arXiv:2611.31091v1 [math.DG] 23 Nov 2026

孤立次解析奇点附近的调和函数：广义喇叭与正则吹起

Flavio Mosca

2026年11月23日

摘要

设 $X \subset \mathbb{R}^N$ 是一个维数为 $d \geq 2$、在 0 附近闭的次解析集，在 0 处具有孤立奇点并且具有连通链接，其正则部分承载诱导的黎曼度量。我们研究 $X \setminus \{0\}$ 在 0 附近关于拉普拉斯–贝尔特拉米算子的调和函数。

- 若 X 在内在度量下与一个**广义喇叭** $\{(z^\gamma y, z) : y \in L,\ z \geq 0\}$双 Lipschitz 等价，其中 $\gamma \geq 1$ 为有理数，且 L 是$\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$中的紧致连通解析子流形，则：– **每个有界调和函数都能连续延拓**至 0；– **0 附近的每个正调和函数都可写成**$qG_X + u_{\mathrm{b}}$，其中$q \geq 0$，且 u_{b} 有界，G_X 为一个固定的奇异剖面；– 满足**Bˆocher 型定理**：正调和函数要么有界，要么发散；任意两个发散的正调和函数都有一个非平凡线性组合，可连续延拓。证明依赖于 0 以外的内在球上的体积倍增和 Poincar´e 条件；该条件在双Lipschitz同胚下保持不变，并与环带连通性条件一起推出环域上的哈纳克条件；分解则由链接上的哈纳克不等式通过皮卡原理论证得出。

- 如果 $d \geq 3$ 且 X 在 0 点处的球面爆破是满足条件 (R) 意义下的带边界的正则流形，则同样的分解和 Bˆocher 型定理成立，并且奇异剖面 G_X 具有多齐次展开，其中描述了一个可能包含 $\log \rho$ 项的展开。

- 对于旋转尖点 $|x|^2 = z^m$、$m > 2$、$d \geq 3$，其球面爆破并不正则，我们证明了同样的分解 $qG_X + u$，其径向剖面的阶为 $\rho^{1-m_{(d-1)/2}}$，从而得到同样的 Bˆocher 型定理。因此，剖面的指数取决于截面收缩的速率。

关键词。 调和函数；孤立奇点；亚解析集；Lipschitz 几何；哈纳克不等式；Bˆocher 型定理。

MSC 2020。 31C12，35J05，58J05，32B20，14P15。

目录

1 引言.3 1.1 问题.3 1.2 已知结果.3 1.3 主要结果.4 1.4 已知结果与贡献.5 1.5 记号.6 2 预备知识.6 2.1 一致横截性与乘积结构.7 2.2 原点的内蕴距离与径向曲线.7 2.3 容量、有限能量与最大值原理.8 3 环域上的哈纳克不等式与极限的存在性.10 4 体积倍增、Poincar´e 不等式与广义喇叭.11 4.1 条件 (VP) 与 (RA_b).11 4.2 球上及环域上的哈纳克不等式.12 4.3 双利普希茨不变性.14 4.4 广义喇叭.15 5 正调和函数：渐近分解与 Bˆocher 型定理.19 5.1 渐近分解条件.19 5.2 Bˆocher 型定理.20 5.3 正则球面吹起的情形.21 5.4 旋转尖点.25 5.5 由哈纳克条件得到的渐近分解.26 6 例子.28 6.1 具有环面链接的广义角状体.28 6.2 克利福德环面上的锥.29 A 形式解引理.30 A.1 设定.30 A.2 模型方程.31 A.3 具有预设首项的形式解.32 参考文献.34

1 引言

1.1 问题

设 $X \subset \mathbb{R}^N$ 是一个维数为 $d \geq 2$ 、在 0 处有孤立奇点的亚解析集；也就是说，$0 \in X$ 且对于某个 $r > 0$，$X \cap B(0,r)$ 在 $B(0,r)$ 中是闭的，并且 $X \cap B(0,r) \setminus \{0\}$ 是维数为 d 的解析子流形。在 0 附近的闭性使链接 $X \cap S(0,t)$ 紧致；第 2 节中始终用到这一点，该节在此情形下引用了 Mosca [Mos26] 的结果，而第 4 节中不能舍弃这一条件：对于附加了原点的上半平面，正调和函数 $(x,y) \mapsto y$ 违反了所有在趋近被省略边界的球上的哈纳克不等式。在 $X \setminus \{0\}$ 上，我们考虑诱导的黎曼度量及相应的拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ_X。我们研究 0 附近调和函数的两种性质，以下称为可去性和 Bˆocher 性质。

(a) 可去性。 $X \setminus \{0\}$ 附近每个有界调和函数都可连续延拓到 0。(b) *Bˆocher* 性质。 0 附近每个正调和函数要么有界，要么在 0 处趋于$+\infty$ ；任意两个在 0 处趋于 $+\infty$ 的正调和函数，都存在一个非平凡线性组合可连续延拓到 0。

若 X的 0 是正则点，则 (a) 是经典结果，而 (b) 是 Bôcher定理 [Bˆoc03], [ABR92]。若链接有多个连通分支，则这两种性质均按分支分别理解。

1.2 已知结果

对于 $d = 2$ ，每个具有连通链接的次解析芽都满足可去性：Mosca 给出了一个基于 Whitney条件和环带模的证明 [Mos26]。此外，还可由 Grieser 通过奇点消解证明的该芽与有限个锥体与喇叭的并拟等距性推出 [Gri03，定理 1。2], 也可由 Birbrair喇叭定理[Bir08]推出。关于 $d = 2$ 的 Bˆocher 性质，则可由穿孔圆盘的共形类型推出[Mos26]。

对于 $d \geq 3$ ，现有结果只涉及范围较窄的类别。如果 X 是以光滑链接为底的锥，或者更一般地，是带有迭代边度量的分层空间，那么 Akutagawa、Carron 和 Mazzeo 已证明有限能量解的 H¨older 正则性 [ACM15]；对于穿孔球上与 $|x|^{2\nu}|dx|^2$ 准等距的度量，Wan 已证明 H¨older 连续性 [Wan18]。对于锥，Bˆocher 性质可由 Kondrat'ev 的变量分离法推出 [Kon67]；具有度量 $|x|^{2\nu}|dx|^2$, $\nu > -1$的球面链接情形，则由 Jiayu Li 和 Fangshu Wan 研究[LW19]。如果该芽在内在度量下与 $\mathbb{R}^d$中的一个球双利普希茨等价，那么正调和函数的分解可由 Serrin 和 Weinberger 关于散度型算子的定理推出 [SW66，定理 4]。对于 $d \geq 3$，上述正则性结果均不适用于截面收缩速度快于 ρ的芽，例如尖点 $|x|^2 = z^m$, $m > 2$。

1.3 主要结果

第一个结果涉及这样的芽：在内在度量下，它们与一个广义喇叭双利普希茨等价

$$X_{\gamma,L} := \{(z^\gamma y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \ y \in L, \ z \geq 0\},$$

其中 $\gamma \geq 1$ 是有理数，且 $L \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 是维数为 $d-1$ 的紧致连通解析子流形（定义 4.8）。

定理 A（定理 4.15 和5.17）。设 X 如上所述，且设 Ψ 是从 X 中0 的一个邻域到 X_γ中0 的一个邻域的同胚，L，满足 $\Psi(0) = 0$，并且关于内蕴距离是双利普希茨的。那么，在 $X \setminus \{0\}$ 上0 附近的每个有界调和函数都可连续延拓至0。此外，X 满足下文的条件（*AD*），并且0处具有 *Bˆocher* 性质。

当 $\gamma = 1$ 时，角是一个锥，结果属于已知情形。当 $\gamma > 1$ 时，证明依赖于条件（VP）（定义 4.1），该条件要求内蕴球 $B_X(x, s)$ 上满足体积倍增和 Poincaré 型条件，其中 s 相对于 $|x|$ 足够小；该条件在双利普希茨同胚下保持不变（命题 4.6），并且对$X_{\gamma,L}$ 成立（命题 4.10）。结合环带连通性条件，（VP）推出环域$A(r/b, br)$上的哈纳克条件，由此可得可去性。第二个断言源于一个具有独立价值的判据（定理 5.17）：如果沿半径序列 $r_k \to 0$，链接 L_{r_k} 上的哈纳克不等式成立，且其常数与 k无关，那么，在 0 附近、于外侧链接上取值为零的正调和函数构成一条半直线（皮卡原理）；并且，0 附近的每个正调和函数都可表示为一个固定奇异函数的某个倍数与一个有界调和函数之和。该方法源自 Pinchover 对福克斯型算子[Pin94]的研究。

另外两个结果描述了 $d \geq 3$的奇异剖面。我们称 X 满足渐近分解条件（AD），如果存在一个正调和函数 G_X，当 $+\infty$ 趋于 0 时趋于该值，称其为奇异剖面，且每个 0 附近的正调和函数都可表示为 $qG_X + u_{\mathrm{b}}$，其中 $q \geq 0$ 且 u_{b} 在 0 的某个穿孔邻域内有界（定义5.1）。在满足（AD）和可去性的条件下，Bˆocher 性质成立（命题 5.6）。

定理 B（定理 5.9）。设 $d \geq 3$。若 X 在 0 处的球面爆破按定义 5.7（条件 ***(R)***）的意义是带边界的正则流形，则 X 满足（*AD*）和可去性，因此具有 *Bˆocher* 性质。渐近剖面的展开式为

$$G_X = \rho^{-(d-2)} + \sum_{0<k<\ell(d-2)} \mu^{k-\ell(d-2)} c_k(y) + c_{\log} \log \rho + O(1),$$

其中 $\ell \geq 1$ 是定义 5.7中的整数，$\rho = \mu^\ell$，y 是切锥链接上的变量，c_k 是光滑函数，且 $c_{\log} \in \mathbb{R}$。

定理 C（命题 5.12）。设 $d \geq 3$ 并设 $X = \{(x, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \ |x|^2 = z^m, \ z \geq 0\}$其中 $m > 2$ 为有理数。则 X 满足条件（*AD*），其径向剖面为 $G_X \sim z^{1-\beta}/(\beta - 1)$，$\beta := m(d-1)/2$，且 *Bˆocher* 性质成立。

锥、齐次锥的非退化扰动、Puiseux 型图 $\{z = |x|^{a/\ell}\}$ 以及具有光滑射影切锥的复芽均满足条件（R）（备注 5.8）；定理 B 的类别与定理 A 的类别不相交，其中 $\gamma > 1$。定理 B 表明，奇异剖面通常并非 $\rho^{-(d-2)}$，即使切锥在顶点之外是光滑的：例 5.11 包含一个对数 ρ 项。定理 C 表明，剖面的指数取决于截面收缩的速率。在这两个定理中，条件（AD）也可由定理 5.17 推出；它们的内容是对剖面的描述，而定理5.17 对此不提供任何信息。

1.4 已知结果与本文贡献

环域的容量估计、第2.3 节的有限能量性质和最大值原理，都是对经典结果的改编（注2.5）。从环域上的哈纳克不等式推导出极限的存在性（第3节）采用了 Moser论证 [Mos61]。锥上的连续性属于 Akutagawa、Carron 和 Mazzeo 的研究结果范畴（注4.13）。在体积倍增和 Poincar´e 条件下，球上的哈纳克不等式由 Grigor'yan[Gri91] 和 Saloff-Coste [SC92], 在 Lierl 和 Saloff-Coste [LSC14]的局部形式中证明。无穷远处远端球上的体积倍增和 Poincar´e 条件、相对连通的环域，以及由此得到的环域上的哈纳克不等式，均由 Grigor'yan 和 Saloff-Coste [GSC05]在无穷远附近证明。

本文的贡献如下。

(i) 将 Grigor'yan 和 Saloff- Coste 的框架推广到孤立奇异点：定义4.1中的条件（VP）、体积倍增以及内在球上的弱 Poincar´e 不等式 $B_X(x, s)$（其中 $N_{Ps} \leq |x|/2$）发挥了与他们关于远端球的条件相同的作用，只是以 $\{0\}$ 取代无穷远区域。我们记录了这些条件在内在度量的双Lipschitz同胚下的不变性，并明确给出常数的依赖关系（命题 4.6）；还证明了在（VP）和（RA_b）条件下环域上的哈纳克条件成立，其常数仅依赖于（VP）和（RA_b）中的常数（命题4.5）。

(ii) 验证广义喇叭 $X_{\gamma,\, L}$ 满足（VP）和（RA_2），其中 $\gamma > 1$ （命题 4.10）；这些广义喇叭不在第 1.2 节所引正则性结果的适用范围内，并由此得到定理 A。

(iii) 皮卡原理和条件（AD）的一个充分判据：沿半径序列的链接上的哈纳克不等式（定理 5.17）。证明思路采用 Pinchover [Pin94 的定理 7.1、推论 7.3 和引理 8。4]。一旦紧环域上的狄利克雷问题、内部椭圆估计以及顶点处的最大值原理（引理 2.9）均已具备，该判据便只需用到链接上的哈纳克不等式。结合 (ii)，即可为定理A所述的整个类别建立 Bˆocher 性质。

(iv) 具有正则球面吹起的芽的渐近剖面展开，包括对数项（定理B）。

(v) 旋转尖点的径向剖面，其指数取决于 m（定理 C）。

A所有连续性结果，包括关于锥的结果，均通过条件（VP ）.

1.5 记号

我们固定 X ，如第 1.1 节所述，并使用以下记号。

符号	含义
$B(0,r)$, $S(0,r)$	$\mathbb{R}^N$中的开球和球面 中心为 0、半径为 r
$\rho(x) := \lvert x\rvert$	到 0 的欧几里得距离
$C_0 = 2$, C_0^Y	比较中的常数 $\lvert x\rvert \le d_X(x,\ 0) \le C_0\lvert x\rvert$ (引理 2.4)，对于 X 以及具有相同性质的集合 Y
r_0	第2节中固定的半径，在此半径内横截性和乘积结构成立
$X^* := X \cap B(0,\ r_0)\setminus\{0\}$	0 附近的光滑部分
$L_r := X \cap S(0,\ r)$, $L := L_{r_0}$	半径为 r 处的链接
Ω_r, $A(s,\ t)$	$X \cap \{0 < \rho < r\}$ 以及环域 $X \cap \{s < \rho < t\}$
g, τ, ∇_X, Δ_X	X^*上的诱导度量、黎曼测度、梯度，拉普拉斯–贝尔特拉米算子
d_X, $B_X(x,s)$	X 的内蕴距离和内蕴球
$\mathcal{H}^k$	k维 Hausdorff 测度
$V(r) := \mathcal{H}^{d-1}(L_r)$	链接的体积
$\mathcal{P}$	0 的去心邻域上的正调和函数
(H_b), (H), $C_H(r)$	环域 $A(r/b,\ br)$上的哈纳克条件，情形 $b=4$，最优常数
(VP), (RA_b)	体积倍增与庞加莱不等式，环域的连通性（第4节）
(AD), (R), G_X	渐近分解、正则吹起、奇异剖面（第 5节）
X_γ, L, h_L	广义喇叭， L上的诱导度量
$\alpha_j^{\pm}$ 、 λ_j	指标指数以及链路的拉普拉斯算子的特征值

常数带有下标，用于表示其所对应的条件（C_H、 C_V、 a_P、 N_P、 Λ_A、{v6）；条件成立的下界半径带有相同的下标（r_H、 r_V、 r_A）。不带下标的符号 C表示一个正的常数，其值在一次证明的不同行之间可能发生变化。调和函数记作 u；在哈纳克不等式中，非负函数记作 v。

2 预备知识

本节汇总了关于以下对象在 X 0 附近的几何以及奇异点容量消失所带来后果的事实。除非另有说明， X 均与第 1.1 节中的定义相同，其中 $d \ge 2$。

设 $r > 0$，使得 $X \cap B(0,r) \setminus \{0\}$ 是一个维数为 d 的解析子流形。在其上，我们考虑由 $\mathbb{R}^N$ 诱导的黎曼度量 g、黎曼测度 τ、梯度 ∇_X以及拉普拉斯–贝尔特拉米算子

$$\Delta_X u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_{y_i}\Big(\sqrt{\det g}\, g^{ij}\, \partial_{y_j} u\Big)$$

在局部坐标 $(y_1, \dots, y_d)$ 下。若函数 $u \in C^2$ 满足 $\Delta_X u = 0$，则称其为调和函数。对于 $0 < r < r_0$，取下文固定的 r_0，定义 $L_r := X \cap S(0, r)$，$X^* := X \cap B(0, r_0) \setminus \{0\}$，$\Omega_r := X \cap \{0 < \rho < r\}$以及 $A(s, t) := X \cap \{s < \rho < t\}$，其中 $0 < s < t \le r_0$。

2.1 一致横截性与乘积结构

对于一个具有 $0 \in Q \setminus Q$ 的 C^1 子流形 $Q \subset \mathbb{R}^N$，我们对 $x \in Q$ 定义惠特尼函数 $\varpi(x) := \sin \angle(T_x Q, \mathbb{R}x)$，其中 $\angle(T_x Q, \mathbb{R}x)$ 是直线 $\mathbb{R}x$ 与其在 $T_x Q$ 上的正交投影之间的夹角。若 $\varpi(x) \to 0$ 在 $x \to 0$ 趋近 Q 时成立，则有序对 $(Q, \{0\})$ 在 0 处满足 Whitney 条件。

定理 2.1 (Hironaka [Hir77])**.** 设 Q 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个连通解析子流形，在 $\mathbb{R}^N$ 中是次解析的，并设 $Z \subset Q \setminus Q$ 是一个局部闭次解析集。存在一个闭次解析子集 $Z' \subset Z$，使得 $Z \setminus Z'$ 在 Z 中稠密，且 (Q, Z) 在 $Z \setminus Z'$的每一点都满足 *Whitney* 条件。

我们将其应用于 $Z = \{0\}$：由于 $Z \setminus Z'$ 在 Z中必稠密，因此得到 $Z' = \emptyset$，且无论 d还是余维如何，Whitney条件在 0 处都成立。

引理 2.2 (Mosca [Mos26，附录 4。7])。 若 $(X \cap B(0, r) \setminus \{0\}, \{0\})$ 在 0处满足 *Whitney*条件，则存在 $r_0 > 0$ 使得

$$|\nabla_X \rho(x)| = \sqrt{1 - \varpi(x)^2} \ge \tfrac{1}{2} \qquad (x \in X \cap B(0, r_0) \setminus \{0\}).$$

由于 $\nabla_X \rho$是 $\nabla \rho = x/|x|$在 $T_x X$上的投影，因此我们也有 $|\nabla_X \rho| \le 1$。下文中r_0 表示引理2.2中的半径，必要时可缩小该半径，使得乘积结构和引理2.3也成立。

根据 Whitney条件，限制映射 $\rho|_{X^*}$ 在 0 附近没有临界点（Mosca [Mos26，引理 4。5]），且存在一个微分同胚（Mosca [Mos26，推论 4。6]）

$$\Phi : X \cap B(0, r_0) \setminus \{0\} \xrightarrow{\cong} L_{r_0} \times (0, r_0), \qquad \Phi(L_r) = L_{r_0} \times \{r\}.$$

特别地，所有链接 L_r 都与 $L := L_{r_0}$ 微分同胚。具有这些性质的微分同胚，例如可以由向量场 $\nabla_X \rho / |\nabla_X \rho|^2$ 的流得到；该向量场定义在 0 附近的 X^* 上，并将每个 ρ 的水平集映射到另一个水平集。

引理 2.3 (Mosca [Mos26, 引理 7。5])。 存在 $C > 0$ 使得 $V(r) = \mathcal{H}^{d-1}(X \cap S(0, r)) \le C r^{d-1}$ 对于 $0 < r \le r_0$。

引理 2.3 不要求对 d作任何假设。从现在起，我们假设链接 L 是连通的；那么，根据乘积结构，Ω_r 以及环域 $A(s, t)$ 都是连通的。

2.2 原点的内禀距离与径向曲线

我们用 d_X 表示 X的内蕴距离，即 X中可求长曲线长度的下确界；用$B_X(x, s)$表示以 x为中心、半径为 s的开球，其中 d_X。

引理 2.4。对于 $x \in X^*$ 和 $0 < t < r_0$，存在 $X^* \cup \{0\}$ 中的一条曲线，将 x 与 L_t中的某一点连接起来，沿此曲线 ρ单调变化，且长度至多为 $2\big||x| - t\big|$；当 $t \to 0$时，它将 x连接到0。特别地

$$|x| \le d_X(x,0) \le C_0|x| \qquad for\ x \in X^*, \qquad C_0 := 2. \tag{1}$$

证明。向量场 $\nabla_X\rho/|\nabla_X\rho|^2$ 在 X^*上光滑，且 ρ 沿其积分曲线以单位速度递增；根据引理 $|\nabla_X\rho|^{-1} \le 2$ 2.2，积分曲线的速度为。沿递增 x方向（若 ρ）或递减 $t > |x|$ 方向（若 ρ），经过 $t < |x$|时间后，经过 L_t 并始终停留在 $\big||x| - t\big|$ 内，因为 X^*始终介于 ρ和 $|x|$ 之间。式（t1）中的第一个不等式显然成立。

□

常数 C_0 单独标出，因为它会出现在第 4节的常数中。对于具有与 Y相同性质的集合 X，记作 C_0^Y；总有 $C_0^Y \le 2$。

2.3 容量、有限能量与最大值原理

设 Ω $\subset X^*$ 为开集。对于互不相交的闭集 E_0,$E_1 \subset$ Ω，电容器（E_0, E_1;Ω）的容量 为

$$\mathrm{cap}_2(E_0,E_1;\Omega) := \inf\Big\{ \int_\Omega |\nabla_X u|^2\, d\tau :\ u \text{ Lipschitz on } \overline{\Omega},\ u = 1 \text{ on } E_0,\ u = 0 \text{ on } E_1 \Big\},$$

其中 Ω¯表示 X^* 中 Ω 的闭包；在应用中，E_0 和 E_1 是链接 L_{r_1}、L_{r_2}，由于 X 在 0 附近是闭集，它们是紧致的。

备注 2.5（来源）。命题 2.6 以及引理 2.7、2.8 和 2.9 并非新的结果：它们是对经典结果在 X^* 中的改编，并在此以自包含的形式给出证明。通过 $1/V$ 的积分得到的容量估计，是抛物性体积判据中所使用的容量上界（Grigor'yan [Gri99，第 7.1] 节）。容量为零的集合对有界解的可去性可追溯至 Serrin [Ser64] 于 $\mathbb{R}^n$ 中的工作；对于度量测度空间，参见 A. Bj¨orn [Bj¨o06]。在亚解析情形下，一个相关结论——在 Sobolev 空间中，在奇异集附近消失的光滑函数的稠密性——由 Valette 在其假设下证明，见 [Val24、定理 2.7 和推论 2.8]；下文的证明不依赖于此。亚解析集所特有的唯一要素是引理 2.3 的估计 V（r）$\le Cr^{d-1}$。

对于 $0 < r_1 < r_2 \le r_0$，令 Ω := $X \cap \{r_1 < \rho < r_2\}$。根据 Mosca 的引理 4.5 [Mos26] 函数 $\rho|_{X^*}$ 在 Ω 中没有临界点；因此，¯ 水平集 L_r，$r \in [r_1, r_2]$ 是 X^* 的紧致光滑超曲面，并且 V (r) 是 $[r_1, r_2]$ 上的连续正函数。

命题 2.6。对于 $0 < r_1 < r_2 \le r_0$,

$$\mathrm{cap}_2\big(L_{r_1}, L_{r_2}; \Omega\big) \ \le\ \Big(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{V(r)} \Big)^{-1}.$$

证明。设 I:= $\int_{r_1}^{r_2} V(t)^{-1} dt$ 且 $F(r) := I^{-1} \int_r^{r_2} V(t)^{-1} dt$，使得 $F(r_1) = 1$, $F(r_2) = 0$，并且 $F' = -1/(IV)$ 在 $[r_1, r_2]$ 上连续。由于 ρ关于内蕴距离是 1-利普希茨的，

$u := F \circ \rho$ 在 Ω 上是利普希茨函数，在 L_{r_1} 上等于 1，在 L_{r_2} 上等于 0，且 $|\nabla_X u| = |F'(\rho)|\,|\nabla_X \rho|$。根据关于 ρ 的余面积公式以及不等式 $|\nabla_X \rho| \le 1$,

$$\int_\Omega |\nabla_X u|^2 \, d\tau = \int_{r_1}^{r_2} F'(r)^2 \int_{L_r} |\nabla_X \rho| \, d\mathcal{H}^{d-1} \, dr \le \int_{r_1}^{r_2} F'(r)^2 V(r) \, dr = \frac{1}{I^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{V(r)} = \frac{1}{I}. \quad \square$$

引理 2.7。存在利普希茨函数 $\eta_k : X \cap B(0, r_0) \to [0,1]$、$k \ge 1$以及半径$0 < s_k < t_k$，使得 $t_k \to 0$，在 Ω_{s_k} 上 $\eta_k = 1$，在 Ω_{t_k} 外 $\overline{\eta_k = 0}$，并且 $\int |\nabla_X \eta_k|^2 d\tau \le 1/k$。

证明。令 $t_k := 2^{-k} r_0$。由引理 2.3，$\int_0^{t_k} dr/V(r) = +\infty$，因此存在 $s_k \in (0, t_k)$ 使得 $\int_{s_k}^{t_k} dr/V \ge k$。令 F_k 为命题 2.6 证明中定义在区间 $[s_k, t_k]$上的函数；在 $A(s_k, t_k)$ 上令$\eta_k := F_k \circ \rho$，在 Ω_{s_k} 上令 $\eta_k := 1$，其余地方令 $\eta_k := 0$。由命题 2.6，η_k 的能量至多为 $1/k$。

$\square$

引理 2.8 (有限能量)。设 u 在 Ω_{r_2} 上是调和且有界的，并满足 $r_2 \le r_0$。对于 $r < r_2$，令 $r' := (r + r_2)/2$，以及 $\zeta := \min\{1, (r' - \rho)^+/(r' - r)\}$,

$$\int_{\Omega_r} |\nabla_X u|^2 d\tau \le 8\|u\|_\infty^2 \Big(\int |\nabla_X \zeta|^2 d\tau + 1 \Big) < \infty.$$

证明。对于带有 $t_k < r$ 的 k，函数 $\psi := u\zeta^2(1 - \eta_k)^2$ 在 $X \cap \{s_k \le \rho \le r'\} \subset \Omega_{r_2}$ 中具有紧支集且为利普希茨函数，因此 $\int \nabla_X u \cdot \nabla_X \psi \, d\tau = 0$。令 $\chi := \zeta(1 - \eta_k)$，我们得到 $\int |\nabla_X u|^2 \chi^2 = -2 \int u\chi \, \nabla_X u \cdot \nabla_X \chi \le \frac{1}{2} \int |\nabla_X u|^2 \chi^2 + 2 \int u^2 |\nabla_X \chi|^2$和 $|\nabla_X \chi|^2 \le 2|\nabla_X \zeta|^2 + 2|\nabla_X \eta_k|^2$，从而 $\int |\nabla_X u|^2 \chi^2 \le 8\|u\|_\infty^2 (\int |\nabla_X \zeta|^2 + 1/k)$。由于在 $A(t_k, r)$ 上有 $\chi = 1$，且 $t_k \to 0$，根据单调收敛性，结论成立。 $\square$

引理 2.9 （最大值原理）。设 u 在 Ω_{r_2} 上是调和且有界的。对于每个 $r < r_2$,

$$\sup_{\Omega_r} u = \max_{L_r} u, \qquad \inf_{\Omega_r} u = \min_{L_r} u.$$

证明。令 $M_r := \max_{L_r} u$, $\varepsilon > 0$ 并令 $w := (u - M_r - \varepsilon)^+$ 在 Ω_r 上。由 u 的连续性和 L_r 的紧致性，w 在 L_r 的某个邻域内为零；此外，w 有界，并且根据引理 2.8，$\int_{\Omega_r} |\nabla_X w|^2 < \infty$。函数 $(1 - \eta_k)w$ 延拓为 0 后，是 Ω_{r_2} 中具有紧支集的利普希茨函数，因此

$$0 = \int (1 - \eta_k) \, \nabla_X u \cdot \nabla_X w \, d\tau - \int w \, \nabla_X u \cdot \nabla_X \eta_k \, d\tau.$$

第二个积分由 $\|w\|_\infty \|\nabla_X u\|_{L^2(\Omega^{t_k})} k^{-1/2} \to 0$ 有界；第一个积分根据控制收敛定理趋于 $\int |\nabla_X w|^2$。因此，w 在连通集 Ω_r 上为常数，并且由于它在 L_r 附近为零，故 $w \equiv 0$。将同样的论证应用于 $-u$，即可得到下确界的结论。

$\square$

3 环域上的哈纳克不等式与极限的存在性 it

定义 3.1。设 $b \geq 2$。若 X 满足环域上的哈纳克条件 (H_b)，则存在$C_H \geq 1$和 $r_H \in (0, r_0/b]$，使得对于任意 $r \in (0, r_H)$ 以及在 $A(r/b, br)$ 上的任意调和函数 $v \geq 0$,

$$\sup_{L_r} v \leq C_H \inf_{L_r} v.$$

条件 (H_4) 记作 (H)。

定理 3.2。设 X 具有连通链接，并对某个 $b \geq 2$ 满足 (H_b)。若 u 在 Ω_{r_2}, $r_1 < \min\{r_2, r_H\}$ 和 $r_k := (2b)^{1-k} r_1$ 上是调和且有界的，则 $\omega_k := \sup^{\Omega_{r_k}} u - \inf^{\Omega_{r_k}} u$满足

$$\omega_{k+1} \leq \frac{C_H - 1}{C_H + 1} \omega_k,$$

并且 u 在 0 处有极限。

证明。令 $M_k := \sup^{\Omega_{r_k}} u$ 且 $m_k := \inf^{\Omega_{r_k}} u$。由引理 2.9, $M_{k+1} = \max^{L_{r_{k+1}}} u$ 和$m_{k+1} = \min^{L_{r_{k+1}}} u$。由于 $br_{k+1} < r_k$, 函数 $u - m_k$ 和 $M_k - u$ 在 $A(r_{k+1}/b, br_{k+1})$ 上是调和且非负的，而 (H_b) 给出

$$M_{k+1} - m_k \leq C_H(m_{k+1} - m_k), \qquad M_k - m_{k+1} \leq C_H(M_k - M_{k+1}).$$

相加可得 $\omega_{k+1} + \omega_k \leq C_H(\omega_k - \omega_{k+1})$。区间 $[m_k, M_k]$ 相互嵌套，且其长度趋于 0；它们的公共点就是 u 的极限。 □

定理 3.2 使用的 Harnack 常数与 r无关。以下变体允许常数依赖于尺度。对于 $0 < r < r_0/4$ 我们设

$$C_H(r) := \sup\left\{ \frac{\sup_{L_r} v}{\inf_{L_r} v} : \ v > 0 \text{ harmonic on } A(r/4, 4r) \right\} \in [1, +\infty],$$

并采用约定 $1/C_H(r) := 0$当 $C_H(r) = +\infty$。条件（H）等价于 $\sup_{0<r<r_H} C_H(r) < \infty$。

定理 3.3。设 X 具有连通链接，并设 $r_k \downarrow 0$ 为半径，满足 $r_1 < r_0/4$ 和 $r_{k+1} \leq r_k/8$。若

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{C_H(r_k)} = +\infty,$$

则每个在 Ω_{r_0} 上有界的调和函数 u 在 0处都有极限。

证明。设 M_k, m_k 和 ω_k 如定理 3.2的证明中所述，相对于半径 r_k，其中 $b = 4$，并令 $C_k := C_H(r_{k+1})$。由于 $4r_{k+1} < r_k$, 函数 $u - m_k$ 和 $M_k - u$ 在 $A(r_{k+1}/4, 4r_{k+1})$ 上调和且非负；它们各自要么恒为零，要么处处为正。定理 3.2 的计算给出，当 $C_k < \infty$,

$$\omega_{k+1} \leq \frac{C_k - 1}{C_k + 1} \omega_k = \Big(1 - \frac{2}{C_k + 1}\Big) \omega_k,$$

并且 $\omega_{k+1} \le \omega_k$ 在任何情况下都成立。由于 $C_k \ge 1$，我们有 $2/(C_k+1) \ge 1/C_k$，因此

$$\omega_{K+1} \le \omega_1 \prod_{k=1}^{K} \Big(1 - \frac{1}{C_k}\Big) \le \omega_1 \exp\Big(-\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{C_k}\Big).$$

根据假设，级数 $\sum_k 1/C_H(r_k)$ 发散，$\sum_k 1/C_k$也发散，因为它与前者仅首项不同；因此 $\omega_k \to 0$。由于 $\sup_{\Omega_r} u - \inf_{\Omega_r} u$ 关于 r是单调的，结论可按定理 3.2的方式得出。

□

注 3.4。 定理 3.2 将哈纳克不等式推出振荡衰减的经典论证，推广到了以 0 为中心的环域（Moser [Mos61]）。定理 3.3中通过 $\prod_k (1-x_k) = 0$ 与 $\sum_k x_k = +\infty$在 $x_k \in [0,1$下的等价性，将常数推广到无界的做法，也被 Korobenko、Rios、Sawyer 和 Shen [KRSS21] 用于无穷退化方程。下文将对若干类芽验证条件 (H) 和 (H_b)。

4 体积倍增、Poincaré 不等式与广义喇叭

本节提出一个关于远离 0 的内在球的条件，该条件在内在度量的双利普希茨同胚下保持不变，并由此为与锥或广义喇叭双利普希茨等价的芽推出 (H_b)。在体积倍增和 Poincaré 不等式条件下，球上的哈纳克不等式已为人所知（第 4.2节）；将其推广到环域时，我们采用 Grigor'yan 和 Saloff-Coste 针对远端球的论证 [GSC05]；锥的情形属于 Akutagawa、Carron 和 Mazzeo 的结果范畴（注 4.13）。本节的新结果是命题 4.10和定理4.15。

4.1 条件 (VP) 和 (RA_b)

定义 4.1。 X 满足条件 *(VP)*，如果存在 $C_V \ge 1$、$a_P > 0$、$N_P \ge 2$ 和 $r_V > 0$，使得对于任意满足 $|x| < r_V$的 $x \in X^*$ 以及任意满足 $N_P s \le |x|/2$的 $s > 0$

$$\mathcal{H}^d\big(B_X(x,2s)\big) \le C_V\, \mathcal{H}^d\big(B_X(x,s)\big), \tag{2}$$

$$\int_{B_X(x,N_P s)} |\nabla_X f|^2\, d\tau \ge \frac{a_P}{s^2} \inf_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{B_X(x,s)} (f-\xi)^2\, d\tau \qquad \text{for } f \in C^1\big(B_X(x,N_P s)\big). \tag{3}$$

设 $b \ge 2$。 X 满足*(RA$_b$)*，如果存在 $\Lambda_A \ge 1$ 和 $r_A > 0$，使得对于 $r < r_A$，L_r 中的任意两点都是一条曲线的端点，且该曲线包含于 $A(r/b, br)$ 中，长度至多为 $\Lambda_A r$。

当 r_V and r_A 减小时，这两个条件仍然成立；我们始终假设 $r_V \le r_0/2$ and$r_A \le r_0/(2b)$。不等式（3）是膨胀常数为 N_P [SC92]、限制在满足 $N_P s \le |x|/2$ 的球上的弱 Poincar´e 不等式。条件（VP）是 Grigor'yan 和 Saloff-Coste[GSC05，定义 4.1]，意义下，在奇异点附近对应于远端球上的体积倍增和 Poincar´e 的类比，其中以 $\{0\}$ 替代无穷远区域。由于 $d_X \ge |\cdot|$，条件$N_P s \le |x|/2$ 给出 $B_X(x, N_P s) \subset X^*$，其在 X^* 中具有紧致闭包。测试函数

在（3）中通过稠密性延拓到索 Sobole夫空间 $W^{1,\,2}(B_X(x,\ N_P s))$. 条件（RA$_b$）以 Grigor'yan 和 Saloff-Coste [GSC05，定义 5.1] 中的相对连通环域为模型。

4.2 球和环域上的 Harnack 不等式

从 (VP) 推导出条件 (H$_b$) 分两步进行：先是在远离 0 的内蕴球上建立 Harnack 不等式（引理 4.4），然后沿着 (RA$_b$) 中的曲线串联这类球（命题 4.5），如 [GSC05，引理 6.3] 所述。第一步需要两个已知结果，因为 (VP) 不直接满足 Grigor'yan 和 Saloff-Coste 经典定理的假设。(VP) 中的 Poincar´é 不等式具有任意的膨胀常数 N_P，由于双利普希茨同胚会使其增大，无法将其固定为 2（命题 4.6）；定理 4.2则在一个球内将其恢复为 2。空间 X^* 并不完备；定理 4.3 给出了开集上的 Harnack 不等式，且无需任何完备性假设。

定理 *4.2*（*A. Bj¨orn* 和 *J. Bj¨orn* [*BB18*，定理 *5.*1]）。设 B_0 是一个度量测度空间中的球；对于包含于 B_0中的每个球，倍增性质和指数为 *2*、膨胀常数为 λ_{D} 的弱 *Poincar´e* 不等式均成立，并且测度满足 $\tau(B')/\tau(B) \geq C_{\dagger}(r_{B'}/r_B)^{\varkappa}$，其中球为 $B' \subset B \subset B_0$，常数为 $C_{\dagger}$、$\varkappa > 0$。若 B_0 中的任意两点均可由一条长度至多为两点间距离 L_Q 倍的曲线连接，则对每个满足 $\frac{5}{2}L_Q B \subset B_0$的球 B，*Poincar´e* 不等式成立，等式两边的指数均为 *2*，膨胀常数为 L_Q，且其常数仅取决于前述常数。

定理 *4.3*（*Lierl* 和 *Saloff-Coste* [*LSC14*，定理 *5.2(i)* 和第 5] 节）。设 $\mathcal{O}$ 是一个空间的开子集，该空间带有对称、强局部、正则的狄利克雷型，其内蕴距离诱导该空间的拓扑，并且只要 $B(x,2r) \subset \mathcal{O}$，$B(x,r)$ 就是相对紧的。若对满足$B(x,2r) \subset \mathcal{O}$的球 $B(x,r)$，倍增性质和膨胀常数为 *2* 的 *Poincar´e* 不等式均成立，则抛物型*Harnack*不等式在 $\mathcal{O}$ 上成立，因而椭圆型不等式也成立：对于每个 $\delta \in (0,1)$，存在 $C_E \geq 1$，使得对 $B(x,r)$ 上的每个调和函数 $v > 0$，均有 $\sup_{B(x,\delta r)} v \leq C_E \inf^{B(x,\delta r)} v$，只要 $B(x,2r) \subset \mathcal{O}$。

常数 C_E 仅取决于 δ 以及倍增和庞加莱´常数：在 Saloff-Coste 通过莫泽迭代给出的证明中，[SC92，定理 3。1]，局部索оболев不等式 [SC92，定理 2。1]和平均值估计 [SC92，定理 3。2] 的常数仅取决于这些常数。

引理 4.4。若 X 满足 *(VP)*，则存在 $C_E \geq 1$，其仅取决于 C_V、a_P、N_P，并具有以下性质。设 $x_0 \in X^*$ 满足 $|x_0| < r_V/2$ 和 $R_E := |x_0|/(16N_P^2)$。每个调和函数$v > 0$ 在 $B_X(x_0, R_E/12)$ 上都满足

$$\sup_{B_X(x_0,R_E/24)} v \leq C_E \inf_{B_X(x_0,R_E/24)} v.$$

证明。设 $B_0 := B_X(x_0,\ R_E)$。

步骤 *1*：包含于 B_0 中的球的半径。令 $B_X(x,\ s) \subset B_0$。则 $|x| > |x_0| - R_E = (16N_P^2 - 1)R_E \geq 63R_E$，特别地，$|x| > |x_0|/2$，且 $|x| < |x_0| + R_E < r_V$。沿着

连接 x 与 0 的引理 2.4 中的曲线，函数 $d_X(x,\cdot)$ 连续，并取得 $[0,|x|)$ 中的每一个值；如果 $s>2R_E$，则曲线上存在一点 w，使得 $2R_E<d_X(x,w)<\min\{s,|x|\}$，从而 $w\in B_X(x,s)$ 且 $d_X(w,x_0)>R_E$，矛盾。因此 $s\le 2R_E$,$N_P s\le |x_0|/(8N_P)\le |x|/2$，并且根据 (VP)，倍增性质和 (3) 对 $B_X(x,s)$ 成立。此外，取$k_P:=\lceil \log_2 N_P\rceil$，在 x 处的倍增性质适用于半径 $2^j s$、$0\le j<k_P$，因为 $N_P 2^j s<N_P^2 s\le |x_0|/8\le |x|/2$；因此

$$\tau\big(B_X(x,N_P s)\big)\le \tau\big(B_X(x,2^{k_P}s)\big)\le C_V^{k_P}\,\tau\big(B_X(x,s)\big). \tag{4}$$

此外，设 $B'=B_X(x',\ s')\subset B=B_X(x,\ s)\subset B_0$。那么 $B\subset B_X(x',\ 2s)$；对 B'应用同样的论证可得 $s'\le 2s$；在 x' 处对半径 $t<2s\le 4R_E$反复应用倍增性质，由于$N_P t\le |x_0|/(4N_P)\le |x'|/2$，我们得到 $\tau(B')/\tau(B)\ge C_V^{-2}(s'/s)^{\varkappa}$，其中 $\varkappa=\log_2 C_V$。

步骤 *2*：狄利克雷空间。考虑形式 $\mathcal{E}(f):=\int|\nabla_X f|^2\,d\tau$在 $L^2(X^*,\ \tau)$ 上的形式，它是定义在 X^* 中的紧支集光滑函数上的形式的闭包；它是对称的、强局部的且正则的，其内蕴距离就是 X^* 的黎曼距离。对于 $y,\ w\in B_0$，任何一条从 y 出发并经过 0 到达 w 的曲线，其长度至少为 $|y|+|w|>6R_E>d_X(y,\ w)$；而从 y 出发、长度小于 $2R_E$ 的曲线始终留在 $B(0,\ |y|+2R_E)\subset B(0,\ r_0)$ 内（若 $r_V\le r_0/2$），这一条件不构成限制；因此，在 B_0 上，内蕴距离与 d_X 一致。球 B_0 在 X^* 中有紧致闭包。

步骤 3：将膨胀常数约化为 2。我们将定理 4.2 应用于带有测度 τ 的度量空间 (X^*,d_X)。在黎曼流形上，利普希茨函数f的每个上梯度几乎处处都不小于 $|\nabla_X f|$，且平均值使 $\xi\mapsto\int(f-\xi)^2$ 最小。由稠密性，不等式 (3) 可从 C^1 延拓到所涉及各个球的牛顿空间 N^1,2；在黎曼流形上，该空间与 W^1,2 重合，且 $f\in N^1$,2 的最小弱上梯度几乎处处等于 $|\nabla_X f|$；因此，(VP) 给出定理 4.2 中的 Poincar´e 不等式，该不等式在B_0内对由函数和上梯度组成的所有配对均成立，且 $\lambda_{\mathrm{D}}=N_P$。距离 d_X 是长度距离，并且 B_0 中的任意两点都可由 X^* 中的一条曲线连接，其长度至多为$2d_X$；由定理 4.2，取 $L_Q=2$，可知对于满足 $5B\subset B_0$ 的球 B，膨胀常数为 2 的 Poincar´e 不等式成立，其常数仅取决于 $C_V,\ a_P,\ N_P$。定理 4.2 以平均值的形式表述。对于球 $B=B_X(x,s)\subset B_0$，将 (3) 除以 $\tau(B)$ 并利用 (4)，可得

$$\frac{1}{\tau(B)}\int_B|f-f_B|^2\,d\tau\le\frac{C_V^{k_P}}{a_P}\,s^2\,\frac{1}{\tau(N_P B)}\int_{N_P B}|\nabla_X f|^2\,d\tau,$$

其中 f_B 是 f 在 B上的平均值，它使 $\xi\mapsto\int_B(f-\xi)^2$达到最小值；这是定理 4.2所要求的平均不等式，其常数仅依赖于 C_V、a_P、N_P。反过来，定理 4.2 中膨胀常数为 2 的平均不等式，正是定理 4.3中采用的形式。

步骤 4：$\mathcal{O}$上的 Harnack 不等式。令 $\mathcal{O}:=B_X(x_0,R_E/6)$。如果 $B_X(x,2t)\subset\mathcal{O}$，则将步骤 1 的论证应用于 $\mathcal{O}$可得 $2t\le R_E/3$，并且 $d_X(x,x_0)<R_E/6$；因此 $B_X(x,5t)\subset B_X(x_0,\ R_E/6+5R_E/6)=B_0$。于是，对于所有满足 $B_X(x,2t)\subset\mathcal{O}$ 的球 $B_X(x,t)$，倍增性质和膨胀常数为 2 的 Poincar´é 不等式均成立，定理 4.3 可应用于 $\mathcal{O}$。取 $x=x_0,r=R_E/12$

且 $\delta = 1/2$，从而 $B_X(x_0,\ 2r) = \mathcal{O}$，即得所述结论，其中 C_E 为定理 4.3 中的常数，适用于 $\delta = 1/2$。 □

命题 4.5. 若 X 满足 *(VP)* 和 *(RA$_b$)*，则它满足 *(H$_{2b}$)*，其中 $C_H \le C_E^{n_A}$，且 $n_A := \lceil \Lambda_A b/\varepsilon_E \rceil + 1$，$\varepsilon_E := 1/(384N_P^2)$。并且 C_E 是引理 4.4 中的常数。特别地，*(VP)* 和 *(RA$_2$)* 蕴含 *(H)*。

证明。设 $x_0 \in X^*$ 满足 $|x_0| < r_V/2$。引理 4.4 给出：对定义在球 $v > 0$ 上的任意调和函数 $B_X(x_0,\ |x_0|/(192N_P^2))$，

$$\sup_{B_X(x_0,\varepsilon_E|x_0|)} v \le C_E \inf_{B_X(x_0,\varepsilon_E|x_0|)} v.$$

令 $r < \min\{r_V, r_A\}/(2b)$，设 $v \ge 0$ 在 $A(r/(2b)\ 2br)$ 上调和，且 $y, y' \in L_r$。环域是连通的，因此根据强最大值原理，要么 $v \equiv 0$，此时无需证明；要么 $v > 0$；我们假设 $v > 0$。设 σ_A 为 (RA$_b$) 中的曲线，它包含于 $A(r/b, br)$，且长度至多为 $\Lambda_A r$；再设 $p_0 = y, p_1, \dots, p_n = y'$ 是 σ_A 中满足 $d_X(p_{i-1}, p_i) < \varepsilon_E r/b$ 的点；可以取 $n \le n_A$。对每个 i，我们有 $r/b \le |p_i| \le br < r_V/2$；并且由于 $\big||w| - |p_i|\big| \le d_X(w, p_i)$，球 $B_X(p_i, |p_i|/(192N_P^2))$ 包含于 $A(r/(2b)\ 2br)$。由于 $p_i \in B_X(p_{i-1}, \varepsilon_E|p_{i-1}|)$，取 $x_0 = p_{i-1}$ 应用前述估计可得 $v(p_i) \le C_E v(p_{i-1})$ 且 $v(p_{i-1}) \le C_E v(p_i)$；迭代可得 $v(y') \le C_E^{n_A} v(y)$。

□

4.3 双利普希茨不变性

命题 4.6。 设 Ψ 是一个同胚，将集合 Y 中 $\Psi(0) = 0$ 的邻域映到 X 中 0 的邻域，其中 X 和 Y 如上所述，并且关于 d_X 和 d_Y 是双利普希茨的，常数为 K_Ψ。若 Y 满足 *(VP)*，则 X 也满足 *(VP)*，且

$$N_P' = 2N_P K_\Psi^3 C_0^Y, \qquad C_V' = K_\Psi^{2d} C_V^{m_\Psi}, \qquad a_P' = a_P K_\Psi^{-2d-4}, \qquad m_\Psi := \lceil \log_2(2K_\Psi^2) \rceil,$$

其中 C_0^Y 是 (1) 关于 Y 的常数，并且 $r_V' = r_V/(K_\Psi C_0^X)$，必要时缩小其取值，使所涉及的球都包含在 Ψ 的定义域内。

证明。 Ψ 在 X^* 上几乎处处可微，其雅可比矩阵几乎处处介于 K_Ψ^{-d} 和 K_Ψ^d 与 $|\nabla_X(F \circ \Psi)| \le K_\Psi |\nabla_Y F| \circ \Psi$ 之间。设 $x \in X^*$ 和 $y = \Psi(x)$。对于每个 $t > 0$，我们有 $B_Y(y,\ t/K_\Psi) \subset \Psi(B_X(x,\ t)) \subset B_Y(y,\ K_\Psi t)$。因此

$$\mathcal{H}^d(B_X(x, 2s)) \le K_\Psi^d \mathcal{H}^d(B_Y(y, 2K_\Psi s)) \le K_\Psi^d C_V^{m_\Psi} \mathcal{H}^d(B_Y(y, s/K_\Psi)) \le K_\Psi^{2d} C_V^{m_\Psi} \mathcal{H}^d(B_X(x, s)),$$

并且，对于 $f \in C^1(B_X(x,\ N_P K_\Psi^2 s))$ 和 $F := f \circ \Psi^{-1}$，

$$\inf_\xi \int_{B_X(x,s)} (f-\xi)^2 \le K_\Psi^d \inf_\xi \int_{B_Y(y,K_\Psi s)} (F-\xi)^2 \le \frac{K_\Psi^{d+2} s^2}{a_P} \int_{B_Y(y,N_P K_\Psi s)} |\nabla_Y F|^2$$
$$\le \frac{K_\Psi^{2d+4} s^2}{a_P} \int_{B_X(x,N_P K_\Psi^2 s)} |\nabla_X f|^2;$$

此处（3）对于 Y 通过稠密性推广到利普希茨函数。所涉及的球 Y 的半径在倍增估计中至多为 $2K_\Psi^2 s$，而在庞加莱不等式中至多为 $N_P K_\Psi s$；它们在 Y 中的可容许性由 $|y| \geq d_Y(y, 0)/C_0^Y \geq |x|/(K_\Psi C_0^Y)$ 推出，只要 $N'_P s \leq |x|/2$。右侧的积分从 $B_X(x, N_P K_\Psi^2 s)$ 延伸至 $B_X(x, N'_P s)$。 □

引理 4.7. 设 X, Y, Ψ 如命题 4.6中所述。如果 Y 满足 (RA_b)，那么 X 满足 $(RA_{b'})$，且

$$b' = bK_\Psi^2 C_0^X C_0^Y, \qquad \Lambda'_A = K_\Psi^2 C_0^X (2 + \Lambda_A),$$

并且 $r'_A = r_A/(bK_\Psi C_0^X)$，必要时缩小范围，使所涉及的曲线都位于 Ψ 的像内。

证明. 设 $y, y' \in L_r^X$, $\hat{}y = \Psi(y)$, $\hat{}y' = \Psi(y')$。由 (1) 以及 Ψ, $|\hat{}y|, |\hat{}y'| \in [r/(K_\Psi C_0^Y)\ K_\Psi C_0^X r]$ 的双利普希茨性质可得。对于 Y，我们用引理 2.4 中的曲线将 $\hat{}y'$ 与 $L^Y_{|\hat{}y|}$ 上的一点连接起来；这条曲线位于半径为 $|\hat{}y'|$ 和 $|\hat{}y|$ 的球面之间，长度至多为 $2K_\Psi C_0^X r$。再用 $A_Y(|\hat{}y|/b, b|\hat{}y|)$ 中满足 (RA_b) 的曲线将该点与 $\hat{}y$ 连接起来，其长度至多为 $\Lambda_A K_\Psi C_0^X r$。经过 Ψ^{-1} 的像的长度至多为 $\Lambda'_A r$。对于其中一点 w，有

$$|w| \geq \frac{d_X(w,0)}{C_0^X} \geq \frac{d_Y(\Psi(w),0)}{K_\Psi C_0^X} \geq \frac{|\Psi(w)|}{K_\Psi C_0^X},$$
$$|w| \leq d_X(w,0) \leq K_\Psi d_Y(\Psi(w),0) \leq K_\Psi C_0^Y |\Psi(w)|;$$

由于 $|\Psi(w)| \in [r/(bK_\Psi C_0^Y)\ bK_\Psi C_0^X r]$，我们得到 $w \in A(r/b', b'r)$。 □

4.4 广义喇叭

定义 4.8. 设 $L \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 是一个维数为$d-1$ 的紧致连通解析子流形，且设 $\gamma \geq 1$ 为有理数。指数为 γ、截面为 L 的广义喇叭 定义为

$$X_{\gamma,L} := \{(z^\gamma y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \ y \in L,\ z \geq 0\}.$$

令 $\Pi(z, y) := (z^\gamma y, z)$，其中 h_L 为 L上诱导的度量，$a_L :=$ 为$_L\,|y|$的最大值，$D_L :=$ 为$_{h_L}L$的直径，$\lambda_L > 0$为(L, h_L)的拉普拉斯算子的第一个非零特征值，并且 $k_L \geq 0$ 满足 $\mathrm{Ric}_{h_L} \geq -(d-2)k_L^2$。

由于 L 在 $\mathbb{R}^d$ 中是闭集，且在其每个点附近都是有限个解析函数的零点集，因此 L是半解析的，进而是次解析的；由于 γ 是有理数，$X_{\gamma,\,L}$ 在 0 附近是次解析的。 Π是从 $(0, \infty)$ 到 $X^*_{\gamma,\,L}$上的一个嵌入。对于 $\gamma = 1$，得到一个锥；对于 L，得到一个椭球，即例 4.14中的尖点，其中 $\gamma = m/2$；对于 L 为球面时，则得到第 5.4 节中的旋转尖点。体积满足 $\mathcal{H}^d(X_{\gamma,\,L} \cap B(0, r)) \approx r^{1+\gamma(d-1)}$。

引理 *4.9.* 设 $Z_L := (\mathbb{R} \times L,\ dv^2 + h_L)$。设 $k'_L := \max\{k_L, 1\}$, $R_0 := 2k'_L D_L$，令 $\mathcal{B}$ 为维数为 d、曲率为 -1的球的体积，并令 $c_{\mathrm{B}} = c_{\mathrm{B}}(d) \in (0, 1)$ 为 *Buser* *[Bus82]* 的引理 *5.1* 中的常数。对于任意 $p \in Z_L$, $t > 0$ 和利普希茨 f,

$$\mathrm{vol}\, B_{Z_L}(p, 2t) \leq C_{Z,V}\, \mathrm{vol}\, B_{Z_L}(p, t), \qquad \inf_\xi \int_{B_{Z_L}(p,t)} (f-\xi)^2 \leq C_{Z,P}\, t^2 \int_{B_{Z_L}(p,2t)} |\nabla f|^2,$$

with

$$C_{Z,V} := \max\Big\{ \sup_{0<\varrho\le R_0} \frac{\mathcal{B}(2\varrho)}{\mathcal{B}(\varrho)},\, 8\Big\}, \qquad C_{Z,P} := \max\Big\{4c_{\mathrm{B}}^{-2(1+R_0)},\, \frac{4}{\pi^2},\, \frac{1}{4D_L^2\lambda_L}\Big\}.$$

证明。 Z_L 是完备非紧流形，且里奇曲率 $\ge -(d-2)k_L^2 \ge -(d-1)k_L'^2$。根据 [Bus82，第 7], 节的估计式（4.3.3）和引理 5.1 [Bus82], 仅通过比较式（4.2）–（4.3）使用曲率，因此对完备非紧流形也成立；我们将其应用于度量 $k_L'^2(dv^2 + h_L)$，它满足里奇曲率 $\ge -(d-1)$。

半径 $t \le 2D_L$。在缩放度量下，该球的半径为 $\varrho = k_L' t \le R_0$。[Bus82] 的估计式（4.3.3）给出 $\operatorname{vol} B_{Z_L}(p,2t) \le {}^{\mathcal{B}}{}_{(2\varrho)\,\mathcal{B}(\varrho)} \operatorname{vol} B_{Z_L}(p,t)$；$C_{Z,V}$ 中的上确界是有限的，因为该比值在 $\varrho \to 0$ 时趋于 2^d。按照 [Bus82], 第 5 节及引理 5.1 的意义，度量球相对于中心呈星形；由 $r = R = \varrho$ 可得诺伊曼等周常数的如下界

$$\mathfrak{h}(D) = \inf\Big\{ \frac{\operatorname{vol}_{d-1}(\partial A \cap \operatorname{int} D)}{\operatorname{vol} A} :\ A \subset D,\ \operatorname{vol} A \le \tfrac{1}{2}\operatorname{vol} D \Big\}$$

在缩放度量下的界 $\mathfrak{h} \ge c^{1+\varrho}{}_{\mathrm{B}}/\varrho \ge c^{1+R_0}{}_{\mathrm{B}}/\varrho$，即 $\mathfrak{h}(B_{Z_L}(p,t)) \ge c^{1+R_0}{}_{\mathrm{B}}/t$。切格不等式采用 [Bus82 第 1], 节中回顾的相对紧区域形式，可在同一个球上得到常数为 $4\mathfrak{h}^{-2} \le 4c^{-2(1+R_0)}{}_{\mathrm{B}}\, t^2$ 的 Poincaré 不等式。

半径 $t \ge 2D_L$。令 $p = (v_0, \ell)$ 和 $I(t') := (v_0 - t', v_0 + t')$，其中 $t' > 0$。由于 $d_{Z_L}((v,\ell'),p)^2 \le |v - v_0|^2 + D_L^2$ 且 $d_{Z_L} \ge |v - v_0|$，我们有 $I(t/2) \times L \subset B_{Z_L}(p,t) \subset I(t) \times L$，因为 $t^2/4 + D_L^2 < t^2$。因此 t 体积 $L \le$ 体积 $B_{Z_L}(p,t) \le 2t$体积 L，并且倍增性质成立，常数为 8。此外 $Q := I(t) \times L \subset B_{Z_L}(p, \sqrt{t^2 + D_L^2}) \subset B_{Z_L}(p,2t)$，而乘积 Q 的首个非零诺伊曼特征值为 $\min\{\pi^2/(2t)^2, \lambda_L\}$;因此

$$\begin{aligned}\inf_{\xi} \int_{B_{Z_L}(p,t)} (f-\xi)^2 &\le \int_Q (f - f_Q)^2 \le \max\Big\{\frac{4t^2}{\pi^2}, \frac{1}{\lambda_L}\Big\} \int_Q |\nabla f|^2 \\ &\le \max\Big\{\frac{4}{\pi^2}, \frac{1}{4D_L^2\lambda_L}\Big\} t^2 \int_{B_{Z_L}(p,2t)} |\nabla f|^2,\end{aligned}$$

其中 f_Q 是 Q 上的平均值，并且我们使用了 $t \ge 2D_L$。 □

命题 4.10。设 $\gamma > 1$ 且令 $z_0 \in (0,1]$，其中 $\delta_L(z_0) \le \frac{1}{2}$，并且 $\delta_L(z) := \gamma^2 a_L^2 z^{2\gamma-2} + \gamma a_L z^{\gamma-1}$。令 $K_\gamma := 2^{\gamma+1}$，则 $X_{\gamma,L}$ 满足

(i) (VP) with $r_V = z_0/2$, $N_P = 128K_\gamma^2$, $C_V = K_\gamma^{2d} C_{Z,V}^{\lceil \log_2(2K_\gamma^2)\rceil}$ *and* $a_P = K_\gamma^{-2d-4}/C_{Z,P}$;

(ii) (RA₂)，其中 $\Lambda_A = 1 + 2D_L$ 且 $r_A = z_0$。

特别地 $X_{\gamma,\,L}$ 满足 *(H)*。

证明。*Co* 与扭曲积的比较。对于切于 $(0,\ \infty) \times L$ at $(z,\ y$ 的向量 $(\dot z,\ \dot y)$),

$$\Pi^* g(\dot z, \dot y) = (1 + \gamma^2 z^{2\gamma-2}|y|^2)\dot z^2 + 2\gamma z^{2\gamma-1}\langle y, \dot y\rangle \dot z + z^{2\gamma}|\dot y|^2.$$

令 $g_0 := dz^2 + z^{2\gamma} h_L$，由 $|y| \le a_L$、$|\langle y,\ \dot y\rangle| \le a_L|\dot y|$ 和 $2z^{2\gamma-1}|\dot z||\dot y| \le z^{\gamma-1}(\dot z^2 + z^{2\gamma}|\dot y|^2)$ 可得 $|\Pi^* g - g_0| \le \delta_L(z)\, g_0$；因此对于 $z \le z_0$，我们有 $\frac{1}{2} g_0 \le \Pi^* g \le \frac{3}{2} g_0$。此外，$z \le |\Pi(z,\ y)| \le z(1 + a_L^2 z^{2\gamma-2})^{1/2} \le 2z$。

约化到切片。令 $x = \Pi(z_c, y_c)$，其中 $|x| < z_0/2$ 且 $s > 0$ 满足 $N_P s \le |x|/2$；则 $z_c < z_0/2$ 且 $s \le z_c/N_P$。下文所用的球的半径至多为 $\rho_* := 2K_\gamma^2 s \le z_c/64$。我们在切片 $F := \{|z - z_c| \le z_c/2\}$ 上定义 $g_1 := dz^2 + z_c^{2\gamma} h_L$，在该切片上 $z \le 3z_c/2 < z_0$，因此与扭曲积的比较成立。在 F 上，我们有 $(z/z_c)^{2\gamma} \in [2^{-2\gamma}, (3/2)^{2\gamma}]$，故 $K_\gamma^{-2} g_1 \le \Pi^* g \le K_\gamma^2 g_1$。我们用 $B_1(x, t)$ 表示 $(\mathbb{R} \times L, g_1)$ 的球，并将其与经 Π 映射所得的像等同。对于 $0 < t \le \rho_*$，

$$B_1(x, t/K_\gamma) \subset B_X(x, t) \subset B_1(x, K_\gamma t). \tag{5}$$

事实上，从 x 出发、g_1-长度小于 t/K_γ 的曲线满足 $|z - z_c| < t \le \rho_*$，因此始终留在 F 中；该曲线相对于 $\Pi^* g$ 的长度小于 t。从 x 出发、在 X 中长度小于 t 的曲线不会到达 0，因为 $t < |x|$，并且满足 $|z - z_c| < \sqrt{2}\, t$，因为 $\Pi^* g \ge \frac{1}{2} dz^2$；它始终留在 F 中，其 g_1-长度小于 $K_\gamma t$。流形 $(\mathbb{R} \times L,\ g_1)$ 是完备的，并且与 Z_L 相似，比例因子为 z_c^γ。

(i). 引理 4.9 的倍增性质和庞加莱不等式在相似变换下保持不变，并且对 g_1 成立，常数为 $C_{Z,V}$、$C_{Z,P}$；庞加莱不等式的膨胀常数为 2。对于恒等映射，我们重复命题 4.6 证明中的计算，取常数 K_γ，雅可比矩阵介于 K_γ^{-d} 和 K_γ^d 之间，并以 $(\mathbb{R} \times L,\ g_1)$ 代替 Y。计算仅用到球 $B_1(x,\ 2K_\gamma s)$、$B_1(x,\ s/K_\gamma)$ 和 $B_X(x,\ 2K_\gamma^2 s)$ 满足包含关系 (5)，且半径至多为 ρ_*，并得到 (i)，因为 $2K_\gamma^2 \le N_P$。

(ii)。设 $r < z_0$，并令 $p_j = \Pi(z_j, y_j) \in L_r$，$j = 1,\ 2$。于是 $z_j \in [r/2, r]$。曲线 $t \mapsto \Pi(t, y_1)$，其中 t 位于 z_1 与 z_2 之间，其长度至多为 $\sqrt{3/2}\,|z_1 - z_2| \le r$；曲线 $\Pi(z_2, \sigma_L(\cdot))$，其中 σ_L 是从 y_1 到 y_2 的 (L, h_L) 的最短测地线，其长度至多为 $\sqrt{3/2}\, z_2^\gamma D_L \le 2\overline{D_L} r$，因为 $r \le 1$。沿着两条曲线，$|\Pi(t, y)| \in (t, 2t)$，其中 $t \in [r/2, r]$，因为 $0 \notin L$ 和 $a_L^2 t^{2\gamma-2} < 3$；因此这些曲线都位于 $A(r/2, 2r)$ 中。

最后一个断言由命题4.5得出。 □

命题 *4.11*（锥）。设 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ 是一个光滑、紧致、连通子流形 $\Sigma \subset S^{N-1}$ 上的锥，其维数为 $d - 1$，诱导度量为 h_Σ，且 $D_\Sigma := \mathit{diam}_{h_\Sigma}\Sigma$。那么，对每个 $r_V > 0$，$\mathcal{C}$ 都满足 *(VP)*，其中 $N_P = 128K_1^2$，$K_1 := 4$，并且命题 *4.10* 中的常数 C_V，a_P 取 $\gamma = 1$ 和 L 分别替换为 Σ；此外，对 $r_A > 0$ 的每个取值，$\mathcal{C}$ 也满足 *(RA$_2$)*，其中 $\Lambda_A = \mathit{max}\{1, D_\Sigma\}$。特别地，$\mathcal{C}$ 满足 *(H)*。

证明。在 $x = \rho\vartheta$、$\vartheta \in \Sigma$ 坐标下，$\mathcal{C}$ 的度量为 $g = d\rho^2 + \rho^2 h_\Sigma$。我们重复命题 4.10 的证明，将其中的 $z = \rho$、$\gamma = 1$ 和 L 替换为 (Σ, h_Σ)，取 $g_0 = g$：与扭曲积的比较为等式，$|x| = \rho$，且关于 z_0 的条件不起作用。在切片 $\{|\rho - \rho_c| \le \rho_c/2\}$ 上，度量 $g_1 := d\rho^2 + \rho_c^2 h_\Sigma$ 满足 $K_1^{-2} g_1 \le g \le K_1^2 g_1$，而 (i) 的其余证明不变；引理 4.9 可应用于 (Σ, h_Σ)，它是紧致、连通且

光滑的。对于 (RA$_2$)，两点 $\rho\vartheta_1, \rho\vartheta_2 \in L_\rho$ 在 L_ρ 中由曲线 $\rho\,\sigma_\Sigma(\cdot)$连接，其中 σ_Σ 是 (Σ, h_Σ) 的一条最短测地线，长度至多为 $D_\Sigma\rho$。 □

推论 4.12。 设 Ψ 是从 0 在 X 中的一个邻域到锥的顶点邻域的同胚 $\mathcal{C}$，该锥如命题 *4.11*所述，且 $\Psi(0) = 0$，关于内蕴距离是双利普希茨的，常数为 K_Ψ。则 X 满足 *(VP)*、*(RA$_{b'}$)* 和 *(H$_{2b'}$)*，其中 $b' = 2K_\Psi^2 C_0^X C_0^{\mathcal{C}}$，并且 X^* 附近的每个有界调和函数 0 都连续延拓到 0。

证明。 由命题 4.11、命题 4.6、引理 4.7和命题 4.5可得；连续性由定理 3.2得出。

□

注 4.13。 命题 4.11 属于 Akutagawa、Carron 和 Mazzeo 关于分层空间的结果范畴 [ACM15，命题 3.1 和定理 A]。仅与锥双 Lipschitz 等价的芽不带有迭代边度量，而推论 4.12是由命题 4.6的双利普希茨不变性得到的；对于非球面链接，Wan 已证明度量与 $|x|^{2\nu}|dx|^2$ 准等距时 H¨older 连续性 Wan18]。

例 4.14 （椭圆尖点）。 设 a_1、……、$a_d > 0$、 $m > 2$ 为有理数，且

$$X := \Big\{(x, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{d} \frac{x_i^2}{a_i^2} = z^m,\ z \geq 0\Big\}, \qquad d \geq 2.$$

则 $X = X_{m/2,\ L_a}$，其中 $L_a : = \{y \in \mathbb{R}^d : \ \sum_i y_i^2/a_i^2 = 1\}$，根据命题 4.10 X 满足 (VP)、(RA$_2$) 和 (H)。椭球 L_a 是严格凸的，并且根据高斯方程具有正截面曲率，因此可以取 $k_{L_a} = 0$。椭圆尖点与锥不双 Lipschitz 等价： L_r 的内在直径的阶为 $r^{m/2} = o\,(r)$，而 L_r 在一个双利普希茨同胚下映射到锥 Ψ 后，与每条母线相交于满足 $\rho \geq r/K_\Psi$的点，并且其直径至少为 r/K_Ψ的某个正常数倍，该常数取决于该锥的链接。

定理 4.15. 设 X 如上所述，其维数为 $d \geq 2$，并设 Ψ 是从 0 在 X 中的一个邻域到 0 在 X_γ 中的一个邻域的L同胚， $\Psi(0) = 0$关于内蕴距离是双利普希茨的，其中 $\gamma \geq 1$ 和 L 如定义 *4.8* 所述。那么，在 X^* 靠近 0的每个有界调和函数都能连续延拓到 0。

证明. X 中 0 的去心邻域与 $X_{\gamma,L}$ 中的去心邻域同胚，因此 X 的链接是连通的。若 $\gamma = 1$, X_1, L 是链接 $\{(y, 1)/|(y, 1)| : \ y \in L\}$上的锥，而该链接解析、紧致且连通，则由推论 4.12 可得结论。设 $\gamma > 1$。由命题 4.10， $X_{\gamma,L}$ 满足 (VP) 和 (RA$_2$)。由命题 4.6 X 满足 (VP)；由引理 4.7，它满足 (RA$_{b'}$)；由命题 4.5，它满足 (H$_{2b'}$)，于是由定理 3.2 得证。

□

注记 4.16 （情形 $d = 2$）。 对于 $d = 2$ 且链接连通的情形，该芽在内在度量下与广义喇叭双 Lipschitz 等价 $X_{\gamma,\ S^1} = \{x^2 + y^2 = z^{2\gamma},\ z \geq 0\}$ 其中$\gamma \geq 1$ （Birbrair [Bir08，定理 8.1 和 8.3]）；指数 γ 是有理数，因为次解析

单变量函数存在 Puiseux 型展开。因此，定理4.15仅凭芽的双 Lipschitz 类型，而非共形结构，即可恢复 $d = 2$ （Mosca [Mos26], Grieser [Gri03]），可去性。

5 正调和函数：渐近分解与 Bˆocher 型定理

本节讨论第 1.1 节中关于 $d \geq 3$ 的 Bˆocher 性质。正则点的情形即 Bôcher定理 [Bˆoc03] （参见 Axler、Bourdon 和 Ramey [ABR92]）。

以下各处， $X \subset \mathbb{R}^N$ 均与第 1.1 节中的定义相同，其链接 L 连通，且 $d =$ 维数为 $X \geq 3$；第 5.5 节除外，该节中 $d \geq 2$。

5.1 渐近分解条件

根据乘积结构（第 2.1 节），我们将 $X \cap B(0,\ r_0) \setminus \{0\}$ 与 $L \times (0,\ r_0)$ 等同。我们用 $\mathcal{P}$ 表示定义在 0 的某个穿孔邻域 Ω_r 上的正调和函数集合，$0 < r \leq r_0$。

定义 5.1 (条件（AD）)。 X 满足渐近分解条件（AD），如果存在 $r_G \in (0,\ r_0]$ 以及 Ω_{r_G} 上的一个调和函数 $G_X > 0$，使得当 $\rho \to 0$ 时， $G_X \to +\infty$ 一致收敛于$y \in L$ （即奇异剖面），并满足以下性质：对于每个 $u \in \mathcal{P}$，若其定义在 Ω_r上，则存在 $r' \in (0,\ \min\{r, r_G\}]$, $q \geq 0$ 以及 $\Omega_{r'}$ 上的一个有界调和函数 u_{b}，使得$u = qG_X + u_{\mathrm{b}}$ 在 $\Omega_{r'}$上成立。

条件（AD）是 X 在 0 处的芽的一种性质。不能要求该分解在某个固定的穿孔邻域内成立：正调和函数在外侧链接附近可能无界，正如在穿孔单位球中，极点位于单位球面上的 $\mathbb{R}^d$ 单位球的泊松核所示。

若 X 满足 (H_b)，其中 $b \geq 2$，那么根据定理 3.2，函数 u_{b} 可连续延拓至 0。条件（AD）表达了这样一个事实：忽略有界函数后，0 附近的正调和函数构成一个由单个函数生成的锥。渐近剖面通常并非 $\rho^{-(d-2)}$：对于旋转尖点，其阶为 $\rho^{1-m(d-1)/2}$ （命题5.12）；这就是为何（AD）以一般的渐近剖面 G_X来表述。

圆锥情形。 设 (L, h_L) 是一个维数为 $d-1$ 的闭（紧致且无边界）、连通、光滑黎曼流形，并令 $g = d\rho^2 + \rho^2 h_L$ 恰好位于 $L \times (0, r_0)$ 上。这是一个在伸缩变换下保持不变、且在 0 以外光滑的集合的情形：此时 $L = X \cap S^{N-1}$，其度量由单位球面诱导。我们不要求 L 是球面，也不要求满足连通性以外的任何曲率或拓扑条件。令 ϕ_j $(j \geq 0)$ 为 Δ_{h_L} 的特征函数正交归一基， $\Delta_{h_L}\phi_j = -\lambda_j \phi_j$，其中 $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$（$\lambda_0$ 是简单的，因为 L 是连通的）。对于 $u = \sum_j R_j(\rho)\phi_j(y)$，方程 $\Delta_X u = 0$ 等价于

$$\rho^2 R_j'' + (d-1)\rho R_j' - \lambda_j R_j = 0, \qquad \alpha_j^{\pm} = \frac{-(d-2) \pm \sqrt{(d-2)^2 + 4\lambda_j}}{2},$$

其中 $\alpha_j^{\pm}$ 是指标方程 $\alpha^2+(d-2)\alpha-\lambda_j=0$ 的根，且 $R_j=\rho^{\alpha_j^{\pm}}$。我们有$\alpha_0^+=0$、 $\alpha_0^-=-(d-2)$，并且对于 $j\geq 1$，有 $\alpha_j^+>0$、 $\alpha_j^-<-(d-2)$。我们设 $\alpha_1:=\alpha_1^+$。

命题 5.2. 若 X 是带度量 $d\rho^2+\rho^2 h_L$ 的锥，其中 (L,h_L) 是维数为 $d-1\geq 2$ 的闭的、连通的光滑黎曼流形，则条件（*AD*）成立，其中 $G_X=\rho^{-(d-2)}$，且对每个 $u\in\mathcal{P}$，

$$u(y,\rho)=q\,\rho^{-(d-2)}+u_0+O(\rho^{\alpha_1})\qquad(\rho\to 0),\tag{6}$$

关于 $y\in L$ 一致。

证明。令 ˆ u_j ρ $\cdot\rho$ h_L u_j $u_j=$ $c_j^+\rho^{\alpha_j^+}+c_j^-\rho^{\alpha_j^-}$ $j\geq 1$ $u_0=A+B\rho^{-(d-2)}$ $u>0$ $|u_j\ \rho\ |\leq\|\phi_j\|_\infty\int_L u\cdot\rho\ d$ $h_L=()$:

$=\int_L u(\,,)\phi_j\,d$体积 。那么 ˆ 满足上述欧拉方程，因此 ˆ 对于 和 ˆ 。由于 ， ˆ ( ) (,) 体积$\|\phi_j\|_\infty$体积(L) $^{1/2}$ˆ$u_0(\rho)\ \leq C_j(1+\rho^{-(d-2)})$。对于 $j\geq 1$， $\alpha_j^-<-(d-2)$，因此 $c_j^-=0$。令 Ω_r 为 u 的定义域。对于 $\rho\leq r/2$， $|$ˆ$u_j(\rho)|=|$ˆ$u_j(r/2)|(2\rho/r)^{\alpha_j^+}\leq|$ˆ$u_j(r/2)|(2\rho/r)^{\alpha_1}$。光滑函数 $u(\cdot,r/2)$ 在 L 上的系数 ˆu_j $(r/2)$ 比任意 λ_j 的幂都衰减得快，而 $\|\phi_j\|_\infty$ 至多按 λ_j 的某个幂增长：由索伯列夫嵌入 $H^\kappa(L)$ $\subset C^0(L)$，其中 $\kappa>(d-1)/2$，可得 $\|\phi_j\|_\infty\leq C\|\phi_j\|_{H^\kappa}\leq C(1+\lambda_j)^{\kappa/2}$。因此 $\sum_{j\geq 1}$ ˆ$u_j\phi_j=O($ $\rho^{\alpha_1})$ 关于 y 一致。常数模为 $(A+B\rho^{-(d-2)})/\sqrt{}$体积$(L)$；令 $q:=B/\sqrt{}$体积(L)，并令 $u_0:=A/\sqrt{}$体积(L)。我们有 $q\geq 0$，因为否则当 $\rho\to 0$ 时 $u\to-\infty$ 。 □

系数 q 与守恒通量有关：对于调和函数 u, $\mathcal{J}(r):=\int_{L_r}\partial_{\mathbf{n}}u\,d\mathcal{H}^{d-1}$，其中$\mathbf{n}$ 是沿着 ρ增大方向的 L_r 的单位法向量，根据散度定理，该量与 r 无关。

注 5.3 （与文献比较）。 命题5.2证明中的展开是针对锥点的 Kondrat'ev 方法 [Kon67] 。情形 $L=S^{d-1}$ 度量（1+ν）$^2g_{S^{d-1}}$，$\nu>-1$，即度量 $|x|^{2\nu}|dx|^2$ 在 $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$，是 Jiayu Li 和 Fangshu Wan 的定理 1.1[LW19], ，该定理采用相同的方法证明。

5.2 ABˆocher 型定理

引理 5.4 中我们假设条件（AD）；引理5.5中我们假设（AD）和可去性，例如在（H_b)下由定理3.2成立。

引理 5.4 （发散性）。 设 $u\in\mathcal{P}$ 在 0 的每个穿孔邻域上都无界。则当 $\rho\to 0$ 时， $u\to+\infty$ ，且关于 $y\in L$ 一致。

证明。 设 $\Omega_{r'}$ 上的 $u=qG_X+u_{\mathrm{b}}$ 如 (AD) 所述。若 $q=0$，则 $u=u_{\mathrm{b}}$ 在 $\Omega_{r'}$ 上有界，这与假设矛盾；因此 $q>0$。由于 u_{b} 有界，且 $G_X\to+\infty$ 关于 y 一致，$u\to+\infty$ 关于 y 一致。 □

引理 5.5 (奇异部分的消去)。 设 $u_1,u_2\in\mathcal{P}$ 趋于 $+\infty$ ， 当0时。存在$\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$，且不全为零，使得 $\xi_1u_1+\xi_2u_2$ 连续延拓至0。

证明。 设 Ω_{r_i} 上的$u_i = q_i G_X + u_{\mathrm{b},i}$ 如（AD）中所述；由于 u_i 在 0 附近无界， $q_i > 0$。令 $(\xi_1, \xi_2) := (q_2, -q_1)$ 。则$\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 = q_2 u_{\mathrm{b},1} - q_1 u_{\mathrm{b},2}$ 在 $\Omega^{\min\{r_1, r_2\}}$上调和且有界，因此根据可去性，可连续延拓至 0。 □

命题 5.6 (Bˆocher 型定理)。 如果 X 满足 *(AD)* 和可去性，特别是如果它对某个 $b \geq 2$满足 *(AD)* 和 *(H_b)*，那么 *Bˆocher* 性质在 0处成立。

证明。 这就是引理5.4 和5.5的内容。 □

根据命题 5.2和 4.11，命题 5.6 适用于光滑、闭、连通的链接上的锥。下面将其应用于具有正则球面爆破的集合（定理5.9）以及旋转尖点（命题 5.12）。

5.3 正则球面吹起的情形

令 $\mathrm{Bl}_0 X$ 为 $\{(|x|, x/|x|)$ 的闭包： $x \in X^*\}$ 属于 $[0, \infty) \times S^{N-1}$，并令 $\Sigma_0 := \mathrm{Bl}_0 X \cap (\{0\} \times S^{N-1})$，将其与 X 在 0 处的切锥的链接对应起来。

定义 5.7 （条件 (R)）。 X 具有正则球面吹起（简称 (R)），如果 Σ_0 是 S^{N-1} 的一个维数为 $d-1$ 的光滑闭子流形，并且存在一个整数 $\ell \geq 1$、 $\mu_0 > 0$以及一个映射

$$\Theta : [0, \mu_0) \times \Sigma_0 \to [0, \infty) \times S^{N-1}, \qquad \Theta(\mu, y) = (\mu^\ell, \Upsilon(\mu, y)),$$

其中 Υ 属于 C^∞ 类，直至 $\mu = 0$ ，且 $\Upsilon(0, y) = y$，它是到 $\mathrm{Bl}_0 X$ 中 $\{0\} \times \Sigma_0$ 的一个邻域上的同胚，并且将 $(0, \mu_0) \times \Sigma_0$ 微分同胚地映到其像上。

由于 X 在 0 附近是闭的，球面提升 $\{(|x|, x/|x|) : x \in X^*\}$ 在 $(0, r_0) \times S^{N-1}$中是闭的；因此，$\mathrm{Bl}_0 X \cap \{\rho > 0\}$ 在 $\rho = 0$附近与该提升重合，且 Θ 在 $\mu > 0$上的限制参数化了 X^* 中 0 附近的点。若不满足闭性，$\mathrm{Bl}_0 X$定义中的闭包可能会加入不属于 X的点。

注 5.8。 以下各类满足 (R)。

(i) S^{N-1}上的光滑闭子流形之上的锥，其中 $\ell = 1$ 和 $\Theta(\mu, y) = (\mu, y)$。

(ii) 齐次锥的非退化扰动： $X = \{F = 0\}$ 满足 $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-d}$解析， $F = F_k + O(|x|^{k+1})$， F_k 是次数为 $k \geq 1$ 的齐次函数，并且在 $\{F_k = 0\} \setminus \{0\}$的每一点，其 dF_k 的秩为 $N - d$。我们有 $F(\rho\vartheta)/\rho^k = F_k(\vartheta) + \rho R(\rho, \vartheta)$，其中 R解析。根据欧拉恒等式，在 $\Sigma_0 := \{F_k = 0\} \cap S^{N-1}$上的点处， $dF_k(\vartheta)\vartheta = kF_k(\vartheta) = 0$ ，因此 $dF_k(\vartheta)$在 $T_\vartheta S^{N-1}$ 上的限制仍具有秩 $N - d$；由隐函数定理可得带有 $\ell = 1$的 (R)。这一类包括实二次型 Q ，其在 $\{Q = 0\} \setminus \{0\}$上满足 $\nabla Q \neq 0$ ，如例 5.11；也包括复解析芽 $\{f = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ ，其满足 $f = f_k + O(|z|^{k+1})$且具有光滑射影切锥 $\{f_k = 0\}$，例如 A_1，取$F = (\mathrm{Re}\ f, \mathrm{Im}\ f)$：复微分 df_k 非零，故在 $\{f_k = 0\} \setminus \{0\}$ 的点处满射到 $\mathbb{C}$。

(iii) Puiseux 型图 $X=\{(x,\ |x|^{a/\ell})\colon\ \ x\in\mathbb{R}^d\}$，其中 $a>\ell\geq 1$ 为互素整数。切锥为 $\mathbb{R}^d\times\{0\}$。取 $x=r\vartheta$ 和 $t:=r^{1/\ell}$，我们有 $\rho=t^\ell(1+t^{2(a-\ell)})^{1/2}$，并且$\mu:=\rho^{1/\ell}=t(1+t^{2(a-\ell)})^{1/(2\ell)}$ 是关于 t 的解析函数，在 0 处导数为 1，因而可逆。方向 $(\vartheta,\ t^{a-\ell})/(1+t^{2(a-\ell)})^{1/2}$ 是关于 $(\mu,\ \vartheta)$ 的解析函数，并且当$\mu=0$时等于 $(\vartheta,\ 0)$；因此，(R) 对这个 ℓ成立。

对于具有 $\gamma>1$的广义喇叭，条件 (R) 不成立；特别地，对于切锥为半直线的椭圆尖点和旋转尖点，以及具有奇异射影切锥的复奇点，例如 A_k，其中 $k\geq 2$ 在 $\mathbb{C}^n$中，$n\geq 3$。由于满足 (R) 的集合与其切锥双利普希茨等价（定理5.9的证明），而具有 $\gamma>1$ 的广义喇叭并不与锥双利普希茨等价，依据将例4.14 应用于 L_r的论证，其中内在直径为 $O(r^\gamma)$，定理A 和B的类别不相交。

在 (R) 条件下，我们有 $\rho=\mu^\ell$；我们将由 S^{N-1} 在 Σ_0上诱导的度量记为 h_0，而 Σ_0 是连通的，因为它与 X的链接微分同胚。具有坐标 $(\mu,\ y)$ 的 X 点为 $\rho\,\Upsilon$；由于 $|\Upsilon|=1$ 蕴含 $\Upsilon\cdot d\Upsilon=0$,

$$\rho^{-2}g=\Big(\frac{d\rho}{\rho}\Big)^2+|d\Upsilon|^2=\ell^2\Big(\frac{d\mu}{\mu}\Big)^2+h_0+\mu\,\mathcal{K},\tag{7}$$

其中 $\mathcal{K}$ 是 $(d\mu/\mu)^2$, $(d\mu/\mu)\,dy^i$ 与 $dy^i dy^j$ 的组合，其系数光滑延伸至$\mu=0$：此处我们使用 $d\Upsilon=\mu\,\partial_\mu\Upsilon(d\mu/\mu)+d_y\Upsilon$ 以及 $|d_y\Upsilon(0,y)|^2=h_0$。因此，$\rho^{-2}g$ 是一个 b-度量，也就是说，它是 Melrose 意义下 b-切丛上的光滑度量 [Mel93，第 2]，章（关于$[0,\mu_0)\times\Sigma_0$；它仅在项 $\mu\mathcal{K}$ 意义下是 [Mel93，第 2 节所述的精确度量3]，而该项在下文中不起作用。在边界处，它与 (Σ_0,h_0) 上锥的度量一致。令 $\alpha_j^{\pm}$为在链接 (Σ_0,h_0) 上计算得到的圆锥情形的指数。

定理 5.9. 若 $d\geq 3$ 和 X 满足 *(R)*，则对于某个 $b\geq 2$，X 满足 *(H_b)* 和 *(AD)*。渐近剖面 G_X 具有如下展开

$$G_X=\rho^{-(d-2)}+\sum_{0<k<\ell(d-2)}\mu^{k-\ell(d-2)}\,c_k(y)+c_{\log}\log\rho+O(1),$$

其中 $c_k\in C^\infty(\Sigma_0)$ 由度量决定。项 $c_{\log}\log\rho$ 来自阶为 $\mu^{k-\ell(d-2)}$ 的项，其中 $k=\ell(d-2)$的指数与指标根 0重合。

证明。算子。由于 $g=\rho^2 g_b$ 且 $g_b:=\rho^{-2}g$，共形变换公式给出 $\mathrm{P}:=\rho^2\Delta_X=\Delta_{g_b}+(d-2)\ g_b(d\log\rho,d\cdot)$。b-度量的拉普拉斯算子是一个椭圆 b-微分算子，并且 $d\log\rho=\ell\,d\mu/\mu$ 是 b-余切丛的光滑截面，因此 P 是一个系数在 $\mu=0$上光滑的椭圆 b-微分算子。在 $\mu=0$处冻结系数，由式（7），指标算子为 $(\rho\partial_\rho)^2+(d-2)\rho\partial_\rho+\Delta_{h_0}$，其中 $\rho\partial_\rho=\ell^{-1}\mu\partial_\mu$。若 ϕ_j 是 Δ_{h_0} 的特征函数，对应特征值为 $-\lambda_j$，则它将 $\rho^\alpha\phi_j$ 映为 $(\alpha^2+(d-2)\alpha-\lambda_j)\rho^\alpha\phi_j$，指标根为 $\alpha_j^{\pm}$。

条件 *(H_b)* 与增长性。设 $g_{\mathcal{C}}:=\rho^2\big(\ell^2(d\mu/\mu)^2+h_0\big)$ 是坐标 (μ,y) 下锥 $\mathcal{C}$ 在 (Σ_0,h_0) 上的度量。由于 $\mathcal{K}$ 的系数在紧集 $[0,\mu_1]\times\Sigma_0$上光滑，

(7) 给出 $(1-C\mu)g_{\mathcal{C}} \le g \le (1+C\mu)g_{\mathcal{C}}$，其中 $\mu \le \mu_1$。考虑映射 $\Phi_R\colon \rho\,\Upsilon(\mu,y) \mapsto \rho\, y$，并将其延拓为 $\Phi_R(0) = 0$；它是从 X 中 0 的某个邻域到 $\mathcal{C}$的顶点邻域的同胚。避开 0 的曲线的长度会乘上一个属于 $[(1-C\mu_1)^{1/2}$的因子，$(1+C\mu_1)^{1/2}]$。经过 0 的曲线可以替换为一条长度几乎相同且避开 0 的曲线，因为 g 在 L_t 上的限制与 $t^2 h_0$ 可比，因此 L_t 的内在直径为 $O(t)$；在 $\mathcal{C}$上也同样成立。此外，根据引理 2.4，$B(0,r)$中两点之间的一条几乎最短曲线始终位于 $B(0,(1+2C_0)r)$内；当 r 足够小时，这里的比较关系成立。因此，Φ_R 关于内蕴距离是双利普希茨的，而推论 4.12 给出 (VP) 和 (H_b)。对于 $y \in L_{r/2}$ 和 $y' \in L_r$，我们沿引理 2.4 中长度至多为 r的曲线，将 y 连接到 L_r 中的一点，然后在 L_r 内使用 (H_b) 将其连接到 y'。沿第一条曲线，各点满足 $|x| \ge r/2$；如命题 4.5 的证明所示，使用至多 $\lceil 2/\varepsilon_E \rceil + 1$ 个引理 4.4 中的球组成的链，可得对每个 $u \in \mathcal{P}$，均有 $u(y) \le C_\sharp u(y')$，其中 $C_\sharp$ 与 r无关。因此 $\sup_{L_{r/2}} u \le C_\sharp \inf_{L_r} u \le C_\sharp \sup^{L_r} u$，且 $u \le C\rho^{-M_\sharp}$ 满足 $M_\sharp = \log_2 C_\sharp$。

展开。 我们将 $u \in \mathcal{P}$ 乘以一个截断函数 $\chi(\mu)$，该函数在 0 附近等于 1，并将 P扩展为带边紧流形 $[0,1]\times\Sigma_0$上的 b-椭圆算子，并通过 $\mu\partial_\mu)^2 + \Delta_{h_0}$ 上的单位分解将其与乘积 b-拉普拉斯算子 (μ连接起来；主符号正定的二阶算子的凸组合仍是椭圆的。增长估计给出 $\int_0 \mu^{-2s_*}|\chi u|^2\, d\mu/\mu < \infty$ 当 $s_* < -\ell M_\sharp$时，即 $\chi u \in \mu^{s_*} L_b^2$，且 $\mathrm{P}(\chi u) = [\mathrm{P}\ \chi]u$ 光滑，并且在边界附近为零。根据 Melrose [Mel93，命题 5.61]，χu 是多重齐次的：

$$u \sim \sum_{(s,p)} \mu^s (\log\mu)^p\, a_{s,p}(y), \qquad a_{s,p} \in C^\infty(\Sigma_0),$$

其指数为 $s \in \{\ell\alpha_j^{\pm}\} + \mathbb{N}_0$，低于任意阈值的指数只有有限多个；对数幂次 μ由指标集 [Mel93, (5.118)–(5.121)],给出，且余项关于 y一致。

首项。令 s_0 为系数非零的最小指数，p_0 为指数 s_0对应的对数最高次幂。$\mu^{s_0}(\log\mu)^{p_0}$ 在P $u = 0$ 中的系数是指标算子作用于a_{s_0}所得的结果，p_0，因此 $s_0 = \ell\alpha_j^{\pm}$，且a_{s_0,p_0} 是特征值为λ_j 的特征函数。若 $\lambda_j > 0$，则a_{s_0,p_0} 零均值且变号，因此对某个 y_1 及所有充分小的 μ，有$a_{s_0,p_0}(y_1)(\log\mu)^{p_0} < 0$；并且当 μ充分小时，$u(\mu,y_1) < 0$，这与 $u > 0$矛盾。因此a_{s_0,p_0} 为常数，且 $s_0 \in \{0, -\ell(d-2)\}$。$\mu^{s_0}(\log\ \mu)^{p_0-1}$ 的系数为$p_0\, c'\, a_{s_0,p_0} + I_0 a_{s_0,p_0-1}$，其中 I_0 是指数 s_0处的指标算子，它是自伴算子，核为常数；并且$c' = 2s_0/\ell^2 + (d-2)/\ell \neq 0$，因为对 $d \ge 3$而言，常数模的两个根都是单根；I_0 的值域与常数正交，因此 $p_0 = 0$。由此可知，若$s_0 = 0$，则 u 有界；或者 $u = q\,\rho^{-(d-2)}(1+o(1))$，其中 $q > 0$，且不存在小于 $-\ell(d-2)$的指数。

渐近剖面。 由引理 A.2存在一个多重齐次函数

$$w = \rho^{-(d-2)} + \sum_{0<k<\ell(d-2)} \mu^{k-\ell(d-2)} c_k(y) + c_{\log}\log\rho + w_+,$$

其中 w_+ 有界，使得 Pw 在 $\mu = 0$处无限阶消失。令 $f := -\Delta_X(\chi w)$，它有界且在 0 附近无限阶消失，并求解 $\Delta_X v = f$ 于 Ω_{r_0}，满足 $v = 0$ 于 L_{r_0}

在有限能量的狄利克雷空间中，由 Lax–Milgram 引理以及沿 $y=$const. 曲线的 Poincaré 不等式可得。根据边界正则性，函数 v 在 L_{r_0} 附近有界，且属于 L^2，因而属于 $\mu^{-\ell d/2}L_b^2$；根据 Melrose 的命题 5.61，它是多重齐次的。由于$\Delta_X v = f$ 在 $\mu=0$处无限阶消失，v 的首个指数 s_0 是一个指标根，与“首项”步骤中的情形相同。若指数为 $s\neq 0$，项 $\mu^s(\log\mu)^p a(y)$ 对能量$\int_0 \mu^{2s+\ell(d-2)}|\log\mu|^{2p}\,d\mu/\mu$有贡献；当 $2s+\ell(d-2)\le 0$时，该能量发散。因此有限能量要求$s_0 > -\ell(d-2)/2$，从而 $s_0\ge 0$，因为区间 $(-\ell(d-2),0)$ 内没有根。指数为 0 的项 $(\log\mu)^p$具有有限能量，依据“首项”步骤中对 $\mu^0(\log\mu)^{p_0-1}$ 系数的论证可将其排除；该论证不依赖正性：$\log\mu$最高次幂的系数属于 Δ_{h_0}的核，因此是常数，而 $c'=(d-2)/\ell\neq 0$ 迫使 $p_0=0$。因此 v 有界。令 $G_X := \chi w + v$，必要时加上一个常数，使得 $G_X>0$ 于 Ω_{r_0}。

条件（*AD*）。设 $u\in\mathcal{P}$ 定义在 Ω_r上。根据首项这一步，要么 $s_0=0$，于是 u 在 0 的某个穿孔邻域内有界，我们取 $q=0$和 $u_{\mathrm{b}} := u$；要么 $s_0=-\ell(d-2)$，系数为 $q>0$。在第二种情况下，$u_{\mathrm{b}} := u - qG_X$ 在 $\Omega^{\min\{r,r_0\}}$ 上是调和且多重齐次的，其指数不小于 $-\ell(d-2)$，并且在 $-\ell(d-2)$处的系数为零。其首项指数是一个指标根，因而非负；而渐近剖面这一步中的论证排除了指数为 0 时的对数幂次 μ：u_{b} 在 0 的某个穿孔邻域内有界。

□

注 5.10。定理5.9中的展开依赖于已知技巧：Kondrat’ev 的变量分离法 [Kon67] 适用于具有渐近锥形系数的算子，以及 Melrose 的 b-演算 [Mel93]。当 Σ_0 与标准球面双 Lipschitz 等价时，例如例5.11以及注5.8中的 Puiseux 型图，芽在内在意义上与一个 $\mathbb{R}^d$的球双 Lipschitz 等价，Δ_X 在坐标图中成为一个一致椭圆的散度形式算子；而条件（AD）无需对剖面作展开，即可由 Serrin 和 Weinberger 的定理 4 得出 [SW66]。

例 5.11（含对数项的剖面）。若 $X=f^{-1}(0)\subset\mathbb{R}^{d+1}$，其中 f 解析，$f=f_m+O(|x|^{m+1})$，f_m 为次数 m 的齐次函数，且 $\nabla f_m\neq 0$ 在 $f_m^{-1}(0)\setminus\{0\}$上，则条件 (R) 在 $\ell=1$下成立。函数 $F(\rho,\vartheta):=\rho^{-m}f(\rho\vartheta)=f_m(\vartheta)+O(\rho)$ 解析至$\rho=0$；在 $\Sigma_0=f_m^{-1}(0)\cap S^d$ 上，由欧拉关系$\vartheta\cdot\nabla f_m = m f_m$ 可知，f_m 的梯度与球面相切且非零，因此隐函数定理给出 (R)。例如，对于$X=\{(x,z)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}:\ |x|^2=z^2+z^3,\ z>0\}\cup\{0\}$，它在 0 附近是闭集，我们有 $d=3$，Σ_0是 S^3中的半径为 $1/\sqrt{2}$的球面，并且对径向函数直接计算可得

$$G_X = \rho^{-1} + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\log\rho + O(1).$$

对数项与定理 5.9 中的相同：对于径向函数 $\rho^2\Delta_X = a_2(\rho\partial_\rho)^2 + a_1\rho\partial_\rho$ with$a_2=1+O(\rho^2)$ and $a_1 = 1+\tfrac{\sqrt{2}}{4}\rho+O(\rho^2)$，因此 $\rho^2\Delta_X(\rho^{-1}) = -\tfrac{\sqrt{2}}{4}+O(\rho)$，且 $(\rho\partial_\rho)^2+\rho\partial_\rho$应用于 $c_{\log}\log\rho$ 后得到 $c_{\log}=\tfrac{\sqrt{2}}{4}$。特别地，对于 $q>0$，$u-q\rho^{-(d-2)}$ 无界：条件（AD）对渐近剖面 G_X 成立，而对 $\rho^{-(d-2)}$不成立。旋转尖点 $|x|^2=z^m$, $m>2$ 不满足 (R)，因为它们的切锥是一条半直线。

5.4 旋转尖点

设 $X=\{(x,z)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:\ |x|^2=z^m,\ z\ge 0\}$ with $m>2$为有理数，并设 $\beta:=m(d-1)/2$。记 $x=z^{m/2}\vartheta$, $\vartheta\in S^{d-1}$，以及 $F_m(z):=\big(1+\tfrac{m^2}{4}z^{m-2}\big)^{1/2}$；度量是扭曲积$F_m(z)^2dz^2+z^m g_{S^{d-1}}$，而 ρ 的水平集就是 z的水平集。按照定义 4.8 的记号，我们有 $X=X_{m/2,S^{d-1}}$。

命题 5.12. 若 $d\ge 3$，则旋转尖点满足 *(AD)*，其渐近剖面为

$$G_X=\varsigma(z):=\int_z^{z_1}F_m(t)\,t^{-\beta}\,dt\sim\frac{z^{1-\beta}}{\beta-1}\qquad(z\to 0),$$

其中 $z_1>0$ 为固定的小量，并且每个 $u\in\mathcal{P}$ 在0附近都可写为 $u=q\,G_X+u_{\mathrm{b}}$，其中$q\ge 0$ 且 u_{b} 有界。此外， X 满足 *(H)*，且0处具有 *Bˆocher* 性质。

证明. 径向变量。拉普拉斯算子为 $\Delta_X=(F_m z^\beta)^{-1}\partial_z\big(z^\beta F_m^{-1}\partial_z\big)+z^{-m}\Delta_{S^{d-1}}$。在变量 ς下，由于 $d\varsigma=-F_m z^{-\beta}dz$ 和 $\varsigma\to+\infty$ 为 $z\to 0$，因为 $\beta>1$，我们有

$$\Delta_X=z^{-2\beta}\big(\partial_\varsigma^2+\mathcal{Q}\,\Delta_{S^{d-1}}\big),\qquad \mathcal{Q}:=z^{2\beta-m}.$$

由于 $1\le F_m\le 2$ 在 0 附近且 $\beta>1$，我们有 $\varsigma\asymp z^{1-\beta}$，因为 $z\to 0$；特别地， $\varsigma\ge c\,z^{1-\beta}$，也就是说， $z\ge(\varsigma/c)^{-1/(\beta-1)}$，并且由于 $2\beta-m>0$，我们得到 $\mathcal{Q}=z^{2\beta-m}\ge c'\varsigma^{-e}$，其中

$$e:=\frac{2\beta-m}{\beta-1}=\frac{2m(d-2)}{m(d-1)-2},\qquad 2-e=\frac{2(m-2)}{m(d-1)-2}>0.$$

模态。令 $u\in\mathcal{P}$，并令 $\{Y_j\}$ 为由特征函数组成的 $L^2(S^{d-1})$的一组正交归一基，$-\Delta_{S^{d-1}}Y_j=\lambda_j Y_j$，其中 Y_0 为常数。 S^{d-1} 的旋转是 X的等距变换，因此球面平均 $\bar u(\varsigma)$是调和且径向的： $\bar u''=0$ 且 $\bar u=\bar u_0+q\varsigma$，其中 $q\ge 0$，因为 $\bar u>0$。对于 $j\ge 1$，系数$u_j(\varsigma)$:
$=\int_{S^{d-1}}u\,Y_j$ 满足 $u_j''=\lambda_j\mathcal{Q}\,u_j$。根据命题 4.10，取 $L=S^{d-1}$ 和$\gamma=m/2$，条件（H）成立，因此在每个水平集 $u\le C_H$ 上，$\inf\ u\le C_H\bar u$，并且

$$|u_j(\varsigma)|\le\|Y_j\|_\infty\,|S^{d-1}|\,C_H\,\bar u(\varsigma)\le C_j(1+\varsigma).$$

每个非恒定的球面模态都有界。函数 $w:=u_j^2$ 满足 $w''=2u_j'^2+2\lambda_j\mathcal{Q}w\ge 0$ 且为凸函数。若它无界，则在某条半直线上有 $w'>0$ 且 $w\ge A_0>0$。若在某条半直线上有 $w\ge A\varsigma^p$，则有 $w''\ge 2\lambda_j cA\varsigma^{p-e}$；将其积分两次，并将积分范围限制在 $[\varsigma/2,3\varsigma/4]$，可得在某条半直线上有 $w\ge A'\varsigma^{p+2-e}$。由于 $2-e>0$，经过有限步后，指数会超过 2，这与 $w\le C_j^2(1+\varsigma)^2$矛盾。因此 w 有界；又因为它是凸函数，所以单调不增，并且对 $\varsigma\ge\varsigma_0$， $|u_j(\varsigma)|\le|u_j(\varsigma_0)|$。

一致余项。函数 $u(\varsigma_0,\ \cdot)$ 在 S^{d-1} 上光滑，因此 $|u_j(\varsigma_0)|$ 比 $1+\lambda_j$ 的任何幂都衰减得更快；此外，根据索伯列夫嵌入， $\|Y_j\|_\infty\le C(1+\lambda_j)^{\kappa/2}$ 对于 $\kappa>(d-1)/2$ 成立，并且级数 $\sum_j(1+\lambda_j)^{\kappa/2}|u_j(\varsigma_0)|$ 收敛，因为小于λ 的特征值个数按多项式增长（Weyl定律）。由于对每个 ς，$u(\varsigma,\ \cdot)$ 的傅里叶级数都收敛

一致地，

$$\sup_{\varsigma\ge\varsigma_0}|u-\bar u|\le\sum_{j\ge1}|u_j(\varsigma_0)|\,\|Y_j\|_\infty<\infty.$$

我们设 $u_{\mathrm b}:=\bar u_0+(u-\bar u)$，它是有界的，并且 $u=q\,\varsigma+u_{\mathrm b}$。最后，$\varsigma>0$ 是调和的，并一致趋于 $+\infty$，由命题5.6可得 Bˆocher 性质。 □

5.5 哈纳克条件导出的渐近分解

在第5.1–5.4 节中，条件（AD）是通过分析具体几何而得到的。本小节将证明，（AD）可由沿半径序列的链接上的哈纳克不等式推出；特别地，它适用于每个满足（H_b）的芽，因此也适用于定理A的整个类别。该方法源自 Pinchover [Pin94] 对福克斯型算子的研究：环域上的尺度不变哈纳克不等式 [Pin94，引理 63]，，边界上取零的正解锥是一维的，即皮卡原理 [Pin94，定理 7.1 和推论 73]，，以及通过狄利克雷问题的单调构造，表示孤立奇异点附近的正解 [Pin94，引理 84]；关于皮卡原理，另见 Nakai [Nak74]。这里唯一需要的假设是以下条件。

定义 5.13. *X 满足 (HS)*，如果存在 $b\ge2$、$C\ge1$ 和半径 $r_k\downarrow0$，使得 $br_k<r_0$，并且对每个 k 以及定义在 $A(r_k/b,br_k)$ 上的每个调和函数 $v>0$，都有 $\sup_{L_{r_k}}v\le C\inf^{L_{r_k}}v$。

条件 (H_b) 蕴含 (HS)，且当 $\liminf_{r\to0}C_H(r)<\infty$ 时，(HS) 成立。在本小节中，我们始终假设 (HS)。对于 $0<R\le r_0$，令 $\mathcal K_R$ 为定义在 Ω_R 上、可连续延拓到 $\Omega_R\cup L_R$ 且在 L_R 上满足 $u=0$ 的调和函数集合。对于 $0<r<R$，令 e_r 为定义在 $A(r,R)$ 上、在 $A(r,R)$ 上连续的调和函数，它在 L_r 上满足 $e_r=1$，在 $\overline{L_R}$ 上满足 $e_r=0$；该函数存在，因为 $A(r,R)$ 是边界 $L_r\cup\overline{L_R}$ 光滑的紧流形，并且根据强最大值原理，$0<e_r<1$ 在 $A(r,R)$ 上成立。对于在 L_r 上连续的 u，记 $m_u(r):=\min_{L_r}u$，以及 $M_u(r):=\max_{L_r}u$。

引理 5.14. 设 $u\in\mathcal K_R$，并设 $r=r_k$ 满足 $br_k<R$。则 $m_u(r)\,e_r\le u\le C\,m_u(r)\,e_r$ 在 $A(r,R)$ 上成立。

证明。函数 $u-m_u(r)e_r$ 和 $M_u(r)e_r-u$ 在 $A(r,R)$ 上调和，在其闭包上连续，在 L_r 上非负且在 L_R 上为零；由最大值原理，它们非负。由于 $u>0$ 在 $A(r/b,br)\subset\Omega_R$ 上调和，(HS) 给出 $M_u(r)\le C\,m_u(r)$。 □

引理 5.15. 对于 $u_1,u_2\in\mathcal K_R$ 以及 $x,x_0\in\Omega_R$，$u_1(x)/u_2(x)\le C^2\,u_1(x_0)/u_2(x_0)$。

证明。设 $r=r_k$ 满足 $br_k<R$，且 $r_k<\min\{|x|,|x_0|\}$。由引理 5.14，在点 x、$x_0\in A(r,R)$ 处（其中 $e_r>0$），有 $u_1(x)/u_2(x)\le C\,m_{u_1}(r)/m_{u_2}(r)$，以及 $u_1(x_0)/u_2(x_0)\ge m_{u_1}(r)/(C\,m_{u_2}(r))$。 □

命题 5.16 (皮卡原理)。对于每个 $R\in(0,\,r_0]$ 存在 $G_R\in\mathcal K_R$，使得 $\mathcal K_R=\{tG_R:\ \ t>0\}$。此外，当 $\rho\to0$ 时，$G_R\to+\infty$ 一致成立。

证明。唯一性。固定 $x_0 \in \Omega_R$，以及满足 $u_1(x_0) = u_2(x_0) = 1$ 的 u_1、$u_2 \in \mathcal{K}_R$，并令 $t^* := \sup\{t \geq 0 : u_1 - tu_2 \geq 0\}$。由引理 5.15，$t^* \geq C^{-2}$，且 $t^* \leq 1$。函数 $w := u_1 - t^* u_2 \geq 0$ 在连通集 Ω_R 上调和，并在 L_R 上为零。若 $w \not\equiv 0$，则由强最大值原理可得 $w > 0$，$w \in \mathcal{K}_R$，而引理 5.15 给出 $w \geq C^{-2} w(x_0) u_2 = C^{-2}(1-t^*)u_2$，其中 $1 - t^* = w(x_0) > 0$，这与 t^* 的定义矛盾。因此 $u_1 = u_2$。

存在性。设 $f_n := e_{r_n}/e_{r_n}(x_0)$ 在 $A(r_n, R)$ 上，$r_n < |x_0|$。固定 k，使得 $br_k < R$ 且 $r_k < |x_0|$。对于 $r_n < r_k/b$，函数 f_n 在 $A(r_k/b, br_k)$ 上为正且调和，而引理 5.14 的证明给出 $m_{f_n}(r_k)\, e_{r_k} \leq f_n \leq C\, m_{f_n}(r_k) e_{r_k}$ 在 $A(r_k, R)$ 上；在 x_0 处取值，得 $m_{f_n}(r_k) \leq 1/e_{r_k}(x_0)$，因此 $0 < f_n \leq C\, e_{r_k}/e_{r_k}(x_0)$ 在 $A(r_k, R)$ 上成立。由内部椭圆估计和对角线论证，某个子序列在 Ω_R 上局部一致收敛于一个调和函数 $G_R \geq 0$，且满足 $G_R(x_0) = 1$，并且 $G_R \leq C e_{r_k}/e_{r_k}(x_0)$ 在 $A(r_k, R)$ 上成立；因此 G_R 可通过在 L_R 上取值 0 连续延拓，并由强最大值原理得到 $G_R > 0$。

增长性。若 G_R 有界，则在 Ω_r, $r < R$ 上应用引理 2.9，将得到 $\sup_{\Omega_r} G_R = \max_{L_r} G_R \to 0$ as $r \to R$，这与假设矛盾。由 $A(r', R)$ 上的最大值原理，$M_{G_R}(r) \leq M_{G_R}(r')$ for $r' < r$；因此 $M_{G_R}(r) \to +\infty$ as $r \to 0$，且 $m_{G_R}(r_k) \geq M_{G_R}(r_k)/C \to +\infty$。对于 $r_{k+1} \leq r \leq r_k$，在 $A(r_{k+1}, r_k)$ 上应用最小值原理可得 $m_{G_R}(r) \geq \min\{m_{G_R}(r_{k+1}), m_{G_R}(r_k)\}$，因此 $\min_{L_r} G_R \to +\infty$。 □

定理 5.17. 假设 *(HS)* 成立。则：

(i) 穿孔邻域中定义于0附近的每个有界调和函数都可连续延拓至0；

(ii) 对每个定义在 Ω_r 上的 $u \in \mathcal{P}$，以及每个 $R' \in (0, r)$，都有 $u = q\, G_{R'} + u_{\mathrm{b}}$ 在 $\Omega_{R'}$ 上成立，其中 $q \geq 0$ 且 $0 \leq u_{\mathrm{b}} \leq \max^{L_{R'}} u$；此外，对于 $R' < R \leq r_0$，$G_{R'} = c\, G_R + b'$ 在 $\Omega_{R'}$ 上成立，其中 $c > 0$ 和 b' 有界且调和；

(iii) X 满足 *(AD)*，其中 $G_X := G_{r_0}$，且在0处具有 *Bˆocher* 性质。

特别地，对于满足某个 b 的 *(H $b \geq 2$)* 的每个芽，*(i)–(iii)* 都成立：定理 *4.15* 中的芽、满足 *(R)* 的芽（对于 $d = 2$ 也成立，见定理 *5.9* 的证明），以及椭圆尖点和旋转尖点（例 *4.14*）。

证明。(i) 取子列后，可设 $r_{k+1} \leq r_k/(2b)$。定理 3.2 的证明中，以半径 r_k 代替 $(2b)^{1-k} r_1$，并以 C 代替 C_H，可得有界调和函数在 Ω_{r_k} 上的振荡从 $C-1)/(C+1$ 到 r_k 时按因子 (r_{k+1}) 减小。

(ii) 令 $B := \max^{L_{R'}} u$。对于 $0 < \varepsilon < R'$，令 h_ε 为定义在 $A(\varepsilon, R')$ 上、在其闭包上连续的调和函数，且在 L_ε 上满足 $h_\varepsilon = u$，在 $L_{R'}$ 上满足 $h_\varepsilon = 0$。由 $A(\varepsilon, R')$ 上的最大值原理可得，$0 \leq h_\varepsilon \leq u$ 且 $0 \leq u - h_\varepsilon \leq B$；此外，对于 $\varepsilon' < \varepsilon$，在 L_ε 上有 $h_{\varepsilon'} \leq u = h_\varepsilon$，因此在 $A(\varepsilon, R')$ 上有 $h_{\varepsilon'} \leq h_\varepsilon$。递减极限 h 在 $\Omega_{R'}$ 上为调和函数，在 $A(\varepsilon_0, R')$ 上满足 $0 \leq h \leq h_{\varepsilon_0}$，因此在 $L_{R'}$ 上连续地取零，且 $0 \leq u - h \leq B$。由强最大值原理和命题 5.16，要么 $h \equiv 0$，要么 $h = qG_{R'}$ 且 $q > 0$。将其应用于 $u = G_R$，后者无界

在 0 的每个穿孔邻域上，这给出 $G_R = c'G_{R'} + b''$ 在 $\Omega_{R'}$ 上，且 $c' > 0$ 和 b'' 有界，由此得到 $G_{R'}$ 与 G_R 之间的关系。

(iii) 由 (ii) 并结合 $R = r_0$，每个 $u \in \mathcal{P}$ 都具有如下形式：$qc)G_{r_0} + (qb' + u_b)$ 于 Ω 上$_{R'}$，并且由命题 5.16可知其一致成立。这就是 (AD)；结合 (i)，命题 5.6 给出了 Bˆocher 性质。由定理 4.15 及其证明中列出的芽满足 (H_b)，还满足定理 5.9 证明中的步骤“条件 (H_b) 与增长性”（该步骤不使用 $d \geq 3$，因此在 (R) 下，对 $d = 2$也成立 (H_b)），以及例 4.14 和命题 4.10。

□

注 5.18. 定理 5.17 没有给出关于渐近剖面大小的信息；引理 5.14 仅表明 $G_R \asymp m_{G_R}(r)\ e_r$ 于 $A(r, R)$。当 $d \geq 3$ 且 X 内在双Lipschitz等价于一个锥，且该锥的链接双 Lipschitz 等价于 S^{d-1} 时，从链接到 S^{d-1} 的双 Lipschitz 映射的径向延拓使 X 在 0 附近内在双Lipschitz 等价于一个 $\mathbb{R}^d$ 球；在这样的坐标图中，Δ_X 成为一个具有可测系数的散度形式一致椭圆算子，而 Serrin 和 Weinberger 的定理 4 [SW66] 给出 (AD)，其渐近剖面与 ρ^{2-d} 可比。当 $d - 1 \neq 4$ 时，对链接的条件是拓扑性的：对于 $d - 1 \leq 3$，依据与球面同胚的光滑流形分类；对于 $d - 1 \geq 5$，依据 Lipschitz 结构的存在性与唯一性 [Sul79]。一般而言，这里无法确定 G_X 的阶数。

6 例子

本节给出两个维数为 $d = 3$ 的例子。第一个是一个广义喇叭，具有$\gamma > 1$，适用定理 4.15，且不属于已知情形；第二个是一个链接不是球面的锥，对它可以明确写出命题 5.2。

6.1 具有环面链接的广义喇叭

设 $L \subset \mathbb{R}^3$ 为旋转环面

$$L := \big\{\big((2 + \cos\theta_2)\cos\theta_1,\ (2 + \cos\theta_2)\sin\theta_1,\ \sin\theta_2\big) :\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big\},$$

并设 $\gamma > 1$ 为有理数。广义喇叭 $X := X_{\gamma,\ L} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 的维数为 $d = 3$。环面 L 是半代数、紧致、连通且光滑的，并且不包含 0，因为$|y| \geq 1$在 L上；映射 $\Pi(z,\ y) = (z^\gamma y,\ z)$ 在 $[0, \infty) \times L$ 上是半代数的，并且当 $z > 0$ 时是解析的，因此 X 是半代数的，在 0 处有一个孤立奇点，且其链接与 L微分同胚。

常数。 我们有 $a_L = \max_L |y| = 3$。内在直径满足 $D_L \leq 4\pi$：任意两点可先沿纬线 $\theta_2 = \text{const}$ 走一段弧，长度至多为 3π，然后沿经线走一段弧，长度至多为 π。高斯曲率为 $\cos\theta_2/(2 + \cos\theta_2) \in [-1, 1/3]$，因此里奇曲率为 $\text{Ric}_{h_L} \geq -h_L$，可以取 $k_L = 1$。由于 L连通，第一个非零特征值 λ_L为正；其值与下文的结论无关。最后，当 $3\gamma z^{\gamma-1} \leq \frac{1}{4}$时，$\delta_L(z) = 9\gamma^2 z^{2\gamma-2} + 3\gamma z^{\gamma-1} \leq \frac{5}{16}$，并且可以取 $z_0 := \min\{1, (12\gamma)^{-1/(\gamma-1)}\}$。

结论。由命题 4.10， X 满足 (VP)、(RA$_2$) 和 (H)，其常数可用 γ、 D_L、 k_L 和 λ_L显式表示；由定理 4.15，在与 X 双 Lipschitz 等价的芽上，任意有界调和函数都可连续延拓到 0。第 1.2 节回顾的已知情形均不涵盖该芽。 X 在 0 处的切锥是半直线 $\{(0,z):z\geq 0\}$，因为 $|z^\gamma y|=o(z)$；因此 X 不满足 (R)，并且根据例 4.14 中的论证，它与锥不双利普希茨等价；由于其链接不是球面，它也不与球双利普希茨等价。由定理 5.17， X 以及与其双利普希茨等价的每个芽都满足条件（AD），且 Bˆocher 性质成立。这里无法确定奇异剖面的阶：命题 5.12 的证明给出了旋转尖点的奇异剖面阶，但该证明用到了 S^{d-1}的旋转不变性，而这里不具备这种不变性。

6.2 克利福德环面上的锥

这个例子说明了命题 5.2 对于一个并非球面的链接的情形。

设定。令

$$X=\{x\in\mathbb{R}^4:\ x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2\},$$

一个签名为 (2，2)、维数为 $d=3$ 的二次锥。 $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2$ 的梯度仅在 0 处消失，因此 $X\setminus\{0\}$ 是光滑的，且 0 是一个孤立奇点。该链接

$$L=X\cap S^3=\{x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2=\tfrac12\}$$

是克利福德环面 $S^1(1/\sqrt{2})\times S^1(1/\sqrt{2})$，它是连通的。

我们记作 $x=\rho\mathbf{e}$，其中

$$\mathbf{e}=\tfrac{1}{\sqrt2}\,(\cos\theta_1,\sin\theta_1,\cos\theta_2,\sin\theta_2),\qquad \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

从而 $|\mathbf{e}|=1$。由 $dx=\mathbf{e}\,d\rho+\rho\,d\mathbf{e}$、 $\langle\mathbf{e}\ d\mathbf{e}\rangle=0$ 以及 $|d\mathbf{e}|^2=\frac12(d\theta_1^2+d\theta_2^2)$，我们得到

$$g=d\rho^2+\rho^2h_L,\qquad h_L=\tfrac12\,(d\theta_1^2+d\theta_2^2).$$

体积与可去性。 由于 $d\rho^2$ 的系数为 1，因此有 $|\nabla_X\rho|=1$。链接的面积为 $\mathrm{vol}(L)=(2\pi/\sqrt{2})^2=2\pi^2$，因此 $V(\rho)=2\pi^2\rho^2=2\pi^2\rho^{d-1}$。根据命题 2.6，取 $\Omega=X\cap\{\rho_1<\rho<\rho_2\}$，

$$\mathrm{cap}_2(L_{\rho_1},L_{\rho_2};\Omega)\leq\Big(\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{dr}{2\pi^2r^2}\Big)^{-1}=2\pi^2\Big(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\Big)^{-1}\xrightarrow[\rho_1\to0]{}0.$$

由于 X 是以光滑、闭、连通的链接 L为链接的锥，因此它满足 (H)（命题 4.11）；根据定理 3.2，在 $X\setminus\{0\}$ 上的每个有界调和函数都可连续延拓至 0。

谱与分解。 我们有 $\Delta_{h_L}=2(\partial_{\theta_1}^2+\partial_{\theta_2}^2)$，其特征函数为 $e^{i(k\theta_1+l\theta_2)}$、$(k,\ l)\in\mathbb{Z}^2$，特征值为

$$\lambda_{k,l}=2(k^2+l^2).$$

第一个正特征值为 $\lambda_1 = 2$，重数为 4（特征函数为 $\cos\theta_i$、$\sin\theta_i$）。对于$d = 3$，指标方程 $\alpha^2 + \alpha - \lambda = 0$ 的根为

$$\alpha_{k,l}^{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8(k^2 + l^2)}}{2}.$$

对于（k，l）=（0，0）：$\alpha^+ = 0$ 且 $\alpha^- = -1 = -(d-2)$。对于 $\lambda_1 = 2$：$\sqrt{1+8} = 3$，因此 $\alpha_1 = 1$且 $\alpha_1^- = -2$。根据命题5.2，条件（AD）成立，其中 $G_X = \rho^{-1}$，并且 $X \setminus \{0\}$ 上的每个正调和函数都具有如下形式

$$u = q\,\rho^{-1} + u_0 + O(\rho), \qquad q \geq 0, \quad u_0 \in \mathbb{R},$$

在链接上是一致的，并且 B^ocher 性质成立（命题5.6）。

一个形式解引理

本附录证明函数 w 的存在性，该函数用于证明中定理的渐近剖面5.9这一步：构造一个首项为 $\rho^{-(d-2)}$ 且w 在 $\mu = 0$处以无限阶消失的多重齐次函数。证明采用 Melrose [Mel93], 引理 5.44 背后的递归构造，并明确控制指数和对数项。

A.1 设置

我们采用第 5.3 节的记号。设 $d \geq 3$ 并设 X 满足带整数 $\ell \geq 1$的 (R)；在坐标 $(\mu, y) \in [0, \mu_0) \times \Sigma_0$ 中，我们有 $\rho = \mu^\ell$ 并且由 (7) 得，

$$\rho^{-2} g = \ell^2 \Big(\frac{d\mu}{\mu}\Big)^2 + h_0 + \mu\,\mathcal{K},$$

其中 $\mathcal{K}$ 的系数光滑延伸至 $\mu = 0$。算子 $\mathsf{P} = \rho^2 \Delta_X$ 是 $M := [0, \mu_0) \times \Sigma_0$ 上的二阶 b-微分算子，且为椭圆算子，其系数光滑延伸至 $\mu = 0$。我们定义

$$D := \mu\partial_\mu, \qquad s_* := -\ell(d-2), \qquad \mathsf{P}_0 := \ell^{-2} D^2 + (d-2)\ell^{-1} D + \Delta_{h_0},$$

因此，P_0 是 P 的指标算子：它是将 P 的系数在 $\mu = 0$ 处冻结后得到的算子，并以变量 $\rho\partial_\rho = \ell^{-1} D$ 表示。由于 $\mathsf{P} - \mathsf{P}_0$ 的系数光滑且在 $\mu = 0$ 处消失，

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}_0 + \mu\,\mathsf{R}, \tag{8}$$

其中 R 是一个二阶 b-微分算子，其系数光滑延伸至 $\mu = 0$。

设 $(\phi_j)_{j\geq 0}$ 是 $L^2(\Sigma_0, h_0)$的一组正交归一基，其中 $\Delta_{h_0}\phi_j = -\lambda_j\phi_j$、$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \cdots$、$\phi_0$为常数（$\Sigma_0$ 是连通的）。在 $\mu^\sigma\phi_j$ 上，算子 P_0 的作用等同于乘以

$$I_j(\sigma) := \frac{\sigma^2}{\ell^2} + (d-2)\frac{\sigma}{\ell} - \lambda_j,$$

其根 ts 为 $\ell\alpha_j^{\pm}$。对于 $d \geq 3$，两个根对每个 j都互不相同，因此都是单根。此外 r

$$\ell\alpha_j^- \leq s_* \text{ (with equality only for } j = 0), \qquad \ell\alpha_j^+ \geq 0 \text{ (with equality only for } j = 0), \quad (9)$$

使得开区间（s_*，0）内没有根，且等于 0 或 s_* 的唯一根是常数模的根。

我们称定义在 $M \setminus \{\mu = 0\}$ 上的函数为阶数为 (s, p) 的对数光滑函数，若其具有形式 $\mu^s \sum_{i=0}^{p} (\log \mu)^i a_i(\mu, y)$，其中 $a_i \in C^\infty(M)$。由于 $D\big(\mu^s(\log \mu)^i a\big) = \mu^s\big(s(\log \mu)^i a + i(\log \mu)^{i-1} a + (\log \mu)^i Da\big)$，每个系数在 $\mu = 0$ 上光滑的 b-微分算子，都会将阶数为 (s, p) 的对数光滑函数映射为阶数为 (s, p) 的对数光滑函数。

A.2 模型方程

引理 A.1。设 $s \in \mathbb{R}$、$p \in \mathbb{N}_0$ 和 e_0、…、$e_p \in C^\infty(\Sigma_0)$。存在 b_0、…、$b_{p+1} \in C^\infty(\Sigma_0)$，使得

$$\mathsf{P}_0\Big(\mu^s \sum_{i=0}^{p+1} (\log \mu)^i b_i\Big) = \mu^s \sum_{i=0}^{p} (\log \mu)^i e_i.$$

当 s 不是指标根时，可以取 $b_{p+1} = 0$。若 s 是指标根，则 b_{p+1} 属于有限维空间 由$\{\phi_j : I_j(s) = 0\}$张成的空间；特别地，若 $s = 0$，则 b_{p+1} 是常数。

证明。设 $t := \log \mu$，于是 $D = \partial_t$，并展开 $e_i = \sum_j e_{i,j}\phi_j$；由于 e_i 光滑，系数 $e_{i,j}$ 比 $1 + \lambda_j$的任意次幂都衰减得快。对于每个 j，我们寻找 $U_j(t) = \sum_i b_{i,j} t^i$，使得

$$I_j(s + \partial_t)\, U_j = E_j(t) := \sum_{i=0}^{p} e_{i,j} t^i, \qquad (10)$$

因为 $\mathsf{P}_0\big(e^{st} U_j(t)\phi_j\big) = e^{st}\big(I_j(s + \partial_t) U_j\big)\phi_j$。算子 $I_j(s + \partial_t) = I_j(s) + I_j'(s)\partial_t + \ell^{-2}\partial_t^2$将次数至多为 q 的多项式映射为次数至多为 q的多项式。

如果 $I_j(s) \neq 0$，则它在次数至多为 p 的多项式上可逆，其逆为

$$\sum_{r=0}^{p} (-1)^r I_j(s)^{-1}\big(I_j(s)^{-1} N\big)^r, \qquad N := I_j'(s)\partial_t + \ell^{-2}\partial_t^2,$$

因为 N 在这些多项式上是幂零的。系数 $I_j'(s) = 2s/\ell^2 + (d-2)/\ell$ 和 ℓ^{-2} 不依赖于 j，并且除有限多个 j 外，$|I_j(s)| \geq c(1 + \lambda_j)$；因此，$b_{i,j}$ 的U_j 系数满足 $|b_{i,j}| \leq C(1 + \lambda_j)^{-1} \max_{i'} |e_{i',j}|$ 对充分大的 j 成立，并且对 $1 + \lambda_j$ 的衰减速度仍快于任意幂次。

如果 $I_j(s) = 0$，则该根是单根，因此 $I_j'(s) \neq 0$，且 $I_j(s + \partial_t) = \partial_t\big(I_j'(s) + \ell^{-2}\partial_t\big)$。算子 $I_j'(s) + \ell^{-2}\partial_t$ 在多项式上可逆，并且 ∂_t 将次数至多为 $p+1$ 的多项式映射到次数至多为 p 的多项式；因此，(10) 存在一个次数至多为 $p + 1$ 的多项式解。仅当 $\lambda_j = s^2/\ell^2 + (d-2)s/\ell$ 时，这种情况才会对有限多个 j 发生。

令 $b_i := \sum_j b_{i,j}\phi_j$。由于 $\|\phi_j\|_{C^k} \leq C_k(1 + \lambda_j)^{m_k}$ 对某个 m_k 成立，根据椭圆估计和

索伯列夫嵌入，该级数在 $C^\infty(\Sigma_0)$中收敛，且 b_i 满足该方程。系数 b_{p+1} 仅由满足 $I_j(s) = 0$ 的指标 j 贡献。对于 $s = 0$，这些指标满足 $\lambda_j = 0$，也就是说，$j = 0$，且 b_{p+1} 为常数。 □

A.3 具有指定首项的形式解

引理 A.2 （形式解）。 在第 *A.1* 节的假设下，存在函数$c_k \in C^\infty(\Sigma_0)$、 $0 < k < \ell(d-2)$、常数 $c_{\log} \in \mathbb{R}$ 和函数 $w \in C^\infty(M \setminus \{\mu = 0\})$，使得：

(i) $\mathsf{P}w$ 在 $\mu = 0$ 处连同其所有 *b*-导数都以无限阶消失：对每个 N 和每个 *b*-微分算子 Q，$Q\mathsf{P}w = O(\mu^N)$ 关于 y 一致；

(ii) w 是多重齐次的，并且

$$w = \rho^{-(d-2)} + \sum_{0<k<\ell(d-2)} \mu^{k+s_*} c_k(y) + c_{\log} \log \rho + w_+,$$

其中 w_+是多重齐次的，其指数属于 $\{0\} \cup (0, \infty)$，指数0处没有对数项，并且每个正指数处只有有限多个 $\log \mu$ 幂；特别地，w_+ 在 $\mu = 0$ 附近有界。

证明。步骤 *1*：首项。 令 $u_0 := \mu^{s_*} = \rho^{-(d-2)}$。由于 $I_0(s_*) = 0$，我们有 $\mathsf{P}_0 u_0 = 0$，根据（8），$\mathsf{P}u_0 = \mu \mathsf{R}(\mu^{s_*})$ 是 $(s_* + 1, 0)$ 阶的对数光滑函数。

步骤 *2*：递推。我们为 $n \geq 1$ 构造函数

$$v_n = \mu^{s_*+n} \sum_{i=0}^{q_n} (\log \mu)^i \, b_{n,i}(y), \qquad b_{n,i} \in C^\infty(\Sigma_0),$$

使得 $u_n := u_0 + v_1 + \cdots + v_n$ 满足：$\mathsf{P}u_n$ 是阶数为 $(s_* + n + 1, p_n)$ 的对数光滑函数，其中 $p_n \in \mathbb{N}_0$。对于 $n = 0$，这就是步骤 1，其中 $p_0 = 0$。假设结论对 $n - 1$成立，并写作$\mathsf{P}u_{n-1} = \mu^{s_*+n} \sum_{i \leq p_{n-1}} (\log \mu)^i a_i(\mu, y)$，其中 a_i 光滑。由引理 A.1 可得 v_n 具有所述形式，且

$$\mathsf{P}_0 v_n = -\mu^{s_*+n} \sum_{i \leq p_{n-1}} (\log \mu)^i a_i(0, y),$$

其中 $q_n \leq p_{n-1} + 1$，并且若 $s_* + n$ 不是指标根，则 $q_n \leq p_{n-1}$。于是

$$\mathsf{P}u_n = \mu^{s_*+n} \sum_i (\log \mu)^i \big(a_i(\mu, y) - a_i(0, y)\big) + \mu \, \mathsf{R} v_n,$$

且两项均为阶数为 $(s_* + n + 1, \max\{p_{n-1}, q_n\})$ 的对数光滑函数，因为 $a_i(\mu, y) - a_i(0, y) = \mu \, \tilde{a}_i(\mu, y)$，其中 $\tilde{a}_i$ 光滑。归纳完成。

步骤 *3*：指数与对数。 v_n 的指数为 $s_* + n$、 $n \geq 1$。根据（9），对于$1 \leq n < \ell(d-2)$，数 $s_* + n \in (s_*, 0)$不是指标根；从 $p_0 = 0$开始，归纳得到对于这些 n有 $q_n = p_n = 0$，因此 $v_n = \mu^{s_*+n} c_n(y)$，其中 $c_n := b_{n,\,0} \in C^\infty(\Sigma_0)$。

对于 $n = \ell(d-2)$，指数为 0，而它仅在 $j = 0$时才是一个根；由引理 A.1，取 $p = 0$、$v_{\ell(d-2)} = b_n$，0(y)+b_n、1 log μ 取b_n、1 为常数，并且可以将核的常数部分选为 0。具体地，若 $a_0(0,\cdot)$在 Σ_0上的平均值为 $\bar{a}$，则方程的常数模为 $\big(I_0'(0) + \ell^{-2}\partial_t\big)\partial_t U_0 = -\bar{a}$体积($\Sigma_0$)$^{1/2}$，其中 $I_0'(0) = (d-2)/\ell$，从而$b_{n,1} = -\ell\bar{a}/(d-2)$。我们令$c_{\log} := b_{n,1}/\ell$，使得$b_{n,1}$ log $\mu = c_{\log}$ log ρ。对于 $n > \ell(d-2)$，指数 $s_* + n$ 为正，并且只有当 $s_* + n$ 与某个正根$\ell\alpha_j^+$重合时，对数的幂才会增加 1。

步骤4：渐近求和。固定光滑向量场 $V_1, \dots, V_{n_V}$on Σ_0 spanning $T_y\Sigma_0$at every point y; 它们存在，因为 Σ_0 是紧致的。令 $\mathcal{M}_n$ 为单项式$Q = Z_1 \cdots Z_k$, $0 \le k \le n$构成的有限集，其中 $Z_i \in \{\mu\partial_\mu, V_1, \dots, V_{n_V}\}$，以及 $\mathcal{M} := \bigcup_n \mathcal{M}_n$，一个可数族。每个阶数为 k、系数在 $\mu = 0$ 上光滑的 b-微分算子，在 $\{\mu \le \mu_0/2\}$上都是 $\mathcal{M}_k$ 中元素的有限线性组合，其系数连同其 b-导数均光滑且有界；因此，只需估计 $\mathcal{M}$中的元素。令 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$，其中$\psi = 1$ 在 $(-\infty, 1/2]$ and $\psi = 0$ 上 $[1,\infty)$，并设 $\psi_n := \psi(\mu/\varepsilon_n)$。由于 $(\mu\partial_\mu)^i\psi_n$ 有界，且与 ε_n无关，每个 v_n 都满足 $|Q(\psi_n v_n)| \le C_{n,Q}\,\mu^{s_*+n}(1 + |\log\ \mu|)^{q_n}$，其中 $Q \in \mathcal{M}$，且$C_{n,Q}$ 与 $\varepsilon_n \le 1$无关；因此可以选取 $\varepsilon_n \in (0,1]$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, 使得

$$\sup_{0<\mu<\varepsilon_n} \mu^{-(s_*+n)+1/2}\,\big|Q\big(\psi_n v_n\big)\big| \le 2^{-n} \qquad \text{for all } Q \in \mathcal{M}_n.$$

Set

$$w := u_0 + \sum_{n\ge 1} \psi_n\, v_n.$$

对每个 $\mu > 0$，该和都是有限的，且 $w \in C^\infty(M \setminus \{\mu = 0\})$。

尾部控制。固定 $N \ge 0$ 和 $Q \in \mathcal{M}_k$。于是

$$w - u_N = \sum_{n\le N} (\psi_n - 1)v_n + \sum_{N<n<k} \psi_n v_n + \sum_{n\ge \max\{k, N+1\}} \psi_n v_n.$$

当 $\mu < \min_{n\le N} \varepsilon_n/2$ 时，第一项和为零。第二项是有限和，且其每一项都满足 $|Q(\psi_n v_n)| \le C\mu^{s_*+n}(1 + |\log\ \mu|)^{q_n} \le C'\mu^{s_*+N+1/2}$ 对 $\mu < 1$ 成立，因为 $n \ge N+1$。对于第三项，$Q \in \mathcal{M}_n$，而 ε_n 的选取给出 $|Q(\psi_n v_n)| \le 2^{-n}\mu^{s_*+n-1/2} \le 2^{-n}\mu^{s_*+N+1/2}$ 对$\mu < 1$成立。求和得,

$$Q(w - u_N) = O(\mu^{s_*+N+1/2}) \qquad (\mu \to 0)$$

对每个固定的 $Q \in \mathcal{M}$，因此对每个 b-微分算子 Q 都成立。因此 w 是多重齐次的，其展开为 $u_0 + \sum_n v_n$，并且

$$\mathsf{P}w = \mathsf{P}u_N + \mathsf{P}(w - u_N) = O\big(\mu^{s_*+N+1}(1 + |\log\mu|)^{p_N}\big) + O(\mu^{s_*+N+1/2})$$

由于 P 是 b-微分算子，因此对所有 b-导数都成立。由于 N 任意，(i) 得证。(ii) 由步骤 3 得出，其中 w_+ 收集了除$c_{\log}$ log ρ之外含有 $n \ge \ell(d-2)$ 的各项。

□

注 A.3（与 Melrose 的引理 5.44 的关系）。上文给出的引理 A.2 的证明是自足的，并不依赖本注；本注仅指出另一种证明途径，供读者参考；与 Melrose 的指标集记号之间的对应关系在此略作说明，后文不再使用。引理 A.2 也可由 [Mel93, 引理 5.44], 推出：先如定理 5.9 证明中的“展开”步骤所示，将 P 延拓为紧流形 $[0,1]\times\Sigma_0$ 上的椭圆 b 算子，并通过 $|d\mu/\mu\ d\mathrm{vol}_{h_0}|^{1/2}$ 平凡化 b 半密度丛。令 χ 为一个在 $\mu=0$ 附近等于 1 的截断函数，并设 $f:=-P(\chi\mu^{s_*})$。根据步骤 1，f 是多重齐次的，其指标集为 $E=\{(s_*+1+n,0):n\in\mathbb{N}_0\}$，相差一个支撑于 $\mu=0$之外的光滑函数。取 $\alpha\in(s_*,s_*+1)$，由引理 5.44 可得一个多重齐次的 u，使得 $Pu-f$ 无限阶消失，其指标集为 $F=E\cup\widehat{E}^+(\alpha)$；其中 $\widehat{E}^+(\alpha)$ 收集实部大于 α的指标根；根据 (9)，这些根均为非负数。于是 $w:=\chi\mu^{s_*}+u$ 满足 (i)，而 u 中小于 0 的指数与 E相同，且不含对数；在指数 0 处，扩展并至多产生一阶 $\log\mu$，其系数属于 Δ_{h_0}的核，因此为常数。这便得出 (ii)。上文的证明明确展示了指标集的整理过程。

参考文献

[ABR92] Sheldon Axler、Paul Bourdon 和 Wade Ramey。Bôcher定理。美国数学月刊，99：51–55，1992年。[ACM15] Kazuo Akutagawa、Gilles Carron 和 Rafe Mazzeo。分层空间上薛定谔算子解的 Hölder 正则性。函数分析杂志，269(3)：815–840，2015年。[BB18] Anders Björn 和 Jana Björn。度量空间上的局部与半局部 Poincaré 不等式。纯粹与应用数学杂志，119：158–192，2018年。[Bir08] Lev Birbrair。o-极小结构中可定义曲线和曲面的 Lipschitz 几何。伊利诺伊数学杂志，52(4)：1325–1353，2008年。[Bj¨o06] Anders Björn。度量空间上有界调和函数和拟（超）调和函数的可去奇点。芬兰科学院数学年刊，31：71–95，2006年。[Bˆoc03] Maxime Bˆocher。满足椭圆型偏微分方程的函数的奇异点。美国数学会通报，9：455–465，1903年。[Bus82] Peter Buser。关于等周常数的注记。科学与高等师范学校年刊 ´高等师范学校（第四辑），15(2)：213–230，1982年。[Gri91] Alexander A. Grigor’yan。非紧黎曼流形上的热方程。数学文集，182(1)：55–87，1991年。英文译本：《苏联数学文集》72（1992），第1期，47–77。[Gri99] Alexander Grigor’yan。黎曼流形上布朗运动常返性与非爆炸性的解析和几何背景。美国数学会通报，36：135–249，1999年。

[Gri03] Daniel Grieser。奇异实解析曲面的局部几何。《美国数学会汇刊》，355(4)：1559–1577，2003年。DOI 10.1090/S0002-9947-02-03168-9。预印本发表于1999年。https://arxiv.org/abs/math/9901062v1。[GSC05] Alexander Grigor'yan 和 Laurent Saloff-Coste。哈纳克不等式的稳定性结果。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，55(3)：825–890，2005年。[Hir77] Heisuke Hironaka。分层与平坦性。载于《实奇点与复奇点》（第九届北欧暑期学校会议录，奥斯陆，1976年），第199–265页。Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn，1977年。[Kon67] V. A. Kondrat'ev。具有锥点或角点的定义域上的椭圆方程边值问题。《莫斯科数学会会刊》，16：209–292，1967年。英文译本：《莫斯科数学会汇刊》，1967年，227–313。[KRSS21] Lyudmila Korobenko、Cristian Rios、Eric Sawyer 和 Ruipeng Shen。具有粗糙系数的无限退化椭圆方程解的局部有界性、极大值原理与连续性。《美国数学会回忆录》，269(1311)，2021年。[LSC14] Janna Lierl 和 Laurent Saloff-Coste。内一致域中的狄利克雷热核：局部结果、紧域与非对称型。《函数分析杂志》，266(7)：4189–4235，2014年。[LW19] Jiayu Li 和 Fangshu Wan。 n维黎曼流形上锥度量的Bˆocher 型定理。《美国数学会会刊》，147(10)：4527–4538，2019 年。[Mel93] Richard B. Melrose。《Atiyah–Patodi–Singer指标定理》，数学研究札记第4卷。A K Peters, Wellesley，马萨诸塞州，1993年。[Mos61] J¨urgen Moser。关于椭圆微分方程的哈纳克定理。《纯粹与应用数学通讯》，14(3)：577–591，1961年。DOI 10.1002/cpa.3160140329。[Mos26] Flavio Mosca。曲面孤立奇点的一个问题，2026年。原始预印本发表于1989年；修订并附注版发表于2026年。https://arxiv.org/abs/2608.19452。[Nak74] Mitsuru Nakai。无旋密度孤立奇点上的Martin边界。《日本数学会杂志》，26(3)：483–507，1974年。[Pin94] Yehuda Pinchover。关于正李维尔定理及Fuchs型椭圆算子解的渐近行为。《庞加莱研究所年刊：非线性分析》，11(3)：313–341，1994年。[SC92] Laurent Saloff-Coste。关于Poincaré、Sobolev和哈纳克不等式的注记。《国际数学研究通报》，1992(2)：27–38，1992年。[Ser64] James Serrin。椭圆方程解的可去奇点。《理性力学与分析档案》，17：67–78，1964年。

[Sul79] Dennis Sullivan. 双曲几何与同胚。载于《几何拓扑》（佐治亚拓扑会议论文集，佐治亚州雅典，*1977*年），第543–555页。学术出版社，纽约，1979年。[SW66] James Serrin 和 Hans F. Weinberger。线性椭圆方程解的孤立奇点。《美国数学杂志》，88(1):258–272，1966年。DOI 10.2307/2373060。[Val24] Guillaume Valette。有界次解析流形上的拉普拉斯方程。《变分法与偏微分方程》，63(9):第236号论文，2024年。[Wan18] Fangshu Wan。拉普拉斯方程在 n维奇异流形上的情形，2018年。https://arxiv.org/abs/1805.04260。