arXiv:2611.31103v1 [cond-mat.stat-mech] 23 Nov 2026

有偏竞争守恒资源中的自相似不平等动力学

Giacomo Bartolucci[1,2] 和 Jonathan Bauermann[3]1巴塞罗那大学凝聚态物理系，西班牙巴塞罗那 *08007*2巴塞罗那大学复杂系统研究所（*UBICS*），巴塞罗那大学，西班牙巴塞罗那 *08028*3哈佛大学物理系，美国马萨诸塞州剑桥 *02138*（日期：2026年11月24日）

在许多复杂系统中，守恒资源的重新分配会造成严重的不平等。重要的例子包括城市之间争夺居民、农场之间竞争耕地，以及饱和市场中的个体争夺财富。在这里，我们将这类系统建模为个体竞争固定总资源的过程，并表明，将个体灭绝与偏向较富裕个体的机制耦合，会随时间动态加剧这种不平等。借鉴乳状液中液滴争夺守恒量的类比，我们引入了一个动态临界资源规模，用以决定个体的命运。至关重要的是，这一阈值会随时间增长，不断提高生存门槛，进一步加剧不平等。随着偏向强度增加，我们发现系统会从资源持续集中转变为赢家通吃的结果。此外，资源持续集中的情形具有自相似动力学，并伴随着不平等程度按幂律或指数增长，可用基尼系数进行量化。我们在平均场模型中解析推导出这些结果，并将其与基于主体的模拟进行比较，发现二者高度吻合。

I. 引言

自帕累托观察到财富集中在少数人手中以来，理解不平等如何产生便成为社会科学领域的一项核心挑战 [1, 2]。在被称为大加速时期 [3], 的时期，生产与消费的爆炸式增长促使人们研究异质性增长如何转化为不平等。最初的一种尝试是吉布拉特定律，该定律指出，市场参与者（个体）的绝对增长率与其规模呈线性正比 [4, 5]。

Bouchaud和Mézard [6], 提出了一个解释扩张系统中不平等起源的关键框架：他们用作用于每个个体资源的乘性噪声项来刻画异质性增长。这会产生具有幂律尾部的稳态分布，即著名的帕累托分布；这种分布已在许多情境中被发现，例如城市人口和企业规模 [7–9]。

尽管许多经济体都以扩张来描述，但并非所有相关系统都能无限增长：许多系统受到土地、注意力、市场份额或其他缓慢变化因素的制约。在这类饱和系统或固定资源池中，主体围绕近似守恒的资源展开竞争，因此一方的增长必然伴随着另一方的衰退。

没有净增长并不意味着不存在不平等：恰恰相反，只要交换的总资源保持守恒，即使是“公平”的交易也能产生不平等。这一现象可通过隐喻模型 [10]来刻画，例如庭院旧货售卖模型 [11]这类随机、无偏的资产交换模型。这些模型表明，仅凭守恒的无偏交换，就可能导致财富凝聚并造成严重不平等 [12], ，因为较贫穷的个体承担的财富风险比例更高，而随机波动往往会使财富向富裕者集中。庭院旧货售卖模型也已推广，以纳入财富再分配以及偏向富裕主体的偏向。这两个因素之间的竞争会形成稳态财富分布，并可能发生相变，转变为财富有一定比例凝聚到单个主体身上的状态 [13]。

迄今为止，关于增长型经济体和停滞型经济体的大多数研究，都聚焦于稳态分布的尾部。探讨永远无法达到稳态、且不平等持续加剧的系统的研究则少得多 [14–17]。在这些开创性研究的基础上，我们研究守恒资源的偏向性交换，并采用不同的思路：通过临界规模——即区分资源增长的个体与资源减少的个体、且随时间变化的尺度——来刻画不断演变的资源分布。我们推导了这一尺度的演变规律，并将其动力学与基尼系数的动力学一并同不平等的动力学联系起来。

具体而言，我们关注饱和系统，其中偏向有利于持有更多资源的主体，因而富者愈富；又由于交换具有守恒性，穷者愈穷，小的差异会随时间不断扩大。我们还允许破产，使主体能够退出竞争，其数量本身也不再守恒，从而为资源再分配增添了第二层与之耦合的动力学。

这种组合在现实中并不少见，即竞争中存在偏向、资源守恒以及个体灭绝。美国的农业用地就是一个典型案例：在漫长的向西扩张过程中，用于耕种的土地面积和农场数量都持续增长，见图1 (a)。然而，自20世纪中叶以来，土地面积基本保持不变，而破产和合并导致农场数量减少，平均农场规模因而增大 [18],自20世纪80年代末以来，售出汽车数量和美国汽车经销商数量的变化也呈现出这一趋势 [19, 20]。

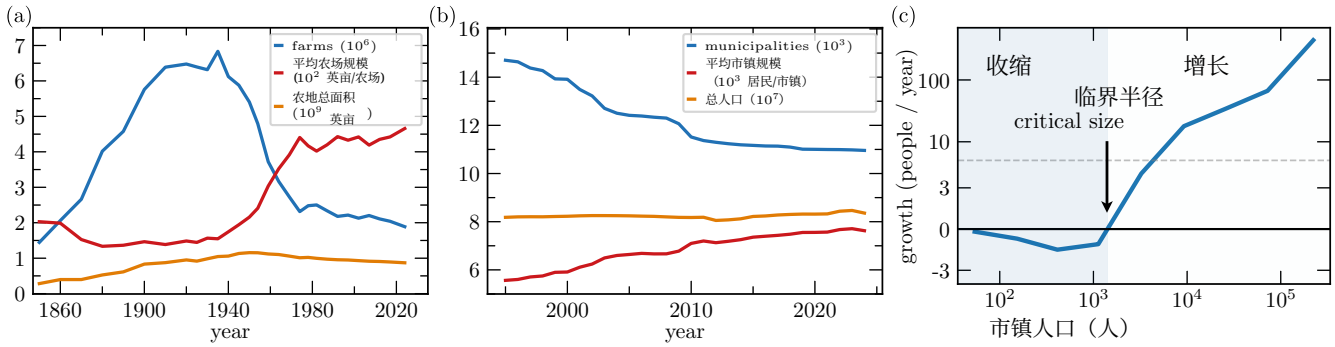

图1。（a）1850年至2024年美国农场的数量、平均农场规模以及美国农地总面积 [18] 。（b）1995年至 2024 [21]德国市镇的数量、市镇平均人口以及德国总人口。（c）按规模分组的德国市镇增长情况，每组至少包含20个市镇，数据为2000—2022年的平均值。为便于观察，灰色虚线以上的纵轴采用对数刻度。

在德国，对于人口流动的城市也适用同样的推理：过去三十年间，总人口大致保持不变，而收缩和合并使市镇数量持续减少，因此，根据人口守恒，每个市镇的平均人口有所增加；见图1(b)。考察图1(c)中随规模变化的增长情况，可以发现一个临界市镇规模，此时增长曲线与零值相交。这表明存在一个临界规模：规模高于该值的市镇会增长，而低于该值的市镇则会收缩。

熟化粗化为这种行为提供了一种自然的物理类比。事实上，临界规模的存在，以及个体数量减少的同时平均个体资源增加，都令人联想到奥斯特瓦尔德熟化。在奥斯特瓦尔德熟化过程中，液滴或团簇交换一种守恒量，表面张力促使较大的团簇以牺牲较小团簇为代价而增长 [22]。其结果是形成一种动力学标度：团簇数量减少，典型团簇规模增大，分布则趋近于自相似形式 [23, 24]。正如 Lifshitz-Slyozov-Wagner（LSW）理论所描述的那样 [25, 26]。熟化图景已启发社会科学中的多种模型，从城市隔离 [27, 28] 到意见动力学 [29–31]。此外，在一项开创性研究中，Leyvraz 和 Redner 证明，由迁移驱动的聚合体增长——即成员倾向于从较小聚合体迁往较大的聚合体——具有一种与 LSW 粗化密切对应的标度理论，并提出了将其应用于城市人口增长和财富交换的设想 [15]。

在此，受这些观察启发，我们提出一个关于守恒资源有偏竞争的最简基于主体的模型，其中主体数量并不守恒，并以临界资源量为基础引入平均场描述。随后，我们以LSW理论的思路，解析推导出资源分布在时间上的标度关系，以及其在晚期的坍缩。不同于乳状液中的经典熟化——在后者中，随着粗化进行，竞争优势会减弱——我们研究一种竞争优势随规模呈次线性、线性或超线性增长的情形。这决定了临界规模的标度关系和系统的定性行为，其范围从财富的持续集中到有限时间内的赢家通吃动力学。

II. 偏向资产交换模型

我们首先介绍一种守恒的基于主体的模型。初始时，有 N_0 个体，每个个体持有非负资源 $x_i\ (t)\ \geq 0$，且总资源固定为

$$R = \sum_{i=1}^{N_0} x_i(t). \tag{1}$$

在每个微观步骤中，活跃个体会被随机配对。对于一对个体（i，j），我们定义未封顶转移量

$$\Delta_{ij} = \eta \left(x_i^{\alpha} - x_j^{\alpha} \right), \tag{2}$$

其中，$\eta > 0$ 是交换尺度，α 控制偏向的强度。实际转移量受资源较少一方所持资源的限制，

$$T_{ij} = \begin{cases} \min\{\Delta_{ij}, x_j\}, & \Delta_{ij} \geq 0, \\ \max\{\Delta_{ij}, -x_i\}, & \Delta_{ij} < 0, \end{cases} \tag{3}$$

更新规则为

$$x_i \leftarrow x_i + T_{ij}, \qquad x_j \leftarrow x_j - T_{ij}. \tag{4}$$

因此，正的转移量表示个体 j 向个体 i 支付；反之，当转移量为负时，i 向 j 支付。封顶机制确保资源非负，并使 $x = 0$ 成为吸收态。我们将 $x_i = 0$ 的个体称为不活跃个体。

式（2）中的交换规则具有偏向性，因为资源依赖评分 x_i^{α} 决定了转移的预期方向。只有在 $\alpha < 0$ 时，转移才有利于贫困者，使系统趋向均匀财富分布，这与停滞熟化类似 [32]。本文重点研究

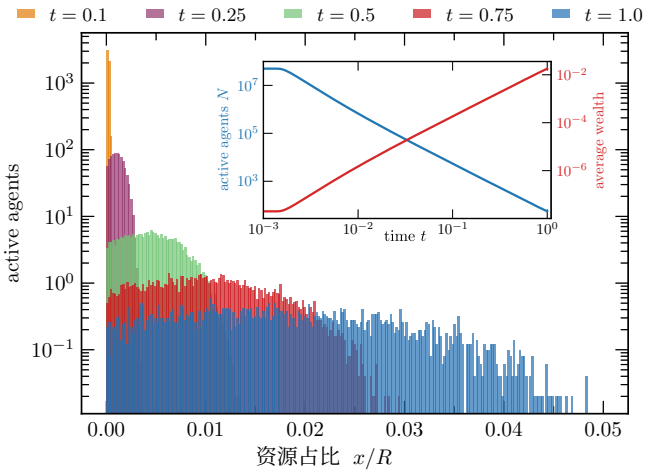

图2. 对 $\alpha = 1/2$ 的偏向资产交换动力学，取 50 次独立运行的平均值。多个时刻活跃个体中资源占比 x/R 的直方图显示，分布逐渐变宽。（插图）活跃个体的数量减少，而活跃个体的平均资源量增加。

相反的情形，其特点是富裕个体占据优势。当 $0 < \alpha < 1$ 时，竞争优势随资源次线性增长；当 $\alpha = 1$ 时，则成比例增长；当 $\alpha > 1$ 时，则超线性增长。因此，不平等是动态产生的：当前资源会影响未来的“议价能力”，进而改变未来的资源分布。

图2 展示了 $\alpha = 1/2$ 的一个代表性模拟。从一个近乎平等状态出发，微小的初始波动（约为1%）会被放大。许多个体破产并退出动力学过程，而存续个体持有的固定资源 R 份额不断增加。因此，与粗化过程类似，拥有资源的活跃个体分布会随时间变宽，并向较高数值移动；可比较不同时间点以观察分布的变化（以颜色区分）。然而，平均资源量的增加是以活跃群体规模缩小为代价的（插图）。不过，与粗化过程不同的是，分布随时间推移变宽得更快。

III. 平均场描述

偏置交换模型具有直接的平均场极限。令 $f(x,\ t)\ dx$ 表示资源介于 x 和 $x + dx$之间的活跃个体数量，并将活跃个体总数定义为

$$N(t) = \int_0^\infty f(x,t)\,dx. \tag{5}$$

在大型充分混合群体中，拥有资源 x 的个体，其伙伴从当前经验分布中抽取。在远离吸收边界的区域，当 3 式中的上限对于较小的 η 不起作用时，条件

一次交互中的平均转移量为

$$\langle \Delta x \mid x(t) = x \rangle = \eta \left[x^\alpha - \frac{1}{N(t)} \int_0^\infty \xi^\alpha f(\xi,t)\,d\xi \right]. \tag{6}$$

转为连续时间，并将相遇率和 η 吸收到增长率 μ中，假设每个个体以恒定速率进行交易，则确定性漂移为

$$\dot{x} = \mu \left[x^\alpha - x_c(t)^\alpha \right], \tag{7}$$

其中，临界规模 $x_c(t)$由以下自洽条件定义：

$$x_c(t)^\alpha = \frac{\int_0^\infty x^\alpha f(x,t)\,dx}{\int_0^\infty f(x,t)\,dx}, \tag{8}$$

由此出现临界规模。规模大于 $x_c(t)$的个体会增长，而规模小于$x_c(t)$的个体会缩小。因此，$x_c(t)$是规模动力学的瞬时不稳定定点。

密度根据连续性方程由这一漂移输运：

$$\partial_t f(x,t) + \partial_x(\dot{x} f(x,t)) = 0, \tag{9}$$

在 $x = 0$ 处设有吸收边界。虽然活跃个体的总数并不守恒，因为轨迹可能到达吸收边界，但总资源由.....守恒

$$R = \int_0^\infty x f(x,t)\,dx. \tag{10}$$

事实上，结合式（9）和式（7），可得

$$\frac{dR}{dt} = \mu \left[\int_0^\infty x^\alpha f(x,t)\,dx - x_c(t)^\alpha \int_0^\infty f(x,t)\,dx \right] = 0, \tag{11}$$

其中，最后一个等号由式（8）可得。

需要指出的是，尽管式（7）–（9）是从成对交换推导而来的，但平均场模型本身也具有独立的适用价值。并非所有竞争性市场都是由成对主体反复进行局部竞争。固定投资池内的股票配置、集中式商品市场、平台介导的竞争以及类似拍卖的机制，都是通过市场整体价格、排名或出清规则组织起来的。在这类情况下，个体的增长取决于其自身竞争得分相对于群体层面阈值的高低，而不需要存在实际的微观双边交换序列。因此，平均场模型既描述了有偏资产交换过程的大群体极限，也对由全局机制介导的保守竞争提供了现象学描述。

该模型与熟化的 LSW 型平均场理论密切相关 [23, 25, 26]。在线性情形 $\alpha = 1$中，方程 (8) 给出 $x_c(t) = R/N(t)$，因此，大于当前均值的主体会增长，而较小的主体则会缩小。在这种情况下，我们的增长定律等价于 Carr–Penrose 模型的增长定律 [23]，$\dot{x} \propto x/x_c(t) - 1$，仅相差一个时间变换$dt' = \mu x_c\,dt$；该模型也描述了参考文献 [14] 中“极度贪婪”交换的连续极限。这里我们允许竞争优势按尺寸的一般幂次关系缩放，这会改变凝聚的时间尺度。

IV. 自相似动力学

现在，我们分析平均场方程的长时间标度行为。受粗化理论的启发，我们寻求如下形式的解

$$f(x,t) = x_c(t)^{-2}\Phi(y), \qquad y = \frac{x}{x_c(t)}. \tag{12}$$

这里， y被称为相似变量，简单来说就是以瞬时临界规模为单位度量的个体资源。标度假设指出，一旦以相似变量度量资源，分布的形状就不再演化，尽管 $x_c(t)$本身仍在不断增长。这一假设是LSW理论的核心，在该理论中，一旦以临界规模为单位度量半径，液滴尺寸分布就会变为定态。因此， $\Phi(y)$就是时间无关吸引子形状，而所有显式的时间依赖性都由单一尺度 $x_c(t)$承载。

标度 $x_c(t)^{-2}$ 的选取应使 Φ遵守与 R 在公式（10）中相同的守恒关系，即

$$\int_0^\infty y\,\Phi(y)\,dy = R. \tag{13}$$

$x_c(t)$的定义给出了额外的自洽条件

$$\int_0^\infty (y^\alpha - 1)\,\Phi(y)\,dy = 0. \tag{14}$$

将公式（12）代入公式（9）得到

$$-\dot{x}_c\,(2\Phi + y\Phi') + \mu x_c^\alpha \partial_y[(y^\alpha - 1)\Phi] = 0. \tag{15}$$

时间无关的形状要求

$$\lambda := \frac{\dot{x}_c}{\mu x_c^\alpha} \tag{16}$$

为常数。我们将 λ 称为标度率。这为 $\dot{x}_c$提出了一个微分方程，其解取决于 α的值，形式如下：

$$x_c(t) = \left[x_c(0)^{1-\alpha} + (1-\alpha)\lambda\mu t\right]^{1/(1-\alpha)}, \qquad 0<\alpha<1, \tag{17}$$

$$x_c(t) = x_c(0)e^{\lambda\mu t}, \qquad \alpha = 1, \tag{18}$$

$$x_c(t) = \left[x_c(0)^{1-\alpha} - (\alpha-1)\lambda\mu t\right]^{-1/(\alpha-1)}, \qquad \alpha>1. \tag{19}$$

重要的是，次线性优势会产生幂律集中，线性优势会产生指数集中，而超线性优势会导致有限时爆破；当 λ 为常数时，爆破发生在

$$t_* = \frac{x_c(0)^{1-\alpha}}{(\alpha-1)\lambda\mu}. \tag{20}$$

因此，在 $\alpha>1$有限时间内，一小部分个体积累了全部守恒资源 R，导致动力学崩溃。

这些时间尺度依赖于每个个体以恒定速率进行交易。对于每对个体之间的恒定速率，如参考文献 [15], 的质量作用动力学中那样，时间按因子$1/x_c(t)$进行重新标度，因此上述增长定律成立时，只需将 α 替换为 $\alpha-1$，即可恢复参考文献 [15], 中的增长定律，而下文推导的相似剖面不受影响。

现在我们讨论如何求出满足方程 Φ（y）的形状函数显式表达式，其中方程为（15）。利用常数 λ（定义见方程（16））， 将 x_c 和$\dot{x}_c$ 代入后，方程（15）允许存在一整族解，此处记为 Φ_λ（y）。首先，我们定义该族解中对于 α不同取值所允许的一般解。其次，在下一节中，我们将讨论如何从这些允许值中选出一个具体的 λ 值，从而得到形状函数的显式表达式。

我们首先将方程（15）改写为

$$[D_\lambda(y)\Phi_\lambda(y)]' = \lambda\Phi_\lambda(y), \quad \text{with } D_\lambda(y) := y^\alpha - 1 - \lambda y. \tag{21}$$

根据 D_λ（y）的定义，增长定律方程（7）可以用相似变量 y 重写为

$$\dot{y} = \mu x_c^{\alpha-1} D_\lambda(y). \tag{22}$$

因此，将时间按正的前因子 $\mu x_c^{\alpha-1}$进行重标度后，我们可以将函数 D_λ 解释为相似变量中的速度。这意味着，D_λ 的根对形状函数 Φ_λ的支撑集施加了约束。特别地，由于 $D_\lambda(0) = -1 < 0$，第一个根 $y_{\max}$ 是该流的排斥不动点。因此，没有轨迹能够在有限的（重标度后的）时间内到达该点，所以 $y_{\max}$ 为 Φ_λ的支撑集提供了上界。

只要第一个正根 $y_{\max}$ 存在，在 $D_\lambda<0$ 所在区间上的解就可以通过积分方程（21）得到

$$\Phi_\lambda(y) = -\mathcal{C}_\lambda \frac{\exp\left[\lambda\int_0^y \frac{ds}{D_\lambda(s)}\right]}{D_\lambda(y)}, \qquad 0<y<y_{\max}. \tag{23}$$

这里， $\mathcal{C}_\lambda>0$ 由方程（13）中的守恒定律确定，并且在其支撑边界 $y_{\max}$之外将剖面设为零。我们讨论三种不同的情况：

次线性偏置， $0<\alpha<1$: D_λ 是凹函数，从 -1开始，并在 $y\to\infty$时趋于 $-\infty$。当 λ小于某个值 $\lambda_{\rm m}(\alpha)$ 时，它具有正根；在该值处，D_λ 的最大值为零。这个边际标度率 $\lambda_{\rm m}(\alpha)$ 通过 $D_{\lambda_{\rm m}}(y_{\rm m}) = D'_{\lambda_{\rm m}}(y_{\rm m}) = 0$ 定义如下：

$$\lambda_{\rm m}(\alpha) = \alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}, \qquad y_{\rm m} = (1-\alpha)^{-1/\alpha}. \tag{24}$$

当 $0<\lambda<\lambda_{\rm m}$ 时，存在两个正根。第一个根 $y_{\max}$ 界定支撑集，而方程（23）给出了 $0<y<y_{\max}$ 上的剖面。当 $\lambda=\lambda_{\rm m}$ 时，两个根合并，且界 $y_{\max}=y_{\rm m}$。若 $\lambda>\lambda_{\rm m}$，则不存在正根，形式解的尾部反而延伸至无穷远。方程（21）可改写为

$$\frac{d\ln\Phi_\lambda}{dy} = -\frac{N_\lambda(y)}{D_\lambda(y)}, \qquad N_\lambda(y) = \alpha y^{\alpha-1} - 2\lambda. \tag{25}$$

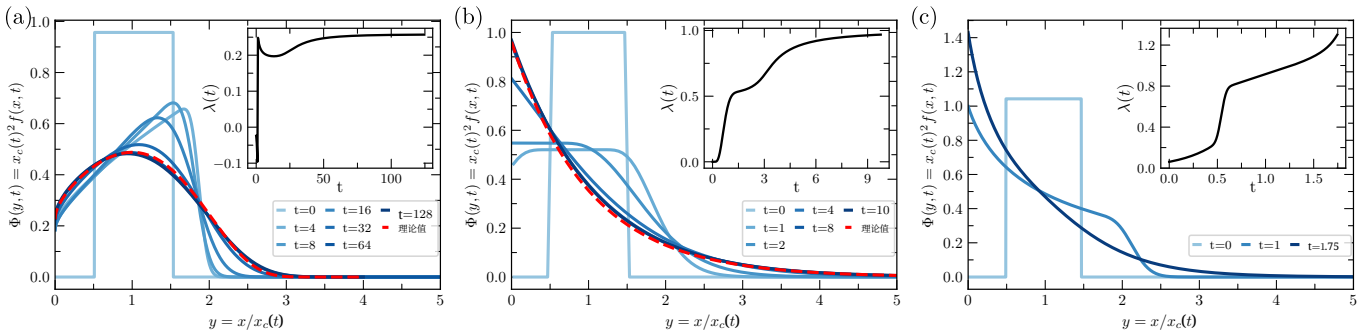

图3. 三种偏置指数下，相似变量中的平均场演化。主图显示不同时间的重标度分布 $\Phi(y,\ t)=x_c(t)^2 f(x,\ t)$；插图显示测得的 $\lambda(t)=\dot{x}_c/(\mu x_c^{\alpha})$。(a) 对于 $\alpha=1/2$，解趋近于选定的紧支撑型分布，其 $\lambda_{\rm m}=1/4$ 和 $y_{\rm m}=4$，其中 $\Phi_{\rm m}(y)=C\left(1-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^{-4}\exp\left[-\frac{\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}/2}\right]$，且 $C=R/(16-32\,e^2E_1(2))$，$E_1(x)$ 为指数积分。(b) 对于 $\alpha=1$，选定分布为指数型，且 $\lambda(t)\to 1$。(c) 对于 $\alpha=3/2$，动力学对远右尾部十分敏感，并趋近于有限时间爆破解，而非稳定的普适分布。适用时，红色虚线表示选定的理论分布。

若 $\lambda>\lambda_{\rm m}$，则得到 $\Phi_\lambda(y)\sim Cy^{-2}$，因此 $\int_0^\infty y\Phi_\lambda(y)\,dy$ 按对数发散。因此，常微分方程存在一个形式解，但不存在满足方程（13）中有限质量约束的物理相似分布。

线性偏置，$\alpha=1$：若 $\lambda\neq 1$，式（23）可化简为

$$\Phi_\lambda(y)=C\left[1-(1-\lambda)y\right]^{-(2\lambda-1)/(\lambda-1)}. \tag{26}$$

这里，对于 $0<\lambda<1$，$D_\lambda(y)$ 有一个正根，因此 $\Phi_\lambda(y)$ 的支撑集有限，截断值为 $y_{\max}=1/(1-\lambda)$，而式(13)定义了 C。对于 $\lambda>1$，此截断值不存在，且 $\Phi_\lambda(y)$ 的支撑集无限。尽管如此，一阶矩仍然存在，因为 $\Phi_\lambda(y)$ 以指数 $(2\lambda-1)/(\lambda-1)>2$ 足够快地衰减。对于 $\lambda=1$，同样不存在有限根，且解的支撑集无限。此处，解为 $\Phi_1(y)=Ce^{-y}$，其一阶矩有限。

超线性偏置，$\alpha>1$：函数 D_λ 先减小，随后单调递增至 $+\infty$，因此对于每个 $\lambda>0$，恰有一个正根。于是，式（23）给出剖面 $\Phi_\lambda(y)$，定义在 $0<y<y_{\max}$ 上，其中支撑集的上界由下式隐式确定：$(y_{\max})^{\alpha}=1+\lambda y_{\max}$。

V. 相似分布的选择

与LSW理论一样，式（21）允许一族相似分布，选定的长时间分布可能取决于初始分布趋近其支撑边界的方式 [23, 24, 33]。扩散、涨落或离散相遇等正则化效应可能促成平滑剖面 [34–37]。这里，我们将给出一个选择论证，说明在何种情况下某一剖面会在长时间极限下被选定。该论证依赖于动力学相对于不同 λ 值的扰动（例如数值噪声）的稳定性。这一选择机制对于上述三种情形各不相同。

次线性偏置：对于 $0<\alpha<1$，具有 $\lambda<\lambda_{\rm m}$的剖面在第一个根 $y_{\max}<y_{\rm m}$ 处终止。增大 λ 会移动该截断值 $y_{\max}$ 至更高的数值。因此，任何将质量置于当前截断值稍后位置的扰动 $y_{\max}$都会流向更高的 y-值，因为 $D_\lambda>0$ 在那里。这种漂移会在临界剖面处停止，此时两个根合并，截断值达到 $y_{\rm m}$，如公式（24）所定义。因此，临界情形是稳健的极限剖面，而选定的值就是临界标度率 $\lambda_{\rm m}(\alpha)$。将公式（25）在截断值 $y_{\rm m}$ 附近展开可得

$$\Phi_{\rm m}(y)\sim C_{\rm m}(y_{\rm m}-y)^{-\nu}\exp\left[-\frac{2y_{\rm m}}{(1-\alpha)(y_{\rm m}-y)}\right], \tag{27}$$

$$\nu=\frac{10-8\alpha}{3(1-\alpha)}. \tag{28}$$

因此，选定分布 $\Phi_{\rm m}$ 比 $(y_{\rm m}-y)$ 的任意幂都衰减得更快。对于在其支撑集边界处比任意幂都衰减得更快的初始数据，这一选择成立；幂律边缘则会选出次临界剖面，这一点已针对这类LSW型方程得到证明 [24, 38]。注意，对于 $\alpha=1/3$，形状函数在体积变量中与经典LSW液滴尺寸分布相匹配。

线性偏置：对于 $\alpha=1$ 和 $\lambda<1$，有限支撑截断值 $y_{\max}=1/(1-\lambda)$ 在 $\lambda\to\lambda_{\rm m}=1$ 时发散，且选定分布变为 $\Phi_{\rm m}(y)=Ce^{-y}$，如前所述。原则上，我们也预期以更高的 λ 值为初始条件的解是稳定的。因此，在线性情形下，我们只有较弱的选择机制，也就是说，它仅对尾部衰减足够快的初始分布起作用。

超线性偏置：对于 $\alpha>1$，不存在边际标度率 $\lambda_{\rm m}$，而强烈的尾部敏感性阻碍了类似的普适选择；这些剖面仅描述初始数据足够规则时的爆破前阶段。

图3 证实了本文提出的选择机制。对于次线性（$0<\alpha<1$）和线性（$\alpha=1$）偏向，重标度分布趋近于选定分布，且 $\lambda(t)$ 趋近于 $\lambda_{\rm m}$（面板 (a) 和 (b)）。对于超线性偏向，重标度后的形状和 $\lambda(t)$均不收敛

bias	$x_c(t)$、 $t > t_{\rm sc}$	$\lambda_{\rm m}$	$y_{\rm m}$	$\Phi_{\rm m}(y)$	$\mathcal{G}_{\rm act}$
次线性，$0 < \alpha < 1$	$\left[{x_{\rm sc}}^{1-\alpha} + (1-\alpha)\lambda_{\rm m}\mu(t-t_{\rm sc})\right]^{1/(1-\alpha)}$	$\alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}$	$(1-\alpha)^{-1/\alpha}$	$\propto e^{-A_\alpha(z)}/h_\alpha(z)$	式（35）
线性， $\alpha = 1$	$x_{\rm sc}\, e^{\mu(t-t_{\rm sc})}$	1	$+\infty$	$\propto e^{-y}$	1/2
超线性， $\alpha > 1$	在 t_* 式（20）中发散，对于常数 λ	–	–	未选中	–

表 I. 自相似动力学总结。对于次线性偏置，在形状函数的表达式中 $\Phi_{\rm m}$ 我们使用了 $z = y/y_{\rm m} \in (0,\ 1)$， $h_\alpha(z) = 1 - \alpha + \alpha z - z^\alpha$，以及 $A_\alpha(z) = \alpha \int_0^z dv/h_\alpha(v)$，如式 (35) 所示；在边缘附近， $\Phi_{\rm m}$ 的行为如式 (27) 所示。对于超线性偏置，不会选出任何剖面，见第 V节。

（面板 (c)）。我们在表I中总结了 $\alpha \le 1$对应的选定标度律和剖面；对于 $\alpha > 1$，该表报告了有限时间标度发散，但未指定普适分布。

VI. 基尼系数的动力学

迄今为止，我们关注的是活跃个体所拥有的资源分布 $f(x,\ t)$ 的动力学及其自相似性质。现在，我们将借助标准经济学指标，即洛伦兹曲线 $L(u)$ 及其对应的基尼系数 $\mathcal{G}$，来量化这种资源分布所伴随的不平等。附录A中给出了详细推导，此处概述主要结果。简言之，洛伦兹曲线以人口累计占比为横轴，以资源累计占比为纵轴。在完全平等的情况下，洛伦兹曲线是一条平分第一象限的直线。基尼系数是第一象限的平分线与洛伦兹曲线之间面积的两倍，因此$\mathcal{G} = 0$ 表示完全平等，而 $\mathcal{G} = 1$ 表示最大不平等，即一个人拥有全部资源。在我们的模型中，不平等程度随时间推移而增加，因此洛伦兹曲线及其对应的基尼系数都成为随时间变化的变量，分别记为 $L(u,\ t)$ 和 $\mathcal{G}(t)$。

在总个体数守恒且不存在财富再分配的庭院旧货交易模型中，已有研究表明，基尼系数是动力学的李雅普诺夫泛函 [39]。在我们的模型中，个体数并不守恒，因此洛伦兹曲线及其相应基尼系数的时间演化包含两个贡献项。第一项来自$f(x,\ t)$的变化，即 $N(t)$活跃个体内部资源的分布；第二项则源于非活跃人口所占比例的增加，即 N_0不拥有任何资源的 R人口。后者记为 $p_0(t) = 1 - N(t)/N_0$。由于这些非活跃个体持有零资源，洛伦兹曲线可以定义为

$$L(u,t) = \begin{cases} 0, & 0 \le u \le p_0(t), \\ L_{\rm act}\left(\dfrac{u - p_0(t)}{1 - p_0(t)}, t\right), & p_0(t) < u \le 1, \end{cases} \tag{29}$$

其中 u 是人口比例，而 $L_{\rm act}$ 是仅针对活跃个体的洛伦兹曲线。后者由参数对 $\left(F(x,\ t)\ M(x,\ t)\right)$ 参数化，其中 $x \in [0, \infty)$，其中

$$F(x,t) = \frac{1}{N(t)} \int_0^x f(x',t)\, dx', \tag{30}$$

$$M(x,t) = \frac{1}{R} \int_0^x x' f(x',t)\, dx' \tag{31}$$

分别表示活跃个体的比例，以及资源量低于 x 的个体所持有的资源比例，即 $L_{\rm act}(u,\ t) = M\left(F^{-1}(u,\ t)\ t\right)$。换言之，非活跃个体的存在实际上将活跃曲线压缩到宽度为 $1 - p_0$ 的区间内。一般而言，基尼系数通过洛伦兹曲线定义为

$$\mathcal{G}(t) = 1 - 2\int_0^1 L(u,t)\, du = p_0(t) + (1 - p_0(t))\mathcal{G}_{\rm act}(t)$$

$$\text{where } \mathcal{G}_{\rm act}(t) = 1 - 2\int_0^1 L_{\rm act}(u,t)\, du\,, \tag{32}$$

更详细的推导见附录 A。这里，我们关注 $\mathcal{G}(t)$ 在晚期的动力学，即当 $f(x,\ t)$遵循方程（12）中的自相似动力学时。此时，活跃群体的基尼系数 $\mathcal{G}_{\rm act}$ 变为与时间无关，可由形状函数直接计算得出：

$$\mathcal{G}_{\rm act} = 1 - \frac{2}{N_\Phi R} \int_0^\infty \Phi(y) \left[\int_0^y y' \Phi(y')\, dy'\right] dy, \tag{33}$$

$$N_\Phi = \int_0^\infty \Phi(y)\, dy. \tag{34}$$

对于具有次线性偏置的边际分布 $0 < \alpha < 1$，上述表达式可简化为：

$$\mathcal{G}_{\rm act} = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^1 e^{-2A_\alpha(z)}\, dz}{\displaystyle\int_0^1 e^{-A_\alpha(z)}\, dz}\,, \tag{35}$$

其中，我们引入了 $A_\alpha(z) = \alpha \int_0^z (1-\alpha+\alpha v - v^\alpha)^{-1} dv$ 和 $z = y/y_{\rm m}$。一般而言，这些积分需要进行数值计算。然而，对于极限情形$\alpha = 1$，选定剖面为指数型，且 $\mathcal{G}_{\rm act} = 1/2$。

因此，在自相似区间内，$\mathcal{G}(t)$ 的动力学仅源于非活跃个体比例的增加，这些个体没有财富。因此，我们可以通过将 $\mathcal{G}(t)$ 的时间标度明确写出，其中将 $t_{\rm sc}$ 记为自相似区间的起始时间，$N_{\rm sc} = N(t_{\rm sc})$ 记为活跃个体的数量，并将 $x_{\rm sc} = x_c(t_{\rm sc})$ 记为此时的临界规模。结合式（32）与式（$0 < \alpha < 1$ 中的临界规模增长律（17），可得

$$\mathcal{G}(t) = 1 - \frac{(1-\mathcal{G}_{\rm act})N_{\rm sc}}{N_0}\left[1 + \frac{(1-\alpha)\lambda_{\rm m}\mu(t-t_{\rm sc})}{{x_{\rm sc}}^{1-\alpha}}\right]^{1/(\alpha-1)}. \tag{36}$$

对于线性偏置 $\alpha = 1$，这变为

$$\mathcal{G}(t) = 1 - \frac{N_{\rm sc}}{2N_0} e^{-\mu(t-t_{\rm sc})}. \tag{37}$$

因此，在所选标度区间内，基尼系数趋近于 1；当 $0 < \alpha < 1$ 时，按幂律趋近；当 $\alpha = 1$ 时，则按指数形式趋近。

VII. 与基于主体的模拟进行比较

我们最后回到有偏资产交换模型，并将其与平均场预测进行比较。对 $\alpha = 1/2$ 的比较如图4所示。我们通过活跃个体计算平均场临界规模：

$$x_c(t) = \left(\frac{1}{N(t)} \sum_{i:x_i(t)>0} x_i(t)^\alpha\right)^{1/\alpha}, \tag{38}$$

并估计

$$\lambda(t) = \frac{\dot{x}_c(t)}{\mu x_c(t)^\alpha}. \tag{39}$$

此外，基尼系数是在所有 N_0主体上计算的，包括非活跃主体，结果为

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t) &= \frac{1}{2N_0 R}\sum_{i,j=1}^{N_0} |x_i(t) - x_j(t)| \\ &= \frac{2}{N_0 R}\sum_{k=1}^{N_0} k\, x_{(k)}(t) - \frac{N_0+1}{N_0},\end{aligned} \tag{40}$$

其中 $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(N_0)}$ 表示按递增顺序排列的资源。这三个量的时间演化如图 4（a）所示。经过初始瞬态后，临界规模以指数为2 的幂律增长（第一幅图），而标度率 $\lambda(t)$ 趋近于选定的边缘平均场值 $\lambda_{\rm m} = 1/4$（第二幅图）。由于种群初始化时接近于

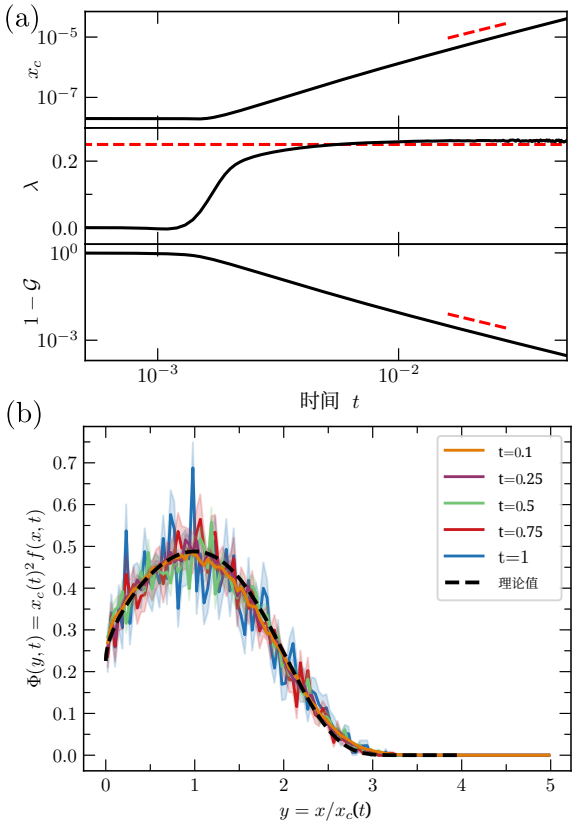

图 4. 有偏资产交换模型与所选平均场剖面在 $\alpha = 1/2$下的标度比较。(a) 估计的 $\lambda(t)$趋近于所选值 $\lambda_{\rm m} = 1/4$，而临界规模 $x_c(t)$不断增长，基尼系数 $\mathcal{G}$ 趋于 1。(b) 在中间标度区间内，重标度资源分布塌缩到所选理论剖面上。阴影曲线表示不同运行之间的涨落。

完全平等，而有偏动力学会导致最大程度的不平等，基尼系数从 0 过渡到 1（第三幅图）。在较晚时刻，$1-\mathcal{G}(t)$ 按照预测的幂律衰减 t^{-2}，见式（36）。在图 4（b）中，我们展示了在较晚时刻，经过重新标度的资源直方图塌缩到选定的平均场剖面上。然而，由于个体数量不断减少，有限尺寸涨落随时间推移变得更加显著。

VIII. 结论

我们提出了一个将不公平竞争、守恒的总资源和主体灭绝相结合的最简模型。这三个关键要素导致了一种熟化动力学：资源超过临界值的主体变得更加富有，而其他主体则变得更加贫困，最终导致一部分主体不再拥有任何资源。至关重要的是，临界资源量会随时间增加，从而加剧主体之间的不平等。根据偏向的强度，即次线性、线性或超线性，

该模型预测出两种性质截然不同的动力学状态。一方面，资源以自相似方式持续集中到少数主体手中；另一方面，则出现赢家通吃情景，在这种情景下，即使在平均场层面，动力学也会在有限时间内失效。在第一种情景中，我们通过解析方法量化了不平等动力学，推导出临界规模和基尼系数随时间的标度关系。此外，我们推导出了一族适用于晚期的形状函数，从而实现重标度资源分布的塌缩，并提出了一种能够选出该族中唯一成员的机制。然而，在赢家通吃情景中，平均场近似的稳健性较低，在塌缩之前的状态范围内不会选出唯一的形状函数。

临界规模阈值这一概念在社会科学领域被广泛使用，其名称为“临界质量”[40, 41]，其中，与经典成核理论一样 [42]，该阈值与时间无关。然而，据我们所知，社会科学领域尚未引入一种仿照LSW理论、随时间变化且能够区分增长个体与收缩个体的临界规模。即使是迁移驱动增长的标度理论 [15] 以及偏置交换的平均场模型 [14]，也只是通过一个典型规模来刻画动力学，而没有将其与区分增长和收缩的阈值联系起来。我们的理论明确弥补了这一空白。为了在经济背景下说明这一范式转变，可以考虑通常所说的K型经济，即存在一个分叉点的经济：超过该点，富裕个体会变得更加富裕；低于该点，贫困个体会变得更加贫困。我们的框架将这一静态概念转变为动态概念，其中K形的分叉点并非固定阈值，而是临界资源 $x_c(t)$本身，并且会随时间增长。因此，个体要留在上升分支上必须跨过的门槛也在不断升高。曾经稳稳高于这一阈值的个体，后来可能开始衰退，并不是因为自身资源减少了——事实上，他们的资源一直在增加，而是因为阈值移动到了他们之上。

同样，物理学界大多研究了复杂系统（如城市、企业等）在某一时刻的规模标度关系。然而，鲜有研究转而关注资源或人口曲线本身随时间的标度关系 [15–17]。我们的研究将焦点从无标度稳态规模分布转向此类分布的无标度时间动力学 [43]。一个顺理成章的后续问题是，如何构建能够抵消富裕个体优势的策略，以防止寡头统治或小城市空心化。

然而，我们的研究雄心也受到物理学应用于社会领域时常见局限的制约。呼应 Ball 的观点 [40]，，像我们这样的模型至多只能表明：如果某些结构性条件成立，例如灭绝与偏向富裕者相结合，那么集体结果就会呈现一种特定且可刻画的失控不平等形式；如果偏向足够强，这种结果甚至可能导致整个动力学在有限时间内崩溃。然而，它无法告诉我们这种偏向源自何处，也无法说明如何在实践中缓解它。借用皮凯蒂的话来说 [44]，：“不平等既非经济因素所致，也非技术因素所致；它是意识形态和政治因素所致。”

IX. 致谢

G.B. 感谢由 MCIU/AEI/10.13039/501100011033 和 ESF+ 资助的 JDC2023- 051554-I 项目提供的支持。作者感谢 Janet van der Graaf Mas 就城市动力学展开的启发性讨论，感谢 René Karadakic 提出美国农地的例子，感谢 Luis Seoane 向我们介绍 Bruce Boghosian 的研究成果，并感谢 Emanuele Cozzo 对手稿提出的意见。

[1] V. Pareto，《政治经济学教程》，第 1 卷（F. Rouge，洛桑，1896年）。[2] V. M. Yakovenko 和 J. B. Rosser，《现代物理评论》81，1703 2009( )。[3] W. Steffen、W. Broadgate、L. Deutsch、O. Gaffney 和 C. Ludwig，《人类世评论》2，81（2015）。[4] R. Gibrat，《经济不平等》（Recueil Sirey，巴黎，1931年）。[5] J. Sutton，《经济文献杂志》35，40（1997）。[6] J.-P. Bouchaud 和 M. Mézard，《物理学A》282，536（2000）。[7] X. Gabaix，《经济学年度评论》1，255（2009）。[8] X. Gabaix，《经济学季刊》114，739（1999）。[9] R. L. Axtell，《科学》293，1818（2001）。[10] J.-P. Bouchaud，《复杂系统物理学杂志》4，041001（2023年）。[11] A. Chakraborti，《国际现代物理学杂志C辑》13，1315（2002）。[12] B. M. Boghosian，《物理评论E》89，042804（2014）。[13] B. M. Boghosian、A. Devitt-Lee、M. Johnson、J. Li、J. A. Marcq 和 H. Wang，《物理学A》476，15（2017）。[14] S. Ispolatov、P. L. Krapivsky 和 S. Redner，《欧洲学术杂志B辑》**2**，267（1998）。[15] F. Leyvraz 和 S. Redner，《物理评论快报》**88**，068301（2002）。[16] E. Ben-Naim 和 P. L. Krapivsky，《物理评论E》**68**，031104（2003）。[17] B. M. Boghosian、A. Devitt-Lee 和 H. Wang，载于第一届复杂信息系统国际会议论文集（*COMPLEXIS*）（SciTePress，塞图巴尔，2016年），第187页。[18] 美国农业部经济研究局，美国农场数量持续缓慢下降（2023年），查阅于2026年5月。[19] 美国经济分析局，汽车总销量[TOTALSA],摘自圣路易斯联邦储备银行的FRED数据库（2026年），查阅于2026年11月。[20] 美国能源部车辆技术办公室，事实#695：新车经销商（2011年），数据来自NADA 2011年数据；查阅于2026年11月。

[21] 德国联邦和州统计局，德国区域数据库：德国市镇的数量和规模（2026年），查阅于2026年5月。 [22] P. W. Voorhees，《统计物理学杂志》38，231（1985）。 [23] J. Carr 和 O. Penrose，《物理学D》124，166（1998）。 [24] B. Niethammer 和 R. L. Pego，《统计物理学杂志》95，867（1999）。 [25] I. M. Lifshitz 和 V. V. Slyozov，《固体物理学与化学杂志》19，35（1961）。 [26] C. Wagner，《电化学杂志》65，581（1961）。 [27] T. C. Schelling，《数学社会学杂志》1，143（1971）。 [28] D. Vinković 和 A. Kirman，《美国国家科学院院刊》103，19261（2006）。 [29] L. Dall'Asta 和 T. Galla，《物理学杂志A：数学理论》41，435003（2008）。 [30] F. Caccioli、L. Dall'Asta、T. Galla 和 T. Rogers，《物理评论E》87，052114（2013）。 [31] P. Munjal、L. Kumar、S. Kumar 和 H. Banati，《物理学A》522，182（2019）。 [32] J. Bauermann、G. Bartolucci、C. A. Weber 和 F. Jülicher，《物理评论快报》135，148201（2025）。 [33] B. Niethammer，载于《生长过程与界面模型的分析和随机性》（牛津大学出版社，牛津，2008年），第79页。 [34] B. Giron、B. Meerson 和 P. V. Sasorov，《物理评论E》58，4213（1998）。 [35] B. Meerson，《物理评论E》60，3072（1999）。 [36] B. Y. Rubinstein 和 B. Zaltzman，《物理评论E》61，709（2000）。 [37] J. G. Conlon 和 M. Dabkowski，《非线性科学杂志》32，75（2022）。 [38] J. G. Conlon 和 B. Niethammer，《统计物理学杂志》154，1251（2014）。 [39] B. M. Boghosian、M. Johnson 和 J. A. Marcq，《统计物理学杂志》161，1339（2015）。 [40] Ball，《临界质量：一事如何引发另一事》（麦克米伦，2004年）。 [41] G. Marwell 和 P. Oliver，《集体行动中的临界质量》（剑桥大学出版社，剑桥，1993年）。 [42] K. Kelton 和 A. L. Greer，《凝聚态物质中的成核：材料与生物学中的应用》，佩加蒙材料丛书，第15卷（爱思唯尔，牛津，2010年）。 [43] 除特殊情况 $\alpha = 1$外，此时 λ 和 μ 合并为一个时间尺度，见方程（18）。 [44] T. 皮凯蒂，《资本与意识形态》（哈佛大学出版社，马萨诸塞州剑桥，2020年）。

附录 A：根据规模分布得到的洛伦兹曲线和基尼系数

1. 活跃个体的洛伦兹曲线和基尼系数

为了计算给定资源分布所对应的洛伦兹曲线和基尼系数，我们首先按照资源量递增的顺序排列活跃个体，并令 $u \in [0,1]$ 表示活跃群体中的某一比例。洛伦兹曲线 $L_{\mathrm{act}}(u,\ t)$ 表示资源最少的 u 比例活跃个体所拥有的总资源比例。两个极端情况是 $L_{\mathrm{act}}(u,\ t) = u$，即完全平等；以及对于 $u < 1$，$L_{\mathrm{act}}(u,\ t) \to 0$，即单个个体积累了全部资源（赢家通吃）。为了根据 $f(x,\ t)$ 构造 $L_{\mathrm{act}}(u,\ t)$，我们需要重标度总体累积分布函数，

$$F(x,t) = \frac{1}{N(t)} \int_0^x f(x',t)\, dx', \tag{A1}$$

该函数将资源值 x 映射为拥有较少该资源的活跃群体比例 u，即 $F : x \to u = F(x)$。其反函数以 u 为自变量，返回 x，称为分位数函数 $x(u,\ t) := F^{-1}(u,\ t)$，由 $F\big(x(u,\ t),\ t\big) = u$隐式定义。有了 $x(u,\ t)$，我们便可以定义活跃群体的洛伦兹曲线

$$L_{\mathrm{act}}(u,t) = \frac{1}{R} \int_0^{x(u,t)} x' f(x',t)\, dx' = M\big(x(u,t),t\big), \tag{A2}$$

其中，我们使用了 R，即式10 中定义的总资源，作为归一化因子。实际上，L_{act} 无需对 F求逆即可得到，只需考察由以下变量对构成的参数曲线，其中 $x \in [0,\infty)$：$\big(F(x,\ t),\ M(x,\ t)\big)$，其中$M(x,\ t) := \frac{1}{R}\int_0^x x' f(x',\ t)\, dx'$。

基尼系数是平等线与洛伦兹曲线之间面积的两倍，

$$\mathcal{G}_{\mathrm{act}}(t) = 1 - 2\int_0^1 L_{\mathrm{act}}(u,t)\, du. \tag{A3}$$

将式（A2）代入式（A3），并通过 $du = f\,(x,\ t)\,/N\,(t)$，将变量从 u变换为 x，可将活跃群体的基尼系数表示为在 $f\,(x,\ t)$ 上的二重积分：

$$\mathcal{G}_{\mathrm{act}}(t) \ = \ 1 - \frac{2}{N(t)\,R} \int_0^\infty f(x,t) \left[\int_0^x x' f(x',t)\, dx' \right] dx. \tag{A4}$$

2. 将非活跃个体纳入计算

式（A4）仅描述活跃个体之间的不平等。由 N_0 个体组成的总体还包括那些已经到达吸收边界并停留在 $x = 0$的 $N_0 - N\ (t)$ 个体。根据定义，他们是系统中最贫穷的个体，因此必须纳入洛伦兹曲线。令

$$p_0(t) := 1 - \frac{N(t)}{N_0} \tag{A5}$$

表示非活跃比例。在全体群体排序中，前 $p_0(t)$ 比例的个体恰好是非活跃个体，每个个体持有的资源均为零，因此洛伦兹曲线在此处保持为零：$L(u,\ t) \ = \ 0$ 对于 $u \ \le \ p_0(t)$。对于$u > p_0(t)$，其余个体恰好构成活跃群体，现在经过重新缩放后填充区间 $(p_0(t), 1]$：将 $w = (u - p_0)\,/(1 - p_0)$ 定义为活跃子总体中的排名，

$$L(u,t) = L_{\mathrm{act}}\left(\frac{u - p_0(t)}{1 - p_0(t)}, t \right), \qquad u > p_0(t), \tag{A6}$$

其中 L_{act} 完全按照公式（A2）基于活跃群体构造（以 R 归一化；由于非活跃个体不贡献资源，因此该值不受影响）。

将这条分段曲线代入式（A3），并在第二段中代入 $w =$（$u - p_0$）/（$1 - p_0$），可得

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t) &= 1 - 2\int_{p_0}^{1} L_{\text{act}}\left(\frac{u-p_0}{1-p_0}, t\right) du \\ &= 1 - 2(1-p_0)\int_0^1 L_{\text{act}}(w,t)\, dw \qquad \text{(A7)} \\ &= 1 - (1-p_0)\big[1 - \mathcal{G}_{\text{act}}(t)\big],\end{aligned}$$

整理后可得到精确分解式

$$\mathcal{G}(t) = p_0(t) + \big[1 - p_0(t)\big]\, \mathcal{G}_{\text{act}}(t)\,. \qquad \text{(A8)}$$

因此，非活跃比例 $p_0(t)$ 是 $\mathcal{G}(t)$ 的下界，而活跃个体之间的不平等则以 $1 - p_0(t)$ 为权重计入。

3. 自相似区间中的基尼系数

代入标度形式 $f(x,t) = x_c(t)^{-2}\Phi(y)$、 $y = x/x_c(t)$，并在所有积分中（包括其上限）进行变量替换 $x = y\, x_c(t)$，活跃个体的数量变为

$$N(t) \to \frac{N_\Phi}{x_c(t)}, \quad N_\Phi := \int_0^\infty \Phi\, dy, \qquad \text{(A9)}$$

而累积分布函数（式（A1））仅通过 x 和 t 取决于y:

$$F(x,t) \to \frac{1}{N_\Phi}\int_0^{x/x_c} \Phi(y')\, dy' := F_\Phi(y). \qquad \text{(A10)}$$

因此，对 $u = F_\Phi$（ y x u u = F_Φ^{-1} u 2 x_c ）求逆可得（, t）/$x_c = y$（）（）。在式（A）中，幂次抵消，上限变为 y（u），因此

$$L_{\text{act}}(u) \to \frac{1}{R}\int_0^{y(u)} y'\, \Phi(y')\, dy', \qquad \text{(A11)}$$

它不依赖于时间。同样，活跃个体的基尼系数也变为与时间无关，这一点可通过将式（A11）代入式（A3）并注意到，由于 $u = F_\Phi(y)$， $du/dy = \Phi(y)/N_\Phi$

$$\mathcal{G}_{\text{act}}(t) \to 1 - \frac{2}{N_\Phi R}\int_0^\infty \Phi(y)\left[\int_0^y y'\Phi(y')\, dy'\right] dy. \qquad \text{(A12)}$$