PROCEEDINGS OF SCIENCE

同位旋不对称量子色动力学热力学中的动力学QED修正的领先阶贡献

arXiv:2611.31087v1 [hep-lat] 23 Nov 2026

Gergely Endrődi,[a] **Ádám Fischer,**[a] **Wei-Ping Huang**[a,*] **和 Gergely Markó**[a]

[a]物理与天文学研究所，厄特沃什·罗兰大学，*Pázmány Péter sétány 1/A*，*H-1117* 布达佩斯，匈牙利

电子邮箱：huang.weiping@ttk.elte.hu

我们首次开展了格点计算，研究在非零同位旋化学势 μ_I 下，动力学光子对量子色动力学热力学的领先阶影响，涵盖带电π介子凝聚的起始点。在量子色动力学中，该起始点是二级相变；根据一般理论，动力学光子预计会将其驱动为一级相变。然而，由于不相等的夸克电荷会使非零 μ_I 下的 QCD+QED 作用量变为复数，因而无法进行直接模拟。因此，我们围绕 $e = 0$ 对电磁耦合 e 展开自由能密度 f。在此处符号问题不存在。展开的领先阶系数 $\partial^2 f/\partial e^2|_{e=0}$ 是光子传播子与电磁流—流关联函数的卷积；我们利用一种新提出的平面源，在现有的（2+1）味纯量子色动力学系综上，对非零 μ_I 和π介子源 λ 进行了测量。在物理夸克质量和单一晶格间距下，将 λ 外推至零后，我们发现 $\partial^2 f/\partial e^2|_{e=0}$ 在起始点以下的 μ_I 范围内与其无关（误差范围内），并在跨越起始点时急剧上升。

第*43*届格点场论国际研讨会（格点*2026*）*2026*年*7*月*26*日至*8*月*1*日
马里兰大学，大学公园市，美国

*主讲人（预定）；报告由 G. Markó 宣讲。作者感谢 Eduardo Garnacho-Velasco 的讨论。本研究获得匈牙利国家研究、发展与创新办公室（NKFIH）（匈牙利研究基金150241）以及欧洲研究理事会（CoStaMM 巩固者基金101125637）的资助。

© 版权所有归作者所有，依据知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎4.0国际许可协议（CC BY-NC-ND 4.0）授权。保留将文本和数据用于商业目的的挖掘、人工智能训练及类似技术的所有权利。ISSN 1824-8039。由 SISSA Medialab 出版。

1. 引言

非零同位旋化学势下的强相互作用物质 μ_I 与描述具有同位旋不对称的系统有关，例如重离子碰撞 [1], 致密星 [2] 和早期宇宙 [3]。不同于非零重子密度，对于 $\mu_u = -\mu_d = \mu_I$ 狄拉克算符的 γ_5-厄米性会将两个轻味配对，因此费米子行列式为实数且非负 [4, 5]。因此，T–μ_I 平面中的相图得到了详细研究。在低温下，系统在 $\mu_I \sim m_\pi/2$ 处发生二级相变，进入带电π介子的玻色–爱因斯坦凝聚态（BEC） [5, 6], ；而在高温下，强子相通过交叉转变为夸克–胶子等离子体。由于有限体积中不会发生自发对称性破缺，因此还需要额外引入π介子源 λ，以调节凝聚相的红外行为并显现序参量。为恢复物理情形，最终必须将这一辅助参数外推至零。通过这种方式，利用在物理质量下进行连续极限外推的交错夸克，确定了BEC起始点；在该起始点附近，π介子凝聚被证明遵循O(2)标度 [5]。

一旦涉及动力学光子场，情况就会发生变化。发生凝聚的π介子带电，并通过协变导数与光子耦合，因此在凝聚相中，光子获得质量 $m_A \propto e|\pi^\pm|$，从而产生类似于超导体中的迈斯纳效应。在非零温度下的连续相变附近，长距离行为由玻色子零松原模的三维有效理论描述；将质量为 m_A 的光子积分掉后，会对有效势贡献 $\propto -m_A^3$ 。这种非解析的三次贡献 $\propto -e^3|\pi^\pm|^3$ 不可能出现在关于 $|\pi^\pm|^2$ 的幂次朗道展开中。

光子诱导的三次项是 Halperin–Lubensky–Ma机制的基础 [7], , 该机制也曾针对色超导进行讨论 [8]。没有这一项时，有效势的极小值会连续地偏离零点；而有了这一项后，则会出现势垒和另一个竞争性极小值，凝聚体发生跃变。因此，纳入动力学光子可能使玻色-爱因斯坦凝聚起始点变为一级相变，这就需要从第一性原理确定量子色动力学+量子电动力学中π介子凝聚相变的阶数。

对量子色动力学进行直接模拟+在 $\mu_I \neq 0$量子电动力学会遇到符号问题，详见第2节。相反，我们将自由能密度 f 在 $e = 0$附近展开。其领先阶展开系数$\partial^2 f/\partial e^2|_{e=0}$是光子传播子与纯QCD的电磁流—流关联函数的卷积，因此可以在非零 μ_I和 λ下的无符号问题QCD系综上进行计算。这种展开只有在对光子自能进行重求和后才会产生非解析的三次项，但其领先阶已经揭示了量子电动力学沿 μ_I 轴作用于热力学的位置及其作用强度。第3 节讨论了采用新的二维平面源进行的模拟，以及其中一个我们称为几何错位的问题。第4 节给出了跨越起始点时系数随 μ_I 变化的首次格点测定，第5 节总结全文。

2. 在 $\mu_I \neq 0$ 下围绕量子色动力学进行 e 展开：菠萝

我们考虑采用根化交错离散化的（2+1）味量子色动力学，其中上夸克和下夸克质量简并，为 $m_u = m_d \equiv m_l$，奇夸克质量为 m_s。对于轻味，若同位旋化学势 $\mu_u = -\mu_d = \mu_I$ 和π介子源 λ 均不为零，该理论便具有同位旋不对称性，但仍不存在符号问题。轻味的交错狄拉克算符

味，$M_{u,\ d} = /D(\mu_{u,\ d}) + m_I$之间通过 η_5-厄米性 $\eta_5 M_u^\dagger \eta_5 = M_d$相互关联，因此轻夸克矩阵 $\mathcal{M}_{ud} = \mathrm{diag}(M_u,\ M_d) + i\lambda\eta_5\tau_2$ 保持实数且为正 [4, 5]。

然而，一旦开启电磁耦合 e，动力学光子便会通过各味的电荷 q_f 与其耦合 f。由于 $q_u \neq q_d$，η_5 在 M_u 和 M_d 之间的厄米性遭到破坏，导致在 $\mu_I \neq 0$ 处出现复数的量子色动力学+量子电动力学作用量。鉴于量子电动力学耦合较弱，我们通过在纯QCD（即 $e = 0$）附近按 e 展开自由能密度，绕过符号问题；例如，参考文献 [9] 中计算的同位旋破缺修正便采用了这种方法。

为建立展开，我们从 $e \neq 0$ 处 SU(3) 规范场构型 U 的权重出发，其形式为 $w(\mathrm{U};\ \mu_I;\ eA) = \exp\{-S_g[\mathrm{U}]\}\ \det \mathrm{M}_{ud}^{1/4} \det\ M_s^{1/4}$，其中 S_g 为规范作用量，而 $M_s = /D(\mu_s = 0) + m_s$ 为奇夸克狄拉克算符。光子场 A_μ 通过规范链 $U_\nu(x) \to \exp\{ieq_f A_\nu(x)\}U_\nu(x)$ 进入狄拉克算符 M_f。随后，我们在固定构型上将权重按光子场展开至二阶，

$$w(\mathcal{U};\mu_I;eA) = w_0\Big[1 + ie\sum_{x,\mu} A_\mu(x)\,\hat{\mathcal{J}}_\mu(x) - \frac{e^2}{2}\sum_{x,y,\mu,\nu} A_\mu(x)A_\nu(y)\,\widehat{C}_{\mu\nu}(x,y) + O(e^3)\Big], \quad (1)$$

其中 $w_0 \equiv w(\mathcal{U};\ \mu_I;\ eA = 0)$ 是纯量子色动力学权重。系数 $\hat{\mathcal{J}}\mu(x)$ 和 $\widehat{C}\mu\nu(x,\ y)$ 分别是单点流和流-流算符，具体形式见第 3.1节。

由于光子作用量是高斯型的，光子场平均 $\cdot_\gamma \equiv \int \mathrm{D}\ Ae^{-S_\gamma}(\cdot)/\int \mathrm{D}\ Ae^{-S_\gamma}$会消去 A_μ的所有奇次矩，并给出自由光子传播子 $A_\mu(x)\ A_\nu(y)_\gamma = \Delta^{(0)}_{\mu\nu}(x,\ y)$。在配分函数 $\mathrm{Z} = \int \mathrm{DU}\int \mathrm{D}\ Ae^{-S_\gamma} w(\mathrm{U};\ \mu_I;\ eA)$ 中执行光子积分，可得 $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}|_{e=0}\big[1 - \frac{e^2}{2}\sum_{x,y,\mu,\nu}\Delta^{(0)}_{\mu\nu}(x,\ y)\ \widehat{\mathrm{C}}\mu\nu(x,\ y)_{\mathcal{U}} + \mathrm{O}\ (e^4)\big]$，其中 $\cdot_{\mathcal{U}} \equiv \int \mathrm{DU} w_0(\cdot)\ /\ \int \mathrm{DU} w_0$是对纯量子色动力学系综的平均。因此，对于 $f = -V_4^{-1}\ln \mathrm{Z}$ 在 $V_4 = N_s^3 N_\tau$ 格点上的表达式，

$$f(\mu_I,e) = f(\mu_I,0) + \frac{e^2}{2}\mathcal{P} + O(e^4)\,,\ \text{with}\ \mathcal{P} \equiv \left.\frac{\partial^2 f}{\partial e^2}\right|_{e=0} = \frac{1}{V_4}\sum_{x,y,\mu,\nu}\Delta^{(0)}_{\mu\nu}(x,y)\left\langle \widehat{C}_{\mu\nu}(x,y)\right\rangle_{\mathcal{U}}. \quad (2)$$

阶 $O(e^2)$ 系数 $\mathcal{P}$，因其图示形状而被称为“菠萝”，是连接夸克环上两个流插入的光子传播子。它在无符号问题的纯QCD系综上求值，图中的光子部分则可解析地求得。式（2）中的导数是在固定裸规范耦合 β 和夸克质量下取的；目前我们忽略它们沿着恒定物理线对 e 的依赖。

实际计算中，我们采用费曼规范，并使用与QCD系综具有相同有限体积和格点间距的晶格光子传播子，即 $\Delta^{(0)}_{\mu\nu}(x,y) = \delta_{\mu\nu}D(x-y)$，其中$D(x) = V_4^{-1}\sum_{k\in}$布里渊区$\cap\mathscr{M}_P \exp\{ik\cdot\ x\}/\ \hat{}k^2$，且 $\hat{}k^2 = \sum_\mu 4\sin^2(k_\mu/2)$，这里的BZ表示布里渊区。无质量传播子在零模处是奇异的，因此必须采用红外处方 $\mathscr{M}_P$ $\vec{}$ $\vec{}$。QED_L [10] 会舍弃所有满足 $k = 0$的模式，得到 $\mathscr{M}_\mathrm{L} = \{k\colon\ k \neq 0\}$；而$\mathrm{QED}_{TL}$ [11]只舍弃全局零模，即 $\mathscr{M}_\mathrm{TL} = \{k\colon\ k \neq 0\}$。根据平移不变性，式（2）中的菠萝可化简为位置空间中对迹关联函数 $\mathrm{C}(x) \equiv \sum_\mu \mathrm{C}\mu\mu(x)$ 的单个求和，其中 $\widehat{\mathrm{C}}\mu\nu(x) \equiv \mathrm{C}\mu\nu(x,0)_{\mathcal{U}}$；等价地，也可以对布里渊区中的迹极化求和，

$$\mathcal{P} = \sum_x D(x)\,C(x) = \frac{1}{V_4}\sum_{k\in\mathrm{BZ}\cap\mathscr{M}_P}\frac{\Pi(k)}{\hat{k}^2}, \quad \text{with} \quad \Pi(k) = \sum_x e^{-ik\cdot x}\,C(x)\,. \quad (3)$$

菠萝 P 主要由短距离贡献决定，这些贡献取决于正则化方案，但与介质状态无关（即与 μ_I 无关）。对 μ_I 的依赖，

相比之下，预计其由红外物理支配，这也是我们关注的重点。此外，菠萝决定了量子色动力学热力学中的领先阶量子电动力学效应。例如，由于压强为 $p=-f$，动力学光子会使其在 e^2 阶产生 $-\frac{e^2}{2}\mathrm{P}$ 的变化，并使同位旋密度 $n_I=\partial p/\partial\mu_I$ 产生 $-\frac{e^2}{2}\partial\mathrm{P}/\partial\mu_I$ 的变化；这部分内容将在我们未来的工作中探讨。

3. 晶格模拟

3.1 设置与可观测量

我们使用参考文献 [5], 生成的 $N_f=2+1$ 交错夸克系综，该系综采用 stout 涂抹，具有物理 pion 质量，并使用树级 Symanzik 改进规范作用 [12]，其 $N_s^3\times N_\tau=24^3\times 6$ 晶格的晶格间距为单一值 a，即 $\beta=3$。45。根据第 2 节所述策略，这些是没有光子场的纯量子色动力学构型。我们扫描六个化学势 $a\mu_I$，范围为 0.025 至 0.15，涵盖 $a\mu_I^{\mathrm{crit}}\approx 0$附近的玻色–爱因斯坦凝聚起始区域。1，并采用四个 π介子源 $a\lambda$，取值范围为 0.0006 至 0.0075；每个源对应四个 $a\mu_I$ 取值。

$\widehat{\ }$可观测量是完整的 (2+1) 味流–流算符 $\mathrm{C}\mu\nu(x,y)_{\mathcal{U}}$，其定义见公式 (1)。利用第 3.2 节详述的流顶角和蝌蚪图顶角 $\mathrm{V}_\mu^f(x)\equiv(ieq_f)^{-1}\partial M_f/\partial A_\mu(x)\big|_{A=0}$及 $\mathrm{T}_{\mu\nu}^f(x)\equiv(ieq_f)^{-2}\partial^2 M_f/\partial A_\mu(x)\partial A_\nu(x)\big|_{A=0}$，可得

$$\widehat{C}_{\mu\nu}(x,y)=\frac{\delta_{x,y}}{4}\mathrm{Tr}\big[\mathcal{M}_{ud}^{-1}\mathbf{Q}^2\mathcal{T}_{\mu\nu}(x)\big]-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\big[\mathcal{M}_{ud}^{-1}\mathbf{Q}\mathcal{V}_\mu(x)\,\mathcal{M}_{ud}^{-1}\mathbf{Q}\mathcal{V}_\nu(y)\big]+(ud\to s)+\hat{\mathcal{J}}_\mu(x)\hat{\mathcal{J}}_\nu(y)\,, \tag{4}$$

其中 $\hat{\ }\mathrm{J}\mu(x)=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\mathrm{M}_{ud}^{-1}\mathrm{QV}\mu(x)]+\frac{q_s}{4}\mathrm{Tr}[M_s^{-1}\mathrm{V}_\mu^s(x)],\mathrm{Q}=\mathrm{diag}(q_u,q_d)$，$\mathrm{V}\mu=\mathrm{diag}(\mathrm{V}_\mu^u,\mathrm{V}_\mu^d)$，以及 $\mathrm{T}\mu\nu=\mathrm{diag}(\mathrm{T}_{\mu\nu}^u,\mathrm{T}_{\mu\nu}^d)$。迹对味、格点和色求和，$(ud\to s)$ 表示奇异夸克的蝌蚪项和连通项，后者通过代入 $\mathrm{M}_{ud}^{-1}\mathrm{Q}\to q_sM_s^{-1}$并使用奇异夸克顶角得到。我们测量式（4）中的蝌蚪项、夸克线连通项和非连通项，但不包括轻夸克连通部分中正比于 λ^2 的跨味项。利用 $\eta_5M_u^\dagger\eta_5=M_d$，所有轻夸克迹都可化为对 $G_u\equiv S_uM_u^\dagger$ 的迹，其中 $S_u\equiv(M_u^\dagger M_u+\lambda^2)^{-1}$；相关的轻夸克求解采用共轭梯度算法，并通过投影掉 $M_u^\dagger M_u$ 的最低本征模来加速。

请注意，公式（2）中的 f 是对光子积分后 Z 的对数。若在固定光子场下取$\widehat{\ }$对数，再进行平均，则会将 $\mathrm{C}\mu\nu(x,y)_{\mathcal{U}}$ 替换为 $\widehat{\ }\mathrm{C}\mu\nu(x,y)_{\mathcal{U}}-\hat{\ }\mathrm{J}\mu(x)_{\mathcal{U}}\,\hat{\ }\mathrm{J}\nu(y)_{\mathcal{U}}$，因为光子平均与对数运算不可交换，即 $\ln\int\mathrm{DU}\ w_\gamma\neq\ln\int\mathrm{DU}\ w\gamma$。在 $\mu_I\neq 0$ 处，只有电荷密度 $\hat{\ }\mathrm{J}\mu_{\mathcal{U}}$ 非零，因为μ_I与时间分量耦合并破坏电荷共轭对称性；根据平移不变性，两种排列相差公式（3）中的 $\hat{\ }\mathrm{J}\mu^2\,\mathrm{U}\ \sum_x D(x)$。对于量子电动力学$_L$ 和量子电动力学$_{TL}$，这一差异为零，因为它们的传播子没有零模，因此可以减去单点函数的乘积而不改变 P。下文中我们将减去这一乘积；这仅会影响第 4.1 节中 $\Pi(k)$的插值，因为它只会进入 $\Pi(0)$，并会使其剖面发生偏移。

3.2 平面源、几何失配及其处理

令 $(\mathbb{P}_\zeta)_{nm}=\delta_{nm}\,\delta_{n\in\mathrm{Plane}_\zeta}$表示投影到法向坐标为$\zeta=(z,\tau)$的 x–y 平面上的投影算符，并令 $\gamma_\mu\equiv\sum_x\mathrm{V}\mu(x)$ 表示第 3.1 节定义的格点求和电流顶点。分别对源（ ζ、ζ ）平面和汇平面上的电流求和，定义二维关联函数

$$C_{\mu\nu}^{\mathrm{2D}}(\Delta z,\Delta\tau)=\frac{1}{N_\perp}\sum_{x\in\mathrm{Plane}_\zeta}\sum_{y\in\mathrm{Plane}_{\zeta'}}\langle\widehat{C}_{\mu\nu}(x,y)\rangle_{\mathcal{U}}=\sum_{\vec{x}_\perp}C_{\mu\nu}(\vec{x}_\perp,\Delta z,\Delta\tau)\,, \tag{5}$$

其中 $(\Delta z, \Delta\tau) = \zeta - \zeta'$， $N_\perp \equiv N_s^2$为每个平面上的格点数。对于平面内电流，每个链键的两端都位于该平面内，因此平面求和就是简单的$\sum_{x\in\text{Plane}_\zeta} \mathrm{V}\mu(x) = \gamma_\mu \mathbb{P}_\zeta$。在诸如 Tr $[G_u \gamma_\mu \mathbb{P}_\zeta\, G_u \gamma_\nu \mathbb{P}_{\zeta'}]$,的连通轻夸克迹中，源投影算符通过平面源、限制在源平面上的高斯噪声以及 $\xi_{\zeta'} = \mathbb{P}_{\zeta'}\,\xi$来实现，其中 $\xi_{\zeta'}\,\xi^{\dagger\prime}_{\zeta}\xi = \mathbb{P}_{\zeta'}$；在单端技巧 [13]中亦然。汇投影算符只限制格点求和，因此每种噪声进行一组求逆即可服务于所有汇平面。双重平面求和投影到零平面内动量，因此 $\mathrm{C}^{\mathrm{2D}}_{\mu\nu}$ 的二维傅里叶变换可在轴切片 $k_1 = k_2 = 0$上精确给出极化，并由此在第 4.1 节重构公式（3）的布里渊区求和。

对于法线沿着某一法线方向的跨平面电流，每条链键都连接两个相邻平面，且 $\gamma_\mu \mathbb{P}_\zeta$ 不是平面求和。顶点沿链键分解为一次正向跳跃和一次反向跳跃（$x, x+\hat{\mu}$）， $[\mathrm{V}\,(+)\mu(x)]_{nm} \propto U_\mu(x)\,\delta_{n,x}\delta_{m,x+\hat{\mu}}$以及 $[\mathrm{V}\,(-)\mu(x)]_{nm} \propto U^\dagger_\mu(x)\,\delta_{n,x+\hat{\mu}}\delta_{m,x}$，只有二者合在一起才构成该链键上的守恒电流。对于 $\gamma(\pm)_\mu \equiv \sum_x \mathrm{V}\,(\pm)\mu(x)$，平面内跳跃保持在平面内，$[\gamma(\pm)\mu, \mathbb{P}_\zeta] = 0$，而跨平面跳跃则使其发生位移，

$$\gamma^{(+)}_\mu \mathbb{P}_{\zeta+\hat{\mu}} = \mathbb{P}_\zeta\, \gamma^{(+)}_\mu\,, \qquad \gamma^{(-)}_\mu \mathbb{P}_\zeta = \mathbb{P}_{\zeta+\hat{\mu}}\, \gamma^{(-)}_\mu\,. \tag{6}$$

因此，对链键电流进行平面求和，会将两次跳跃投影到不同的平面上，

$$\sum_{x\in\text{Plane}_\zeta} \mathcal{V}_\mu(x) = \mathbb{P}_\zeta\, \gamma^{(+)}_\mu + \mathbb{P}_{\zeta+\hat{\mu}}\, \gamma^{(-)}_\mu = \gamma^{(+)}_\mu \mathbb{P}_{\zeta+\hat{\mu}} + \gamma^{(-)}_\mu \mathbb{P}_\zeta\,, \tag{7}$$

而平面源实现了$\gamma_\mu \mathbb{P}_\zeta = \mathbb{P}_{\zeta-\hat{\mu}}\gamma^{(+)}_\mu + \mathbb{P}_{\zeta+\hat{\mu}}\gamma^{(-)}_\mu$，它从后方平面上起始的链键中取正向跳跃。该电流的两半相距一个格距，并落在法向间距相差一个单位的分箱中，因此测得的关联函数不再满足式（5）。同样的几何错位也会影响任何受限于子晶格的源所对应的跨平面电流。

我们通过点分裂单端构造消除这种几何错位，该构造实现了式（7），使源的正向和反向两半保持分离，并按各自链键的位置进行分箱，但对于跨平面电流，每个噪声需要额外进行第三次求逆。对于非连通部分，在所有平行平面上同时获得具有相同链键归属的平面求和单点函数：使用整个格点上的噪声，并在汇端进行平面投影。它们的乘积由相互独立的噪声通过所有交叉配对构成，因此不会出现自收缩；蝌蚪图顶点则复用相同的解场。

我们检验了在同一系综 [14] 上测得的平面源关联函数，在所有连通、非连通和蝌蚪道中，均在误差范围内与根据公式 (5) 投影的点源关联函数以及墙源的一维投影一致。

4. 结果

4.1 从平面关联函数到布里渊区求和

菠萝，式（3），需要布里渊区中每个动量处的极化，而平面关联函数仅在轴切片上精确确定极化。对测得的 $C^{\mathrm{2D}}(\Delta z, \Delta\tau) \equiv \sum_\mu C^{\mathrm{2D}}_{\mu\mu}(\Delta z, \Delta\tau)$进行二维傅里叶变换，可得到插值的节点

$$Y_{n\ell} \equiv \sum_{\Delta z, \Delta\tau} e^{-i(q_n \Delta z + \omega_\ell \Delta\tau)}\, C^{\mathrm{2D}}(\Delta z, \Delta\tau) = \Pi(0, 0, q_n, \omega_\ell)\,, \text{ with } \quad q_n = \frac{2\pi n}{N_s}\,,\ \omega_\ell = \frac{2\pi \ell}{N_\tau}\,, \tag{8}$$

其中 $n = 0, \ldots\ldots, N_s/2$，且 $l = 0, \ldots\ldots, N_\tau/2$，三个空间轴彼此等价。

其余动量根据介质的空间 O(3) 对称性重构，即 $\Pi(k) = \Pi(\omega, |\vec{k}|)$，从而将轴向数据转化为每个松原频率下的径向剖面 $F_\ell(q^2)$。然而，在格点上这只是一种近似，因为 O(3) 对称性会破缺为立方群对称性。轴向数据无法区分立方群不变偏差，例如 $\hat{k}_1^2\hat{k}_2^2 + \hat{k}_2^2\hat{k}_3^2 + \hat{k}_3^2\hat{k}_1^2$；这类偏差在小动量处的相对影响为 a^2q^2，但在布里渊区边界附近则为 1。在实际处理中，径向剖面按等 $q = (2\pi/N_s)\sqrt{s}$ 的壳层 $s = a^2 + b^2 + c^2$ 赋值，而光子权重仅在由整数三元组 $a \geq b \geq c$ 构成的立方轨道 O_{abc} 上保持恒定，并按轨道累加，

$$K_{abc,\ell} = \frac{g_{abc}}{V_4\,(\hat{q}^2_{abc} + \hat{\omega}^2_\ell)}, \quad \mathcal{P} \simeq \sum_{(abc,\ell)\in \mathrm{BZ}\cap\mathscr{M}_P} K_{abc,\ell}\ \mathrm{Re}\,F_\ell\big(q^2_{abc}\big), \tag{9}$$

其中 $g_{abc} \equiv |\mathrm{O}_{abc}|$ 是轨道中不同格点动量的数量。

必须区分两个区域。在内部区域，$q \leq \pi$，剖面由节点确定，而非节点处的半径则通过 q^2 进行插值。如图1左图所示，经过所有节点的不同插值函数无法区分，因此插值不会在此引入可见的不确定性。

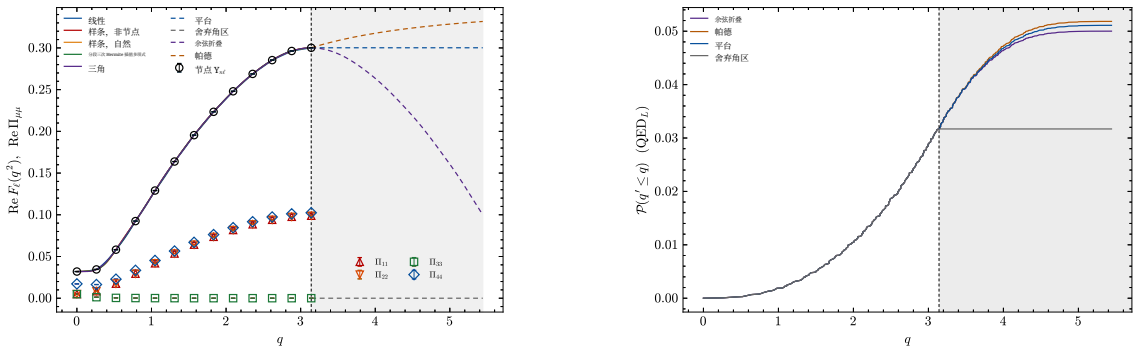

图 1： 在 $a\mu_I = 0.1, a\lambda = 0.0025$ 处进行的极化重构，含量子电动力学$_L$。左图：作为 q 函数的$l = 0$ 径向剖面 $\mathrm{Re}\,F_0$；测量节点（圆圈）、$q \leq \pi$ 处的内部插值，以及阴影区域 $q > \pi$中的四种角区延拓。彩色点为对角分量 $\mathrm{Re}\,\Pi_{\mu\mu}$。右图：按 q递增顺序累积的布里渊区求和；其右边缘为菠萝。

布里渊区的角区 $\pi < q \leq \sqrt{3}\,\pi$没有数据，我们比较了四种模型补全：边缘值$Y_{N_s/2,l}$处的平台（平台），三角插值函数的周期延拓（余弦折叠），拟合八个最外侧节点并在 $q = \pi$ 处连续锚定的帕德形式 $c_0 + c_1/(q^2 + c_2)$（帕德），以及截断 $F_\ell = 0$（舍弃角区）。

图 1 展示了系综在 $a\mu_I = 0.1, a\lambda = 0.0025$时的重构$l = 0$ 作为示例。左图展示了布里渊区两个区域中的插值与延拓，右图则给出了按 q递增顺序累积的布里渊区求和，其右端点即为菠萝。在右图中，所有方案在内部区域均重合，结果的插值离散度低于 0.1%。在 $q = \pi$ 处，各条曲线开始分开。舍弃角区线按构造保持平坦，而平台、帕德和余弦折叠线则持续上升，最终彼此相差几个百分点。因此，布里渊区角区贡献了菠萝的近 40%，且完全来自补全模型。所以下文给出平台补全和切角补全的结果，以供比较。

$\mathrm{Re}\,F_0$ 的 $q \to 0$ 极限可通过静态对角极化 $\Pi_{\mu\mu}(0,q)$ 与光子动态生成的屏蔽质量联系起来。其中，纵向Π_{33} （对于沿第三轴的动量）根据沃德恒等式在 $q \neq 0$ 时消失；与下文的关系一样，该恒等式仅在 $\lambda \to 0$时成立。在正常相中，只剩下电分量，$e^2\mathrm{Re}\ F_0($ $q \to 0) = e^2\mathrm{Re}\ \Pi_{44}(0, q \to 0) = m_D^2$，其中 m_D为德拜质量；而在凝聚相中，两个横向分量还会贡献 $2m_A^2$ ，其中 m_A 为迈斯纳质量。由于 $m_D > 0$ 在任意$T > 0$ 时（在凝聚相中甚至在 $T = 0$ 时）均成立，因此即使源为零，该极限在所有 μ_I 下也都非零；但它结合了两种性质截然不同的机制，而分别测量的 Π_{44}和 $\Pi_{11} + \Pi_{22}$ 能够将二者区分开来，这正是第 1 节中非解析项 $\propto m_A^3$ 所需要的。

4.2 外推至 π介子源为零

π介子源并非物理量，而且由于它带有 π 介子的电荷，也会显式破坏电磁 U(1)，因此菠萝 $\mathcal{P}$ 在有限 λ时具有规范依赖性。因此，在每个 μ_I 处，结果均外推至 $\lambda = 0$，此时电磁流严格守恒，且 $\mathcal{P}$ 与规范无关。如图2所示，最大的源 $a\lambda = 0$。0075 明显偏离较小源值所呈现的线性趋势。因此，我们将限制在$A + B\lambda$ 范围内的线性拟合 $a\lambda \le 0$。0025作为中心值，并以经过所有数据点的二次 $A + B\lambda + C\lambda^2$ 拟合进行比较。在 $\lambda = 0$ 处的带状区域是两种拟合的包络。线性和二次外推都是基于有限数据的经验方法；在 $a\mu_I = 0$。1 和 0。15 处仅有三个源值，因此两种拟合的残差自由度均为零。因此，该带状区域反映的是两种经验形式之间的差异，而非完整的系统误差。基于狄拉克算符奇异值表示改进方法的更可靠外推 [5], 正在进行中。

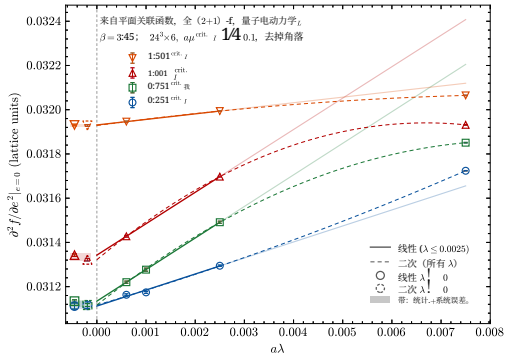

图 2： 舍弃角区补全下，菠萝随 π介子源的变化；同位旋化学势取四个值，单位为 $a\mu_I^{\mathrm{crit}} \approx 0$。1。实线表示对 $a\lambda \le 0$。0025 的线性拟合，虚线表示通过所有点的二次拟合； $a\lambda = 0$ 左侧的标记为两个外推值，色带表示它们的包络。平台补全给出的图像相同，但绝对值更大。

4.3 对同位旋化学势的依赖

图 3 汇总了平台补全和舍弃角区补全在整个网格上的菠萝结果，以及外推值。两个面板因第 4.1 节的角贡献而有所不同，但呈现出相同的定性图像：起始点以下为平台，并在同一位置附近急剧上升，不过上升幅度相差超过三分之一。

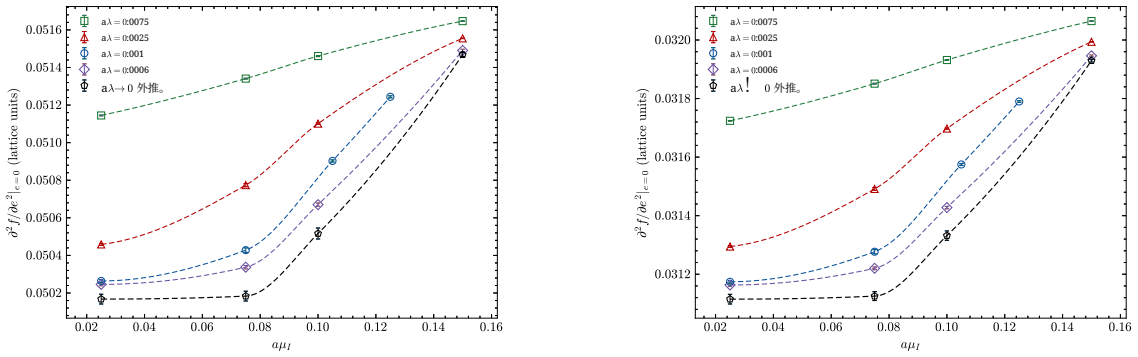

图3： 菠萝作为 $a\mu_I$ 四种π介子源（颜色）及外推后$\lambda \to 0$ 结果（黑色）的函数，布里渊区角落采用平台（左）和舍弃角区（右）补全。绘制线条仅供视觉参考。

在有限 λ 时，所有曲线在整个范围内都单调上升；源越大，数值越大，曲线也越平缓；而不同 λ 对应的曲线在最大的 μ_I处彼此趋近。只有经过外推后，才出现平台；在 $a\mu_I^{\rm crit} \approx 0.1$以下，外推值在误差范围内保持平坦。这是银色荒漠性质 [15], 所预期的行为：该性质指出，在阈值以下，产生带电π介子需要能量，因此基态和热力学（包括其量子电动力学修正）均不依赖于 μ_I。严格来说，这一结论适用于零温；而在我们的 $T \approx 113$ MeV 下，此处的平台呈现出银色荒漠般的特征。到达起始点时，外推曲线急剧向上转折，并继续上升。

5. 结论与展望

我们计算了同位旋不对称量子色动力学自由能密度的领先阶动力学量子电动力学修正，即菠萝 $\partial^2 f/\partial e^2|_{e=0}$，并在物理点上考察了π介子凝聚起始点两侧的情况。我们使用一种新颖的二维平面源测量了（2+1）味流–流关联函数，其中包含连通、非连通和蝌蚪图贡献；通过点分裂处理消除了该源的几何错位。这些平面数据精确确定了布里渊区轴切片上的极化，因此必须通过对内部区域进行插值，并对未测量的角落区域进行模型补全，来重建完整的动量求和。将π介子源经验性地外推至零后，在起始点以下，菠萝对 μ_I 不敏感（误差范围内）；而跨越起始点时，菠萝显著上升。两种角落区域补全方式都呈现出定性相同的行为，但上升幅度取决于所采用的补全方式。这表明，动力学量子电动力学在领先阶就能感受到带电π介子的凝聚；若光子要影响相变阶数，这正是所需的行为。

目前的结果是在单一晶格间距下对菠萝的初步估计。其重整化和连续极限留待未来工作。此外，我们发现，点源估计量产生的信号与平面源相当。利用它们提供的完整四维关联函数，未来工作中可以消除角落系统误差，从而无需任何重构即可完成布里渊区求和。

参考文献

[1] 李宝安、陈立伟和高崇明，《重离子反应中的同位旋物理：最新进展与新挑战》，*Phys. Rept. 464 (2008)* 113 [0804.3580].[2] *A.W. Steiner*、*M. Prakash*、*J.M. Lattimer* 和 *P.J. Ellis*，《原子核和中子星中的同位旋不对称》，*Phys. Rept. 411 (2005)* 325 [*nucl-th/*0410066].[3] *M.M. Wygas*、*I.M. Oldengott*、*D. Bödeker* 和 *D.J. Schwarz*，《轻子不对称非零时的宇宙量子色动力学时期》，*Phys. Rev. Lett. 121 (2018)* 201302 [1807.10815].[4] *J.B. Kogut* 和 *D.K. Sinclair*，《零温和有限温度下有限同位旋密度的格点量子色动力学》，*Phys. Rev. D 66 (2002)* 034505 [*hep-lat/*0202028].[5] *B.B. Brandt*、*G. Endrődi* 和 *S. Schmalzbauer*，《非零同位旋不对称下的量子色动力学相图》，*Phys. Rev. D 97 (2018)* 054514 [1712.08190].[6] *D.T. Son* 和 *M.A. Stephanov*，《有限同位旋密度下的量子色动力学》，*Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 592*[*hep-ph/*0005225].[7] *B.I. Halperin*、*T.C. Lubensky* 和 *S.-K. Ma*，《超导体和*A*相近晶液晶中的一级相变》，*Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 292*.[8] *I. Giannakis*、*D.-F. Hou*、*H.-C. Ren* 和 *D.H. Rischke*，《色超导中的规范场涨落与一级相变》，*Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 232301*[*hep-ph/*0406031].[9] *RM123*合作组，《格点上的主要同位旋破缺效应》，*Phys. Rev. D 87 (2013)*l 14505 [1303.4896].[10] *M. Hayakawa* 和 *S. Uno*，《有限体积中的量子电动力学及有限尺寸标度效应对强子电磁性质的影响》，*Prog. Theor. Phys. 120 (2008)* 413 [0804.2044].[11] *A. Duncan*、*E. Eichten* 和 *H. Thacker*，《格点量子色动力学中的电磁质量劈裂与轻夸克质量》，*Phys. Rev. Lett. 76 (1996)* 3894 [*hep-lat/*9602005].[12] *S. Borsányi*、*G. Endrődi*、*Z. Fodor*、*A. Jakovác*、*S.D. Katz*、*S. Krieg* 等，《含动力学夸克的量子色动力学状态方程》，*JHEP 11 (2010)* 077 [1007.2580].[13] *UKQCD*合作组，《格点上矢量介子的强子衰变》，*Phys. Lett. B 556 (2003)* 177 [*hep-lat/*0212020].[14] *G. Bali* 和 *G. Endrődi*，《格点上由磁化率得到的强子真空极化与 μ 子 $g-2$ 》，*Phys. Rev. D 92 (2015)* 054506 [1506.08638].[15] *T.D. Cohen*，《非零化学势、零密度下量子色动力学的泛函积分》，*Phys. Rev. Lett. 91 (2003)* 222001 [*hep-ph/*0307089].