arXiv:2611.31134v1 [math.SP] 23 Nov 2026

平面域上的严格诺伊曼–狄利克雷特征值不等式

JONATHAN ROHLEDER

Abstract. 根据我们此前的研究，对于单连通的有界平面 Lipschitz 域，纽曼拉普拉斯算子的第（$k+2$）个特征值不超过 k个狄利克雷特征值。在本文中，我们通过证明该不等式总是严格的，进一步强化了这一结论。此结论此前仅在附加假设下才为人所知。

1. Introduction

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ 为有界连通 Lipschitz 域，令

$$0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$$

分别表示具有诺伊曼边界条件的拉普拉斯算子的特征值 $-\Delta_{\mathrm{N}}$ 及

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

具有狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子的特征值 $-\Delta_{\mathrm{D}}$，所有特征值均按重数计。本文旨在证明以下定理。

定理 1.1。若 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界单连通 *Lipschitz* 区域，则

$$\mu_{k+2} < \lambda_k \tag{1.1}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。

此前，作者已证明单连通平面域上的不等式 $\mu_{k+2} \leq \lambda_k$ [15]，，并证明了当 λ_k 为单特征值或 $\partial\Omega$包含一条直线段时不等式严格成立。这部分验证了如下猜想：在维数 d下，不等式 $\mu_{k+d} \leq \lambda_k$ 应对所有 k成立，参见例如 [12, 猜想 3.2。42] 或 [1]。本文给出的定理 1.1 的证明基于对 [15] 中机制的一项非平凡改进；另见下文注 3.5。

对于凸且足够光滑的平面域，$\mu_{k+2} < \lambda_k$ 由 Payne [14]证明；其 d维凸情形由 Levine 和 Weinberger[11]确立。对于$\mathbb{R}^d$中的任意有界 Lipschitz 域（以及更一般的一些域），目前已知最一般的结果是 Friedlander–Filonov 不等式，$\mu_{k+1} < \lambda_k$对所有 k [7, 3]均成立。最近，有人研究了针对较大的 k [6] 或较大的 d [4] 的一些改进。

最后，我们指出，关于 (1.1) 中的 $k = 1$，近期已取得了相当大的进展。作者最近证明了 $\mu_3 < \lambda_1$ 单连通平面域上的情形，而 Tang 和 Zhang [15], 则利用作者方法的一种变体，并结合针对一个辅助问题的某个等周不等式，证明了该结果适用于任意有界平面 Lipschitz 域；不过，他们的证明似乎无法推广到更高 k。此外，Filonov [5] 最近利用已知的狄利克雷和诺伊曼特征值等周不等式，证明了 $\mu_3 < \lambda_1$ 在 $d \geq 3$ 维时的情形。

2. Preliminaries

本节介绍一些预备知识，并简要回顾[15], 构造自伴向量拉普拉斯算子这一主要工具；当 Ω 为单连通域时，该算子的谱与非零诺伊曼和狄利克雷拉普拉斯算子的特征值之并集一致。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界 Lipschitz 域，并用 ν 表示几乎处处定义在 $\partial\Omega$ 上的外单位法向量场。回顾一下，若 $u \in L^2(\Omega)^2$ 满足散度 $u \in L^2(\Omega)$，则法向迹 $u|_{\partial\Omega} \cdot \nu \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 定义良好，并且

$$\int_\Omega u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega \overline{\varphi} \operatorname{div} u = (u|_{\partial\Omega} \cdot \nu, \varphi|_{\partial\Omega})_{\partial\Omega}$$

对所有 $\varphi \in H^1(\Omega)$ 均成立，其中 $\varphi|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ 是 φ 的迹，而 $(\cdot,\ \cdot)_{\partial\Omega}$ 表示 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 与其对偶空间 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 之间的半双线性对偶；参见 [2,第 XIX 章第 1 节定理 2]。有时我们会用到 $\partial\Omega$ 上的单位切向量场$\tau = (-\nu_2,\ \nu_1)$。

在下文中，我们还将使用以下记号

$$\nabla^\perp \varphi := \begin{pmatrix} -\partial_2 \varphi \\ \partial_1 \varphi \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \omega(u) := \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$$

若 $\varphi \in H^1(\Omega)$ 且 $u = (u_1,\ u_2)^\top \in L^2(\Omega)^2$ 满足： $\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$按分布意义属于 $L^2(\Omega)$，则更一般地，若 $u = (u_1,\ u_2)^\top$ 是一个向量场，我们记 $u^\perp := (-u_2,\ u_1)^\top$ 为它绕正方向旋转角度 $\pi/2$ 后逐点得到的正交向量场。

考虑半双线性型

$$\mathfrak{a}[u,v] = \int_\Omega \left(\operatorname{div} u \, \overline{\operatorname{div} v} + \omega(u)\overline{\omega(v)} \right)$$

定义在

$$\operatorname{dom} \mathfrak{a} = \left\{ u \in L^2(\Omega)^2 : \operatorname{div} u, \omega(u) \in L^2(\Omega), \nu \cdot u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

利用闭非负半双线性型及其相伴自伴算子理论（参见例如 [10, 第 VI 章]），文献 [15, 命题 3.1]证明存在非负自伴算子 A，其作用于 $L^2(\Omega)^2$，使得

$$\mathfrak{a}[u,v] = (Au, v)$$

对所有 $u \in \operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} \mathfrak{a}$ 及 $v \in \operatorname{dom} \mathfrak{a}$，均有此关系。此外，根据抽象理论，算子 A 的定义域由满足以下条件的 $u \in \operatorname{dom} \mathfrak{a}$ 构成：存在一个向量场 $w \in L^2(\Omega)^2$，使得

$$\mathfrak{a}[u,v] = (w, v)$$

对所有 $v \in \operatorname{dom} \mathfrak{a}$均成立；在这种情况下，我们有 $Au = w$。注意，算子 A可解释为带有绝对边界条件的霍奇拉普拉斯算子；参见[15, 备注 3.9] 和 [8, 9, 13]。

以下谱描述是 [15, 命题 3.2]的推论。

命题 2.1。 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界单连通 *Lipschitz* 区域。则算子 A 具有纯离散谱，并且对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，恒等式

$$\ker(A - \lambda) = \nabla \ker(-\Delta_{\mathrm{N}} - \lambda) \oplus \nabla^\perp \ker(-\Delta_{\mathrm{D}} - \lambda) \tag{2.1}$$

成立。

特别地，如果 Ω 是单连通的， A的谱由 $-\Delta_{\mathrm{N}}$ 的所有正特征值和 $-\Delta_{\mathrm{D}}$的所有特征值组成，且按其重数计。不作后一假设时， A 还具有一个非平凡核，由某些调和场构成，其维数等于 Ω 的第一贝蒂数；参见 [15,备注 37]。

记 $\eta_1 \le \eta_2 \le \dots$为 A的特征值，仍按重数计数。根据经典理论，我们有

$$\eta_k = \min_{\substack{U\subset \mathrm{dom}\, a \\ \dim U = k}} \max_{\substack{u\in U \\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega \left(|\operatorname{div} u|^2 + |\omega(u)|^2\right)}{\int_\Omega |u|^2} \tag{2.2}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$均成立。

3. 定理 1.1 的证明

本节证明定理 1.1。我们首先汇总几个有用的引理。以下始终假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界单连通 Lipschitz 区域。

引理 3.1。 以下断言成立。

(i) 若 $\lambda > 0$ 且 $u \in$ 属于$A-\lambda$的核，则$\omega(u) \in$ 属于$-\Delta_{\mathrm{D}}-\lambda$的核 $\subset H_0^1(\Omega)$ 且 $\operatorname{div} u \in$ 属于$-\Delta_{\mathrm{N}}-\lambda$的核 $\subset H^1(\Omega)$。(ii) 若 u， $u^\perp \in$ 属于$A-\lambda$的核，则 $u=0$ 恒等成立。

证明。 根据命题 2.1，每个 $u \in$ 属于$A-\lambda$的核的元素都可以写成

$$u = \nabla\psi + \nabla^\perp\varphi \tag{3.1}$$

其中 $\psi \in$ 属于$-\Delta_{\mathrm{N}}-\lambda$的核，且 $\varphi \in$ 属于$-\Delta_{\mathrm{D}}-\lambda$的核。因此，

$$\omega(u) = \Delta\varphi = -\lambda\varphi \in \ker(-\Delta_{\mathrm{D}}-\lambda) \subset H_0^1(\Omega)$$

and

$$\operatorname{div} u = \Delta\psi = -\lambda\psi \in \ker(-\Delta_{\mathrm{N}}-\lambda) \subset H^1(\Omega); \tag{3.2}$$

这就证明了 (i)。

若 u， $u^\perp \in$ 属于$A-\lambda$的核，且 u 按 (3.1) 的形式表示，则由 (i) 得，

$$H_0^1(\Omega) \ni \omega(u^\perp) = \operatorname{div} u = -\lambda\psi,$$

因此 $\psi \in$ 属于$-\Delta_{\mathrm{N}}-\lambda$的核 $\cap H_0^1(\Omega)$；由唯一延拓性质（例如 [15, 引理 4.4]）可知 $\psi = 0$ 恒为常数。然而，此时 $u = \nabla^\perp\varphi$ ，且由 (i) 得，

$$\lambda\varphi = -\Delta\varphi = \operatorname{div} u^\perp \in \ker(-\Delta_{\mathrm{N}}-\lambda),$$

也就是说， $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap$ 核$(-\Delta_{\mathrm{N}}-\lambda)$。再次应用唯一延拓可得 $\varphi = 0$ 恒等成立，从而有 $u = 0$。□

下文中，对于满足 $\Delta\psi \in L^2(\Omega)$ 的 $\psi \in H^1(\Omega)$，我们用 $\partial_\nu\psi|_{\partial\Omega} = \nabla\psi|_{\partial\Omega}\cdot\nu$ 表示其关于 $\partial\Omega$ 上外单位法向量场的导数。

引理 3.2。 若 $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ 且 $u = (u_1, u_2)^\top$，则

$$\omega(u) = \nu_1\partial_\nu u_2 - \nu_2\partial_\nu u_1$$

在 $\partial\Omega$ 上几乎处处成立。

证明。 由于 $u_j \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，我们有 $\partial_i u_j \in H^1(\Omega)$、 $i = 1,\ 2$，并且在 $\partial\Omega$ 上有 $\nabla u_j \cdot \tau = 0$，其中 ∇u_j 在 $\partial\Omega$ 上的各分量是 $H^1(\Omega)$ 中函数的迹，因此属于 $L^2(\partial\Omega)$。因此，我们得到

$$\nabla u_j = (\nabla u_j\cdot\tau)\tau + (\nabla u_j\cdot\nu)\nu = (\partial_\nu u_j)\nu$$

在 $\partial\Omega$ 上几乎处处成立。特别地， $\partial_i u_j = \nu_i\partial_\nu u_j$ 对于 $i = 1,2$，且该结论由 $\omega(u)$ 的定义可得。□

引理 3.3。 如果 $u_1, u_2 \in$ 核$(-\Delta_{\mathrm{D}} - \lambda)$ 以及 $\omega(u) \in H_0^1(\Omega)$，其中 $u = (u_1, u_2)^\top$，则 $u \in$ 核$(A - \lambda)$。

证明。 由于 u_1， $u_2 \in H_0^1(\Omega)$， u 属于 $\mathrm{dom}\ \mathfrak{a}$。此外，由于，$\mathrm{div}\ u \in H^1(\Omega)$

$$\nabla \operatorname{div} u = \Delta u - \nabla^\perp \omega(u) \in L^2(\Omega)^2.$$

因此，对于每个 $v \in \mathrm{dom}\ \mathfrak{a}$，我们有

$$\mathfrak{a}[u, v] = \int_\Omega \left(\operatorname{div} u \, \overline{\operatorname{div} v} + \omega(u) \overline{\omega(v)} \right) = - \int_\Omega \Delta u \cdot v = \lambda \int_\Omega u \cdot v,$$

其中边界项由于 $v|_{\partial\Omega} \cdot \nu = 0$ 和 $\omega\,（u）\ \in H_0^1(\Omega)$ 而消失。这就证明了断言。□

以下命题将是证明定理 1.1 中严格不等式的主要工具。

命题 3.4。 假设 λ 是 $-\Delta_{\mathrm{D}}$的一个特征值。此外，假设$W \subset$ 核$(-\Delta_{\mathrm{D}} - \lambda)$ 是一个子空间，且 $p :=$ 维数 $W \geq 1$。那么

$$\dim \left(W^2 \cap \ker(A - \lambda) \right) \leq p - 1$$

成立。

证明。 简记

$$D_W := W^2 \cap \ker(A - \lambda),$$

从而我们的目标是证明 $\dim D_W \leq p - 1$。反设 $\dim D_W \geq p$，则导出矛盾。

步骤 1。 本步骤中，我们根据矛盾假设推出 $W \subset H^2(\Omega)$。设 W 的一组标准正交基为 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_p\}$。根据假设 $\dim\ D_W \geq p$，D_W 含有 p 个线性无关元素

$$u^j = \sum_{k=1}^{p} A_k^j \varphi_k, \quad j = 1, \ldots, p,$$

满足 $A_k^j \in \mathbb{C}^2$。定义这些向量

$$\mathcal{A}^j = \begin{pmatrix} A_1^j \\ \vdots \\ A_p^j \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_\perp^j = \begin{pmatrix} (A_1^j)^\perp \\ \vdots \\ (A_p^j)^\perp \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, p$$

在 $\mathbb{C}^{2p}$ 中，以及矩阵

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ \mathcal{A}^1 & \cdots & \mathcal{A}^p & \mathcal{A}_\perp^1 & \cdots & \mathcal{A}_\perp^p \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2p \times 2p}.$$

矩阵 $\mathcal{A}$ 可逆：事实上，假设对于某个向量 $C = (c_1, \ldots, c_{2p})^\top \in \mathbb{C}^{2p}$，有 $\mathcal{A}C = 0$。那么

$$\sum_{j=1}^{p} c_j \begin{pmatrix} A_1^j \varphi_1 \\ \vdots \\ A_p^j \varphi_p \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{p} c_{j+p} \begin{pmatrix} (A_1^j)^\perp \varphi_1 \\ \vdots \\ (A_p^j)^\perp \varphi_p \end{pmatrix} = 0.$$

这可以读作 p 中的方程 $\mathbb{C}^2$；将这些方程相加可得

$$v + w^\perp = 0, \quad \text{where} \quad v = \sum_{j=1}^{p} c_j u^j, \quad w = \sum_{j=1}^{p} c_{j+p} u^j.$$

特别地， v， $w \in$ 核$(A-\lambda)$以及 $v=-w^{\perp}$。由此以及引理 3.1 (ii)，我们得到 $v=0=w$ 恒等成立。此外，由于 u^j 线性无关，$c_1=\cdots=c_{2p}=0$ 成立。因此， $\mathcal{A}$ 是可逆的。

接下来，注意到由引理 3.1 (i)，

$$H_0^1(\Omega) \ni -\omega(u^j)=\sum_{k=1}^{p}(A_k^j)^{\perp}\cdot\nabla\varphi_k, \quad j=1,\dots,p, \tag{3.3}$$

and

$$H^1(\Omega) \ni \operatorname{div}(u^j)=\sum_{k=1}^{p}A_k^j\cdot\nabla\varphi_k, \quad j=1,\dots,p.$$

特别地，

$$(\partial_1\varphi_1,\partial_2\varphi_1,\partial_1\varphi_2,\partial_2\varphi_2,\dots,\partial_1\varphi_p,\partial_2\varphi_p)\mathcal{A}\in H^1(\Omega)^{2p},$$

并从右侧乘以 $\mathcal{A}^{-1}$，得到 $\varphi_k \in H^2(\Omega)$， $k=1$， ...， p。因此$W\subset H^2(\Omega)$。

步骤 2. 定义

$$V_W:=\{\partial_\nu\varphi|_{\partial\Omega}:\varphi\in W\};$$

注意到唯一延拓意味着，限制在 $\ker(-\Delta_{\mathrm{D}}-\lambda)$ 上的法向导数是单射，因此 $\dim V_W=\dim W=p$。此外，令

$$H:=\left\{h\in L^2(\partial\Omega):h\nu_1,h\nu_2\in V_W\right\}.$$

在这一步中，我们证明

$$\dim H\geq\dim D_W. \tag{3.4}$$

为此，定义映射

$$\mathcal{N}:D_W\to H, \quad \mathcal{N}u=\nu_1\partial_\nu u_1|_{\partial\Omega}+\nu_2\partial_\nu u_2|_{\partial\Omega}.$$

这是良定义的，因为对于 $u=(u_1,u_2)^{\top}\in D_W\subset W^2$，在 $\partial\Omega$ 上有

$$\begin{aligned}\nu_1\mathcal{N}u&=\nu_1^2\partial_\nu u_1+\nu_1\nu_2\partial_\nu u_2=\partial_\nu u_1+\nu_2\left(\nu_1\partial_\nu u_2-\nu_2\partial_\nu u_1\right)=\partial_\nu u_1+\nu_2\omega(u)\\&=\partial_\nu u_1,\end{aligned}$$

其中我们使用了引理 3.1 (i) 和引理 3.2；类似地， $\nu_2\mathcal{N}u=\partial_\nu u_2$。映射 $\mathcal{N}$ 是单射：事实上，如果 $\mathcal{N}u=0$，则向量场 $\binom{\partial_\nu u_1}{\partial_\nu u_2}$ 与 $\partial\Omega$ 上的法向量场正交。另一方面，根据引理 3.1 (i)，$u\in D_W\subset$ 核$(A-\lambda)$ 意味着在 $\partial\Omega$ 上，

$$0=\omega(u)=\nu_1\partial_\nu u_2-\nu_2\partial_\nu u_1,$$

因此，$\binom{\partial_\nu u_1}{\partial_\nu u_2}$ 甚至还与切向量场 $\tau=\nu^{\perp}$ 正交，从而在 $\partial\Omega$ 上消失。由于 u_1, $u_2\in$ 核$(-\Delta_{\mathrm{D}}-\lambda)$，唯一延拓性意味着 $u=0$ 在 Ω 中成立。因此， $\mathcal{N}$ 是单射，并且可得 $\dim H\geq$维数 D_W。事实上，不难看出 $\mathcal{N}$ 实际上是双射，后一维数相等；然而，由于本证明中不需要这一点，我们省略细节。

步骤 3。 最后，我们导出一个矛盾。考虑由下式给出的映射 $P_1,P_2\colon H\to V_W$

$$P_jh=h\nu_j, \quad h\in H, \quad j=1,2.$$

这些映射中的每一个都是单射。事实上，由于 Ω 是 Lipschitz 域，存在非空开集 Σ_1, $\Sigma_2\subset\partial\Omega$，使得

$$\nu_j\neq 0 \text{ almost everywhere on } \Sigma_j, \quad j=1,2;$$

参见引理 A.1。现在假设对某个 $h \in H$，有 $P_1 h = 0$ 。那么， $h = 0$ 在 $\{\nu_1 \neq 0\}$ 上几乎处处成立，特别地， $h = 0$ 在 Σ_1上几乎处处成立。此外，根据 H的定义，由于 $h\nu_2 \in V_W$ ，存在某个 $\varphi \in W$ ，使得$h\nu_2 = \partial_\nu \varphi$ 在 $\partial\Omega$ 上成立。由于左侧在 Σ_1上为零，由唯一延拓可得$\varphi = 0$ 恒成立，因此， $h = 0$ 在 $\{\nu_2 \neq 0\}$上几乎处处成立。由于 $|\nu| = 1$在 $\partial\Omega$ 上几乎处处成立，我们有

$$|\{\nu_1 \neq 0\} \cup \{\nu_2 \neq 0\}| = |\partial\Omega|$$

（$|\cdot|$ 表示 $\partial\Omega$上的一维勒贝格测度）。因此，在 $\partial\Omega$上几乎处处有 $h = 0$ 。 P_2 的单射性证明类似。

现在，由步骤 2 和本证明的初始假设可知，$\dim H \geq \dim\ D_W \geq p$；又因为对于 $j = 1,\ 2,\ P_j \colon H \to V_W$ 是单射，且 $\dim V_W = p$，所以 P_1和 P_2 是同构。因此，

$$B := P_2 \circ P_1^{-1} : V_W \to V_W$$

这是一个定义良好的同构。由 P_1的满射性，每个 $f \in V_W$ 都可写成$f = h\nu_1$ ，其中 $h \in H$，并且

$$Bf = \big(P_2 \circ P_1^{-1}\big)(h\nu_1) = P_2 h = h\nu_2. \tag{3.5}$$

作为有限维复向量空间之间的同构， B 有一个特征值 $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$。设 $f = h\nu_1 \in V_W$ $\{0\}$ 是对应的特征函数。由（3.5）可得

$$zh\nu_1 = zf = Bf = h\nu_2,$$

或者，等价地，$(z\nu_1 - \nu_2)h = 0$ 于 $\partial\Omega$ 上。其余论证与证明 P_1 的单射性类似：也就是说，我们有 $h = 0$ 几乎处处成立于 $\{z\nu_1 - \nu_2 \neq 0\}$ 上，而该集合包含一个非空开集 Σ。此外，对于某个 $\varphi \in W$，有 $\nu_2 h = \partial_\nu \varphi$ ，且左侧在 Σ 上消失，由唯一延拓可得 $\varphi = 0$ 。因此，$h = 0$ 几乎处处成立于 $\{\nu_2 \neq 0\}$ 上；又由于在 $\partial\Omega$ 中几乎每一点处，要么$z\nu_1 - \nu_2 \neq 0$ ，要么 $\nu_2 \neq 0$ （注意 $z \neq 0$），故可得 $h = 0$ 几乎处处成立，这与矛盾相悖。证毕。□

现在我们可以证明本文的主要结果了。

定理 *1.1* 的证明。 为方便表述，我们假设 $k \geq 2$； $k = 1$ 的情形已在 [15] 中处理，因为 λ_1 是简单的。我们选取 $L^2(\Omega)$ 的一组标准正交基 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$，使得对每个 j， $-\Delta_{\mathrm{D}}\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$成立。现在，固定某个 k ，并令

$$W := \operatorname{span}\{\varphi_j : j \leq k, \lambda_j = \lambda_k\}$$

且 $p :=$维数 W；也就是说， k是其对应特征值等于 λ_k的第 p 个指标。特别地，

$$\lambda_{k-p} < \lambda_{k-p+1} = \cdots = \lambda_k.$$

（注意，由于 $k \geq 2$ 且 λ_1简单， $k - p$ 为正。）现在令

$$u = \sum_{j=1}^{k-p} \binom{\alpha_j}{\beta_j} \varphi_j, \quad w = \sum_{j=k-p+1}^{k} \binom{\alpha_j}{\beta_j} \varphi_j, \quad \text{and} \quad v \in \ker(A - \lambda_k) \tag{3.6}$$

对于任意 $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathbb{C}$；注意 $w \in W^2$。与证明 [15, 定理 4.1] 中相同的计算可得

$$\mathfrak{a}[u + w + v] \leq \lambda_k \|u + w + v\|^2. \tag{3.7}$$

由命题 3.4 可知，由任意形如 u、v 和 w 的向量所张成的空间的维数至少为

$$2(k-p)+\dim W^2+\dim\ker(A-\lambda_k)-\dim\left(W^2\cap\ker(A-\lambda_k)\right)\\ \geq 2k+\dim\ker(A-\lambda_k)-(p-1),$$

这里我们用到了：对于任意这样的 u，v，w，都会推出 $u=0=v+w$，因为右侧逐分量满足 $-\Delta(v+w)=\lambda_k(v+w)$，而左侧并不满足，除非 $u=0$。由 (3.7) 和极小极大原理，A 的特征值满足

$$\eta_{2k+\dim\ker(A-\lambda_k)-(p-1)}\leq\lambda_k.$$

由于等于 λ_k的 η_j 至多有 $\dim\ker(A-\lambda_k)$ 个，因此可得

$$\eta_{2k-p+1}<\lambda_k.$$

由于 $-\Delta_{\mathrm{D}}$ 恰有 $k-p$ 个特征值位于 $(0,\ \lambda_k)$ 内，因此 $-\Delta_{\mathrm{N}}$ 至少有

$$2k-p+1-(k-p)=k+1$$

个特征值位于 $(0,\ \lambda_k)$ 内。再考虑到其零特征值，我们便得到$\mu_{k+2}<\lambda_k$。由于 k 是任意的，这就是该定理的结论。□

注 3.5. 从定理 1.1 的证明可以看出，只要能够证明以下结论，就可以避免使用命题 3.4

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\varphi_j\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\varphi_j\end{pmatrix}:j\leq k\right\}\cap\ker(A-\lambda_k)=\{0\}.$$

然而，后者在某些情况下可能并不成立。例如，若 Ω 是单位圆盘，则 $\lambda_2=\lambda_3=j_{1,\,1}^2=:\lambda$，其中 $j_{1,\,1}$ 是贝塞尔函数 J_1的第一个正零点。相应的特征空间在极坐标下由函数 $\varphi_2(r,\ \theta)=J_1(j_{1,\,1}r)\cos\theta$和 $\varphi_3(r,\ \theta)=J_1(j_{1,\,1}r)\sin\theta$ 张成。另一方面，函数

$$\psi(r)=J_0(j_{1,1}r)$$

属于 $\ker(-\Delta_{\mathrm{N}}-\lambda)$（因为 $J_0'=-J_1$），且 $(\nabla\psi)(r,\ \theta)=-j_{1,\,1}J_1(j_{1,\,1}r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$。因此

$$\ker(A-\lambda)\ni\nabla\psi\in\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\varphi_j\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\varphi_j\end{pmatrix}:j\leq 3\right\}.$$

若令 $W=\ker(-\Delta_{\mathrm{D}}-\lambda)$ 且 $p=$维数$W=2$，则由上述结果和命题 3.4 可得，在此情况下 $\dim D_W=1=p-1$。特别地，命题 3.4 的断言是尖锐的。

注 3.6. 命题 3.4 将 [15] 中给出的论证推广，证明只要 λ_k 在狄利克雷拉普拉斯算子的谱中是单的，且 Ω 是单连通的，$\mu_{k+2}<\lambda_k$ 就成立。

Appendix A. An observation on Lipschitz domains

Lipschitz 域的下述性质相当直观；为求完整起见，我们给出证明。

引理 A.1. 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是一个有界 *Lipschitz* 域，并设 $S\in\mathbb{R}^2\ \{0\}$。那么存在一个非空开集 $\Sigma\subset\partial\Omega$，使得 $\nu\notin$张成$\{S\}$在 Σ 上几乎处处成立。

证明。 适当旋转 Ω 后，只需证明存在一个非空开集 $\Sigma \subset \partial\Omega$，使得 $\nu_1 \neq 0$（即 $\nu \neq \pm\mathbf{e}_2$）在 Σ 上几乎处处成立。反设 $\partial\Omega$ 的每个非空开子集都包含一个正测度集合，且在该集合的每一点上，法向量都是 $\pm\mathbf{e}_2$。

断言： 对于 $\partial\Omega$ 中的每个点 p，都存在一个开邻域 $\Sigma_p \subset \partial\Omega$ 和一个数 $\sigma_p \in \{\pm 1\}$，使得

$$q \in \Sigma_p \text{ and } \nu(q) = \pm\mathbf{e}_2 \quad \Longrightarrow \quad \nu(q) = \sigma_p \mathbf{e}_2.$$

也就是说，对于每个 $p \in \partial\Omega$，根据 Lipschitz 域的定义，存在一个包含 p 的开邻域 $U_p \subset \mathbb{R}^2$，使得 $\Sigma_p := U_p \cap \partial\Omega$ 经旋转后是某个 Lipschitz 连续函数的图像，并且 $U_p \setminus \Sigma_p$ 有两个连通分支，其中一个包含于 Ω，另一个与 Ω 没有交集。特别地，若 U_p 取值充分小，则存在一个单位向量 d_p，使得

$$\nu(q) \cdot d_p < 0 \quad \text{for almost all } q \in \Sigma_p. \tag{A.1}$$

根据矛盾假设，$d_p \neq \pm\mathbf{e}_1$。因此，$\sigma_p := -\operatorname{sgn}(d_p \cdot \mathbf{e}_2) \neq 0$。特别地，若 $q \in \Sigma_p$ 满足 $\nu(q) = \pm\mathbf{e}_2$，则 $\nu(q) = \sigma_p \mathbf{e}_2$，这就证明了该断言。

现设 $p^{\pm}$ 是 Ω 中第二坐标分别取最大值和最小值的两个点。由于 Ω 是紧集，这样的点存在。此外，$p^{\pm} \in \partial\Omega$ 和 $p^{\pm} \in \Gamma_{\text{ext}}$，其中 Γ_{ext} 表示 $\partial\Omega$ 的连通分支，其围成的集合包含 Ω。根据 $p^{\pm}$ 的选取，我们有 $\sigma_{p^{\pm}} = \pm 1$。另一方面，Γ_{ext} 是一条连通紧曲线，并且根据上述断言及矛盾假设，$p \mapsto \sigma_p$ 沿着 Γ_{ext} 局部常值，因此为常值。这就产生了矛盾。□

人工智能披露。 本文的主要数学思想是在与人工智能工具的讨论中形成的。本文内容完全由作者撰写。

致谢。 作者衷心感谢瑞典研究委员会（VR）2022-03342 号资助项目提供的经费支持。

References

[1] R. Benguria、M. Levitin 和 L. Parnovski, *Fourier transform null variety and Laplacian's ,,,* 《J. Funct. *eigenvalues* 257 2009 7, 2088 2123 Anal.》（），第 – 期。[2] R. Dautray 和 J.-L. Lions,《科学与技术的数学分析与数值方法》，第 6 卷，《演化问题 II》，Springer-Verlag，柏林，1993 年。[3] N. Filonov, *On an inequality for the eigenvalues of the Dirichlet and Neumann problems for the Laplace operator* 16 2004 172 176 （俄文），《代数与分析》（），–；译文载于《圣彼得堡数学杂志》16 (2005)，413–416。[4] N. Filonov, *Inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues in large dimensions*，预印本，arXiv:2606.30120。[5] N. Filonov, *On the inequality $\mu_3 < \lambda_1$ for the eigenvalues of the Laplace operator*，预印本，arXiv:2610.13180。[6] P. Freitas 和 M. Gama, *On the (growing) gap between Dirichlet and Neumann eigenvalues*，预印本，arXiv:2405.18079。[7] L. Friedlander, *Some inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues*，《Arch. Rational Mech. Anal.》116 (1991)，153–160。[8] M. Fries、M. Goffeng 和 G. Miranda, *Improving Friedlander's inequality with the de Rham complex* 15 2025 4, 1593 1613 ，《J. Spectr. Theory》（），第 – 期。[9] B. Hua、F. M ¨ unch 和 H. Zhang, *Inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues on surfaces* 395 2026 2, 49 ，《Math. Ann.》（），论文编号。[10] T. Kato,《线性算子扰动理论》，Springer-Verlag，柏林，1995 年。[11] H. Levine 和 H. Weinberger, *Inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues*,《Arch. Rational Mech. Anal.》94 (1986)，193–208。[12] M. Levitin、D. Mangoubi 和 I. Polterovich,《谱几何专题》，数学研究生丛书第 237 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2023 年。[13] M. Muravyev, *Hodge-Laplacian eigenvalues on surfaces with boundary*,《Ann. Math. Qué》50 (2026)，第 1 期，73–92。

[14] L. E. Payne, *Inequalities for eigenvalues of membranes and plates*, 《J. Rational Mech. Anal.》4 (1955), 517–529。[15] J. Rohleder, *Inequalities between Neumann and Dirichlet Laplacian eigenvalues on planar domains* 392 2025 4, 5553 5571 , 《Math. Ann.》（），第 – 期。[16] Q. Tang 和 H. Zhang, *Neumann–Dirichlet eigenvalue comparison at the first Dirichlet threshold in the plane* ，预印本，arXiv: 。。 2609 05893

Matematiska institutionen, Stockholms universitet, 106 91 Stockholm, Sweden
Email address: jonathan.rohleder@math.su.se