arXiv:2611.31136v1 [math.CO] 23 Nov 2026

1. 引言

可测集 $E \subseteq \mathrm{R}^d$ 是格$L \subseteq \mathrm{R}^d$ 的平铺集</style}，当且仅当

$$\sum_{\ell \in L} \mathbf{1}_E(x+\ell) = 1 \quad \text{for almost every } x \in \mathbb{R}^d.$$

日期：2026年11月。2020 数学主题分类号。52C22, 05C70, 28D15。关键词与短语。格铺砌、公共基本域、可测匹配、图化。JG 获得了捷克教育、青年与体育部通过 ERC CZ计划资助的 ERC CZ资助项目LL2608。

令$f = \mathbf{1}_{D_1} * \mathbf{1}_{D_2}$，并假设这两个格的体积均为**1**。显然，$f$是可测的、非负的，并且分别以$L_1$和$L_2$为格以**1**为层级铺砌。

(1)
$$\sum_{\ell_1 \in L_1} f(x + \ell_1) = \sum_{\ell_2 \in L_2} f(x + \ell_2) = 1,$$

2. 支撑图化

从现在起，我们不妨假设 $\mathrm{vol}\, L_1 = \mathrm{vol} L_2 = 1$，并令

$$f = \mathbf{1}_{D_1} * \mathbf{1}_{D_2}. \tag{2}$$

函数 f 取值于 $[0,1],$，是连续的，且 $\{f > 0\} \subseteq D_1 + D_2$。那么

$$\sum_{\ell \in L_i} f(x+\ell) = 1, \qquad i = 1, 2.$$

对于几乎处处的 x。

Let

$$H = L_1 \cap L_2, \qquad r = \mathrm{rank}\, H, \qquad k = d - r,$$

回顾一下，图化 是标准概率空间 (X, μ) 上的一个有界度数博雷尔图 $G = (X, E)$，并满足质量传输恒等式

$$\int_A \deg_B(x)\, d\mu(x) = \int_B \deg_A(x)\, d\mu(x)$$

对所有可测集A、$B \subseteq X$均成立，其中 $\deg_B(x)$ 是B中x的邻居数。若对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个可测集$Z \subseteq X$，使得 $\mu(Z) < \varepsilon$，并且在去除一个零测集后，诱导图$X \setminus Z$ 的每个连通分支都是有限的，则称该图化几乎处处超有限。

引理 1。二分图$\mathcal{B}$ 是一个度数有界、保持概率测度的二分图图化，并且几乎处处超有限。

证明。与顶点相邻的X_i 中的边，以落在K中的某个 Λ_t-陪集的点为标记。由于K 相对紧且 Λ_i 是离散的，各顶点的度数一致有界。

为了从辅助图 G 的超有限性推出原二分图 B 的超有限性，令 D 为 B 中各顶点度数的一致上界。给定 $\varepsilon > 0$，选择一个可测集 $A \subseteq X_1$，使得 $\mu_1(A) < \varepsilon/(1+D)$，并且将 G 限制在 $X_1 \setminus A$ 上后仅有有限连通分支。

令 $N_{\mathcal{B}}(A) \subseteq X_2$ 为 B 中 A 的邻居集合。从 B 中移除 $A \cup N_{\mathcal{B}}(A)$ 中的顶点。根据质量传输恒等式，

$$\mu_2(N_{\mathcal{B}}(A)) \leq D\mu_1(A).$$

因此，被移除集合的测度之和小于 ε。

我们声称，剩余的二分图只有有限的连通分支。事实上，顶点 $y \in X_2$ 在 X_1 中的任意两个相邻顶点，在 G 中都相邻。因此，y 的所有剩余邻居都属于同一个连通分支

$$\sigma(e) \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

对于几乎每条边，且

$$\mathcal{L} = \left\{e : \sigma(e) = \frac{1}{2}\right\}$$

在删去一个零测集后，它是双向无限路径的顶点不交并。L 之外的每个顶点都已由一条唯一的边覆盖，在这条边上 $\sigma = 1$。

$$\text{for every } M \in \mathbb{N} \text{ there is } J \text{ such that } c(x, x_j) \geq M \text{ for all } j \geq J.$$

我们来证明，两端均为正的路径（两端均为负的情形同理）构成一个零测集。事实上，在这样的路径上，h 在两端都趋于 $+\infty$，因此存在一个非空的全局极小值有限集。从内在意义上说，左顶点x 是极小值，当且仅当

$$c(x, y) \geq 0 \quad \text{for every left vertex } y \text{ on the same path.}$$

极小值集合是博雷尔集，并且在每条这样的路径上包含介于一与 $|\ker q|$ 之间的顶点数。因此，可以以博雷尔可测的方式从每条路径中恰好选出一个极小值，从而得到一个博雷尔截面T。由于由图化生成的等价关系是保概率测度的，且其每个等价类都是无限的，T 必为零测集。

因此，L 中几乎每条路径都有一个负端和一个正端。将每条这样的路径从负端指向正端定向，便得到一个可测完美

引理 3. 设 D_1, D_2 分别是格 L_1, L_2, 的有界可测基本域，且 $k = d - \operatorname{rank}(L_1 \cap L_2) \geq 2$。对于几乎所有 $x \in X_1$, ， x 所在的连通分支都具有超线性增长。

证明。 回忆一下，$H = L_1 \cap L_2, M = \mathrm{R}^d/H$，且 $\Lambda_i = L_i/H$。我们有 $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \{0\}$。

我们首先注意到，整个问题都可以在M上表述。事实上，对于$i = 1,2$，定义

$$a_i(\pi(x)) = \sum_{h \in H} \mathbf{1}_{D_i}(x + h).$$

由于$H \subseteq L_i$ 和D_i 是L_i的基本域，函数a_i 几乎处处只取 0 和 1。因此，存在某个有界可测集$A_i \subseteq$，使得$a_i = \mathbf{1}_{A_i}$ 几乎处处成立；该集合M按 Λ_i平铺M。

此外，根据商空间积分公式和F的定义，有

(7) $$F = \mathbf{1}_{A_1} * \mathbf{1}_{A_2},$$

其中卷积是在M上取的：在M 上展开卷积，并应用 Weil 积分公式，可得f 在H上的周期化。

1. T的定义。

令Q 为A_2的密度一点集合的闭包。等价地，Q 是测度 $\mathbf{1}_{A_2} dm$的支集。

定义T 为满足以下条件的 $\lambda \in \Lambda_2$ 的集合：存在$z \in M$，使得z 的每个邻域与A_2 及$A_2 + \lambda$的交集均具有正测度。

等价地，

$$T = (Q - Q) \cap \Lambda_2.$$

由于Q 是紧的，且 Λ_2 是离散的，T 是有限的。它也是对称的。

2. 集合T 生成 Λ_2。

由于A_2 以M 平铺， Λ_2的Q平移副本 Λ_2 覆盖M。它们构成一个局部有限的闭集族。

$$F(x-a)>0, \qquad F(x+\lambda-a)>0.$$

因此，这两点

$$p=x-a, \qquad p'=x+\lambda-a$$

属于$K=\{F>0\}$。

它们确定了 B 的边，其左端点分别为$x+\Lambda_1$和$x+\lambda+\Lambda_1$。由于$p'-p=\lambda\in\Lambda_2$，它们的右端点重合。

因此，这两个左顶点在G中相邻。

参考文献

[Bec89] J. Beck. 关于 H. Steinhaus 的格点问题。Studia Sci. Math. Hung, 24:263–268, 1989.[BKS21] M. Bowen、G. Kun 和 M. Sabok. 超有限图化中的完美匹配。arXiv 预印本 arXiv:2106.01988, 2021.[EGKL26] Mark Mordechai Etkind、Sigrid Grepstad、Mihail N Kolountzakis 和 Nir Lev. 有界余数集、有界距离等价的切投影集与等分能力。International Mathematics Research Notices, 2026(14):rnag149, 2026.[Fol16] Gerald B Folland. 抽象调和分析教程。CRC出版社, 2016.[GK26] S. Grepstad 和 M. N. Kolountzakis. 两个格的有界公共基本域。Advances in Mathematics, 487:110776, 2026.[HW01] D. Han 和 Y. Wang. 格铺砌与 Weyl–Heisenberg框架。Geom. Funct. Anal., 11(4):742–758, 2001.[JM02a] S. Jackson 和 R. Mauldin. 关于 H. Steinhaus 的格点问题。J. Am. Math. Soc., 15(4):817–856, 2002.[JM02b] S. Jackson 和 R. D. Mauldin. 与格 Z^2 的等距副本恰好相交于一点的集合。Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 99(25):15883–15887, 2002.[JM03] S. Jackson 和 R. D. Mauldin. Steinhaus 平铺问题综述。Bull. Symb. Log., 9(03):335–361, 2003.[KL24] G. Kiss 和 M. Laczkovich. 离散Pompeiu问题与有限Steinhaus铺砌问题的解。arXiv 预印本 arXiv:2403.01279, 2024.[Kol96] M. N. Kolountzakis. Steinhaus 问题：平面集的所有放置是否都恰好包含一个格点？Progress in Mathematics, 139:559–566, 1996.[Kol97] M. N. Kolountzakis. 多格铺砌。Int. Math. Res. Not., 1997(19):937–952, 1997.[KP02] M. N. Kolountzakis 和 M. Papadimitrakis. Steinhaus 平铺问题与某些二次型的值域。Ill. J. Math., 46(3):947–951, 2002.[KP17] M. N. Kolountzakis 和 M. Papadimitrakis. 平面上不存在有限集或整数的可测Steinhaus集。Bull. Lond. Math. Soc., 49(5):798–805, 2017.[KP22] M. N. Kolountzakis 和 E. Papageorgiou. 以多个格铺砌的函数。Journal of Fourier Analysis and Applications, 28(4):68, 2022.[KW99] M. N. Kolountzakis 和 T. H. Wolff. 关于 Steinhaus 平铺问题。Mathematika, 46(02):253–280, 1999.[Lov12] László Lovász. 大型网络与图极限，第 60 卷。American Mathematical Soc., 2012.[Mos81] W. Moser. 离散几何研究问题。麦吉尔大学数学系, 1981.[Sie58] W. Sierpiński. 关于 H. Steinhaus 提出的平面点集问题。Fundam. Math., 2(46):191–194, 1958.[Spe26] Darrin Speegle. 从格对的分数铺砌到集合铺砌。arXiv 预印本 arXiv:2606.15297, 2026.

电子邮件地址: kolount@uoc.gr