_{k_\ell+1}(x,y) = 2^{k_\ell+\ell-1}k_\ell!\Big[\prod_{j=1}^{\ell-1}(k_\ell-k_j)\Big]H_{\boldsymbol{k}\setminus k_\ell}(x)H_{\boldsymbol{k}\setminus k_\ell}(y),$$

这就证明了猜想 1.7。

接下来，取$\boldsymbol{k} = (k,\ k+1)$，其中 $k \geqslant 1$，并令 $n = k + 1$。利用 $T_0(x,\ y) = 1$，$T_1(x,\ y) = 2xy$，以及$T_m(x,\ y) = 0$ 对于 $m < 0$，公式（7）给出

$$Q^{\boldsymbol{k}}_{k+1}(x,y) = 2^{k+1}k!\big[4(k+1)xyH_k(x)H_k(y) - H_{k+1}(x)H_{k+1}(y)\big].$$

在两个变量中应用递推关系 $2xH_k(x) = H_{k+1}(x) + 2kH_{k-1}(x)$，即可得到猜想 1.8 中所述的表达式。

为解决猜想 1.9，令 $h_m(x) := H_m(x/2)$。递推关系 $h_{m+1} = xh_m - 2mh_{m-1}$，结合 $h_0 = 1$ 和 $h_1 = x$，通过归纳法可得，对所有 $m \geqslant 0$，$h_m \in \mathbb{Z}[x]$。对于序列 $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_r)$，链式法则给出

$$H_{\boldsymbol{j}}(x/2) = 2^{r(r-1)/2}\operatorname{Wr}[h_{j_1}, \ldots, h_{j_r}](x) \in \mathbb{Z}[x].$$

此外，当 $n \geqslant 1$ 时， 第 $T_m$ 项中的每个非零 $i$个加数（7）都有 $0 \leqslant m \leqslant k_i$。因此 e

$$2^{k_i} k_i! T_m(x/2, y/2) = 2^{k_i - m} \frac{k_i!}{m!} h_m(x) h_m(y) \in \mathbb{Z}[x, y].$$

公式（7）因此给出 $Q_n^k(x/2,\ y/2) \in \mathbb{Z}[x, y]$ 对于 $1 \leqslant n \leqslant k_\ell + 1$。情形 $n = 0$ 可直接由（6）得出。记

$$\Delta(\boldsymbol{k}) := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \ell} (k_j - k_i),$$

猜想 1.9 中更强的断言 $\Delta(\boldsymbol{k})^{-2} Q_n^k(x/2, y/2) \in \mathbb{Z}[x, y]$ 无法通过这一论证得到。

# 3 证明

在本节中，$\boldsymbol{k}$ 表示一个 Krein–Adler 序列。记

$$|\boldsymbol{k}| := \sum_{i=1}^{\ell} k_i, \quad h_{\boldsymbol{k}}(x) := e^{-x^2/2} \frac{H_{\boldsymbol{k}-1}(x)}{H_{\boldsymbol{k}}(x)}, \tag{23}$$

并定义

$$\mathcal{H}^k := -\partial_x^2 + x^2 - 2(\log H_{\boldsymbol{k}})''.$$

**引理 2。** 设$\boldsymbol{k}$ 为一个 *Krein–Adler* 序列。多项式 $H_{\boldsymbol{k}}$ 和 $H_{\boldsymbol{k}-1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上均为偶函数且严格为正。此外， $H_{\boldsymbol{k}}$ 的次数为 $|\boldsymbol{k}| - \ell(\ell-1)/2$，首项系数为 $2^{|\boldsymbol{k}|}\Delta(\boldsymbol{k})$。

证明。 设$\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_\ell)$ 为一个严格递增的非负整数序列。朗斯基行列式的标准次数公式 [6, 引理 2。1] 表明， $H_{\boldsymbol{j}}$的次数为 $|\boldsymbol{j}| - \ell(\ell-1)/2$，首项系数为$2^{|\boldsymbol{j}|} \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant \ell} (j_b - j_a) > 0$。这证明了 $H_{\boldsymbol{k}}$ 的次数和首项系数断言，并且还表明 $H_{\boldsymbol{k}-1}$ 具有正的首项系数。

回顾一下，厄米函数定义为 $\psi_n(x) := \exp(-x^2/2) H_n(x)$。根据 Krein–Adler 定理（[1] 或 [17, 定理 4。2]），由 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k} - 1$ 所标记的厄米函数的朗斯基行列式没有实零点。该定理允许存在一个从 0 开始的初始块，这可能发生在$\boldsymbol{k} - 1$中。由于 $\operatorname{Wr}[\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_\ell}](x) = e^{-\ell x^2/2} H_{\boldsymbol{j}}(x)$，因此 $H_{\boldsymbol{k}}$ 和 $H_{\boldsymbol{k}-1}$ 也具有相同性质。所以，它们的正首项系数意味着两个多项式在 $\mathbb{R}$ 上都严格为正。

最后， [6,引理 3.6] 给出

$$H_{\boldsymbol{j}}(-x) = (-1)^{|\boldsymbol{j}| - \ell(\ell-1)/2} H_{\boldsymbol{j}}(x).$$

因此，每个多项式都是偶多项式或奇多项式。由于 $H_{\boldsymbol{k}}$ 和 $H_{\boldsymbol{k}-1}$ 在 0 处均不为零，它们都是偶多项式。 □

**定理 2的证明。** 乘以 $H_{\boldsymbol{k}-1}$ 是从 $L_2(\mathbb{R}, \nu_{\boldsymbol{k}}(x)\, \mathrm{d}x)$ 到$L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2} H_{\boldsymbol{k}}(x)^{-2}\, \mathrm{d}x)$的酉映射，将 $\varphi_{\boldsymbol{k},n}$ 映射为 $H_{\boldsymbol{k},n}$。因此，正交性和范数公式由 [11,推论 6.3 和定理 6.4], 得出，而完备性则由 [19, 定理 2.1]的修正证明得出。

为得到特征函数方程，首先应用 [17, 命题 5。2]，取 $n = 0$，利用恒等式

$$H_{\boldsymbol{k},0} = 2^\ell \Big[ \prod_{j=1}^{\ell} k_j \Big] H_{\boldsymbol{k}-1}, \tag{24}$$

该式由下式推出 [18, 引理 3。1], 因为 $\ell$ 是偶函数。将由此得到的关于$H_{k-1}$ 的微分方程与直接计算相结合，可得

$$H_{k-1}\mathcal{L}^{k}\frac{1}{H_{k-1}}=\frac{1}{2}\partial_x^2-\Big(x+\frac{H_k'}{H_k}\Big)\partial_x+\frac{1}{2}\frac{H_k''}{H_k}+x\frac{H_k'}{H_k}-\ell.$$

将同一命题应用于 $H_{k,\,n}$ 现在得到 $\mathcal{L}^{k}\varphi_{k,\,n}=-n\varphi_{k,\,n}$，如所需。 □

**定理 1 的证明**。对于 $R\equiv 0$，可解性由经典厄米多项式得出；对于 $R$ 具有形式 (3) 的情形，可由定理 2得出。因此我们证明其逆命题。

假设 $\mathcal{L}_R$ （定义见 (2)）可由多项式求解，并令 $h:=\sqrt{\mu_R}$。由于 $h'/h=-(x+R)$，直接计算可得

$$\mathcal{H}_R:=-2h\mathcal{L}_Rh^{-1}=-\partial_x^2+(x+R)^2-1-R'=-\partial_x^2+\frac{h''}{h}.$$

令 $C:=\lim_{x\to\infty}(2xR(x)-1)$。该极限存在，因为 $R$ 是有理函数，且 $R(x)=O(|x|^{-1})$。算子 $\widetilde{\mathcal{H}}:=\mathcal{H}_R-C$ 的势函数为 $x^2+R(x)$，其中 $R=2xR+R^2-R'-1-C$ 是有理函数，没有实极点，并且当 $|x|\to\infty$时趋于零。因此，根据 [17,定义 1.2]的意义， $\mathcal{H}$ 是谐振子的正则有理扩张。

乘以 $h$ 是从 $L_2(\mathbb{R},\mu_R(x)\mathrm{d}x)$ 到 $L_2(\mathbb{R},\mathrm{d}x)$ 的酉映射，并将每个特征函数 $w$ 映射为 $(hw)$。因此， $\mathcal{H}$ 可由多项式求解。根据 [17, 定理 1.1]，要么 $\mathcal{H}=\mathcal{H}$，要么 $\widetilde{\mathcal{H}}=\mathcal{H}^{k}$，其中某个 Krein–Adler 序列为 $k$。

由于 $h$ 无零点，特征值为 $n$ 的特征函数 $p_n$ 映射为 $(hw)$。因此，$

其中，范数取于 $L_2(\mathbb{R},\nu_{\boldsymbol{k}}(x)\mathrm{d}x)$ 中。根据 [25, 引理 2.1(ii)]，该级数在 $(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ 的紧子集上一致绝对收敛。

代入$\varphi_{k,\,n}=H_{k,\,n}/H_{k-1}$ 以及范数公式（4），并使用定义（21），得到

$$p_t^{\boldsymbol{k}}(x,y)=\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}}\frac{H_{\boldsymbol{k}-1}(y)}{H_{\boldsymbol{k}}(y)^2H_{\boldsymbol{k}-1}(x)}E_{\boldsymbol{k}}(e^{-t},x,y).$$

另一方面，由（1）和（20）可得 $p_t^{\mathrm{OU}}(x,\ y)=e^{-y^2}E(e^{-t},\ x,\ y)/\sqrt{\pi}$。现在将（5）用于 $z=e^{-t}$，便得到（8）。 □

**定理5的证明**。取 $\lambda>0$，并记 $f:=F_{k,\,\lambda}/H_{k-1}$。令 $u_\lambda:=e^{-x^2/2}F_\lambda$。回忆一下，$\mathcal{H}=-\partial_x^2+x^2$ 且 $\psi_n=e^{-x^2/2}H_n$。我们有

$$\mathcal{H}u_\lambda=(1-2\lambda)u_\lambda,\qquad \mathcal{H}\psi_n=(2n+1)\psi_n. \tag{27}$$

由于 $\mathrm{Wr}[\psi_{k_1},\dots,\psi_{k_\ell}]=e^{-\ell x^2/2}H_{\boldsymbol{k}}$，Darboux–Crum 变换 [9] 将 $\mathcal{H}$ 映射为 $\mathcal{H}^k+2\ell$。因此，该函数

$$U_{\boldsymbol{k},\lambda}:=\frac{\mathrm{Wr}[\psi_{k_1},\dots,\psi_{k_\ell},u_\lambda]}{\mathrm{Wr}[\psi_{k_1},\dots,\psi_{k_\ell}]}=e^{-x^2/2}\frac{F_{\boldsymbol{k},\lambda}}{H_{\boldsymbol{k}}} \tag{28}$$

满足$\mathcal{H}^kU_{k,\,\lambda}=(1-2\ell-2\lambda)U_{k,\,\lambda}$。Crum 恒等式最初在中间朗斯基行列式的零点之外成立，并由连续性延拓至所有实数 $x$，因为最终的分母 $H_{\boldsymbol{k}}$ 没有实零点。由于$f=U_{k,\,\lambda}/h_{\boldsymbol{k}}$，（26）给出 $\mathcal{L}^kf=\lambda f$。

接下来，我们考察 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的行为。标准的抛物柱函数公式 [10,式 (12.2.5)、(12.8.9) 和 (12.9.1)] 对每个固定整数 $r\geqslant0$ 给出

$$F_\lambda^{(r)}(-t)=2^{-\lambda/2}(\lambda)_rt^{-\lambda-r}(1+O(t^{-2})),\qquad t\to\infty, \tag{29}$$

其中 $(\lambda)_r:=\Gamma(\lambda+r)/\Gamma(\lambda)$。我们将证明，当 $t\to\infty$ 时，

$$F_{\boldsymbol{k},\lambda}(-t)=2^{|\boldsymbol{k}|-\lambda/2}\Delta(\boldsymbol{k})\prod_{j=1}^{\ell}(\lambda+k_j)t^{|\boldsymbol{k}|-\ell(\ell+1)/2-\lambda}(1+O(t^{-2})). \tag{30}$$

考虑表示 $F_{k,\,\lambda}(-t)$ 的朗斯基行列式。$H_m$ 的首项和奇偶性给出

$$H_m^{(r)}(-t)=2^m(-1)^{m-r}t^{m-r}\big(m^{\underline{r}}+O(t^{-2})\big),$$

其中 $a^{\underline{r}}:=a(a-1)\cdots(a-r+1)$ 是下降阶乘，且 $a^{\underline{0}}:=1$。利用前面的公式和 (29)，对于 $1\leqslant j\leqslant\ell$，我们从第 $j$ 列中提出因子 $2^{k_j}(-1)^{k_j}t^{k_j}$，并从最后一列中提出因子 $2^{-\lambda/2}t^{-\lambda}$。将各行编号为 $r=0$、…、$\ell$，我们还从第 $r$ 行中提出因子 $(-1)^rt^{-r}$。由于 $(-1)^r(\lambda)_r=(-\lambda)^{\underline{r}}$，这就得到

$$F_{\boldsymbol{k},\lambda}(-t)=(-1)^{|\boldsymbol{k}|+d}2^{|\boldsymbol{k}|-\lambda/2}t^{|\boldsymbol{k}|-d-\lambda}\big(\det M+O(t^{-2})\big),$$

其中 $d:=\ell(\ell+1)/2$ 且

$$M:=\big(a_j^{\underline{r}}\big)_{0\leqslant r\leqslant\ell,\,1\leqslant j\leqslant\ell+1},\qquad (a_1,\dots,a_{\ell+1}):=(k_1,\dots,k_\ell,-\lambda).$$

由于 $a^{\underline{r}}$ 是次数为 $r$的首一多项式，通过初等行变换可将 $M$ 化为范德蒙矩阵。因此

$$\det M=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant\ell+1}(a_j-a_i)=(-1)^\ell\Delta(\boldsymbol{k})\prod_{j=1}^{\ell}(\lambda+k_j).$$

记 $\ell = 2m$，Krein–Adler 条件给出 $|\boldsymbol{k}| \equiv m$ （模 2），而 $d = m\,(2m+1) \equiv m$ （模 2）。因此 $(-1)^{|\boldsymbol{k}|+d} = (-1)^{\ell} = 1$，从而证明了（30）。

将（30）与 $H_{\boldsymbol{k}-1}$ 的次数和首项系数结合起来可得

$$f(-t) = 2^{\ell-\lambda/2} \prod_{j=1}^{\ell} (\lambda + k_j) t^{-\lambda} (1 + O(t^{-2})).$$

因此，当 $x$ 充分小时，$f$ 为正；当 $x \to -\infty$ 时，$f$ 趋于零 .

设 $x_0$ 是 $f$ 的第一个零点。那么在 $(-\infty,\ x_0)$ 上，$f > 0$，且极限值 $f\,(-\infty) = 0$ 意味着 $f$ 在某点 $a < x_0$ 处取得正最大值。在此点，$f'\,(a) = 0$，且 $f''\,(a) \leqslant 0$。然而，$\mathcal{L}^{\boldsymbol{k}} f = \lambda f$ 得出 $f''\,(a) = 2\lambda f\,(a) > 0$，这与之矛盾。因此，$f > 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上。

如果 $f'$ 在某处为负，那么极限 $f\,(-\infty) = 0$ 同样会迫使其出现正局部最大值，从而导致同样的矛盾。因此，$f' \geqslant 0$。如果 $f'\,(a) = 0$ 在某点成立，则方程 $\mathcal{L}^{\boldsymbol{k}} f = \lambda f$ 得出$f''\,(a) = 2\lambda f\,(a) > 0$，所以 $f'$ 在 $a$ 左侧紧邻处为负。因此，$f' > 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上，我们可以取 $f_\lambda^+ = f$ 作为递增基本解。

中的漂移项是 $\mathcal{L}^{\boldsymbol{k}}$ 奇函数（根据引理 2），因此 $f\,(-x)$ 也满足 $\mathcal{L}^{\boldsymbol{k}} f = \lambda f$。该函数为正且严格递减；因此我们可以取 $f_\lambda^-\,(x) = f\,(-x)$ 作为递减基本解。

接下来需要计算 $f_\lambda^{\pm}\,(x)$ 的朗斯基行列式。我们首先记录单次达布变换如何改变朗斯基行列式。假设对于某个势函数 $V$，函数 $h$、$u$ 和 $v$ 满足

$$-h'' + Vh = \alpha h, \qquad -u'' + Vu = \beta u, \qquad -v'' + Vv = \beta v.$$

对于 $\mathcal{D}^h u := u' - (h'/h)u$，直接计算可得

$$\operatorname{Wr}[\mathcal{D}^h u, \mathcal{D}^h v] = (\beta - \alpha) \operatorname{Wr}[u, v] \tag{31}$$

在 $h$ 非零的每个区间上。

现在我们规定连续进行的达布变换。令 $\Psi_0 := 1$，并且

$$\Psi_j := \operatorname{Wr}[\psi_{k_1}, \ldots, \psi_{k_j}], \qquad 1 \leqslant j \leqslant \ell.$$

首先在所有这些朗斯基行列式均非零的区间上进行处理，并定义

$$\mathcal{K}^{(j)} := -\partial_x^2 + x^2 - 2(\log|\Psi_j|)'', \qquad 0 \leqslant j \leqslant \ell.$$

因此 $\mathcal{K}^{(0)} = \mathcal{H}$。此外，$\Psi_\ell = e^{-\ell x^2/2} H_{\boldsymbol{k}}$，所以 $\mathcal{K}^{(\ell)} = \mathcal{H}^{\boldsymbol{k}} + 2\ell$。

根据 Darboux–Crum 公式 [9, 第 2–3] 节，第 $j$ 次 Darboux 变换将 $\mathcal{K}^{(j-1)}$ 映射为 $\mathcal{K}^{(j)}$。其种子函数和一阶算子为

$$\eta_j := \frac{\Psi_j}{\Psi_{j-1}}, \qquad \mathcal{D}^{(j)} := \partial_x - \frac{\eta_j'}{\eta_j}.$$

这里 $\eta_j$ 是 $\psi_{k_j}$ 的像 在此前的 $j-1$ 次变换下得到的。例如，$\eta_1 = \psi_{k_1}$，其中 as

$$\eta_2 = \mathcal{D}^{(1)} \psi_{k_2} = \frac{\operatorname{Wr}[\psi_{k_1}, \psi_{k_2}]}{\psi_{k_1}}.$$

Darboux–Crum 恒等式 [9] 给出

$$\mathcal{K}^{(j-1)} \eta_j = (2k_j + 1)\eta_j, \qquad \mathcal{K}^{(j)} \mathcal{D}^{(j)} = \mathcal{D}^{(j)} \mathcal{K}^{(j-1)}.$$

我们将这些变换应用于两个解 $u_0^+(x) := u_\lambda(x)$ 和 $u_0^-(x) := u_\lambda(-x)$。递归定义 $u_j^\pm := \mathcal{D}^{(j)} u_{j-1}^\pm$。克拉姆公式给出显式表达式

$$u_j^\pm = \frac{1}{\Psi_j} \operatorname{Wr}[\psi_{k_1}, \dots, \psi_{k_j}, u_0^\pm], \qquad 1 \leqslant j \leqslant \ell.$$

上面的交织恒等式和（27）意味着 $\mathcal{K}^{(j)} u_j^\pm = (1-2\lambda)\, u_j^\pm$。

因此，在第 $j$ 步，三个函数 $\eta_j$、$u_{j-1}^-$、$u_{j-1}^+$ 满足具有相同算子 $\mathcal{K}^{(j-1)}$ 的方程。因此，我们可以在（31）中取

$$h = \eta_j, \qquad u = u_{j-1}^-, \qquad v = u_{j-1}^+, \qquad \alpha = 2k_j + 1, \qquad \beta = 1 - 2\lambda.$$

由于 $\mathcal{D}^{(j)} u_{j-1}^\pm = u_j^\pm$，得到

$$\operatorname{Wr}[u_j^-, u_j^+] = -2(\lambda + k_j) \operatorname{Wr}[u_{j-1}^-, u_{j-1}^+].$$

在最后一步，（28）给出 $u_\ell^+ = U_{\boldsymbol{k},\,\lambda} = h_{\boldsymbol{k}} f_\lambda^+$。厄米函数的奇偶性给出 $u_j^-(x) = (-1)^j u_j^+(-x)$。由于 $\ell$ 为偶函数且 $h_{\boldsymbol{k}}$为偶函数，我们得到 $u_\ell^-(x) = u_\ell^+(-x) = h_{\boldsymbol{k}}(x) f_\lambda^-(x)$。因此，迭代前面的朗斯基恒等式可得

$$\operatorname{Wr}[h_{\boldsymbol{k}} f_\lambda^-, h_{\boldsymbol{k}} f_\lambda^+] = (-2)^\ell \Big[ \prod_{j=1}^{\ell} (\lambda + k_j) \Big] \operatorname{Wr}[u_\lambda(-\cdot), u_\lambda]. \tag{32}$$

每个中间朗斯基行列式 $\Psi_j$ 都是高斯函数与一个非零多项式的乘积，因此其所有实零点构成有限集。由于 $\Psi_\ell$ 没有实零点，最终变换后的函数在 $\mathbb{R}$ 上光滑。因此，（32）通过连续性延拓到所有实数 $x$。

最后，$u_\lambda(\pm x) = e^{-x^2/2} g_\lambda^\pm(x)$，因此（10）给出

$$\operatorname{Wr}[u_\lambda(-\cdot), u_\lambda] = e^{-x^2} \operatorname{Wr}[g_\lambda^-, g_\lambda^+] = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)}.$$

将此与（32）结合，并利用 $\ell$ 的偶性，我们得到

$$h_{\boldsymbol{k}}^2 \operatorname{Wr}[f_\lambda^-, f_\lambda^+] = \frac{2^{\ell+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda)} \prod_{j=1}^{\ell} (\lambda + k_j).$$

由于 $h_{\boldsymbol{k}}^2 = \nu_{\boldsymbol{k}}$，这就证明了（13）。 □

**定理 6 的证明：** 设 $N := k_\ell$ 并令

$$A_{\boldsymbol{k}} := \{a_1, \dots, a_p\} = \{N - r : r \in \{0, \dots, N\} \setminus \boldsymbol{k}\}, \qquad p = N + 1 - \ell,$$

其中序列 $a_j$ 递增。对于 $n \geqslant 0$，定义 $\widetilde{H}_n(x) := \mathrm{i}^{-n} H_n(\mathrm{i}x)$ 以及 $\eta_n(x) := e^{x^2/2} \widetilde{H}_n(x) = \mathrm{i}^{-n} \psi_n(\mathrm{i}x)$。由（27），这些函数满足 $\mathcal{H}\eta_n = -(2n+1)\eta_n$。

对于 $1 \leqslant j \leqslant p$，置 $W_j := \operatorname{Wr}[\eta_{a_1}, \dots, \eta_{a_j}]$ 和 $D_j := \{0, \dots, a_j\} \setminus \{a_j - a_i : 1 \leqslant i \leqslant j\}$。我们还设定$W_0 = 1$ 和 $D_0 = \varnothing$，并将所有有限指标集按递增顺序列出。由于 $\boldsymbol{k}$ 由相邻对组成，$a_1$为偶数，且对于 $2 \leqslant j \leqslant p$，每个差值 $a_j - a_{j-1}$都是奇数。因此，$D_1 = \{1, 2, \dots, a_1\}$ 是一个 Krein–Adler 序列。对于 $j \geqslant 2$，写作 $d = a_j - a_{j-1}$，我们有 $D_j = \{1, \dots, d-1\} \cup (d + D_{j-1})$。由于$d$ 为奇数，利用归纳法可知，每个 $D_j$ 都是一个 Krein–Adler 序列。此外，$a_p = N$ 和 $D_p = \boldsymbol{k}$。

The 伪朗斯基行列式恒等式 [18, 定理 3.1 和命题 3.2] 给出

$$W_j(x) = B_j e^{jx^2/2} H_{D_j}(x).$$

这里 $B_j > 0$，由于 $\mathbf{Wr}[H_{a_1}, \dots, H_{a_j}]$ 和 $H_{D_j}$ 具有正的首项系数。由此，引理 2 可推出 $W_j$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格为正。因此，

$$\rho_j(x) := \frac{W_j(x)}{W_{j-1}(x)} = C_j e^{x^2/2} \frac{H_{D_j}(x)}{H_{D_{j-1}}(x)}, \qquad C_j > 0,$$

光滑且严格为正。

定义

$$\mathcal{H}^{(j)} := \mathcal{H} - 2(\log W_j(x))'' = -\partial_x^2 + x^2 - 2j - 2(\log H_{D_j}(x))'', \qquad 0 \leqslant j \leqslant p. \tag{33}$$

设 $Y^{(0)}$ 是在 $\mathbb{R}$ 上以速率 $c_0(x) = x^2/2$ 杀死的布朗运动。从 $Y_{(0)}$ 出发，我们通过对 [24, 第 4] 节中的 $\rho_j$ 进行连续的达布变换，构造$Y_{(1)} \dots, Y_{(p)}$。我们用归纳法证明，它们的生成元具有如下形式

$$\mathcal{L}^{(j)} = \frac{1}{2}\partial_x^2 - c_j(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{H}^{(j)} - \gamma_j, \tag{34}$$

其中，对所有 $x \in \mathbb{R}$， $c_j(x) \geqslant 0$，且 $\gamma_j$ 是一个实常数（并且 $\gamma_0 = 0$）。

假设已构造出 $Y^{(j-1)}$。根据克拉姆公式 [9]， $\mathcal{H}^{(j-1)}\rho_j = -(2a_j + 1)\rho_j$，因此

$$\mathcal{L}^{(j-1)}\rho_j = \lambda_j \rho_j, \qquad \lambda_j := a_j + \frac{1}{2} - \gamma_{j-1}. \tag{35}$$

Set

$$b_j(x) := \frac{\rho_j'(x)}{\rho_j(x)} = x + \frac{H_{D_j}'(x)}{H_{D_j}(x)} - \frac{H_{D_{j-1}}'(x)}{H_{D_{j-1}}(x)}.$$

该函数在 $\mathbb{R}$ 上光滑，并满足 $b_j(x) = x + O(|x|^{-1})$ 和 $b_j'(x) = 1 + O(|x|^{-2})$，其中 $|x| \to \infty$。特别地， $b_j$ 是全局利普希茨的。

接下来我们 验证 $\rho_j$ 是 $\lambda_j$-不变的。对于从 $x$ 出发的布朗运动 $B$，定义

$$M_t^{(j)} := \frac{\rho_j(B_t)}{\rho_j(x)} \exp\left(-\lambda_j t - \int_0^t c_{j-1}(B_s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Itô 公式和 (35) 给出 $\mathrm{d}M_t^{(j)} = M_t^{(j)} b_j(B_t)\,\mathrm{d}B_t$，因此 $M_{(j)}$是 $\int_0^{\cdot} b_j(B_s)\,\mathrm{d}B_s$ 的随机指数。由于 $b_j$ 是全局利普希茨的，辅助扩散过程 $\mathrm{d}Z_t = b_j(Z_t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t$ 是非爆炸的。布朗运动也是非爆炸的，因此由 [28, 推论 2.2] 可知， $M_{(j)}$是一个鞅。因此 $\mathbb{E}_x[M_t^{(j)}] = 1$，将该恒等式改写为杀死布朗运动 $Y^{(j-1)}$ 的形式可得

$$\mathbb{E}_x[\rho_j(Y_t^{(j-1)})] = e^{\lambda_j t}\rho_j(x), \qquad t \geqslant 0,$$

其中， $\rho_j$ 在墓地状态处消失。因此，函数 $\rho_j$ 对于 $Y^{(j-1)}$ 是 $\lambda_j$-不变的。

由（33）和（34）， $c_{j-1}(x) = x^2/2 + O(1)$，当 $|x| \to \infty$时。因此 $c_{j-1}(x) - b_j(x)^2 = -x^2/2 + O(1)$，并且

$$\mathfrak{m}_j := \sup_{x \in \mathbb{R}} \{c_{j-1}(x) - b_j(x)^2\} < \infty.$$

这验证了 [24]的假设 4.1。通过鞅 $M^{(j)}$ 对 $Y^{(j-1)}$ 进行 Doob 变换后得到的过程是 $\mathbb{R}$ 上的保守扩散过程，其漂移为 $b_j(x)$，因此根据上述非爆炸论证，$\pm\infty$ 边界是不可达的。因此，[24] 的假设 4.3 也得到满足。

因此，我们可以应用第 [24, 节中的 Darboux 变换。根据该节中的方程 (4.11)，得到的过程 $Y^{(j)}$ 是以速率

$$c_j(x) = \mathfrak{m}_j + b_j(x)^2 - c_{j-1}(x) \geqslant 0. \tag{36}$$

特征函数方程给出 $b_j'(x) = 2(c_{j-1}(x)+\lambda_j)-b_j(x)^2$, 而 $\mathcal{H}^{(j)} = \mathcal{H}^{(j-1)}-2b_j'(x)$。将这些恒等式与 (36) 结合，得到

$$\mathcal{L}^{(j)} = -\frac{1}{2}\mathcal{H}^{(j)} - \gamma_j, \qquad \gamma_j := \gamma_{j-1} + \mathfrak{m}_j + 2\lambda_j.$$

归纳法至此完成。

由于 $D_p = \boldsymbol{k}$，我们有 $\mathcal{H}^{(p)} = \mathcal{H}^{\boldsymbol{k}} - 2p$，因此

$$\mathcal{L}^{(p)} = -\frac{1}{2}\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}} - C, \qquad C := \gamma_p - p.$$

根据 (25)，有界正函数 $h_{\boldsymbol{k}}$ 满足 $\mathcal{L}^{(p)}h_{\boldsymbol{k}} = \lambda_* h_{\boldsymbol{k}}$，其中 $\lambda_* := \ell - \frac{1}{2} - C$。由于 $c_p \geqslant 0$且$h_{\boldsymbol{k}}$ 有界，局部鞅

$$M_t := e^{-\lambda_* t - \int_0^t c_p(B_s)\,\mathrm{d}s} h_{\boldsymbol{k}}(B_t)$$

在每个有限时间区间上有界，因此是一个鞅。由此可得，$h_{\boldsymbol{k}}$ 对 $\lambda_*$不变，适用于 $Y^{(p)}$，并定义了一个保守的 Doob 变换。根据 (26)，该 Doob 变换的生成元为

$$h_{\boldsymbol{k}}^{-1}(\mathcal{L}^{(p)} - \lambda_*)h_{\boldsymbol{k}} = -\frac{1}{2}h_{\boldsymbol{k}}^{-1}\big(\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}} - (1-2\ell)\big)h_{\boldsymbol{k}} = \mathcal{L}^{\boldsymbol{k}}.$$

因此，所得扩散过程为 $X^{\boldsymbol{k}}$，符合要求。 □

**命题的证明1.** 设

$$\rho(x) := \frac{H_{\boldsymbol{k}-1}(x)}{H_{\boldsymbol{k}}(x)} = e^{x^2/2}h_{\boldsymbol{k}}(x), \qquad V(x) := (\log H_{\boldsymbol{k}})''(x).$$

回忆一下，$\mathcal{L}^{\mathrm{OU}} = \frac{1}{2}\partial_x^2 - x\partial_x$。将 $h_{\boldsymbol{k}} = e^{-x^2/2}\rho$ 代入（25）可得

$$(\mathcal{L}^{\mathrm{OU}} + V)\rho = \ell\rho. \tag{37}$$

设 $Y$ 为从 $x$出发的 OU 过程，并定义

$$M_t := \frac{\rho(Y_t)}{\rho(x)} \exp\left(-\ell t + \int_0^t V(Y_s)\,\mathrm{d}s\right).$$

根据伊藤公式和（37），

$$\mathrm{d}M_t = M_t\theta(Y_t)\,\mathrm{d}W_t, \qquad \theta(x) := \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = -R_{\boldsymbol{k}}(x),$$

其中 $R_{\boldsymbol{k}}$ 表示（3）的右端。由于 $M_0 = 1$，因此可得

$$M_t = \exp\left(\int_0^t \theta(Y_s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(Y_s)^2\,\mathrm{d}s\right).$$

函数 $\theta$ 有界，因为 $H_{\boldsymbol{k}}$ 和 $H_{\boldsymbol{k}-1}$ 没有实零点，且当 $|x| \to \infty$ 时，$R_{\boldsymbol{k}}(x) = O(|x|^{-1})$。因此，诺维科夫条件在每个有限时间区间上都成立，并且 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是鞅 [22, 推论 3.5.13]。

对每个固定的 $t > 0$，吉尔萨诺夫定理 [22, 定理 3.5.1] 表明，在以 $M_t$ 为密度、定义在 σ-代数 $\mathcal{F}_t$ 上的测度下，过程 $\{Y_s\}_{0\leqslant s\leqslant t}$ 的漂移为 $-x + \theta(x) = -x - R_{\boldsymbol{k}}(x)$。由分布唯一性可知，它的分布与从 $x$ 出发的 $\{X^{\boldsymbol{k}}_s\}_{0\leqslant s\leqslant t}$ 相同。因此，对每个有界可测函数 $f$，

$$\mathbb{E}_x[f(X^{\boldsymbol{k}}_t)] = \frac{e^{-\ell t}}{\rho(x)}\mathbb{E}^{\mathrm{OU}}_x\left[\exp\left(\int_0^t V(Y_s)\,\mathrm{d}s\right)\rho(Y_t)f(Y_t)\right].$$

对.....进行条件分解　关于 $Y_t$ 分解为 OU 桥测度 [13, 命题 1，式 (2.8)]，，我们得到　n

$$p^{\boldsymbol{k}}_t(x,y) = p^{\mathrm{OU}}_t(x,y)\frac{\rho(y)}{\rho(x)}e^{-\ell t}\mathbb{E}^{\mathrm{OU},t}_{x\to y}\left[\exp\left(\int_0^t V(Y_s)\,\mathrm{d}s\right)\right]$$

对几乎所有的 $y$ 都成立。等式两边关于 $y$ 连续。事实上，从 $x$ 到 $y$、历时 $[0,t]$ 的 OU 桥可表示为 $Z_s + [x\sinh(t-s) + y\sinh s]/\sinh t$，其中 $Z$ 是从 0 到 0、历时 $[0,t]$ 的中心化OU桥（见 [3]）。由于 $V$ 有界且连续，由控制收敛可知，桥的期望关于 $y$ 连续。因此，该等式对每个 $y \in \mathbb{R}$ 都成立。

解出桥的期望可得

$$\mathbb{E}^{\mathrm{OU},t}_{x\to y}\left[\exp\left(\int_0^t V(Y_s)\,\mathrm{d}s\right)\right] = e^{\ell t}\frac{\rho(x)}{\rho(y)}\frac{p^{\boldsymbol{k}}_t(x,y)}{p^{\mathrm{OU}}_t(x,y)}.$$

代入（8）和 $\rho = H_{\boldsymbol{k}-1}/H_{\boldsymbol{k}}$ 即可证明（14）。 □

**命题 2 的证明。** 记 $\ell = 2m$，并令 $e_1 < \cdots < e_m$ 和 $o_1 < \cdots < o_m$ 分别为 $\boldsymbol{k}$ 中的偶指标和奇指标。我们将直接计算 $F_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)$ 和 $F'_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)$。

设 $g$ 满足 $g'' - 2xg' = 2\alpha g$。对该等式求 $r$ 次导数并令 $x = 0$，可得 $g^{(r+2)}(0) = 2(\alpha + r)g^{(r)}(0)$。因此，

$$g^{(2r)}(0) = p_r(\alpha)g(0), \qquad g^{(2r+1)}(0) = q_r(\alpha)g'(0),$$

其中

$$p_r(z) := 2^r\prod_{s=0}^{r-1}(z+2s), \qquad q_r(z) := 2^r\prod_{s=0}^{r-1}(z+2s+1).$$

$p_r$ 和 $q_r$ 均为次数为 $r$、首项系数为 $2^r$的多项式。这些恒等式适用于 $g = F_\lambda$和 $\alpha = \lambda$，也适用于 $g = H_{k_j}$ 和 $\alpha = -k_j$。

考虑以下 $(m+1) \times (m+1)$ 矩阵：

$$M_{e,F} := \begin{pmatrix} H_{e_1}(0) & \cdots & H_{e_m}(0) & F_\lambda(0) \\ H''_{e_1}(0) & \cdots & H''_{e_m}(0) & F''_\lambda(0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ H^{(2m)}_{e_1}(0) & \cdots & H^{(2m)}_{e_m}(0) & F^{(2m)}_\lambda(0) \end{pmatrix}$$

and

$$M_{o,F} := \begin{pmatrix} H'_{o_1}(0) & \cdots & H'_{o_m}(0) & F'_\lambda(0) \\ H^{(3)}_{o_1}(0) & \cdots & H^{(3)}_{o_m}(0) & F^{(3)}_\lambda(0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ H^{(2m+1)}_{o_1}(0) & \cdots & H^{(2m+1)}_{o_m}(0) & F^{(2m+1)}_\lambda(0) \end{pmatrix}.$$

分别令 $M_e$ 和 $M_o$ 表示它们左上角的 $m \times m$ 子矩阵。

现在我们解释这些矩阵是如何产生的。首先注意到，对于奇数 $r$，$H^{(r)}_{e_j}(\mathbf{0}) = 0$；而对于偶数 $r$，$H^{(r)}_{o_j}(\mathbf{0}) = 0$。重新排列定义 $H_{\boldsymbol{k}}(\mathbf{0})$ 的朗斯基行列式的行和列，可得到如下形式的分块对角矩阵

$$H_{\boldsymbol{k}}(0) = \epsilon_1 \times \begin{vmatrix} M_e & 0 \\ 0 & M_o \end{vmatrix},$$

对于某个 $\epsilon_1 \in \{-1, 1\}$。

类似地，重新排列定义 $F_{\boldsymbol{k},\,\lambda}(\mathbf{0})$ 的朗斯基行列式的行和列，可得到如下形式的分块下三角矩阵

$$F_{\boldsymbol{k},\lambda}(0) = \epsilon_2 \times \begin{vmatrix} M_{e,F} & 0 \\ [\,0_{m\times m}\ \mathbf{v}\,] & M_o \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} F'_\lambda(0) \\ F^{(3)}_\lambda(0) \\ \vdots \\ F^{(2m-1)}_\lambda(0) \end{pmatrix},$$

对于某个 $\epsilon_2 \in \{-1, 1\}$。重要的是，我们有 $\epsilon_1 = \epsilon_2$。事实上，与第一个行列式 $H_{\boldsymbol{k}}(\mathbf{0})$ 相比，将第二个行列式 $F_{\boldsymbol{k},\,\lambda}(\mathbf{0})$ 化为所需形式，需要将额外的偶阶导数行移过 $m$ 个奇阶导数行，并将与 $F_\lambda$ 对应的列移过 $m$ 个奇阶厄米列。每次置换都会产生一个因子 $(-1)^m$，因此这两个因子相互抵消。

由上述两个公式可得

$$\frac{F_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)}{H_{\boldsymbol{k}}(0)} = \frac{\det M_{e,F}}{\det M_e}. \tag{38}$$

为计算 $F'_{\boldsymbol{k},\,\lambda}(\mathbf{0})$，我们首先注意到，式（11）中朗斯基行列式的导数只需对其最后一行求导即可。事实上，行列式的导数等于逐次对其中一行求导、其余各行保持不变所得行列式之和。对朗斯基行列式的最后一行以外的任意一行求导，都会使该行与下一行相同，因此相应的行列式为零。因此，$F'_{\boldsymbol{k},\,\lambda}(\mathbf{0})$可表示为与$F_{\boldsymbol{k},\,\lambda}(\mathbf{0})$相同的行列式，只是其最后一个导数行的阶数为 $2m+1$ 而非 $2m$。重新排列行和列后，可得到如下形式的分块上三角矩阵

$$F'_{\boldsymbol{k},\lambda}(0) = \epsilon_3 \times \begin{vmatrix} M_e & [\,0_{m\times m}\ \mathbf{u}\,] \\ 0 & M_{o,F} \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} F_\lambda(0) \\ F''_\lambda(0) \\ \vdots \\ F^{(2m-2)}_\lambda(0) \end{pmatrix},$$

对于某个 $\epsilon_3 \in \{-1, 1\}$。在这种情况下，我们也有 $\epsilon_3 = \epsilon_1$，因为额外的奇数阶导数行和对应于 $F_\lambda$ 的列，分别位于各自的奇数阶导数块和奇数阶 Hermite 块的末尾。因此，与定义 $H_k(\mathbf{0})$ 的行列式相比，无需进行额外的换位。

由此可得

$$\frac{F'_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)}{H_{\boldsymbol{k}}(0)} = \frac{\det M_{o,F}}{\det M_o}. \tag{39}$$

现在只需计算（38）和（39）中的行列式比。回忆 $p_r$ 和 $q_r$ 是次数为 $r$ 且首项系数为 $2^r$的多项式。因此，范德蒙德行列式公式表明，对于任意$z_1$，...， $z_s$，

$$\det[p_{r-1}(z_j)]_{1\leqslant r,j\leqslant s} = \det[q_{r-1}(z_j)]_{1\leqslant r,j\leqslant s} = 2^{s(s-1)/2} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant s} (z_j - z_i). \tag{40}$$

事实上，通过初等行变换，可以将任一行列式化为通常的范德蒙德行列式，其中第 $r$ 行乘以 $2^{r-1}$。

我们首先计算 $\det M_{e,\,F}/\det M_e$。利用零点处偶阶导数的恒等式，我们从$M_{e,\,F}$的第 $j$ 列中提出 $H_{e_j}(0)$，其中 $1 \leqslant j \leqslant m$，并从其最后一列中提出 $F_\lambda(0)$。余下的行列式的元素为 $p_r(z_j)$，其中

$$(z_1, \ldots, z_{m+1}) = (-e_1, \ldots, -e_m, \lambda).$$

类似地，从 $H_{e_j}$（0）中提出 $j$第列的 $M_e$，所得行列式的元素为 $p_r$（$-e_j$）。将（40）应用于这两个行列式，我们得到

$$\det M_{e,F} = 2^{m(m+1)/2} F_\lambda(0) \Big[\prod_{j=1}^m H_{e_j}(0)\Big] \Big[\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m} (e_i - e_j)\Big] \prod_{j=1}^m (\lambda + e_j)$$

and

$$\det M_e = 2^{m(m-1)/2} \Big[\prod_{j=1}^m H_{e_j}(0)\Big] \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m} (e_i - e_j).$$

由于指标 $e_j$ 各不相同，且 $H_{e_j}(0) \neq 0$，因此 $\det M_e \neq 0$。将上述恒等式相除，得到

$$\frac{\det M_{e,F}}{\det M_e} = 2^m F_\lambda(0) \prod_{j=1}^m (\lambda + e_j). \tag{41}$$

奇指标的计算类似。我们从 $M_{o,F}$ 的第 $j$ 列提出因子 $H'_{o_j}(0)$，并从其最后一列提出因子 $F'_\lambda(0)$。剩余行列式的元素为 $q_r(z_j)$，其中

$$(z_1, \ldots, z_{m+1}) = (-o_1, \ldots, -o_m, \lambda).$$

应用（40），得到

$$\det M_{o,F} = 2^{m(m+1)/2} F'_\lambda(0) \Big[\prod_{j=1}^m H'_{o_j}(0)\Big] \Big[\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m} (o_i - o_j)\Big] \prod_{j=1}^m (\lambda + o_j)$$

and

$$\det M_o = 2^{m(m-1)/2} \Big[\prod_{j=1}^m H'_{o_j}(0)\Big] \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m} (o_i - o_j).$$

由于指标 $o_j$ 互不相同，且 $H'_{o_j}(0) \neq 0$，因此 $\det M_o \neq 0$。由此，

$$\frac{\det M_{o,F}}{\det M_o} = 2^m F'_\lambda(0) \prod_{j=1}^m (\lambda + o_j). \tag{42}$$

结合（38）、（39）、（41）和（42），我们得出结论：

$$\frac{F'_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)}{F_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)} = \frac{F'_{\lambda}(0)}{F_{\lambda}(0)} \frac{\prod_{j=1}^{m}(\lambda + o_j)}{\prod_{j=1}^{m}(\lambda + e_j)}.$$

对于 $\lambda > 0$，所有分母均不为零，因为 $F_{\lambda}(0) > 0$ 且 $e_j,\ o_j > 0$。

最后，回顾一下 $f_{\lambda}^{+} = F_{\boldsymbol{k},\,\lambda}/H_{\boldsymbol{k}-1}$。由于 $H_{\boldsymbol{k}-1}$ 是偶函数且严格为正，因此有 $H'_{\boldsymbol{k}-1}(0) = 0$，于是

$$\frac{(f_{\lambda}^{+})'(0)}{f_{\lambda}^{+}(0)} = \frac{F'_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)}{F_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)}.$$

抛物柱函数的标准公式 [10, 式 (12.2.5)–(12.2.7)] 给出

$$F_{\lambda}(0) = \frac{2^{-\lambda/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma((\lambda+1)/2)}, \qquad F'_{\lambda}(0) = \frac{2^{1-\lambda/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda/2)}.$$

因此，

$$\frac{(f_{\lambda}^{+})'(0)}{f_{\lambda}^{+}(0)} = 2\frac{\Gamma((\lambda+1)/2)}{\Gamma(\lambda/2)} \frac{\prod_{j:\,k_j\ \text{odd}}(\lambda + k_j)}{\prod_{j:\,k_j\ \text{even}}(\lambda + k_j)} = 2\Phi_{\boldsymbol{k}}(\lambda),$$

这就证明了该命题。 □

# AI 使用披露

在本研究的开展过程中，我们使用 ChatGPT (OpenAI) 探索数学思想、协助推导结果，并撰写了部分证明的初步版本。最终稿中呈现的所有论证和证明均由作者随后撰写并仔细核查。我们对数学结果和论证的正确性承担全部责任。

# 参考文献


[1] V. E. Adler。《Crum方法的修改》。《理论与数学物理》，101(3):1381– 1386，1994。https://doi.org/10.1007/BF01035458.[2] I. G. Avramidi。《热核方法及其应用》。Birkh¨auser，沙姆，2015年。https://doi.org/10.1007/978-3-319-26266-6.[3] M. Barczy和P. Kern。多维线性过程桥的表示。《随机算子与随机方程》，21(2):159–189，2013年。https://doi.org/10.1515/rose-2013-0009.[4] M. Barczy和P. Kern。Wiener过程和奥恩斯坦–乌伦贝克过程相对于其桥的样本路径偏差。《巴西概率与统计杂志》，27(4):437–466，2013年。https://doi.org/10.1214/11-BJPS175.[5] V. I. Bogachev。奥恩斯坦–乌伦贝克算子与半群。《俄罗斯数学评论》，73(2):191–260，2018年。https://doi.org/10.1070/RM9812.[6] N. Bonneux和M. Stevens。朗斯基行列式厄米多项式的递推关系。*SIGMA*，14:048，2018年。https://doi.org/10.3842/SIGMA.2018.048。

[7] A. N. Borodin和P. Salminen。《布朗运动手册：事实与公式》。Birkh¨auser，巴塞尔，第二版，2002年。 https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8163-0.[8] N. G. Chebotarev和N. N. Meiman。多项式和整函数的劳斯–赫尔维茨问题。《斯捷克洛夫数学研究所学报》，26:3–331，1949年。俄文， https://www.mathnet.ru/eng/tm1039。[9] M. M. Crum。关联施图姆–刘维尔系统。《数学季刊》，6(1):121– 127，1955年1月。 https://doi.org/10.1093/qmath/6.1.121.[10] NIST数学函数数字图书馆。 https://dlmf.nist.gov/，版本1.2.8，2026年- 09-15。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl和M. A. McClain，编者。[11] A. J. Dur´an。例外夏利埃正交多项式和厄米正交多项式。《逼近论杂志》，182:29–58，2014年。 https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.03.004.[12] J. Elf和M. Ehrenberg。利用线性噪声近似快速评估生化网络中的涨落。《基因组研究》，13(11):2475–2484，2003年。 https://doi.org/10.1101/gr.1196503。[13] P. J. Fitzsimmons、J. Pitman和M. Yor。马尔可夫桥：构造、帕尔姆解释与拼接。载于E. Cinlar、K. L. Chung和M. J. Sharpe编，《随机过程研讨会》，1992年，第33卷《概率论进展》，第101–134页。Birkh¨auser，波士顿，1993年。 https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0339-1_5。[14] C. H. Fleming、J. M. Calabrese、T. Mueller、K. A. Olson、P. Leimgruber和W. F. Fagan。自相关运动过程的非马尔可夫最大似然估计。《生态学与演化方法》，5(5):462–472，2014年。 https://doi.org/10.1111/2041-210X.12176.[15] ´E. Fodor、C. Nardini、M. E. Cates、J. Tailleur、P. Visco和F. van Wijland。活性物质距离平衡态有多远?《物理评论快报》，117(3):038103，2016年。 https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.038103。[16] C. Frankignoul和K. Hasselmann。随机气候模型，第二部分：海表温度异常和温跃层变异性的应用。《Tellus》，29(4):289–305，1977年。 https://doi.org/10.3402/tellusa.v29i4.11362.[17] D. G´omez-Ullate、Y. Grandati和R. Milson。量子谐振子的有理扩展与例外厄米多项式。《物理学杂志A：数学与理论》，47(1):015203，2014年。 https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/1/015203.[18] D. G´omez-Ullate、Y. Grandati和R. Milson。厄米多项式的德菲矩形与伪朗斯基行列式等价关系。《应用数学研究》，141(4):596–625，2018年。 https://doi.org/10.1111/sapm.12225.[19] D. G´omez-Ullate、Y. Grandati和R. Milson。关于例外厄米多项式完备性证明的勘误。《逼近论杂志》，253:105350，2020年。 https://doi.org/10.1016/j.jat.2019.105350。

[20]T. F. Hansen. 稳定化选择与适应的比较分析。Evolution, 51(5):1341–1351, 1997年。 https://doi.org/10.1111/j.1558-5646.1997.tb01457.x.[21] K. Hasselmann. 随机气候模型。第一部分：理论。Tellus, 28(6):473–485, 1976年。 https://doi.org/10.3402/tellusa.v28i6.11316.[22] I. Karatzas and S. E. Shreve.《布朗运动与随机微积分》，数学研究生教材第113卷。Springer，纽约，第二版，1991年。 https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0949-2.[23] A. Kuznetsov. 与 theta 函数相关的一族 L´evy 过程的维纳–霍普夫分解。Journal of Applied Probability, 47(4):1023–1033, 2010年。 https://doi.org/10.1239/jap/1294170516.[24] A. Kuznetsov and M. Yuan. 扩散过程的 Darboux 变换。SIGMA, 21:099, 2025年。 https://sigma-journal.com/2025/099/.[25] A. Kuznetsov and M. Yuan. 厄米多项式朗斯基行列式的迈勒公式。SIGMA, 22:111, 2026年。 https://doi.org/10.3842/SIGMA.2026.111.[26] P. Langevin. 关于布朗运动理论。Comptes rendus hebdomadaires des s´eances de l'Acad´emie des sciences, 146:530–533, 1908年。[27] B. Y. Levin.《整函数讲义》，数学专著译丛第150卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1996年。[28] A. Mijatovi´c and M. Urusov. 关于某些局部鞅的鞅性质。Probability Theory and Related Fields, 152(1–2):1–30, 2012年。 https://doi.org/10.1007/s00440-010-0314-7.[29] B. Øksendal.《随机微分方程：导论及其应用》。Universitext。Springer，柏林，第六版，2003年。 https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6.[30] G. A. Pavliotis.《随机过程及其应用：扩散过程、福克–普朗克方程与朗之万方程》，应用数学教材第60卷。Springer，纽约，2014年。 https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1323-7.[31] J. Pitman and M. Yor. 一维扩散的击中时、占据时与逆局部时：鞅方法与游程方法。Bernoulli, 9(1):1–24, 2003年。 https://doi.org/10.3150/bj/1068129008.[32] A. M. Pupasov-Maksimov. 等时非谐振子的传播子与例外厄米多项式的迈勒公式。Annals of Physics, 363:122–135, 2015年。 https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.09.021.[33] M. Reed and B. Simon.《现代数学物理方法》第IV卷：算子分析。Academic Press，纽约，1978年。[34] L. M. Ricciardi and L. Sacerdote. 奥恩斯坦–乌伦贝克过程作为神经元活动模型。I. 放电时间的均值与方差。Biological Cybernetics, 35(1):1–9, 1979年。 https://doi.org/

10.1007/BF01845839。

[35] G. Teschl。 量子力学的数学方法：及其在 *Schr ¨odinger* 算子中的应用，第 157 卷，收录于 *Graduate Studies in Mathematics*。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，第二版，2014年。[36]D. J. Thomson。湍流中的粒子轨迹随机模型选择准则。 《流体力学杂志》，180:529–556，1987年。 https://doi.org/10.1017/S0022112087001940。[37] G. E. Uhlenbeck 和 L. S. Ornstein。论布朗运动理论。 《物理评论》，36(5):823–841，1930年。 https://doi.org/10.1103/PhysRev.36.823。[38] N. G. van Kampen。 物理与化学中的随机过程。爱思唯尔，阿姆斯特丹，第三版，2007年。 https://doi.org/10.1016/B978-0-444-52965-7.X5000-4。[39] O. Vasicek。期限结构的均衡刻画。 《金融经济学杂志》，5(2):177–188，1977 年。 https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2。[40] D. V. Vassilevich。热核展开：使用手册。 《物理学报告》，388(5-6):279–360，2003 年。 https://doi.org/10.1016/j.physrep.2003.09.002。