连接 k 维匹配与由 k 元集构成的精确覆盖：平面、线性及 3- 连通实例中 k 划分 1-in-3-SAT 的完整复杂度分类

Janosch Döcker[1], Britta Dorn[2], Hannah Van Santvliet[2], 和 Katrin Willger [2]

[1]独立研究者[2]计算机科学系，图宾根大学，德国

2026年11月24日

arXiv:2611.31145v1 [cs.CC] 23 Nov 2026

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **3**

3 困难性　确定与计数 3-分区 1-in-3-SAT 的复杂性 **5**
3.1 构件.5
3.2 保数归约.7

4 平面性约束下的困难性 9
4.1 构件.9
4.2 3-划分的 1-in-3-SAT 的保数归约.13

5　线性约束下的困难性 **14**
5.1 构件.14
5.2 $k \geq 3$ 分区的 NP 完全性和 #P 完全性.17

6　连通性约束下的困难性 **18**

7　平面 k-分区 1-in-3-SAT 的 $k > 3$ **23**7.1 构件.25

7.2 平面 4-分区 1-in-3-SAT 的保数归约.26

8 与 k 维匹配和基于 k 元集的精确覆盖的联系 31

9 结论 34

参考文献 **36**

附录 **37**

摘要

在 k-分区 1-in-3-SAT 中，正 1-in-3-SAT 公式的子句被划分为 k类，使得每个变量在每一类中恰好出现一次。这个问题对应于 k维匹配的一个受限版本，其中每个元素恰好属于三个元组。对于每个 k，我们针对关联图的三种结构限制——平面性、线性性（任意两个子句至多共享一个变量）和 3-连通性——的所有组合，给出完整的复杂度分类。我们证明 3-分区 1-in-3-SAT 是 NP-完全的，其计数版本是 #P-完全的；这两项结果也为后续归约提供了起点。随后，我们通过反复向关联图中插入构件来实现所需的性质。

由此，我们得出结论：在相同限制下，k维匹配和通过 k集进行的精确覆盖仍然是 NP困难的，即使每个元素分别恰好出现在三个元组或集合中。特别地，平面4维匹配是 NP-完全的；此外，针对给定关联图的平面嵌入中所谓的四边形分量数量，我们给出了一个 FPT 算法，以补充 NP-困难性结果。

1 引言

所有 NP-完全问题都可以相互进行多项式时间归约，但其中有些问题的联系尤为紧密。例如，k维匹配（k DM）、k元集精确覆盖（XkC）和正 1-in-3-SAT-Ek这三个问题就是如此，我们在此简要回顾一下。给定集合 U，它是大小相同的集合 U_1、...、U_k 的不交并，再给定集合 $S \subseteq U_1 \times \cdots \times U_k$，其中我们将一个元组等同于由其各项构成的集合。 kDM 所问的是，是否存在 S 的一个子集，使得U 中的每个元素都恰好被覆盖一次。XkC 是 kDM 的推广，其中 S 是集合 U的 k 元子集构成的集合族。其目标同样是判定是否存在一个子集族 $S' \subseteq S$，使得 U中的每个元素都恰好包含在 S'的一个集合中。正 1-in-3-SAT 的问题是：给定一个仅包含未取反变量的子句构成的集合族，即变量集合 X的 3 元子集构成的集合族，是否存在对 X 的真值赋值，使得每个子句中恰有一个变量被赋值为 T，另外两个被赋值为 F。正 1-in-3-SAT-Ek 还要求每个变量恰好出现在 k 个子句中。现在，从一个具有变量 X 和子句 C 的正 1-in-3-SAT-Ek 实例出发，构造 S：对每个变量 x，加入一个包含满足 $x \in c$ 的每个子句 $c \in C$ 的子集。那么， $U = C$，且该 XkC 实例的每个解都对应于这个 1-in-3-SAT 实例的一个解（参见 Moore 和 Robson [MR01，第 3 节。1]）。 k-划分 1-in-3-SAT 是正 1-in-3-SAT-Ek 的一个受限版本，其实例的子句集表示为 $C = P_1 \cup \cdots \cup P_k$，即$X$ 的 k 个划分 P_1、...、P_k的不交并，每个划分均将X 划分为 3 元集。通过上述构造（其中 $U_i = P_i$），它与 kDM 的对应关系，与正 1-in-3-SAT-Ek 和 XkC 的对应关系相同。

本文探讨了所有 $k \in \mathbb{N}$ 下 k-分区 1-in-3-SAT 的计算复杂性图景，以凸显精确覆盖 k-集合与 k 维匹配之间的联系。Darmann、Döcker 和 Dorn [DDD24] 研究了线性非全等可满足性问题中的分区限制。他们证明，该问题在 $k \geq 4$ 分区下是 NP-完全的，而在 $k \leq 3$ 下可于多项式时间内求解。

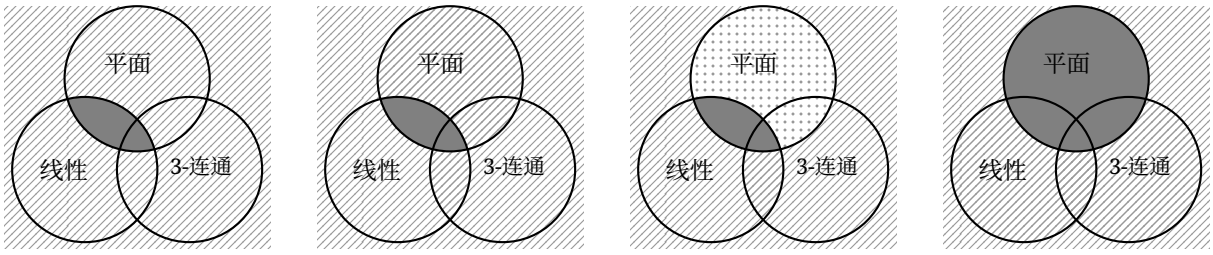
这三个问题的计算复杂性均已得到广泛研究。根据 Schaefer 二分定理 [Sch78], ，正 1-in-3-SAT 是 NP-完全的；Moore 和 Robson [MR01]证明，即使实例的关联图是三次平面图，该问题仍然是 NP-完全的。Mulzer 和 Rote [MR08，命题 3.3]证明，即使给定关联图的平面直线嵌入，平面正 1-in-3-SAT 仍然是 NP-完全的。Dyer 和 Frieze [DF86] 证明，即使每个元素只出现在两个或三个三元组中，平面 3DM 仍然是 NP-完全的。此外，如果每个元素恰好出现在三个集合中，X3C 仍然是 NP-完全的（参见 Gonzalez [Gon85], ，他将这一变体称为 RX3C）。我们将其称为 X3C-E3。Moore 和 Robson [MR01]通过证明平面正 1-in-3-SAT-E3 是 NP-完全的，进而证明平面 X3C-E3 是 NP-完全的；根据上文所述的对应关系，这实际上是同一个问题的另一种表述。计数版本 #平面 X3C-E3 是否为 #P-完全的问题悬而未决二十余年，直至 Cai 和 Fan [CF23] 给出了肯定答案。此外，van Bevern、Bredereck、Chen、Froese、Niedermeier 和 Woeginger [vBBC$^+$15] 提出的平面 4-集合精确覆盖的复杂性这一公开问题，近期由 MIT Hardness Group（Abel、Demaine、Diomidova、Li 和 Zhou） [MAD$^+$26]的一篇预印本作答；他们证明该问题是 NP困难的。

我们还研究了相应计数问题的复杂性，例如，计算三次平面三维匹配实例的完美匹配数量。Creignou 和 Hermann [CH96] 证明了广义可满足性计数问题的二分定理，表明每个此类问题要么可在多项式时间内计算，要么是 #P-完全的。此外，他们通过证明：只要广义可满足性问题是 NP-完全的，其计数变体就是 #P-完全的（见 [CH96，推论 4.2]），将其二分定理与 Schae-fer 的二分定理联系起来。因此，#正 1-in-3-SAT 是 #P-完全的。由于这些二分定理无法涵盖平面性或变量出现次数上限等限制，对此类受限类别的结果需要采用不同的方法，例如从一个 #P-完全问题进行保数归约。Hunt、Marathe、Radhakrishnan 和 Stearns [HMRS98] 研究了平面计数问题的复杂性，并证明了包括以下结果在内的结论：平面精确三重覆盖和平面正 1-in-3-SAT 的计数版本是 #P-完全的。

本文针对每个 k，对 kDM 在所有性质组合下的复杂性进行分类

“平面”、“线性”和“3-连通”，并获得关于精确三重覆盖的相应困难性结果。图1总结了这些结果。这里，平面性和 3-连通性指实例的关联图，而线性意味着任意两个元组至多在一个位置上相同（等价地，在 Sat 表述中，任意两个子句至多共享一个变量）。关于线性 *Sat* 变体的可满足性问题的进一步结果，参见 Porschen、Speckenmeyer 和 Zhao [PSZ09]，以及 Porschen、Schmidt、Speckenmeyer 和 Wotzlaw [PSSW14]。

本文的结构遵循我们对 k-分区 1-in-3-SAT 依次施加的性质：在第 3 节中，我们证明 3-划分的 1-in-3-SAT 是 NP-完全的，其计数变体是 #P-完全的。随后，第 4、5 和 6 节分别为 3-划分的 1-in-3-SAT 加入平面性、线性性和 3-连通性。在第 7 节中，我们研究 k-分区 1-in-3-SAT（其中 $k > 3$ ）以及性质“平面”“线性”和“3-连通”所对应的组合。除了 Planar 4DM 的 NP-完全性或 Planar 3DM 的 ASP 困难性等新结果外，我们的方法还为 kDM 和 XkC 的已知结果给出了新的证明。最后，第 8 节将前几节的结果转化为匹配和精确覆盖的表述，在此基础上推导出相关结果，并将我们的证明与文献中的其他证明进行比较。通过这种方式，我们旨在对这三个问题形成统一的认识。



(a) 3-划分的　(b) 4-分区的　(c) 5-划分的　(d) k-划分， $k > 5$

图1： k-划分的 1-in-3-SAT（等价于 kDm）在平面性、线性性和 3-连通性（“3-con.”）的所有组合下的复杂性。阴影区域表示 NP-困难性，灰色区域表示不存在实例，点状区域表示该问题是平凡的，即每个实例都是否实例。

2 预备知识

设 $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 为一个变量集合。文字 是变量 x_i 或其否定 x_i，对应于 X 的文字集合为 $\mathcal{L}_X = \{x_i, x_i \mid 1 \le i \le n\}$。子句 是 $\mathcal{L}_X$ 的一个子集；如果它仅由未取反的变量组成，则称为正子句。在本文中，我们只讨论 3-子句，即恰好包含三个不同文字的子句。子句集合族也称为公式，是一个由子句组成的集合$C := \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$。有时，为了表示某个变量属于某个子句，使用变量为子句编索引会比较方便：对于 k 个都包含同一变量 x 的不同子句，我们将每个 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 记为 $c_{x,i}$。用 var(c) 表示子句 c 中所含变量的集合。同样，对于构件 $\mathcal{G}$，用 var($\mathcal{G}$) 表示 $\mathcal{G}$ 中使用的变量集合，用 cl($\mathcal{G}$) 表示 $\mathcal{G}$ 中使用的子句集合。

真值赋值是一种映射 β: $X \to \{T, F\}$，其中 T和 F分别表示真值 T和F。如果 $\beta(x_i) = T$，则真值赋值 β满足文字 x_i；如果 $\beta(x_i) = F$，则真值赋值 β满足文字 x_i。进一步地，若子句 c 在β 下满足，当且仅当其中至少一个文字在 β下被赋值为 T。如果一个 3-子句 c 在 β 下恰有一个文字被赋值为 T，另外两个文字被赋值为 F（即该子句的三个文字中恰有一个被赋值为 T），则称真值赋值 β 对该子句 c满足 1-in-3。真值赋值 β 1对由子句构成的集合族 C 满足 1-in-3，当且仅当 β 1对 C中的每个子句都满足 1-in-3。因此，如果存在一个真值赋值对某个公式满足 1-in-3，则称该公式为 1-in-3 可满足。

设 c_1、c_2、.....、c_m 是 X 的两两不相交子集。若 $P = \bigcup_{j=1}^{m} \{c_j\}$ 中各元素的并集为 X，即 $\bigcup_{j=1}^{m} c_j = X$，则称 $P = \bigcup_{j=1}^{m} \{c_j\}$ 为 X 的一个划分。 X 的一个划分也可以看作由正子句组成的集合族，其中每个变量恰好出现在一个子句中。将 X 的 k 个两两不相交的划分取并，可得到一个公式，其中每个变量恰好出现 k 次。

k-划分的 1-in-3-SAT	
输入：	一个变量集合 X、一个正 3-子句集合族 C，以及一个两两不相交的划分 $P = \langle P_1, P_2, \ldots, P_k \rangle$，使得 X 且 $\bigcup_{i=1}^{k} P_i = C$。
问题：	是否存在一个对 X 的真值赋值，使其 1-in-3 满足 $C = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$?

在全文中，我们始终假设，对于任意一对变量 x、$x' \in X$，若 $x \neq x'$、x 和 x' 共同出现在少于 k 个子句中，则

$$|\{i \in \{1, \ldots, k\} \mid \exists c \in P_i \colon \{x, x'\} \subseteq c\}| < k.$$

例 2.1。令 X 为变量集，C 为子句集，并令 $P = \langle P_1、P_2、P_3、P_4 \rangle$。对于 $i \in \{1, \ldots, 4\}$，每个 P_i 中的子句构成 X的一个划分。

$$\begin{aligned}
X &= \{x_1, x_2, \ldots, x_9\},\\
C &= \{c_1, \ldots, c_{12}\},\\
P_1 &= \{\underbrace{\{x_1, x_2, x_5\}}_{c_1}, \underbrace{\{x_3, x_4, x_6\}}_{c_2}\}, \{\underbrace{\{x_7, x_8, x_9\}}_{c_3}\},\\
P_2 &= \{\underbrace{\{x_1, x_3, x_6\}}_{c_4}, \underbrace{\{x_2, x_4, x_8\}}_{c_5}\}, \{\underbrace{\{x_5, x_7, x_9\}}_{c_6}\},\\
P_3 &= \{\underbrace{\{x_1, x_2, x_3\}}_{c_7}, \underbrace{\{x_4, x_6, x_7\}}_{c_8}\}, \{\underbrace{\{x_5, x_8, x_9\}}_{c_9}\},\\
P_4 &= \{\underbrace{\{x_1, x_2, x_7\}}_{c_{10}}, \underbrace{\{x_4, x_5, x_8\}}_{c_{11}}\}, \{\underbrace{\{x_3, x_6, x_9\}}_{c_{12}}\}.
\end{aligned}$$

真值赋值 β 满足 $\beta(x_1) = \beta(x_4) = \beta(x_9) = T$以及 $\beta(x_i) = F$，从而 *1-in-3* 满足所有子句。因此，$\mathcal{I} = (X、C、P)$是 4-分区 *1-in-3-SAT* 的是实例。

公式的 Sat 图或关联图 $G_{\mathrm{SAT}}(\mathcal{I})$是一个二分图，其为 $\mathcal{I}$中的每个子句和每个变量各设一个顶点；当且仅当某个变量包含在 $\mathcal{I}$中对应的子句内时，便用一条边连接该变量与该子句。本文始终假设 Sat 图是连通的。否则，相应公式实质上可分解为两个相互独立的公式。我们将变量表示为圆形顶点（称为变量顶点），将子句表示为方形顶点（称为子句顶点）；在相关情况下，根据子句所属的划分为子句顶点标记：提及具体划分时，我们使用整数 1、2、...、k。对于设计为适用于任意划分的构件，我们使用 λ、μ、ν、$\zeta \ldots$等希腊字母作为标签。特别地，k-分区 1-in-3-SAT 的每个实例中的每个变量顶点，都通过一条边连接到一个标记为 i的子句顶点（对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$均如此）。遵循图论中的惯例，我们使用以下记号：对于图 $G = (V、E)$及其子集 $V' \subseteq V$，我们用 $G \setminus V'$表示由顶点集 $V \setminus V'$诱导的图 $G[V \setminus V']$。此外，如果 1-in-3-SAT 的一个实例 $\mathcal{I}_{\mathrm{SAT}} = (X、C、P)$满足 $G_{\mathrm{SAT}}(X、C、P)$为平面图，则称该实例为平面的。如果不存在两个子句共享多于一个变量，则称 $\mathcal{I}_{\mathrm{SAT}}$是线性的；即对于每一对不同的子句 c、$c' \in C$，均有 $|c \cap c'| \leq 1$。

注意，对于 $k = 1$, k-分区 1-in-3-SAT，这个问题是平凡的，因为每个变量只出现一次。对于$k = 2$, 该问题的所有实例都是是实例。这可由 Schrijver [Sch98], 的推论 1a 得出，它蕴含了以下命题。

命题 2.2。每个 *2-*分区 *1-in-3-SAT* 实例至少有

$$\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^m = \left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)^n > \left(\frac{11}{10}\right)^n$$

个满足真值赋值，其中 m 是子句的数量，n 是变量的数量。

因此，接下来本文将重点讨论 $k \geq 3$ 下的 k-分区 1-in-3-SAT .

3 Ha判定和计数 3-划分的 1-in-3-可满足性的难度 T

现在我们开始证明第一个结果，该结果构成了后续所有困难性证明的起点。在本节中，我们证明 3-分区 1-in-3-SAT 是 NP- 完全的，其计数变体是 #P- 完全的。为此，我们给出一个从 Posi- tive 1-in-3-SAT 到 3-分区 1-in-3-SAT 的多项式时间保数归约。由于该归约保持解的数量不变，因此它证明了判定版本和计数版本的困难性。

我们采用的策略与 Moore 和 Robson [MR01]使用的方法相似：给定输入实例 $\mathcal{I}$的关联图，我们将构件用作一种模块化插件系统：每个构件在保留其他性质的同时，确保某些所需性质成立，例如将子句集划分为 a k个部分。形式上，给定实例 $\mathcal{I}$的一个子结构 $\mathcal{S}$，构件是一个图（或公式），用于替换 $\mathcal{S}$，使原始实例 $\mathcal{I}$ 与修改后的实例 $\mathcal{I}'$ 在满足赋值方面等价。进行保数归约时，我们必须确保构件不仅保留可满足性，而且不改变满足赋值的数量。

这些构件有一组专用顶点，称为输入/输出顶点。属于这组专用顶点的子句顶点称为输入顶点，属于这组专用顶点的变量顶点称为输出顶点。我们将输入/输出顶点的数量定义为构件的度。假设每个变量出现固定次数，那么 Sat 图中的一个输出顶点 是指度小于该次数的顶点，而一个输入顶点 是指度小于三的顶点。通过添加边，可以将这些顶点连接到实例的其余部分，从而确定构件在图实例中的位置。我们用从输入顶点出发并终止于自由端点的边来表示输入顶点。如果连接到输入顶点的顶点名称很重要，我们会用虚线圈出属于该构件的顶点。

3.1 构件

我们首先介绍所使用的构件，并简要说明它们的性质。随后，我们将解释如何将构件嵌入给定实例中。第一个构件由 Hunt、Marathe、Radhakrishnan 和 Stearns [HMRS98, 引理 3.6] 引入。我们称其为 F-轮，因为它看起来像一个轮子，其中构件外面上的所有变量都被强制取真值 F。

F-轮 F-轮由子句 $\{z, y_1, y_2\}$、$\{z, y_2, y_3\}$ 和 $\{z, y_1, y_3\}$ 组成（见图 2）。当且仅当 $\beta(z) = T$ 且 $\beta(y_1) = \beta(y_2) = \beta(y_3) = F$ 时，一个真值赋值 β 1-满足这些子句。

下一个构件强制两个变量具有相同的真值，由 Moore 和 Robson [MR01, 第 581] 页引入。

等值验证器两个变量 x和 y的等值验证器 $EQ(x, y)$由两个子句 $\{x, a, b\}$和 $\{y, a, b\}$组成。当且仅当 $\beta(x) = \beta(y)$时，$\{x, y\}$的真值赋值 β可以扩展为 $\{x, y, a, b\}$。

与 Moore 和 Robson 的做法类似，我们将等值验证器串联起来，使多个变量具有相同的真值。关键区别在于，我们的链是循环的。

相等性构件设 $q \geq 2$。变量集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$的相等性构件 $EQ(X)$由 q个等值验证器构成的循环链组成：$EQ(x_1, x_2)$ $EQ(x_2, x_3) \ldots, EQ(x_{q-1}, x_q)$ $EQ(x_q, x_1)$，如图 3 所示。

以下双子句构件由 Moore 和 Robson 引入 [MR01，图 16]；他们称其为三角形。

双子句构件 双子句构件模拟一个子句 $\{x_r, x_s, x_t\}$，同时消耗 x_r、x_s 和 x_t 的两次出现（见图 4）。该构件由以下子句组成

$$\{x_r, x_s, x'_t\}, \{x'_r, x_s, x_t\}, \{x_r, x'_s, x'_t\}, \{x'_r, x'_s, x_t\}, \{x'_r, x'_s, x'_t\}.$$

下面的集合构件 受到 Moore 和 Robson [MR01, 第 3 节2]中优雅构造的启发。由于我们不需要保持平面性（平面性将由

我们在第4节中引入的新构件实现），因此可以采用一种简单得多的方法来增加变量出现次数。该构件的名称源于“收集”剩余出现次数这一想法。

集合构件 设 $c_j = \{x_r, x_s, x_t\}$。集合构件 $CO(c_j)$由六个 F-轮、一个双子句构件和九个额外子句组成，如图 5 所示。它将用于让等值验证器的辅助变量 a, b 第三次出现，并以此强制将 a 设为 F。

注意，双子句构件中的所有变量都恰好出现三次。

引理3.1。 设 $DCG(c_j = \{x_r, x_s, x_t\})$ 为一个双子句构件。若 β 满足一个子句 c_j的 ***1-in-3*** 条件，则该真值赋值可以扩展为 $DCG(c_j = \{x_r, x_s, x_t\})$的唯一一个 ***1-in-3*** 满足赋值 β' 。特别地， $DCG(c_j = \{x_r, x_s, x_t\})$恰有三个 ***1-in-3*** 满足赋值，当且仅当一个子句 c_j恰有三个 ***1-in-3*** 满足赋值。

证明。 假设 β 1-in-3 满足子句 $\{x_r, x_s, x_t\}$。那么， $\{x_r, x_s, x_t\}$ 中恰有一个变量被设为 T。由于双子句构件中嵌入了三个等值验证器，对于任意 1-in-3 满足赋值 β'，都有：
$\{x_r, x'_r, x_s, x'_s, x_t, x'_t\} \to \{T, F\}$ 即 $\beta'(x_r) = \beta'(x'_r)$、$\beta'(x_s) = \beta'(x'_s)$，且 $\beta'(x_t) = \beta'(x'_t)$。子句 $\{x'_r, x'_s, x'_t\}$ 强制 $\{x'_r, x'_s, x'_t\}$ 中恰有一个变量取T，因此结论成立。 □

类似地，我们观察到，相等性构件有唯一的真值赋值。为突出相等性构件中某些变量具有相同真值这一事实，我们为它们赋予相同的字母和第一个下标。此外，我们为变量引入第二个下标，以计数它们出现的次数，并相应地为子句编号。例如，变量 $x_{1,\ 2}$ 是具有相同真值的第二个 x_1-变量，它出现在子句 c_2中。

引理*3.2.* 设 $EQ(X_i)$ 是变量集 $X_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,q}\}$ 的一个相等性构件，其中 $q \geq 2$ 如图 *3* 所示。那么，变量集 X_i 上的真值赋值 β 可以扩展为 $var(EQ(X_i))$ 上的真值赋值 β'，使得 $EQ(X_i)$ 中的每个子句都得到 ***1-in-3*** 满足，当且仅当 $\beta(x_{i,1}) = \beta(x_{i,2}) = \cdots = \beta(x_{i,q})$。此外，若 $\beta(a_{i,1}) = \beta(a_{i,2}) = \cdots = \beta(a_{i,q}) = F$，则扩展是唯一的。

证明。 如果变量集 X_i 上的真值赋值 β 可以扩展为 var($EQ(X_i)$) 上的真值赋值 β'，使得 $EQ(X_i)$ 中的每个子句都得到 1-in-3 满足，那么由于该相等性构件由相等性验证器组成，我们有 $\beta(x_{i,1}) = \beta(x_{i,2}) = \cdots = \beta(x_{i,q})$。

如果我们有 $\beta(x_{i,1}) = \beta(x_{i,2}) = \cdots = \beta(x_{i,q}) = \xi$ 对应真值 $\xi \in \{T, F\}$，就可以将其扩展为一个 1-in-3 满足赋值 β'，其中 $\beta'(b_{i,1}) = \beta'(b_{i,2}) = \cdots = \beta'(b_{i,q}) = \neg\xi$。如果 $\beta(a_{i,1}) = \beta(a_{i,2}) = \cdots = \beta(a_{i,q}) = F$，这是唯一扩展，因为所有 $x \in X_i$ 或所有 $b \in \{b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots, b_{i,q}\}$ 都被赋值为 T。 □

为了确保新增构件能够保持 1-in-3 满足真值赋值的数量，我们统计构件中的 1-in-3 满足赋值。这对于插入 Sat 图、用于补偿额外变量出现次数的集合构件尤为重要。

引理 3.3. 设 $CO(c_j = \{x_r, x_s, x_t\})$ 是一个集合构件。那么，对于 $\mathrm{var}(CO(c_j))$，恰有三个真值赋值 β_1、 β_2 和 β_3，能够使 $CO(c_j)$中的每个子句都满足 ***1-in-3***。此外， β_1、 β_2 和 β_3 满足 ***(P1)*** $\beta_1(a) = \beta_2(a) = \beta_3(a) = F$，对每个 $a \in \{a_{r,j}, a_{s,j}, a_{t,j}\}$ 均成立；并且满足 ***(P2)***

$$\begin{array}{lll} \beta_1(b_{r,j}) = T, & \beta_2(b_{r,j}) = T, & \beta_3(b_{r,j}) = F, \\ \beta_1(b_{s,j}) = T, & \beta_2(b_{s,j}) = F, & \beta_3(b_{s,j}) = T, \\ \beta_1(b_{t,j}) = F, & \beta_2(b_{t,j}) = T, & \beta_3(b_{t,j}) = T. \end{array}$$

证明。由于 对每个 $a \in \{a_{r,j}, a_{s,j}, a_{t,j}\}$， F-轮中的一部分变量被迫取值为 T，且与 该子句 顶点相邻，而该顶点与 a相邻，因此对于任意 1-in-3 满足赋值，(P1) 均成立。 o

此外，我们注意到，该集合构件由变量集 $\{a_{r,j}, a_{s,j}, a_{t,j}\}$、 $\{b_{r,j}, b_{s,j}, b_{t,j}\}$、$F$-轮以及一个双子句构件组成。 F-轮的真值是固定的；根据引理3.1，双子句构件恰有三个 1-in-3 满足赋值。剩余变量 $\{b_{r,j}, b_{s,j}, b_{t,j}\}$ 与一个子句相邻，该子句又与 F-轮中一部分被迫取值为 F 的变量相邻，同时也与变量 $x \in \{x_{r,j}, x_{s,j}, x_{t,j}\}$相邻。根据引理3.1， $\{x_{r,j}, x_{s,j}, x_{t,j}\}$ 中恰有一个变量可以取值为 T，因此我们得出，对于任意 1-in-3 满足赋值，(P2) 均成立。 □

牢记这些构件的定义后，我们希望拼凑出具有保证性质的新 SAT 实例。

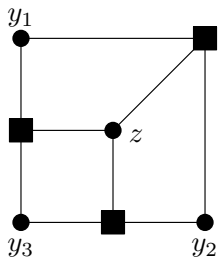
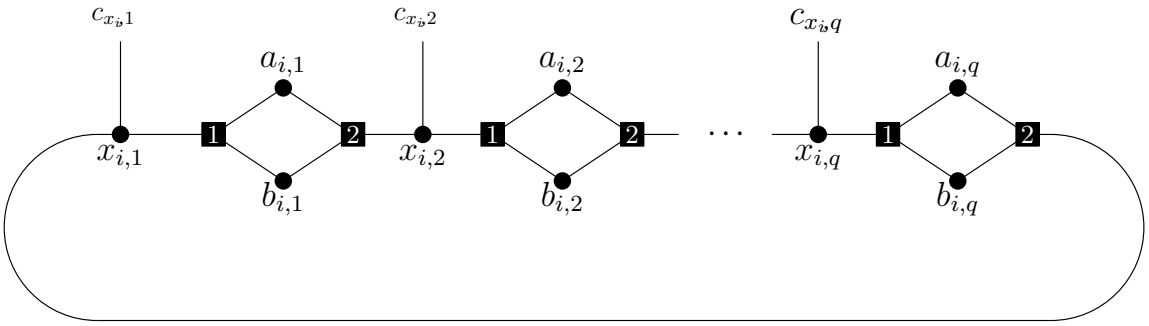


图 2： F-轮。



Figu图 3：变量 x_i 的相等性构件，该变量出现在 $q \geq 2$ 个子句 c_j 中，带有 $j \in \{1, 2, \ldots, q \quad\}$.

3.2 保解归约

回想　　一个保数归约保持满足赋值的数量不变。在这种情况下，w　　e
希望保　留正 1-in-3-SAT 的 1-in-3 满足赋值数量。

引理 3.4. *存在一种保数归约，可将正 1-in-3-SAT 归约为每个变量至少出现两次的正 1-in-3-SAT。*

证明. 设 $\mathcal{I} = (X, C)$ 是正 1-in-3-SAT 的一个实例。

我们按如下方式得到一个实例 $\mathcal{I}' = (X', C')$，它属于正 1-in-3-SAT，且每个变量至少出现两次。令 $Y \subseteq X$ 表示在 C 中恰好出现一次的变量集合。然后，我们通过穷尽式地将每个包含 Y 中变量的子句替换为双子句构件，从 C 得到 C'。现在，每个变量至少出现两次，因为双子句构件中的每个变量都至少出现两次。根据引理3.1，这是一个保数归约。 □

除了正 1-in-3-SAT 的单调性之外，我们还想构造一种归约，使我们能够对变量子句集合进行分区，从而让变量顶点与所有类型的子句顶点相邻。

引理 3.5。 *存在一个保数归约，可将每个变量至少出现两次的正 1-in-3-SAT 归约为 3-分区 1-in-3-SAT。*

证明。 设 $\mathcal{I} = (X, C)$ 是一个正 1-in-3-SAT 实例，且每个变量至少出现两次。

我们按如下方式从 $\mathcal{I}$ 构造一个 3-分区 1-in-3-SAT 实例 $\mathcal{I}' = (X', C')$。对于每个变量 $x_i \in X$，我们将其在子句 $c_{x_i,\,1}$，$c_{x_i,\,2}$，…，$c_{x_i,\,q} \in C$ 中的出现分别替换为新的变量 $x_{i,\,1}$，$x_{i,\,2}$，…，$x_{i,\,q}$。令 C_{orig} 表示通过这一替换操作得到的子句集合。然后，对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, |X|\}$，我们引入一个相等性构件 $EQ(X_i)$，用于$X_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,q}\}$（见图 3）。由此，我们引入辅助变量

$$A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,q}\} \text{ and } B_i = \{b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots, b_{i,q}\} \text{ for } 1 \leq i \leq |X|.$$

注意，$A_i \cup B_i$ 中的每个变量恰好出现两次。对于每个子句 $c_j = \{x_r, x_s, x_t\} \in C$，我们引入一个集合构件 $CO(c_j)$（见图 5）。该构件会额外消耗一次$a_{r,\,j}$，$b_{r,\,j}$，$a_{s,\,j}$，$b_{s,\,j}$，$a_{t,\,j}$ 和 $b_{t,\,j}$.通过检查图 3 和图 5 中的顶点，可以直接验证所构造的图是三次图，并且 X' 中的每个变量顶点都与子句顶点相邻

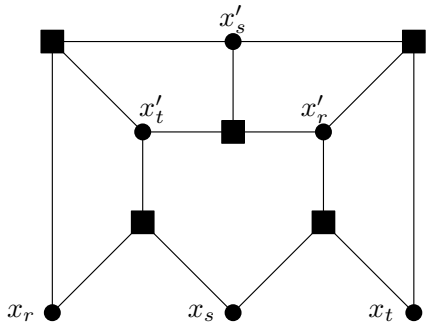


图 4：双子句构件。

其标签两两不同。由此可得 $\mathcal{I}'$ 与

$$X' = \bigcup_{i=1}^{|X|} \operatorname{var}(EQ(X_i)) \cup \bigcup_{c_j \in C} \operatorname{var}(CO(c_j)) = \bigcup_{i=1}^{|X|} (X_i \cup A_i \cup B_i) \cup \bigcup_{c_j \in C} \operatorname{var}(CO(c_j)) \text{ and}$$

$$C' = C_{\text{orig}} \cup \bigcup_{i=1}^{|X|} \operatorname{cl}(EQ(X_i)) \cup \bigcup_{c_j \in C} \operatorname{cl}(CO(c_j))$$

是 3-分区 1-in-3-SAT 的一个实例。

接下来，我们证明 $\mathcal{I}$ 是一个是实例，当且仅当 $\mathcal{I}'$ 是一个是实例。

首先，设 $\beta\colon\ X \to \{T, F\}$ 是一个使 C 满足 1-in-3 的真值赋值。我们构造一个真值赋值 $\beta'\colon\ X' \to \{T, F\}$，使 C' 满足 1-in-3。对于每个 $x_i,\ _j \in X_i$，我们令 $\beta'\ (x_i,\ _j)\ = \beta\ (x_i)$ 。显然，β' 1 满足 C_{orig} 中的每个子句。根据引理 3.3（P1），对于每个 $a_i,\ _j \in \bigcup_{i=1}^{|X|} A_i$，真值赋值 $\beta'\ (a_i,\ _j)\ = F$ 是强制的。于是，$\bigcup_{i=1}^{|X|} B_i$ 中的所有变量也具有强制真值，即，$\beta'\ (b_i,\ _j)\ \in \{T, F\} \setminus \{\beta\ (x_i)\ \}$。现在，$\beta'$ 1 满足每个相等性构件中的每个子句。对于每个子句 $c_j = \{x_r, x_s, x_t\} \in C$，恰好有两个 $i \in \{r, s, t\}$ 使得 $\beta'\ (b_i,\ _j)\ = T$，因为 β 1 满足 c_j，并且对于所有 $1 \le i \le |X|$，$\beta'\ (b_i,\ _j)$ 的真值与 $\beta\ (x_i)$ 相反。然后，根据引理 3.3（P2），对于每个集合构件，存在唯一的辅助变量真值，使得 β' 需要赋予这些变量的赋值能够使其中包含的所有子句均满足 1-in-3。因此，β' 1 满足 C' 中的每个子句。

其次，令 $\beta'\colon\ X' \to \{T, F\}$ 是一个对 C'作 1-in-3 满足的真值赋值。我们通过 $\beta(x_i) = \beta'(x_{i,\ 1})$ 定义 $\beta\colon\ X \to \{T, F\}$。由于其对 C_{orig}作 β' 1-in-3 满足，根据引理3.2可知，其对 C作 β 1-in-3 满足。

最后，我们证明该归约保持 1-in-3 满足真值赋值的数量。L et

$$S = \{\beta\colon X \to \{T, F\} \mid \beta \text{ 1-in-3-satisfies } C\} \text{ and}$$
$$S' = \{\beta'\colon X' \to \{T, F\} \mid \beta' \text{ 1-in-3-satisfies } C'\}$$

由于上述两个方向描述了单射映射 $f\colon\ S \to S'$ 和 $g\colon\ S' \to S$，我们得出 $|S| = |S'|$。最后指出该归约是多项式时间的，从而完成证明。 □

我们可以将这一结果推广到其计数变体：确定 3-分区 1-in-3-SAT 的解的数量这一问题是 #P-完全的。

推论 3.6. *3-分区 1-in-3-SAT 类是 NP-完全的，其计数变体是 #P-完全。*

证明。引理 3.4 和引理 3.5 构成了从正 1-in-3-SAT 到 3-分区 1-in-3-SAT 的多项式时间保数归约。根据 Schaefer 二分定理，正 1-in-3-SAT 是 NP-完全的 [Sch78]，而其计数变体根据 Hunt、Marathe、Radhakrishnan 和 Stearns [HMRS98 是 #P-完全的，因此结论成立。 □

既然我们现在已经考察了“正”和“3-划分的”这两个属性，就可以继续增加更多属性，进一步丰富 SAT 困难性结果。

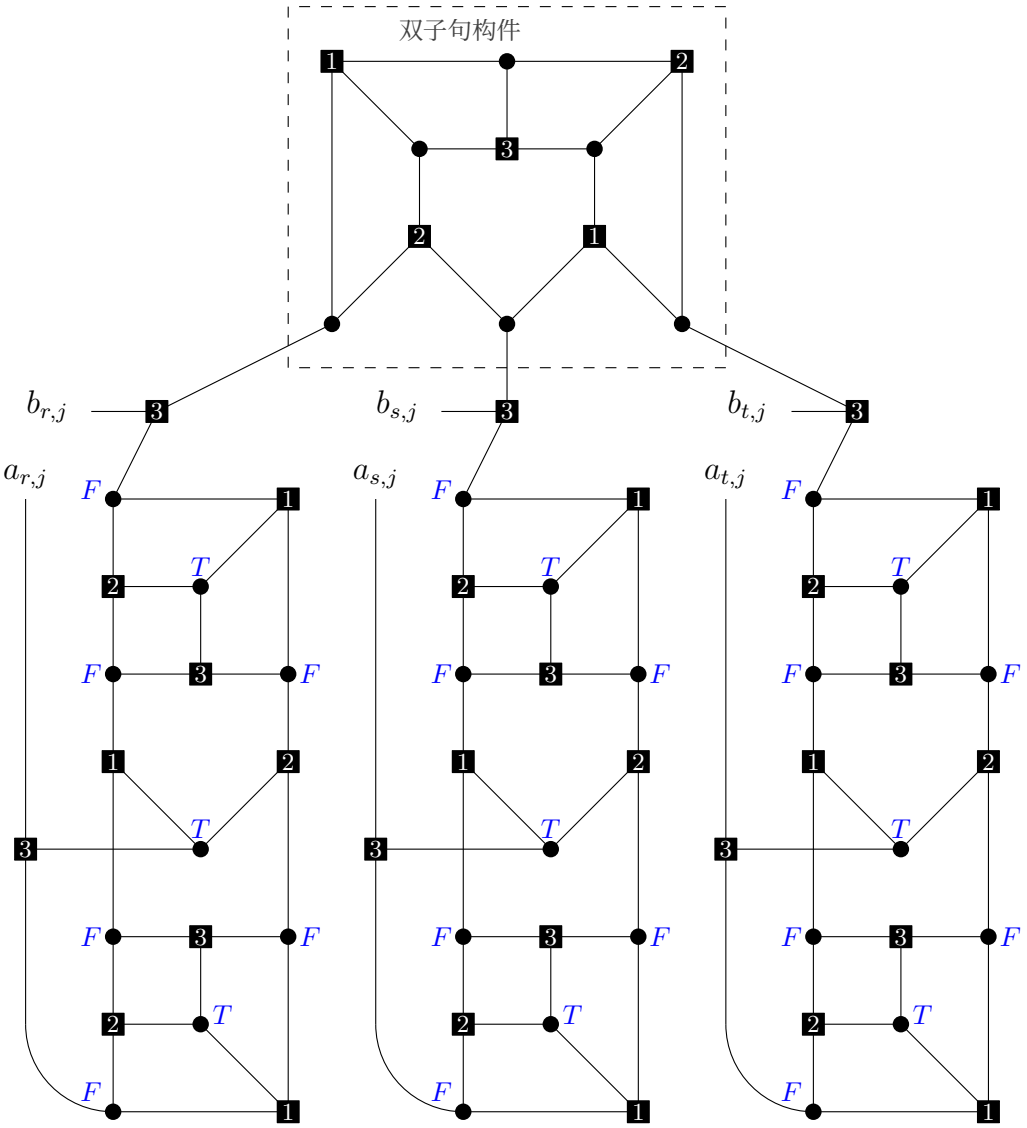


图 5：子句 $c_j = \{x_r, x_s, x_t\}$ 的集合构件。

4 平面性约束下的困难性

设 $\mathcal{I} = (X, C, P)$ 是一个 3-分区 1-in-3-SAT 实例，G 是其二部关联图。在本节中，我们固定一个实例及其 G 的嵌入。我们决定对所构造的构件给出非常详细的证明和逐步解释。在后续各节中，我们将越来越多地缩短依赖构件的证明。

4.1 构件

我们的目标是通过用称为交叉构件的构件替换图嵌入中的交叉点，来实现平面性。

为了便于辨认哪个变量与哪个变量相连，我们将包含 x 的子句称为 c_x，相应地，将包含 y 的子句称为 c_y。构件中的子句照常编号。

交叉器件（不同分区）给定 G 的正交嵌入，交叉器件可以将边 $\{x, c_x\}$ 和 $\{y, c_y\}$ 之间的交叉替换为 x、$y \in X$ 和 c_x、$c_y \in C$，其中 c_x 和 c_y 包含在不同分区中，从而得到平面构造（见图6）。

根据子句顶点的分区分配，我们需要使用不同的交叉构件。我们区分两种情况：交叉附近的子句顶点是分配到不同的划分，还是全部分配到同一划分。

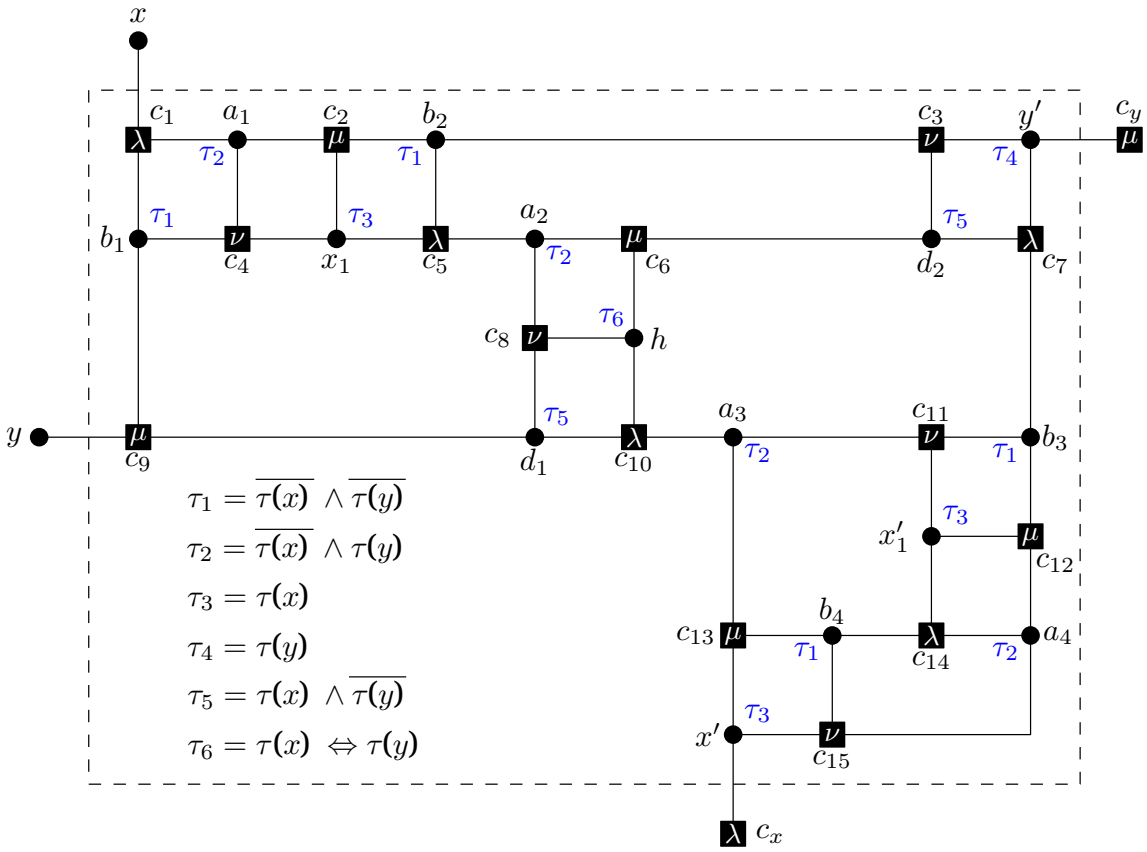


图6：当交叉边分别关联到不同分区的子句时所用的节约交叉构件。相等性验证器（4-环）确保顶点子集具有相同的真值。正交嵌入由图编辑器 yEd [yWo25]计算得出。

交叉构件（同一划分）给定 G的正交嵌入，该交叉构件允许用 x，$y \in X$和 c_x，$c_y \in C$替换边 $\{x, c_x\}$ 和 $\{y, c_y\}$之间的交叉，其中c_x 和 c_y 包含在同一划分中，从而得到平面构造（见图 7）。为确保给定 c_x 和 c_y的划分 $\lambda \in \{1, 2, 3\}$时，分区标签唯一，我们要求 $\mu < \nu$。该构件包含两个交叉构件，输入子句来自不同划分，且被点线方框圈出。

对于每个交叉构件，根据水平变量的方向，共有四种可能的朝向

$$d_{\text{hor}} \in \{x \to x', x' \leftarrow x\}$$

以及垂直变量的方向

$$d_{\text{ver}} \in \{\uparrow_y^{y'}, \downarrow_{y'}^{y}\}.$$

方向表示变量从哪一侧出发，以及哪一侧通向相应的子句。例如，$d_{\text{hor}} = x \to x'$ 表示变量 x 从交叉处水平线段的左侧出发，而 $d_{\text{hor}} = x' \leftarrow x$ 表示 x 从右侧出发。类似地，d_{ver}表示变量 y 相对于垂直线段的出发位置。

无需为每种朝向分别构造，因为这四种版本都可以通过沿 x轴和/或 y轴镜像该构件得到。

引理 4.1。设 $CR(x, y, \lambda, \mu)$ 是一个包含变量的交叉构件

$$A = \{x, y\} \cup \{x', y'\} \cup \{x_1, x'_1\} \cup \{a_i, b_i \mid 1 \le i \le 4\} \cup \{d_1, d_2, h\}$$

和子句 S $C_A = \{c_j \mid 1 \le j \le 15\}$ 如图6所示。则，以下陈述为真：

(i) 每个真值赋值 τ：$\{x, y\} \to \{T, F\}$ 都有一个唯一扩展 β：$A \to \{T, F\}$，使得 *1-in-3-* 满足 $CR(x, y, \lambda, \mu)$ 中的每个子句。

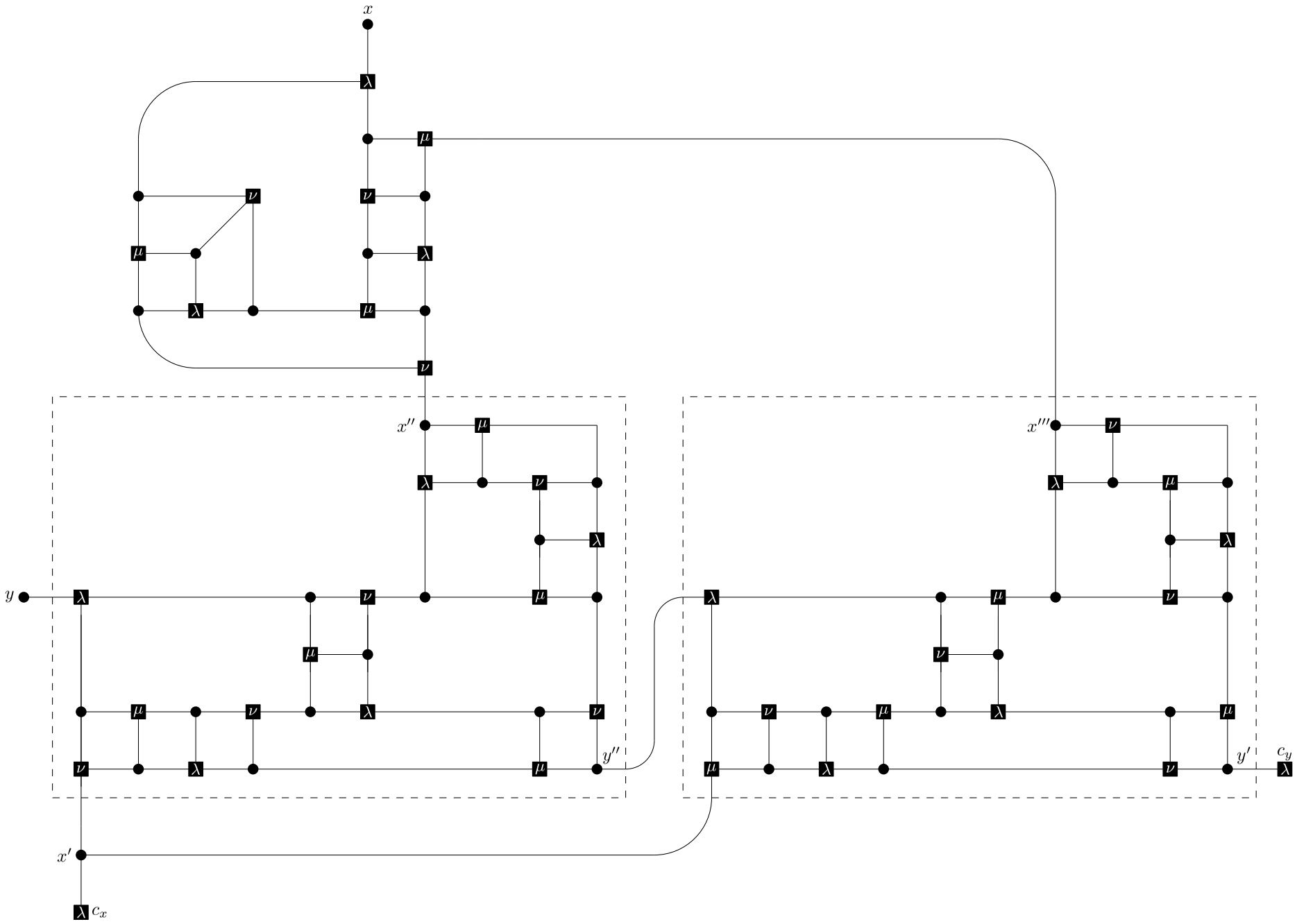


Figure 7: Parsimonious crossover gadget for the same partition

(ii) 对于 *(i)* 中的每个唯一扩展 β，都有 $\beta(x') = \tau(x)$ 以及 $\beta(y') = \tau(y)$。

证明。 我们同时证明 (i) 和 (ii)。每个 4-环都是一个相等性验证器，因此，

$$\begin{aligned}\beta(a_1) = \beta(a_2) = \beta(a_3) = \beta(a_4),\\ \beta(b_1) = \beta(b_2) = \beta(b_3) = \beta(b_4),\\ \beta(d_1) = \beta(d_2),\\ \beta(x) = \beta(x_1),\\ \beta(x') = \beta(x'_1).\end{aligned}$$

我们证明 $A \setminus \{x, y\}$ 中每个变量的真值由 x 和 y 的真值 $\tau(x)$ 和 $\tau(y)$ 决定。为此，令

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \overline{\tau(x)} \wedge \overline{\tau(y)},\\ \tau_2 &= \overline{\tau(x)} \wedge \tau(y),\\ \tau_3 &= \tau(x),\\ \tau_4 &= \tau(y),\\ \tau_5 &= \tau(x) \wedge \overline{\tau(y)}, \quad \text{and}\\ \tau_6 &= \tau(x) \Leftrightarrow \tau(y).\end{aligned}$$

我们证明，当 C_A 满足 β 1-in-3 时，$\beta(b_1) = \tau_1$。由子句 c_1 和 c_9，可得 $\beta(b_1) \Rightarrow \tau_1$。反设 $\tau_1 \Rightarrow \beta(b_1)$ 不成立，则 $\beta(x) = \beta(y) = \beta(b_1) = F$。因此，由子句 c_1 可得，对于 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$，$\beta(a_i) = T$。由子句 c_8，可得 $\beta(d_1) = F$。但这样一来，子句 c_9 就不满足 1-in-3，矛盾。因此，$\tau_1 \Rightarrow \beta(b_1)$ 也成立。这就证明了 $\beta(b_1) = \tau_1$，并且

$$\beta(b_1) = \beta(b_2) = \beta(b_3) = \beta(b_4) = \tau_1.$$

接下来，我们考虑 a_1。根据子句 c_1，我们有 $\beta(a_1) \Leftrightarrow \tau_3 \wedge \overline{\tau_1} \Leftrightarrow \tau(x) \wedge \overline{(\tau(x) \vee \tau(y))} \Leftrightarrow \tau_2$。这证明了

$$\beta(a_1) = \beta(a_2) = \beta(a_3) = \beta(a_4) = \tau_2.$$

根据子句 c_9，我们有 $\beta(d_1) \Leftrightarrow \overline{\tau_4 \wedge \tau_1} \Leftrightarrow \overline{\tau(y) \wedge (\tau(x) \vee \tau(y))} \Leftrightarrow \tau_5$。因此，$\beta(d_1) = \beta(d_2) = \tau_5$.

根据子句 c_8，我们有 $\beta(h) \Leftrightarrow \overline{\tau_5 \wedge \tau_2} \Leftrightarrow (\tau(x) \vee \overline{\tau(y)}) \wedge (\tau(x) \vee \tau(y)) \Leftrightarrow \overline{(\tau(x) \wedge \tau(y))} \vee (\tau(x) \wedge \tau(y)) \Leftrightarrow \tau_6$。因此，$\beta(h) = \tau_6$。

根据子句 c_3，我们有

$$\beta(y') \Leftrightarrow \overline{\tau_5} \wedge \overline{\tau_1} \Leftrightarrow (\overline{\tau(x)} \vee \tau(y)) \wedge (\tau(x) \vee \tau(y)) \Leftrightarrow \tau_4.$$

因此，$\beta(y') = \tau_4 = \tau(y)$。

由子句 c_{13}，可得

$$\beta(x') \Leftrightarrow \overline{\tau_1} \wedge \overline{\tau_2} \Leftrightarrow (\tau(x) \vee \tau(y)) \wedge (\tau(x) \vee \overline{\tau(y)}) \Leftrightarrow \tau_3.$$

因此，$\beta(x') = \tau_3 = \tau(x)$。

这就证明了 (ii)。回想一下，相等性验证器强制满足 $\beta(x_1) = \beta(x) = \tau_3$ and $\beta(x'_1) = \beta(x') = \tau_3$，现在便可得出，由 β 设定的 x and y 的真值决定了 A 中所有变量的真值。这就证明了 (i)。 □

同理，对于具有相同划分的交叉器件，我们也能证明这一点。

引理 4.2。 设 $CR(x, y, \lambda, \lambda)$ 是一个包含变量的交叉器件

$$A = \{x, y, x'\} \cup \{a_i, w_i \mid 1 \le i \le 4\} \cup \mathrm{var}(CR(x', y, \nu, \lambda)) \cup \mathrm{var}(CR(x', y'', \mu, \lambda))$$

以及子句

$$C_A = \{c_j \mid 1 \le j \le 9\} \cup \mathrm{cl}(CR(x', y, \nu, \lambda)) \cup \mathrm{cl}(CR(x', y'', \mu, \lambda))$$

如图 7 所示。于是，每个真值赋值 τ：$\{x, y\} \to \{T, F\}$ 都有一个唯一扩展 β：$A \to \{T, F\}$，使 $CR(x, y, \lambda, \lambda)$ 中的每个子句都 *1-in-3* 满足。

Proof. 子句 c_7， c_8 和 c_9 构成一个 F-轮。H 度，

$$\beta(w_1) = T \text{ and } \beta(w_2) = \beta(w_3) = \beta(w_4) = F.$$

接下来，我们推导出 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, x'\}$ in $\{\tau(x)\,\tau(x)\ F\}$ 的真值:

(1) 根据子句 c_1，我们有 $\beta(a_1) = \overline{\tau(x)}$。(2) 根据相等性验证器 $\{w_4, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}$，我们有 $\beta(a_2) = \beta(w_4) = F$。(3) 根据子句 c_3，我们有 $\beta(a_3) \Leftrightarrow \beta(a_1) \wedge \beta(a_2) \Leftrightarrow \tau(x)$。因此， $\beta(a_3) = \tau(x)$。(4) 根据相等性验证器 $\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4, a_2, a_3\}$，我们有 $\beta(a_4) = \beta(a_1) = \tau(x)$。(5) 根据引理 4.1 和子句 c_2，我们有 $\beta(x') \Leftrightarrow \beta(a_1) \wedge \beta(a_2) \Leftrightarrow \tau(x)$。因此， $\beta(x') = \tau(x)$

.

根据引理 4.1，如果 x' 的真值为 τ（x），且 y 的真值为 τ（y），那么变量 var($CR(x', y, \nu, \lambda)$) 存在唯一的真值赋值，使得 cl($CR(x', y, \nu, \lambda)$) 中的每个子句都满足 1-in-3。特别地，可得 $\beta(x'') = \beta(x') = \tau(x)$，以及 $\beta(y'') = \beta(y) = \tau(y)$。同样，根据引理 4.1，var($CR(x', y'', \mu, \lambda)$) 存在唯一的真值赋值。特别地， $\beta(x'') = \beta(x') = \tau(x)$，以及 $\beta(y') = \beta(y'') = \tau(y)$。

因此，我们有 $\beta(y') = \tau(y)$，并且根据 (5)，有 $\beta(x') = \tau(x)$，所以 β 是 τ 的扩展。此外，现在每个变量都有一个真值，该真值要么取决于 $\tau(x)$ 和 $\tau(y)$，要么属于 $\{T, F\}$。回想一下，$\beta(x'') = \beta(x') = \tau(x)$，现在很容易验证构件中的每个子句都满足 1-in-3。由此得证 (i)。 □

因此，我们已经证明了这些构件的性质，从而可以用交叉构件替换交叉点。

4.2 针对 3-分区 1-in-3-SAT 的保数归约

交叉构件给出了一种归约。下面，我们将形式化说明如何替换相应嵌入中的交叉点。

定理4.3。 存在一个从 *3-*分区 *1-in-3-SAT* 到平面 *3* 分区 *1-in-3-Sat* 的保数多项式时间归约。

证明。设 $\mathcal{I} = (X, C, P)$ 是一个 3-分区 1-in-3-SAT 实例。设 $OE_{\mathcal{I}}$ 是 G 在 $(|X|+|C|) \times (|X|+|C|)$-网格上的正交嵌入，且每条边至多有两个弯折。这样的嵌入存在，并且可以使用 Biedl 和 Kant [BK98] 的算法在线性时间内计算得到。

由于稍后我们会用交叉构件替换交叉点，因此首先细化上述网格，并相应地缩放 $OE_{\mathcal{I}}$，以便留出空间，通过插入构件的嵌入来对其进行修改。显然，存在一个正整数 $s < 20$，使得图6和图 7所示的嵌入分别能放入尺寸为 $(2s+1) \times (2s+1)$ 的网格中，并且 x、 y、 c_x 和 c_y 分别从构件对应边的中点进入网格。我们通过将顶点、弯折点和交叉点的坐标乘以 $2s+1$，并相应缩放线段，从 $OE_{\mathcal{I}}$ 得到另一个正交嵌入 $OE_{\mathcal{I},\,s}$，对应于 $G(X, C)$。

现在，我们按如下方式得到 3-分区 1-in-3-SAT 的一个新实例 $\mathcal{I}' = (X', C', P')$。设 (q, r) 是 $OE_{\mathcal{I},\,s}$ 中某个交叉点的整数坐标。设 x， y 是在 (q, r) 处交叉的两个变量，其中

$$d_{\text{ver}} \in \{x \to x', x' \leftarrow x\} \text{ and } d_{\text{hor}} \in \{\uparrow_y^{y'}, \downarrow_{y'}^{y}\}.$$

此处， d_{ver} 表示变量 x 的起点位于交叉处水平线段的左侧，即 $d_{\text{ver}} = x \to x'$，还是位于其右侧，即 $d_{\text{ver}} = x' \leftarrow x$。类似地， d_{hor} 表示变量 y 相对于垂直线段的起点。设 c_x 和 c_y 是 C 中的子句，使得 $\{x, c_x\}$ 和 $\{y, c_y\}$ 是 G 中的边，并在q， r处交叉于$OE_{\mathcal{I},\,s}$。现在，我们将嵌入中一个大小等于交叉构件嵌入尺寸的、位于（$2s+1$）$\times$（$2s+1$）网格上的部分替换为中心位于（q， r）的适当交叉构件。也就是说，如果 c_x 和 c_y 属于 $C = \bigcup_{i=1}^{3} P_i$中的不同分区，我们使用图6所示的构件；否则，使用图 7所示的构件。在这两种情况下，交叉构件的分区标签 λ、 μ 和 ν 由 c_x 和 c_y的分区标签确定——在后一种情况下，还需满足附加要求 $\mu < \nu$。此外，交叉构件的方向由 d_{ver} 和 d_{hor}确定。令 X' 和 C' 表示所得实例中的变量和子句。由于交叉构件中的每个变量顶点都与 $\{1, 2, 3\}$ 中分区标签两两不同的三个子句相邻，并且该构件对 x

以及 y，子句 C' 分解为 X'的三个分区。如上所述，对一个交叉进行替换后，可得到$OE_{\mathcal{I}',\ s}$ 的正交嵌入，其交叉数比 G' $OE_{\mathcal{I},\ s}$少一个。此外，剩余的交叉无需再次进行缩放，因为该替换局部作用于q，r 处的交叉。根据引理 4.1 和 4.2，从 $\mathcal{I}$ 到 $\mathcal{I}'$ 的归约是保真的。

通过重复上述归约，我们得到一个从 $\mathcal{I}$ 到 Planar 3-Partitioned 1-in-3-Sat 的实例 $\mathcal{I}_{\text{plan}}$ 的保数归约。由于 $OE_{\mathcal{I}}$中的交叉点少于 $(|X|+|C|)^2$，我们至多重复上述归约 $(|X|+|C|)^2$ 次。注意到网格细化和缩放只进行了一次，最终正交嵌入（同样也是平面的）嵌入在大小为

$$(2s+1)(|X|+|C|)\times(2s+1)(|X|+|C|).$$

定理随即得证。 □

类似于推论 3.6 中的论证，我们可以立即得出：

推论 4.4。 平面 *3* 分区 *1-in-3-Sat* 是 *NP*-完全的，其计数变体是 *#P*-完全的。

至此，我们结束关于平面性的讨论，转而关注另一种性质。

5 线性约束下的困难性

回顾一下，如果每对不同的子句至多共享一个变量，则称该公式是线性的。

5.1 构件

T-**方形** T-方形由变量 z_1、z_2、z_3 和 f、六个辅助变量以及九个线性子句组成，如图8所示。在任何 1-in-3 满足真值赋值中，变量 z_1、z_2 和 z_3 都被强制取真值 T。

线性等式构件变量集合 $X_i=\{x_{i,1},x_{i,2},x_{i,3}\}$ 的线性等式构件 $LEQ(X_i)$ 确保在任何 1-in-3 满足真值赋值中，这三个变量具有相同的真值。该构件模拟一个变量顶点，包含一个 T-方形，以及变量 y_1、y_2、y_3、b 和三个额外的线性子句、两个辅助变量 $a_{i,\ 1}$、$a_{i,\ 2}$，以及六个额外的线性子句，如图9所示。在任何 1-in-3 满足真值赋值中，变量 y_1、y_2 和 y_3 都被强制取真值 F。

引理 5.1. 设 TS 是一个变量为

$$A=\{z_1,z_2,z_3\}\cup\{f\}\cup\{d_i,e_i\mid 1\le i\le 3\}$$

且子句为 $C_A=\{c_j\mid 1\le j\le 9\}$ 的 *-方形，如图 8 所示。那么，恰好存在一个真值赋值β：$A\to\{T,F\}$，使 C_A中的每个子句都 *1-in-3* 满足。该真值赋值满足 $\beta(z_1)=\beta(z_2)=\beta(z_3)=T$。

证明。首先，我们证明不存在真值赋值 β：$A\to\{T,F\}$，使得 $\beta(f)=F$ 能 1-in-3 满足 C_A中的每个子句。反设存在一个满足赋值，且 $\beta(f)=F$。要使子句 c_1 达到 1-in-3 满足，必须有 $\beta(d_1)=T$ 或 $\beta(e_1)=T$。我们假设 $\beta(d_1)=T$。接着，根据子句 c_3 和 c_9，可得 $\beta(d_2)=\beta(d_3)=F$。根据子句 c_7，进而可得 $\beta(e_3)=T$；再由子句 c_8，可得 $\beta(e_2)=F$。但这样一来，子句 c_4 就不满足 1-in-3，产生矛盾。现在假设 $\beta(e_1)=T$。接着，根据子句 c_5 和 c_2，可得 $\beta(e_2)=\beta(e_3)=F$。根据子句 c_7，进而可得 $\beta(d_3)=T$；再由子句 c_6，可得 $\beta(d_2)=F$。但这样一来，子句 c_4 就不满足 1-in-3，再次产生矛盾。

由于不存在使 $\beta(f)=F$ 的满足真值赋值，考虑一个使 $\beta(f)=T$ 的真值赋值。通过子句 c_1，c_4，c_7这会强制 $\beta(d_i)=\beta(e_i)=F$ 对于 $i\in\{1,2,3\}$ 成立，而根据其余子句，这又会强制 $\beta(z_1)=\beta(z_2)=\beta(z_3)=T$。该真值赋值使 C_A 中的每个子句均 1-in-3 满足，并且由于每个赋值都是被强制确定的，它是唯一能做到这一点的赋值。 □

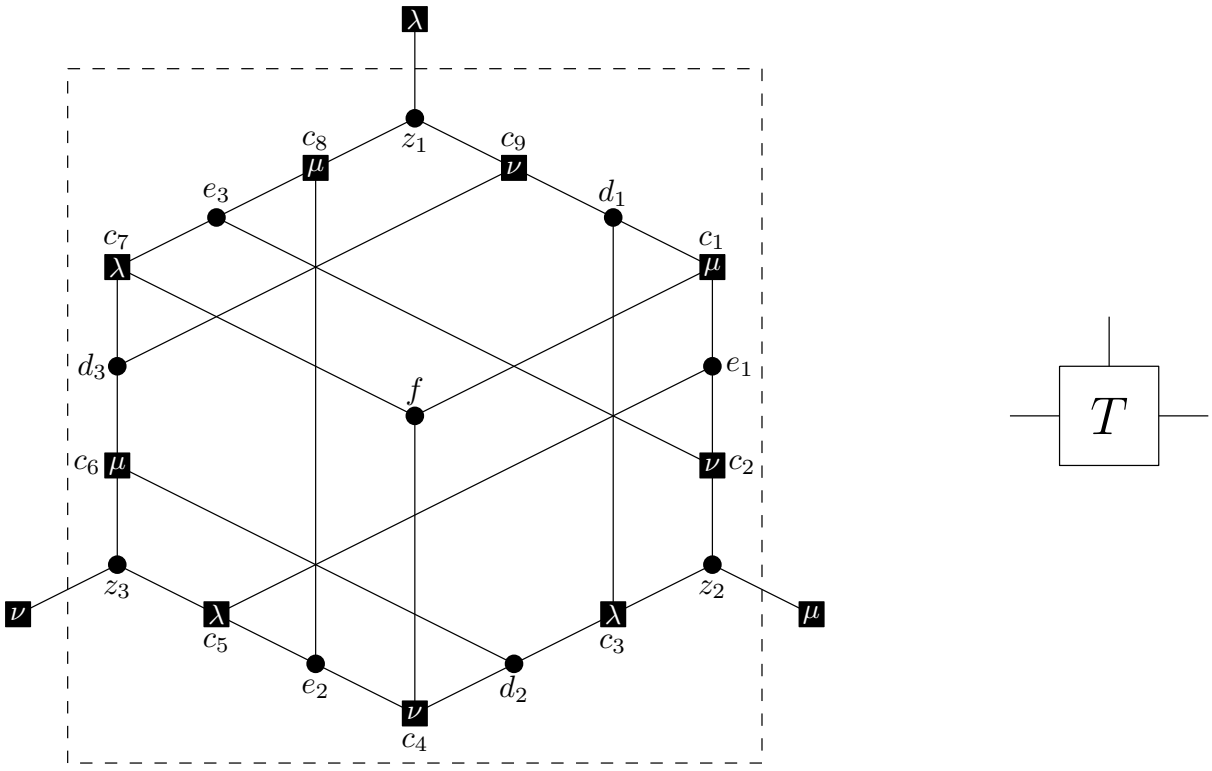


图 8： T-正方形及其缩写。

一个 T 方形只需添加少量元素即可扩展为一个线性等式构件。具体而言，令$LEQ(X_i)$ 为围绕一个 T 方形 TS 构造的线性等式构件，如图9所示。其变量为

$$\mathrm{var}(LEQ(X_i)) = X_i \cup \{a_{i,1}, a_{i,2}\} \cup \{y_1, y_2, y_3\} \cup \{b\} \cup \mathrm{var}(TS).$$

除了 TS 的子句外，它还包含三个子句 $\{y_1, b, z_1\}$，$\{y_2, b, z_2\}$，$\{y_3, b, z_3\}$，这些子句与 TS 一起构成 F-正方形 FS，以及六个子句，每个子句都包含 X_i 中的一个变量、a_i,1, a_i,2 中的一个变量，以及 y_1, y_2, y_3 中的一个变量。根据引理 5.1 所示， T-正方形的变量 z_1, z_2, z_3 被强制赋值为 T，因此，只有当 $\beta(b) = \beta(y_1) = \beta(y_2) = \beta(y_3) = F$ 时， F-正方形添加的三个子句才能 1-in-3 满足。随后，恰好存在一个真值赋值 β: var(FS) $\to \{T, F\}$，使得 cl(FS) 中的每个子句都 1-in-3 满足。

引理 5.2。设 $LEQ(X_i)$ 是变量集 $X_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\}$ 的线性等式构件，如图9所示。那么，对于 $\mathrm{var}(LEQ(X_i))$，恰好存在两个真值赋值 β_1 和 β_2，使得 $\mathrm{cl}(LEQ(X_i))$ 中的每个子句都满足 *1-in-3*。进一步， β_1 和 β_2 满足

$$\beta_1(x_{i,1}) = \beta_1(x_{i,2}) = \beta_1(x_{i,3}) = T, \qquad \beta_1(a_{i,1}) = \beta_1(a_{i,2}) = F,$$
$$\beta_2(x_{i,1}) = \beta_2(x_{i,2}) = \beta_2(x_{i,3}) = F, \qquad \beta_2(a_{i,1}) = \beta_2(a_{i,2}) = T.$$

且所有子句都是线性的。

证明。唯一能够使 F-方格满足 1-in-3 的赋值迫使其变量 y_1, y_2, y_3 取值为 F。因此，对于 $LEQ(X_i)$ 的任何 1-in-3 满足真值赋值 β，以下命题必须为真:

$$(\beta(a_{i,1}) \oplus \beta(x_{i,1})) \wedge (\beta(a_{i,1}) \oplus \beta(x_{i,2})) \wedge (\beta(a_{i,1}) \oplus \beta(x_{i,3}))$$
$$\wedge (\beta(a_{i,2}) \oplus \beta(x_{i,1})) \wedge (\beta(a_{i,2}) \oplus \beta(x_{i,2})) \wedge (\beta(a_{i,2}) \oplus \beta(x_{i,3})).$$

因此,

$$\beta(a_{i,k}) \neq \beta(x_{i,j}) \text{ for } k \in \{1, 2\} \text{ and } j \in \{1, 2, 3\},$$

这意味着

$$\beta(a_{i,1}) = \beta(a_{i,2}), \text{ and}$$
$$\beta(x_{i,1}) = \beta(x_{i,2}) = \beta(x_{i,3}).$$

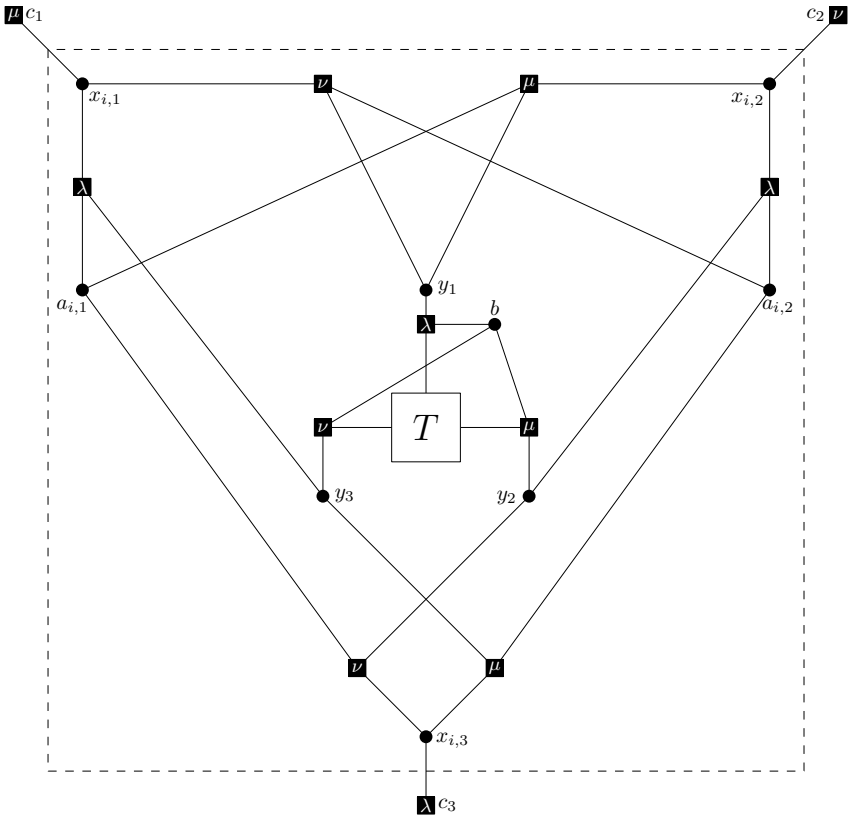


图9：三划分的线性化构件。

只有两种满足此条件的可能真值赋值：β_1 和 β_2。

此外，当且仅当对于每个 $v \in \text{var}(LEQ(X_i))$，包含 v 的子句的并集基数等于七时，$\text{cl}(LEQ(X_i))$ 中的所有子句都是线性的。这是因为 v 出现在三个子句中，每个子句都含有三个变量，而这些子句之间唯一的重叠是 v，因此不同变量的数量减少了两个（仍有一次 v 的出现）。因此，

$$|\{u \in c_v \mid c_v \in \text{cl}(LEQ(X_i)) \wedge v \in c_v\}| = 3 \cdot 3 - 2 = 7.$$

请注意，构件之外的子句 c_1，c_2 和 c_3 彼此不同，并且除了 $x_{i,1}$，$x_{i,2}$ 和 $x_{i,3}$ 之外，不能包含 $\text{var}(LEQ(X_i))$ 中的其他变量。由此可验证，这一性质对 $LEQ(X_i)$ 中出现的全部 19 个变量都成立。□

类似地，我们可以构造一个针对四个分区的保数归约，详见附录。

引理 5.3. *存在一个从 3-分区 1-in-3-SAT 到线性 3 分区 1-in-3-Sat 的保数归约。*

证明。设 $\mathcal{I} = (X, C)$ 是一个 3-分区 1-in-3-SAT 实例。

我们按如下方式从 $\mathcal{I}$ 构造线性 3-分区 1-in-3-SAT 的一个实例 $\mathcal{I}' = (X', C')$。对于每个变量 $x_i \in X$，我们将 x_i 的三次出现分别替换为新的变量 $x_{i,1}$,$x_{i,2}$,$x_{i,3}$。令 C_{orig} 表示通过此替换操作得到的子句集合。随后，对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, |X|\}$，我们引入一个线性等式构件 $LEQ(X_i)$（见图9）。

由于进行了替换，出现在子句 $c \in C_{\text{orig}}$ 中的变量不会出现在另一个子句 $c' \in C_{\text{orig}}$ 中。正如引理 5.2 所示，$\text{cl}(LEQ(X_i))$ 中的所有子句都是线性的。因此，$C_{\text{orig}} \cup \bigcup_{i=1}^{|X|} \text{cl}(LEQ(X_i))$ 中的所有子句都是线性的。由此可知，$\mathcal{I}' = (X', C')$，其中 $X' = \bigcup_{i=1}^{|X|} \text{var}(LEQ(X_i))$ 且 $C' = C_{\text{orig}} \cup \bigcup_{i=1}^{|X|} \text{cl}(LEQ(X_i))$，是一个线性 3-分区 1-in-3-SAT 实例。

设 $\beta\colon X \to \{T, F\}$ 是一个对 C 进行 1-in-3 满足的真值赋值。我们构造一个真值赋值 $\beta'\colon X' \to \{T, F\}$，使其对 C' 进行 1-in-3 满足。对于替换 x_i 后引入的每个 $x_{i,j}$，我们令 $\beta'(x_{i,j}) = \beta(x_i)$。显然，$\beta'$ 1-in-3 满足 C_{orig} 中的每个子句。根据引理 5.2，如果给定真值赋值 $\beta'(x_{i,j})$，则 $\beta'(a_{i,k}) = \beta'(x_{i,j})$ 被强制确定，并且 $LEQ(X_i)$ 中的所有子句均得到 1-in-3 满足。因此，

β' 1-in-3 满足 C' 中的每个子句。其次，设 β'：$X' \to \{T, F\}$ 是一个对 C' 进行 1-in-3 满足的真值赋值。我们通过 $\beta(x_i) = \beta'(x_{i,1})$ 定义 β：$X \to \{T, F\}$。由于 β' 1-in-3 满足 C_{orig}，根据引理 5.2 可知，β 1-in-3 满足 C。

我们得出结论：该归约是保数的，因为 1-in-3 满足 C 的赋值数量与 C' 的赋值数量完全相同，并且该构造是多项式时间的。 □

引理 5.3 中所述归约所采用的构造理念可以借助类似的构件扩展到四个分区。相应的构件及其性质的证明可见附录。

引理 5.4。 *存在一个从 3-分区 1-in-3-SAT 到线性 4-分区 1-in-3-SAT 的保数归约。*

证明。 设 $\mathcal{I} = (X,\ C)$ 是一个 3-分区 1-in-3-SAT 实例。

我们如下从 $\mathcal{I}$ 构造一个线性 4-分区 1-in-3-SAT 实例 $\mathcal{I}' = (X',\ C')$。首先，我们复制 $\mathcal{I}$中某个分区的所有子句，以创建第四个分区。现在，每个变量都出现在四个不同的分区中，并且满足真值赋值的数量保持不变，因为新增的子句只是对 C中已有子句的复制。证明的其余部分与引理 5.3 的证明类似。

□

5.2 $k \geq 3$ 分区的 NP 完全性与 #P 完全性

在确立了 $k = 3$ 和 $k = 4$ 分区的困难性之后，我们现在考虑更大的 k，并证明对于所有 $k \geq 3$ 分区，困难性都成立。证明通过将线性 k-分区 1-in-3-SAT 归约为线性 $(k + 2)$-分区 1-in-3-SAT 来完成。

定理 5.5。 *对于 $k \geq 3$，线性 k-分区 1-in-3-SAT 是 NP-完全的，其计数变体是 #P-完全的。*

考虑一个 $\mathcal{I}$线性 k-分区 1-in-3-SAT 实例，其变量集为 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$，分区为 P_1，……，P_k。注意，n必须能被三整除，否则 X无法被划分为由三个变量组成的两两不相交的子句，而这些子句构成每个分区。不失一般性，我们可以假设

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\{x_{3j-2}, x_{3j-1}, x_{3j}\} \mid j \in \{1, 2, \ldots, \frac{n}{3}\}\} \\ &= \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}, \ldots, \{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}\}. \end{aligned}$$

令 $\mathcal{I}'$ 和 $\mathcal{I}''$ 分别是 $\mathcal{I}$ 的两个副本，其变量集分别为 Y 和 Z。那么，例如，我们有

$$\begin{aligned} P'_1 &= \{\{y_{3j-2}, y_{3j-1}, y_{3j}\} \mid j \in \{1, 2, \ldots, \frac{n}{3}\}\} \\ &= \{\{y_1, y_2, y_3\}, \{y_4, y_5, y_6\}, \ldots, \{y_{n-2}, y_{n-1}, y_n\}\}, \\ P''_1 &= \{\{z_{3j-2}, z_{3j-1}, z_{3j}\} \mid j \in \{1, 2, \ldots, \frac{n}{3}\}\} \\ &= \{\{z_1, z_2, z_3\}, \{z_4, z_5, z_6\}, \ldots, \{z_{n-2}, z_{n-1}, z_n\}\}. \end{aligned}$$

那么，$\mathcal{I}$ 是一个是实例，当且仅当以下 Linear $(k + 2)$-Partitioned 1-in-3-SAT 实例 $\mathcal{I}'''$ 是一个是实例。

$$\begin{aligned} P'''_r &= P_r \cup P'_r \cup P''_r, \quad 1 \leq r \leq k, \\ P'''_{k+1} &= \{\{x_{3j-2}, y_{3j-1}, z_{3j}\}, \{y_{3j-2}, z_{3j-1}, x_{3j}\}, \{z_{3j-2}, x_{3j-1}, y_{3j}\} \mid j \in \{1, 2, \ldots, \frac{n}{3}\}\} \\ &= \{\{x_1, y_2, z_3\}, \{y_1, z_2, x_3\}, \{z_1, x_2, y_3\}, \ldots\}, \\ P'''_{k+2} &= \{\{x_{3j-2}, z_{3j-1}, y_{3j}\}, \{y_{3j-2}, x_{3j-1}, z_{3j}\}, \{z_{3j-2}, y_{3j-1}, x_{3j}\} \mid j \in \{1, 2, \ldots, \frac{n}{3}\}\} \\ &= \{\{x_1, z_2, y_3\}, \{y_1, x_2, z_3\}, \{z_1, y_2, x_3\}, \ldots\} \end{aligned}$$

证明。 首先，令 $\mathcal{I}$ 为 1-in-3 可满足。于是，存在一个真值赋值 τ，使得在 $\mathcal{I}$ 的每个子句中恰好将一个变量赋值为 T，包括 P_1 中的子句。该真值赋值迫使 Y 和 Z 的真值赋值分别为 τ' 和 τ''：

如果 $\tau(x_{3j-2}) = T$，那么由于 $P_1 \subset P_1'''$，$\tau(x_{3j-1}) = \tau(x_{3j}) = F$。$P_{k+1}'''$ 和 P_{k+2}''' 中的子句迫使 $\tau'(y_{3j-1}) = \tau'(y_{3j}) = \tau''(z_{3j-1}) = \tau''(z_{3j}) = F$。为了使 $P_1' \subset P_1'''$ 和 $P_1'' \subset P_1'''$ 满足 1-in-3，这迫使 $\tau(y_{3j-2}) = \tau(z_{3j-2}) = T$。

其他指标 $3j-1$ 和 $3j$ 也同理。因此，令 τ' 和 τ'' 分别为 Y 和 Z 的真值赋值，并定义为 $\tau(x_i) = \tau'(y_i) = \tau''(z_i)$。由此得到 τ''' 的一个真值赋值，它 1-in-3 满足 P_{k+1}''' 和 P_{k+2}'''。显然，它也满足 P_r'''（对于 $1 \le r \le k$）。

现在，设 $\mathcal{I}'''$ 可满足。于是，存在一个真值赋值 τ'''，使 $\mathcal{I}'''$ 的每个子句都得到 1-in-3 满足。由于 $\mathcal{I}$ 的子句是 $\mathcal{I}'''$ 的子句的子集，满足 $\tau(x_i) = \tau'''(x_i)$ 的真值赋值 τ 也会 1-in-3 满足 $\mathcal{I}$。

最后，我们证明该归约保留了 1-in-3 满足真值赋值的数量。L et

$$S = \{\tau\colon X \to \{T,F\} \mid \tau \text{ 1-in-3-satisfies } P_1 \cup \cdots \cup P_k\} \text{ and}$$
$$S' = \{\tau'''\colon X \cup Y \cup Z \to \{T,F\} \mid \tau''' \text{ 1-in-3-satisfies } P_1''' \cup \cdots \cup P_k''' \cup P_{k+1}''' \cup P_{k+2}'''\}$$

由于上述两个方向分别描述了单射映射 $f\colon S \to S'$ 和 $g\colon S' \to S$，因此我们得出 $|S| = |S'|$。最后，我们指出该归约是在多项式时间内完成的，以此结束证明。

由此，对于所有奇数 $k \ge 3$ 和所有偶数 $k \ge 4$，我们得到 NP-完全性和 #P-完全性。引理 5.3 和 5.4 分别证明了 $k = 3$ 和 $k = 4$的 NP-完全性和 #P-完全性。因此，我们可以推得所有 $k \ge 3$都具有 NP-完全性和 #P-完全性。□

推论 **5.6.** *k-划分的 1-in-3-SAT 问题是 NP-完全的，其计数变体对于 {v1} 是 #P 完全的 te 为 $k \ge 3$。*

6 连通性约束下的困难性

接下来，我们将 3-分区 1-in-3-SAT 的困难性结果推广到关联图为 3-连通的可满足性公式。我们分几个步骤从 3-分区 1-in-3-SAT 进行归约。首先，我们在关联图中加入网格结构。然后，用交叉构件替换网格顶点，从而得到一个 3-连通可满足性图。最后，我们替换可满足性图中的交叉点，以实现平面性。

设 $\mathcal{I} = (X, C, P)$ 是一个 3-分区 1-in-3-SAT 实例。到目前为止，我们一直根据子句所包含的变量对子句进行编号。例如，如果子句包含变量 x_i，我们就将该子句编号为 c_{x_i} x_i，并为变量在不同位置的出现添加第二个编号。从现在起，我们允许使用一种不同的附加记号，并根据变量所属的子句为变量编号。

设变量的数量为 n。不失一般性，我们固定子句中变量的顺序$c_i = \{x_{c_i,1}, x_{c_i,2}, x_{c_i,3}\}$，$1 \le i \le |C|$，并任意固定子句的顺序。我们根据变量所属的子句（第一个索引）以及它在子句中的位置（第二个索引）为子句中的变量编索引。这样，我们便可以为每次变量出现指定一个数字，即<风格 id='4'>位置</风格>，如下所示：

$$\begin{array}{cccccccccc} (x_{c_1,1}, & x_{c_1,2}, & x_{c_1,3}), & (x_{c_2,1}, & x_{c_2,2}, & x_{c_2,3}), & \cdots & (x_{c_n,1}, & x_{c_n,2}, & x_{c_n,3}) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \end{array}$$

由于每个变量在 C 中恰好出现在三个子句中，因此每个 $x_i \in X$ 都对应于 1 到 $3n$ 之间的恰好三个数字（即 x_i 出现的确切位置）。设 pos(i,1)、pos(i,2) 和 pos(i,3) 表示 x_i 的位置。由于变量出现三次，并且同一变量的排序不会影响公式，我们可以假设 pos(n,1) > pos(n,2) > pos(n,3)。

我们将图 $Q = (V^Q, E^Q)$ 定义为

$$V^Q = \{q_{i,j} \mid 1 \le i \le 3n,\ 1 \le j \le 3n\},$$
$$E^Q = \big\{\{q_{i,j}, q_{i,j+1}\} \mid 1 \le i \le 3n,\ 1 \le j < 3n\big\}$$
$$\cup \big\{\{q_{i,j}, q_{i+1,j}\} \mid 1 \le i < 3n,\ 1 \le j \le 3n\big\}.$$

使用上述记号，我们将图 $G_{\text{grid}}(X,\ C,\ P)\ =(V_{\text{网格}}\, E^{\text{grid}})$ 定义为

$$
\begin{aligned}
V^{\text{grid}} &= X \cup C \cup V^{Q},\\
E^{\text{grid}} &= E^{Q} \cup \{\{x_i, q_{3i-2,1}\}, \{x_i, q_{3i-1,1}\}, \{x_i, q_{3i,1}\} \mid x_i \in X\}\\
&\quad \cup \{\{c_j, q_{1,3j-2}\}, \{c_j, q_{1,3j-1}\}, \{c_j, q_{1,3j}\} \mid c_j \in C\}\\
&\quad \cup \{\{q_{3i-2,3n}, q_{3n,\text{pos}(i,1)}\}, \{q_{3i-1,3n}, q_{3n,\text{pos}(i,2)}\}, \{q_{3i,3n}, q_{3n,\text{pos}(i,3)}\} \mid x_i \in X\}.
\end{aligned}
$$

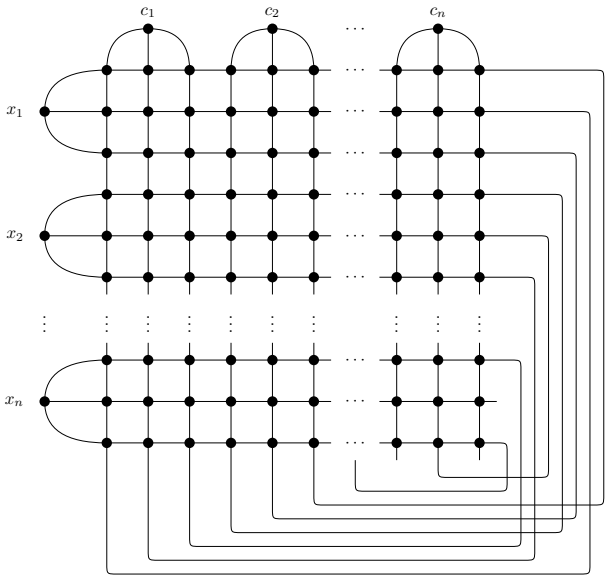


图 10： G_{grid}（$\mathcal{I}$）的示意图

W我们将 X 中的顶点称为变量顶点，将 C 中的顶点称为子句顶点。

我们为 G_{grid}（$\mathcal{I}$）固定一种绘图，使得不失一般性，任意两条不同的边至多相交一次，如图 10 所示。该绘图确定了一个方向，因而也确定了网格最左列和最右列，以及最上行和最下行的概念。边集 E^{grid} 由网格 Q的竖直边和水平边、连接 C 中的子句顶点与最上行的边、连接 X 中的变量顶点与最左列的边，以及连接最右列顶点与网格最下行的边组成。最后这些边取决于公式实例，它决定了网格右侧的自由端如何与网格下方的自由端相连。因此，图中仅以示意方式标出了这些边。此外，条件 pos(n, 1) $>$pos($n, 2$) $>$pos(n,3) 确保角顶点 $q_{3n,3n}$ 与一个满足 $j \leq 3n-2$ 的顶点 $q_{3n,j}$ 相邻；在下面引理关于 3-连通性的证明中会用到这一点。另请注意， Q 中的所有顶点的度均为四。

引理 6.1. 图 $G_{grid}(\mathcal{I})$ 是 *3*-连通的。

证明。 显然（例如，利用 Špacapan 连通性公式 [Špa08，定理 1]）网格是 2-连通的，因此 Q也是如此。我们通过说明在 G_{grid}($\mathcal{I}$)中删除至多两个顶点后， G_{grid}($\mathcal{I}$)仍然连通，来证明 G_{grid}($\mathcal{I}$)的 3-连通性。注意，若 $S \subseteq V^{Q}$、 $|S| = 2$和 $Q \setminus S$ 不连通，则 S 由 Q某个角的两个邻点组成：选取一行 R' 和一列 C'，使其避开 S，那么 $R' \cup C'$ 在 $Q \setminus S$中是连通的。设 v 位于另一个分量中。从 v 到 C' 的水平路径以及从 v 到 R' 的垂直路径都必须各包含 S中的一个顶点。若 v 有一个不属于 S的相邻邻点，则存在一条从 v 到 $C' \cup R'$的路径，这就产生了矛盾。因此， v 是一个角，而 S 中的两个顶点必定是它的两个邻点。

我们根据集合 $S \subseteq V_{\text{网格}}$以及 $|S| \leq 2$ 区分不同情形。若 $|S \cap V^{Q}| \leq 1$，则 $Q \setminus (S \cap V^{Q})$ 是连通的，因为 Q 是 2-连通的。($X \cup C$) 中的每个顶点 $\setminus S$ 在 V^{Q} 中都有三个不同的邻点，其中至少有一个在删除 S 后仍然存在。因此， G_{grid}($\mathcal{I}$) 是连通的。

如果 $|S \cap V^{Q}| = 2$ 和 $Q \setminus (S \cap V^{Q})$ 不连通，根据上述观察， S 由一个角的两个邻点组成。角 $q_{1,1}$、 $q_{1,3n}$ 和 $q_{3n,1}$ 分别通过 x_1、c_n 和 x_n 与网格的其余部分保持连通。最后，$q_{3n,3n}$ 与 $q_{3n,\text{pos}(n,3)}$ 和 pos(n,3) $\leq 3n-2$相邻，因此这个顶点不会被删除。因此，在所有情况下， $G_{\text{grid}}(X, C, P) \setminus S$都是连通的。 □

接下来，我们将 $G_{\text{grid}}(\mathcal{I})$ 中的所有网格顶点替换为交叉器件（参见图6中的对向划分构件和图 7中的相等分区小工具）。回顾一下，交叉器件包含两个输入顶点（即子句顶点）和两个输出顶点（即变量顶点）。每个顶点有两条指向构件内顶点的边，以及一条可连接到图上的自由边。在 $G_{\text{grid}}(\mathcal{I})$ 中，每个网格顶点的度为四，我们分别将其边称为上边、下边、左边和右边。我们用交叉器件替换每个网格顶点，使左边和下边分别成为两个输入顶点的自由边，上边和右边分别成为两个输出顶点的自由边。

引理6.2. 在每个网格顶点处，构件（相等分区或对立分区）的选择都是唯一的，使得所得图是某个 *3*-分区 *1-in-3-SAT* 实例的关联图。

证明。 根据用于相等分区和对立分区的保数交叉小工具的构造，交叉构件的右边必须连接到与其左输入顶点属于同一分区的子句顶点。类似地，交叉构件的上边必须连接到与其下输入顶点属于同一分区的子句顶点。因此，同一行中的所有左输入顶点都属于同一分区，同一列中的所有下输入顶点也都属于同一分区。

由于与第一行顶点相邻的子句顶点 $c_j \in C$ 的分区由实例 $\mathcal{I}$ 给定，因此分区会传播到同一列中的所有下输入顶点。由于最后一行构件的下边与最右列构件的右边相邻，分区还会进一步传播到每一行中的所有左输入顶点。因此，每个网格顶点 $q_{i,\ j}$ 的水平和垂直交叉处的分区均已确定，因而构件也随之确定：相同分区对应相等分区构件，对立分区对应对立分区构件。

还需证明所得图是一个有效的 3-分区 1-in-3-SAT 实例。在每个交叉构件中，除输出顶点外，每个变量都恰好出现在三个分别属于不同分区的子句中。右侧（上方）输出顶点恰好缺少左侧（下方）输入顶点所属的分区。此外，每个变量 $x_i \in X$ 都与用于替换$q_{3i-2,\ 1}$、 $q_{3i-1,\ 1}$ 和 $q_{3i,\ 1}$的构件的左侧输入顶点相邻。根据前述传播论证，并且由于 $\mathcal{I}$ 是一个 3-分区 1-in-3-SAT 实例，$q_{3i-2,\ 1}$、 $q_{3i-1,\ 1}$ 和 $q_{3i,\ 1}$ 属于不同的分区。类似地，每个子句顶点 $c_j \in C$ 恰好与三个输出顶点相邻，即分别是用于替换 $q_{1,\ 3j-2}$、$q_{1,\ 3j-1}$ 和 $q_{1,\ 3j}$的构件的上方输出顶点，并且这些输出顶点各自恰好缺少 c_j所属的分区。最后，条件 $|\{i \in \{1,\ldots,k\} \mid \exists c \in P_i\colon\ \{x, x'\} \subseteq c\}| < k$ 成立：对应于不同构件中变量顶点的两个变量，或一个原始变量与一个构件变量，至多共享一个子句，即与它们之间的连接边关联的子句顶点；根据构造，该性质在单个构件中也成立。

由此可得，最终得到的图对应于一个有效的 3-分区 1-in-3-SAT 实例。

□

由于我们的目标是从一个 3-分区 1-in-3-SAT 实例构造一个 3-连通实例，因此我们证明一个一般性的替换引理。受 Hasan、Mondal 和 Rahman [HMR22 的启发， 1],该引理保证用构件替换网格顶点后仍保持 3-连通性。为证明 3-连通性，我们使用 3-连通性的两种等价定义。具有至少$k+1$ 个顶点的图 G，若删除任意 $k-1$ 个顶点后仍保持连通，则称为 3-连通图。根据门格尔定理，这等价于任意两个不同的 G顶点之间存在 k 内部顶点不相交路径。

引理 6.3。 设 G 是一个 *3*-连通图，且顶点 r 的度为三或四，其中 $w_1, \ldots, w_3$和 w_4分别是 r的邻点。设 $H = (V^H, E^H)$ 是一个 *2*-连通图，具有指定子集 $D \subseteq V^H$，其中包含 $3 \leq |D| \leq 4$，并且对于每个 $z \in V^H \setminus D$，都存在三条从 z 到三个不同顶点 $d_1, d_2, d_3 \in D$的内部顶点不相交路径。设 $G' = (V^{G'}, E^{G'})$ 是通过用 H 替换 r，并将 $w_1, \ldots, w_4$ 连接到 D 中的顶点而得到的图，使得D 中的每个顶点恰好获得一条新边。则 G' 是 *3*-连通的。

证明。 反设 G' 不是 3-连通的。因此， $V^{G'}$ 中存在顶点 u 和 v，它们之间不存在三条内部顶点不相交路径。由于 G 是 3-连通的，因此其中至少有一个必须属于 V^H。如果其中恰有一个包含在 V^H 中，则会产生矛盾，因为对于每个 $z \in V^H$，都存在从 z 到 d_1、 d_2、 $d_3 \in D$ 的三条内部顶点不相交路径，并且 D 中的每个顶点都与 G 相连，而 G 是 3-连通的。因此，假设 u 和 v 都在 V^H 中，于是必然存在 V^H 中的两个顶点 x 和 y，使得 $G' \setminus \{x, y\}$ 分解为至少两个连通

分量。假设 u 和 v 都在 $V^H \setminus D$ 中，并且位于不同的连通分量中。直观地说， D 中的顶点表示通往 G 的“出口”，因此，如果 u、v 中至少有一个位于 D 中，那么我们就有 G' 是 3-连通的。将相应分量对 H 的限制分别称为 H_u 和 H_v （图11中的矩形）。

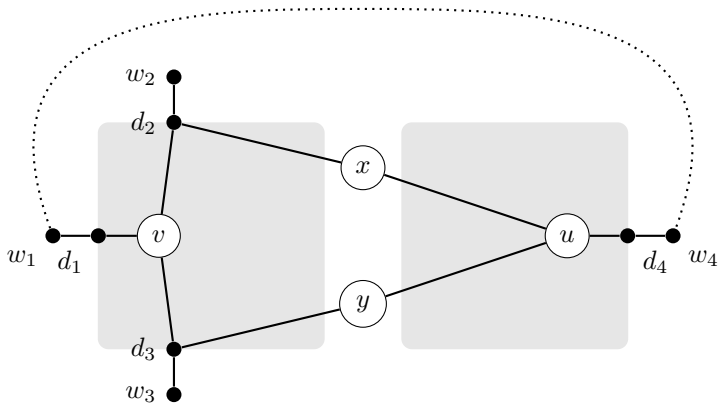


图11：经过 H 的路径示例。两个灰色形状表示两个连通分量 H_u 和 H_v，虚线路径将 w_1 与 w_4 在 G 中连接起来

由于我们假设对于每个 $z \in V^H \setminus D$，都存在三条从 z 出发、内部顶点不相交且分别通向三个不同 d_1 的路径，而 d_2 和 $d_3 \in D$ 被两个顶点 H_u 和 H_v 分隔，因此 x 中的每个连通分量都至少包含 y 的一个元素。因此，存在一条从 H 到某个 D 的路径，该路径避开 v 和 $d \in D$；类似地，也存在一条从 x 到 y 的路径，该路径不与 u 和 $d' \in D$ 相交。不失一般性，假设 x 与 y 连通，且 d 与 w_1 连通。由于 d' 是 3-连通的，因此在 w_2 中存在一条从 G 到 w_1 的路径。将这些路径首尾相接，得到路径 (w_2 , $G \setminus \{r\}$,$v, \ldots, d, w_1, w_2$)，它连接各分量，并避开顶点 d' 和 u。这与 x 分隔 y 和 $\{x, y\}$ 的假设矛盾。因此，不存在大小至多为二的顶点割，故 u 是 3-连通的。

□

令 $G_{\text{plan}}(X,\ C,\ P)$ 表示通过用两种交叉构件之一替换图中的每个交叉点所得到的图。为此，我们希望确保交叉构件总能以这样的方式放置：使输入边连接到正确的外部顶点。特别是，所得图必须相对于变量顶点和子句顶点保持二部性，并且每个变量都必须出现在来自所有分区的子句中。

对于网格顶点，我们已在引理6.2中证明了类似的结果。由于交叉点不在网格上，为了便于阅读，我们将所有边的方向设为从变量顶点指向子句顶点。此外，我们根据交叉点通过边连接的方式为其编号。直观地说，一条边上的交叉点可以看作串在线上的珍珠；当线被拉直时，它们便会排成一列。

引理 6.4。 交叉点处交叉构件的选择是唯一的，并且 G_{plan}（X, C, P） 是一个平面 *3* 分区 *1-in-3-SAT* 实例的关联图。

证明。根据 引理6.2，我们可以假设所有网格顶点都被替换为交叉构件，使得 t
所得到的 图是一个 3-分区 1-in-3-SAT 实例的关联图。

首先，我们对交叉点进行归纳标记。若某个交叉点与$q_{i,3n}$相邻，则将其标记为 cross$_{i,\ 1}$。其余每个交叉点，若通过一条不含其他交叉点的边段与交叉点 cross$_{i,j}$ 相连，则标记为 cross$_{i,j+1}$。因此，所有交叉点都获得唯一标记，并由此在网格图的扩展中分配到一行和一列。

接下来，我们用交叉构件替换所有交叉点。我们从顶部交叉点 cross^{1,1} 开始。它的上方输入顶点与子句 c_n 相连，左侧输入顶点则与替换网格顶点 $q_{3n,\ 1}$的构件中的一个子句相连。由于输入顶点处两个子句的划分均已固定，因此只有一种交叉构件可以替换交叉点 cross^{1,1}。随后，我们逐步替换所有交叉点 cross$_{i,\ 1}$，直到 $i \in \{1, \ldots, 3n\}$。此外，我们用与替换 cross$_{i-1,\ j}$ 相同类型的交叉构件，替换所有剩余的交叉点 cross$_{i,\ j}$，直到 $i \geq 2$。每一步的选择都是唯一的，因为两个输入顶点处的划分决定了所需的交叉构件是用于相同输入划分的，还是用于相反输入划分的。因此，替换所有交叉点的交叉构件方案是唯一的。

□

请注意，用一个顶点替换交叉点不一定能保持 3-连通性，因为此前两条互不相交的路径可能会在新顶点处相交。因此，我们将证明，用交叉构件替换交叉点能够保持这样一项性质：任意两个位于该构件之外的顶点之间，都存在三条内部顶点不相交路径。

引理 6.5。 图 $G_{plan}(\mathcal{I})$ 是 *3*-连通的。

证明。 根据引理 6.1， $G_{\text{grid}}(\mathcal{I})$ 是 3-连通的。令 G 为将 $G_{\text{grid}}(\mathcal{I})$ 中的所有网格顶点替换为交叉构件后得到的图。由于图 6 和图 7 所示的两个交叉构件满足引理 6.3 的要求， G 是 3-连通的。然而， G 不一定是平面图。我们证明，将所有交叉点替换为交叉构件后， G 仍然是 3-连通的。根据引理 6.4，交叉点的替换是定义良好的。

设 u 和 v 是 G 的两个顶点，并考虑它们之间三条内部顶点不相交路径。如果三条路径都没有涉及交叉，那么用交叉构件替换交叉点不会破坏它们内部顶点不相交的性质。因此，我们可以假设这些路径存在交叉。此外，我们假设恰好有两条路径在一个交叉点处相交，因为可以轻易地修改三条路径在同一点相交的图形，使得每个交叉点处只有两条路径相交。

我们需要说明：如果从 u 到 v 的两条内部顶点不相交路径发生交叉，那么用交叉器件替换交叉点后，从 u 到 v 仍存在三条内部顶点不相交路径。为此，我们通过论证交叉器件中存在内部顶点不相交路径来证明。具体而言，我们固定该构件的方向：令 d_1、 d_2、 d_3 和 d_4 分别表示构件的顶、左、底、右顶点集 D 中的顶点。由于两个交叉构件都画在网格上，且 D 的每一侧各有一个顶点，因此这种指定是明确的。

当我们替换两条路径 p_1 和 p_2 的一个交叉点时，假设 p_1 是经过 d_1 和 d_3 的路径，而 p_2 是经过 d_2 和 d_4 的路径。每个交叉器件的外边界都是一个唯一环，包含 D 的所有顶点。因此，对于所有 $i \in \{1,2,3\}$，都存在连接 d_i 和 d_{i+1} 的内部顶点不相交路径。由于 p_1 和 p_2 都通向 v，我们得到两条新路径：第一条沿着 p_1 从 u 到 d_1，继续到 d_4，然后沿着 p_2 前进。第二条沿着 p_2 从 u 到 d_2，继续到 d_3，然后沿着 p_1 前进（见图 12）。对所有交叉点归纳地应用这一构造，即可在 G_{plan}（$\mathcal{I}$）中得到从 u 到 v 的三条内部顶点不相交路径。

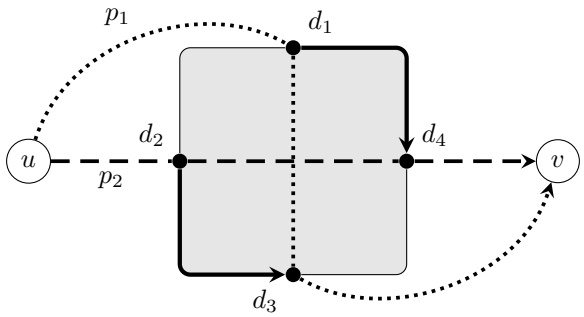


图 12：通过交叉器件（灰色图形）连接 u和 v 的两条替代路径

□

由于 G_{plan}（$\mathcal{I}$）是 3-连通的，因此可归约到平面 3-连通 3-分区 1-in-3-SAT。

定理 6.6。 存在一种从 *3*-分区 *1-in-3-SAT* 到平面 *3*-连通 *3*-分区 *1-in-3-SAT* 的保解数多项式时间归约。

证明。 取一个 3-分区 1-in-3-SAT 实例 $\mathcal{I} = (X, C, P)$，并令 $\mathcal{I}'$ 为与图 $G_{\text{plan}}(X, C, P)$ 相关联的实例。根据定理4.3中的归约， $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}'$ 的 1-in-3 满足赋值数量相同。结合前述引理 6.5，并且由于 $G_{\text{plan}}(X, C, P)$ 按构造是平面的，我们得到了从 3-分区 1-in-3-SAT 到平面 3-连通 3-分区 1-in-3-SAT 的归约。该归约在多项式时间内运行，因为其中有 $\mathcal{O}(n^2)$ 个网格顶点、至多 $\binom{3n}{2}$ 个交叉点，且所有构件的大小均为常数。 □

此外，我们还可以构造 3-连通线性公式（代价是失去平面性），因为定理 5.5 中的归约保持 3-连通性。$\mathcal{I}'''$ 的 Sat 图由 $G(\mathcal{I})$ 的三个副本以及 $P'''_{k+1} \cup P'''_{k+2}$ 的 $2n$ 个子句顶点组成，每个子句顶点都与每个副本中的一个变量顶点相邻。如果 $G(\mathcal{I})$ 是 3-连通的，那么删除至多两个顶点后，每个副本仍保持连通；并且由于每个顶点至多与其中两个 $2n \geq 6$ 子句顶点相同或相邻，其中一个子句顶点会保留其全部三个邻点并连接这些副本，而其他未被删除的子句顶点则至少保留一个邻点。

推论 6.7. *带有 $k \geq 3$ 的线性 3-连通 k-分区 1-in-3-SAT 是 NP-完全的，其计数变体是 #P-完全的。*

既然平面 3 分区 1-in-3-SAT 和线性 3 分区 1-in-3-SAT 都是 NP-完全的，一个自然的问题是：如果同时要求平面性和线性性，困难性是否依然存在，例如对于平面线性 3-连通 3 分区 1-in-3-SAT？答案是否定的，而且有力得多：这样的实例并不存在（推论 6.9），因此该问题是平凡的。由此可见，并非结构性质的所有组合都可能实现。

回顾一下，图的 围长是图中最短环的长度。Hudák 和 Madaras [HM09] 利用欧拉多面体公式证明，每个最小度至少为 3 的平面图的围长至多为 5。对于平均度至少为 3 的平面图，围长上界同样成立。由于二部图的围长为偶数，且 Sat 图是二分图，因此可以从一般平面图的这一上界推出以下观察。

观察 6.8. *每个平均顶点度至少为 3 的简单平面二分图，其围长 4.*

因此，对于 Sat 公式，平面性与线性性之间存在权衡：

推论 6.9. *不存在这样的平面 1-in-3-Sat 线性实例，其中每个变量至少出现三次。*

证明。 取一个平面 1-in-3-Sat 实例，其中每个变量至少出现三次。根据观察 6.8，最短环的长度为四。但如果一个环的长度为四，则子句共享两个变量，因此该实例不可能是线性的。 □

这引出了一个问题：对于 $k \neq 3$，3-连通性和平面性是否能够兼得？

7 当 $k > 3$ 时的平面 k-分区 1-in-3-SAT

我们首先研究平面 3-连通 4-分区 1-in-3-SAT。这个问题既有是实例，也有否实例。图 13 展示了一个否实例。

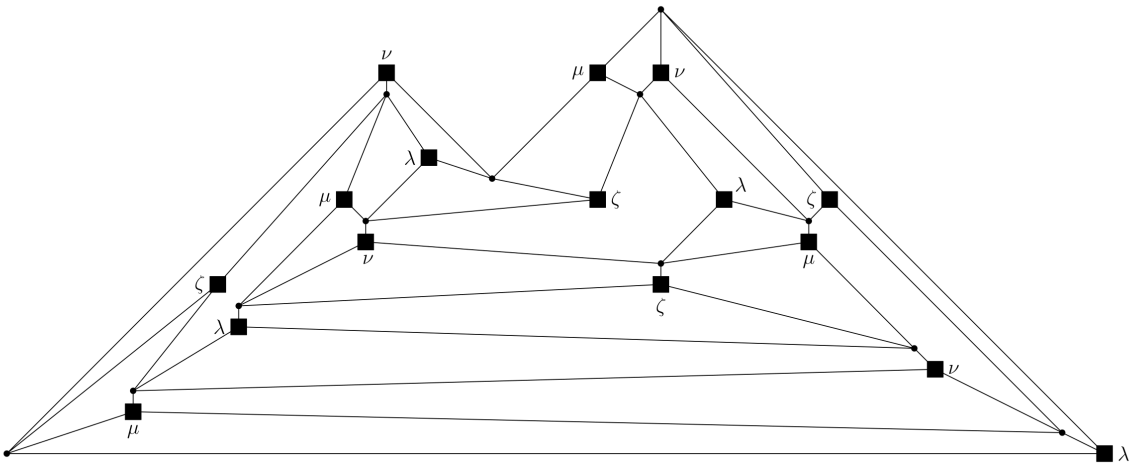


图 13：平面 3-连通 4-分区 1-in-3-SAT 的一个否实例

尽管如此，平面 4-分区 1-in-3-SAT 中有一大类实例总是可满足的，即每个面的长度都能被 4 整除的实例。为此，我们首先通过双重计数论证证明，4-分区实例的连通 Sat 图是 2-连通的。

引理 7.1。 每个 *4*-分区 *1-in-3-SAT* 实例的 *Sat* 图都是 *2*-连通的。

证明。 设 $\mathcal{I}=(X,\ C,\ P)$ 是一个 4-分区 1-in-3-SAT 实例，其划分为 $P=\langle P_1,\ \ldots,\ P_4\rangle$，并设 G 是相应的（连通）Sat 图。设 v 是 G 的一个顶点， K 是 $G\setminus v$ 的一个分量，并令 $r=|X\cap K|$ 表示 K 中变量顶点的数量。由于 G 连通， K 中包含 v 的一个邻点。此外， K 中顶点的每个邻点（ v 除外）都位于 K 中。下面两种情况中，我们都用两种方式计算 $X\cap K$ 与 $P_i\cap K$ 之间的边数。

情形 *1*： v 是一个变量顶点。令 $\varepsilon_i\in\{0,1\}$ 表示 v 在 P_i 中的邻点是否属于 K。 K 的每个变量在 K中都有四个邻点，其中恰有一个位于 P_i中。 $P_i\cap K$ 的每个子句在 K中都有三个邻点，但 v 在 P_i 中的邻点（若其位于 K中）只有两个。因此，$r=3|P_i\cap K|-\varepsilon_i$，所以对于每个 i， $\varepsilon_i\equiv -r$（模 3）。结合 $\varepsilon_i\in\{0,1\}$，我们得出所有 ε_i 都相等；又由于 K 包含 v的一个邻点，它们都等于 1。因此， $G\setminus v$ 的每个分量都包含 v 的全部四个邻点，所以 $G\setminus v$ 是连通的。

情形 *2*： $v\in P_j$ 是一个子句顶点。设 d 为 v 在 K中的邻点数，则 $1\le d\le 3$。对于 $i\neq j$， K 中的每个变量在 P_i 中都有一个邻点位于 K，而 $P_i\cap K$ 中的每个子句的三个邻点都位于 K。因此，对于 $i\neq j$， $r=3|P_i\cap K|$ 。在 P_j中，恰有 K 中的 d 个变量以 v 为邻点，由此得到 $r-d=3|P_j\cap K|$。因此， $3\mid d$，所以 $d=3$。与情形 1 一样，可知 $G\setminus v$ 是连通的。 □

以下命题表明，这些实例是平凡的。其证明给出了一种线性时间算法。

命题 7.2。 设 $\mathcal{I}=(X,C,P)$ 是一个平面 *4*-分区 *1-in-3-SAT* 实例，其可满足性图具有一个平面嵌入，且每个面的长度都能被四整除。那么， $\mathcal{I}$ 是 *1-in-3*-可满足的，并且可以在线性时间内计算出 $\mathcal{I}$ 的一个满足赋值。

证明。 令 G 为 $\mathcal{I}$ 在该嵌入下的 Sat 图。由引理 7.1， G 是 2-连通的，因此每个面都由一个环围成。我们按如下方式构造图 C_G 。

1. 令 f_1、.....、f_d 为长度大于四的面，即长度至少为八的面（包括外面）。由于 G 是二部的，这些面长度均为偶数，且子句顶点和变量顶点交替出现。在每个面 $f_i\in\{f_1,\ldots,f_d\}$ 内，将边界 f_i 上彼此相邻的任意两个变量顶点连接起来，即连接边界 f_i 上仅隔着一个子句顶点的两个变量顶点，并在 f_i 内绘制这些边。由于 G 是 2-连通的，这些变量互不相同。因此，在每个 f_i 内，我们插入了一个环 Z_i ，其长度是 f_i 长度的一半，故至少为四。

2. 对于每个长度为四的面（由两个变量顶点和两个子句顶点组成），用一条边连接其中的两个变量顶点。现在考虑一个变量顶点 v。由于 v 在 G 中的度为四，它与四个面关联。令 ℓ 表示这些面中长度大于四的面的数量，则其余 $4-\ell$ 个面长度均为四。在每个长度大于四的面中， v 接入插入环的两条边。在每个长度为四的面中， v 接入一条边。因此，完成这一步后， v 的度为 $8+\ell$。

3. 对于每个插入的环 Z_i，我们在 f_i 内部添加一个新顶点 w_i ，并将它与 Z_i 的所有顶点相连。顶点 w_i 的度为 $|Z_i|=\mathsf{length}(f_i)/2$，这是偶数，因为 f_i 的长度可被四整除。每个变量顶点 v 在其所在的每个长度大于四的 ℓ 面上都增加一条边，因此 v 的度现在为 $8+2\ell$。

4. 删除所有子句顶点及其关联的边。由于每个变量在 $\mathcal{I}$ 中恰好出现四次，因此每个变量顶点恰好失去四条边，在所得图 C_G 中的度为 $4+2\ell$ 。因此， C_G 的每个顶点的度都是偶数。

第 4 步之后，每个子句顶点都被一个三角形包围：如果一个子句顶点包含在 G 中的三个长度为四的面内，这一点显而易见。如果子句顶点位于一个长度更大的面上，则由于这些面都具有增广环，它也被一个三角形包围。因此， C_G 是一个平面近三角剖分，可能含有平行边，其中每个顶点的度都是偶数，并且每个子句的三个变量围成一个面。这样的近三角剖分允许对其顶点进行 3-着色 [TW11], , 使得每个子句的三个变量颜色各不相同。因此，将一个颜色类中的变量设为 T，并将所有其他变量设为 F，即可得到一个 1-in-3 满足赋值。

图 C_G 可以在线性时间内构造，而具有偶数度的三角剖分的 3-着色也可以在线性时间内计算（Diks、Kowalik 和 Kurowski [DKK02], Tsai 和 West [TW11]）。因此，可以在线性时间内找到 $\mathcal{I}$ 的 1-in-3 满足赋值。 □

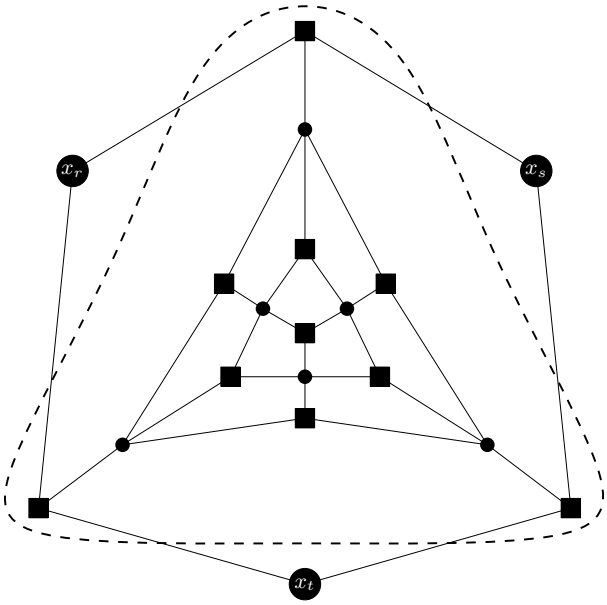


图14：3-to-4 构件。

由于 3-连通图必然是连通图，命题 7.2 是对 Hasan、Mondal 和 Rahman [HMR22] 所著论文中定理 4 的修正版。该定理声称，无需对面长度作出限制即可判定可满足性。图 13 中的实例表明，不能省略这一条件。

不限制面长度时，该问题将变得困难。本节余下部分将证明平面 4-分区 1-in-3-SAT 是 NP困难的。

该方法与我们用于证明平面性和线性性的方法类似（见第4节和第5节）。在那里，我们用具有相同连接数的构件替换单个子句顶点或变量顶点。而这里，构件的度高于其所替换的顶点。因此，必须同时替换实例中的所有顶点，才能得到有效的 SAT实例。回顾一下，构件的输入/输出顶点是度小于三的子句顶点和度小于四的变量顶点。为了描述一个构件如何连接到另一个构件，除了构件自身的输入/输出顶点外，我们还引入粘合顶点 。这些顶点与构件的顶点相邻，但不属于该构件，之后会与另一个构件的输入/输出顶点合并。

7.1 构件

我们提供 一种构件，确保每个变量恰好出现四次；此外还提供一些构件 t
确保 公式是 4-分区的。

3-to-4 构件 3到4构件（图14）由六个变量顶点和十个子句顶点组成。其粘合顶点为 x_r， x_s 和 x_t。该构件将相应公式中的变量出现次数从三次增加到四次。所得公式不是 4-分区的。

***C*-构件** *C*-构件（图15）由54个变量顶点 a_1、……、a_8、 b_1、b_2、 d_1、……、d_8、 e_1、e_2、f、 h、 k_1、……、k_4、 p_1、……、p_4、 q_1、……、q_4、 z_1、……、z_{16}、 o_1、……、o_4 以及72个子句顶点组成。其输出顶点为 a_1、 b_1、 d_1，顶点 g_1、 g_2 和 g_3 是其粘合顶点。该构件模拟一个子句顶点。

***X*-构件** *X*-构件（图16）由78个变量顶点 i_1、……、i_{20}、 b_1、……、b_{20}、 z_1、……、z_{32}、o_1、……、o_6 以及104个子句顶点组成。其输出顶点为 i_1、 i_2、 i_3、 i_4，顶点 l_1、……、l_4 是其粘合顶点。该构件模拟一个变量顶点。

在图15和图16中，每个输出顶点都位于外面，且沿顺时针方向紧接着其后的是对应的粘合顶点。显然，这些构件比之前的构件更大，但其性质可以用类似的方法证明。完整证明见附录。

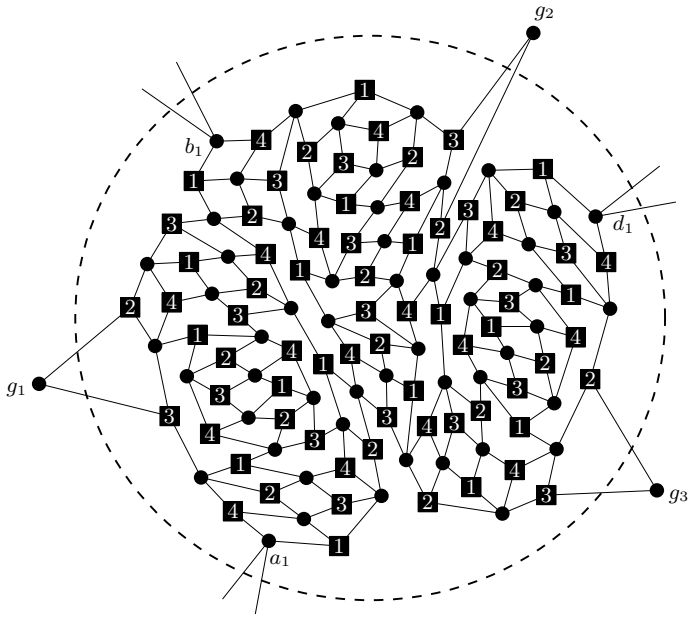


图15： C-构件。

命题 7.3. C-构件和 X-构件是*4*-分区的且为平面。此外，这类构件的输出顶点上的真值赋值 β 能够扩展为该构件的*1-in-3*满足赋值，当且仅当

(C) $\beta(u) = T$恰好对应一个 $u \in \{a_1, b_1, d_1\}$，对于 C-构件，*(X)* β 赋予 i_1, i_2, i_3, i_4 一个共同的值；对于 X-构件，将其粘合顶点作为额外变量，并且 $\beta(l_j) = \beta(i_j)$ $j \in \{1, \ldots, 4\}$。

在这两种情况下，扩展都是唯一的。

7.2 平面 4-分区 1-in-3-SAT 的保数归约

借助 3-to-4 构件，我们以牺牲分区性质为代价，增加变量出现次数。借助 X-构件和 C-构件，我们从一个平面 3-连通正 1-in-3-SAT-E4 实例构造出一个 4-分区实例。

命题 7.4。 存在一个从平面 *3*-连通 *3*-分区 *1-in-3-SAT* 到平面 *3*-连通正 *1-in-3-SAT-E4* 的保数归约。

证明。 取一个带有固定嵌入的 $\mathcal{I}$ 平面 3-连通 3-分区 1-in-3-SAT实例。这里，每个变量恰好出现三次。我们用 3-to-4 构件替换所有 $c = \{x_s, x_r, x_t\}$ 标记为 μ 的子句，并将该构件连接到变量 x_s、 x_r、 x_t。每个变量恰好连接到一个标记为 μ的分区，因此，用构件替换子句后，每个变量恰好出现四次。

我们注意到，当且仅当子句 $c = \{x_s, x_r, x_t\}$ 是 1-in-3- 可满足的时，该构件才是 1-in-3-可满足的。此外，如果将 $\{x_s, x_r, x_t\}$ 中的一个变量设为 T，则该赋值可唯一扩展为整个构件的赋值。3-连通性和平面性均得以保持。随后，替换标记为 μ 的子句，便得到从平面 3-连通 3-分区 1-in-3-SAT 到平面 3-连通正 1-in-3-SAT-E4 的保数归约。 □

取一个平面 3-连通正 1-in-3-SAT-E4 的实例 $\mathcal{I} = (X, C)$，并计算其 Sat 图 G 的平面嵌入。根据 Hopcroft 和 Tarjan [HT74] 的算法，这可在线性时间内完成。我们按如下方式构造一个平面 4-分区 1-in-3-SAT 的实例 $\mathcal{I}'$：

1. 对于每个子句 $c \in C$，取一个 C-构件，其输出顶点为 $a_{c,1}$、$b_{c,1}$、$d_{c,1}$（即 a_1、 b_1、 d_1 的副本），粘合顶点为 $g_{c,1}$、$g_{c,2}$ 和 $g_{c,3}$。

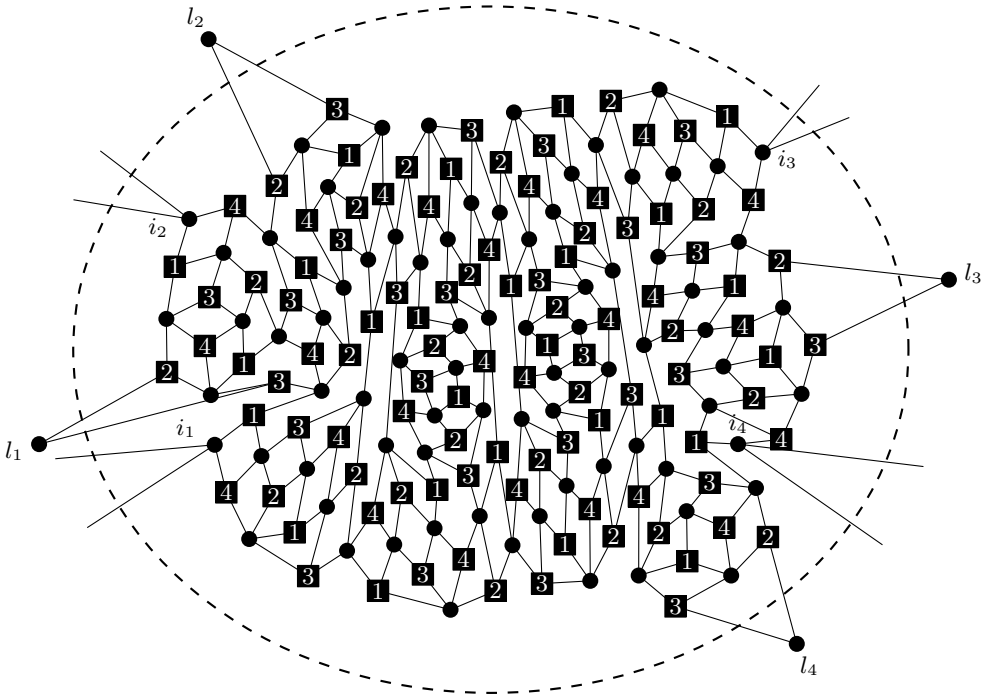


图16： X-构件。

2. 对于每个变量 $x \in X$，取一个 X-构件，其输出顶点为 i_x,1,i_x,2,i_x,3,i_x,4（即$i_1, \ldots, i_4$的副本），粘合顶点为 l_x,1, l_x,2, l_x,3 和 l_x,4。 3. 将每个子句顶点替换为一个 C-构件，并将每个变量顶点替换为一个 X-构件。 4. 对于 G 中的每条边 $\{c, x\}$，将 c 的 C-构件中的一个顶点 $g \in \{g_{c,1}, g_{c,2}, g_{c,3}\}$ 与替换变量 x 的 X- 构件中的粘合顶点 $i \in \{i_{x,1}, i_{x,2}, i_{x,3}, i_{x,4}\}$ 合并。然后，将顺时针方向紧邻 g 之前的输出顶点 $a \in \{a_{c,1}, b_{c,1}, d_{c,1}\}$ 与顺时针方向紧随 i 之后的粘合顶点 $l \in \{l_{x,1}, l_{x,2}, l_{x,3}, l_{x,4}\}$ 合并。

图17展示了对子句顶点 $c = \{x, y, z\}$ 和变量顶点 x， y和 z的替换。

定理 E4 **7.5.** 存在一个从平面*3*-连通正*1-in-3-SAT* 到平面*3*-连通*4*-分区 *1-in-3-SAT*的保数归约。

证明。 取构造出的实例 $\mathcal{I}'$。将每个粘合顶点替换为其输出顶点后，每个变量恰好出现在每个划分的一个子句中：一个输出顶点出现在 P_1 和 P_4 的子句中，而其输入顶点出现在 P_2 和 P_3中；每个其他变量原本就出现在每个划分的一个子句中。在图15和图16中，每个输出顶点在外面上都紧邻其粘合顶点；合并相应顶点即可得到平面嵌入。为证明 $\mathcal{I}'$ 是3-连通的，取 $\mathcal{I}'$的可满足性图中的两个顶点 u和 v 。所有构件都是2-连通的，并且存在三条内部顶点不相交的路径，分别通向相应构件的输出顶点和粘合顶点。根据引理 6.3 的证明，我们可以构造第三条路径，使其从 u 出发，通向相应构件的输出顶点和粘合顶点，再返回 v。如果这两个顶点位于不同的构件中，那么 $\mathcal{I}$ 的可满足性图中已有的三条路径也会在 $\mathcal{I}'$中诱导出三条路径。根据命题 7.3，该构造是一个保数归约；由于所有构件的规模都是常数，该构造可在多项式时间内完成。 □

除了困难性结果外，我们还证明，对于相应 Sat 图中长度为四的面的数量，若平面正 1-in-3-SAT 中每个变-量恰好出现四次，则该问题是固定参数可解的。关于固定参数可解性的介绍，请参阅 Niedermeier [Nie06]所著的书。为实现固定参数可解性，我们将图分解为若干子图，在每个子图中，真值赋值都可以轻易传播到所有变量顶点。我们考虑由长度为四的面和外面构成的子图，并将长度为四的面称为四边形。

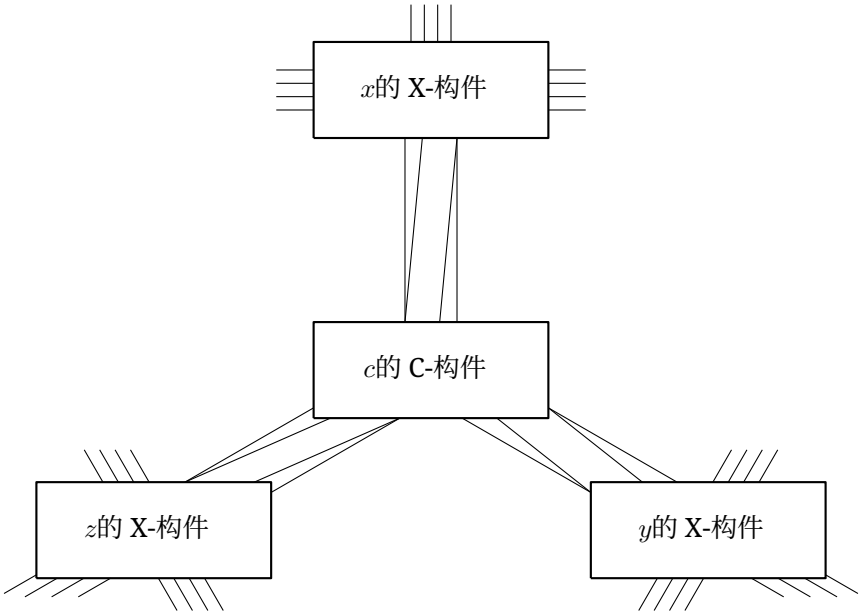


Figure 17：一个 4-分区实例的构造 tance。

设 G 是实例 $\mathcal{I} = (X,\ C)$的 Sat 图的平面嵌入，其中该实例属于平面正 1-in-3-SAT。我们将 G 分解为四边形分量 $K_1, \ldots,\ K_s$。如果两个四边形共用一条边，我们就称它们相邻。四边形分量是一个子图，它是由通过边邻接而连通的极大四边形集合族构成的；或者是一个只包含在非四边形面中的单个变量。特别地，与其他四边形均不共边的四边形自成一个分量。图 18 展示了一个包含许多四边形分量的示例。一个嵌入的四边形分量是唯一的。

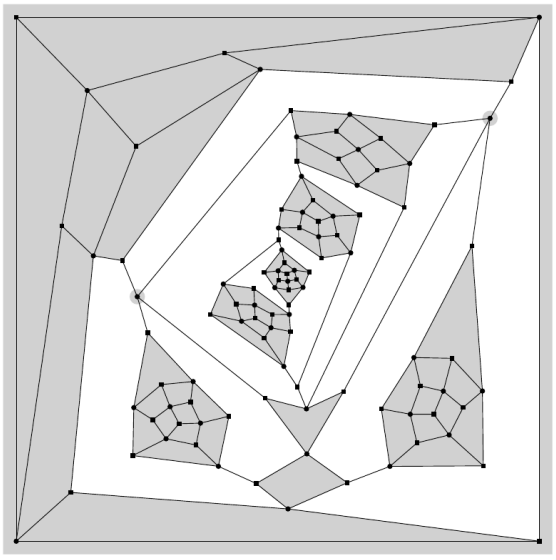


图 18：平面正 1-in-3-可满足性实例中的四边形分量（以灰色突出显示），其中每个变量恰好出现四次。

引理 7.6. 设 K 是一个四边形组件。那么， K 的变量至多有三种赋值可以扩展为一种对 K的所有子句都满足 *1-in-3* 的赋值，而 $\mathcal{I}$ 的每一种满足 *1-in-3* 的赋值限制到这些变量上后，都属于其中一种。如果固定 K 的一个变量的真值，这些赋值至多剩下两种；如果将该变量设为 T，则至多剩下一种。这至多三种赋值可以在线性于 K变量数的时间内计算出来。

算法 1 对分量赋值进行回溯

输入： 分量 K_1，……，K_s，来自 G，每个分量根据引理 7.6 至多有三个赋值
输出： F的 1-in-3 满足赋值，或“不可满足”

$K \leftarrow \{K_1\}$
选取 K_1的一个初始赋值
传播 K 的赋值，并将因此获得赋值的所有分量添加到 K
当存在冲突或存在未赋值变量**时**
    如果 存在冲突，**则**
        回溯　　如果不可能，则返回“不可满足”
    else
        选择一个 没有赋值的相邻分量 K_j （$\star$）
        如果 K_j 的赋值与 K 一致，**则**
            为 K_j 赋予这样的赋值
        else
            回溯　　如果不可能，则返回“不可满足”
        结束 if
    结束 if
    传播 K 的赋值，并将因此获得赋值的所有分量添加到 K
结束循环
返回 K的赋值

证明。 如果两个子句共享两个变量，那么对这两个变量的赋值会唯一地传播到两个子句中的其他变量。由于每个四边形都由两个共享两个变量的子句组成，真值便会从一个面传播到另一个面。因此，若 f 是一个四边形，并且存在一列四边形，从 f 到一个四边形 f'，其中相邻四边形彼此相邻，且 f' 的变量已被赋予真值，那么通过传播， f 中包含的所有变量也都具有确定的真值。一个子句至多有三个变量，因此其变量的真值赋值至多有三种可能；于是， K的所有变量至多有三种可能的赋值。如果 K 只包含一个变量，它就有两种赋值。否则， K 的每个变量 v 都是 K某个四边形中两个共享变量之一。在任何一种可能的赋值中，这两个变量至多有一个被设为 T，而它们的取值决定了整个子公式的赋值。因此，将 v 设为 T 后，子公式至多剩下一种可能的赋值；将 v 设为 F 后，则至多剩下两种。 $\mathcal{I}$ 的每一种满足 1-in-3 的赋值也必然满足 K的所有子句。因此，它限制到 K 的变量上的赋值可以扩展为这样一种赋值，并且属于上述至多三种赋值之一。由于子句数与变量数呈线性关系，所有这些赋值都可以在线性时间内计算出来。

□

根据欧拉公式，由于变量顶点的度更高会导致平均面长度更小，因此四边形在 4-分区 1-in-3-SAT 中的出现频率明显高于在 3-分区 1-in-3-SAT 中的出现频率。

定理 7.7。 设 $\mathcal{I} = (X, C)$ 是平面正 *1-in-3-SAT* 的一个实例，其中每个变量恰好出现四次，令 n 为其变量数，并固定其平面 *SAT* 图 G的一种嵌入。令 s 为该嵌入中 G的四边形分量数。则可在时间 $\mathcal{O}(2^s n)$内构造 $\mathcal{I}$ 的一个 *1-in-3* 满足赋值，或证明其不存在。特别地，该问题关于 s是固定参数可解的。

证明。 在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内构造 $\mathcal{O}$中的四边形分量 $K_1, \ldots, K_s$。根据引理 7.6，每个分量至多有三个赋值可以扩展为其子句的 1-in-3 满足赋值。这些赋值包括 $\mathcal{I}$的每个 1-in-3 满足赋值在该分量上的限制，并且都可以在线性时间内计算得出。

我们使用算法 1 中给出的回溯过程，从各分量的部分赋值集合中，为 $\mathcal{I}$ 计算一个 1-in-3 满足赋值。我们遍历四边形分量。当传播停止时，选择一个新的分量 K_j，使得 K_j 与 K 共享一个变量， K_j 的某个子句包含 K 中的一个变量，或者 K_j 包含一个未赋值变量，或其子句包含一个未赋值变量；该变量属于这样一个子句：其中一个变量被赋值为 F，另外两个变量尚未赋值（$\star$）。由于 G 是连通的，这样的分量总是存在。优先选择与 K 的赋值相容的赋值至多只有一个的分量。

该算法是穷尽式的。每当发生冲突或不存在相容赋值时，回溯都会返回到最近的、仍有未尝试选项的选择点，并继续尝试下一个选项。因此，

每一种分量赋值组合要么会被探索，要么会因其扩展了一个已经包含冲突的部分赋值而被舍弃。因此，仅当不存在一致的分量赋值组合时，该算法才会返回“不可满足”。

运行时间取决于搜索树的深度和分支因子。在搜索树的每个节点中，至少有一个四边形分量的变量被赋值，因此搜索树的深度至多为 s。确定四边形分量 K_j 中一个变量的真值后， K_j至多剩下两种赋值；如果该变量被设为 T，则至多剩下一种赋值。根据（$\star$），我们要么选择一个与 K共享变量的新分量 K_j，要么选择一个其子句包含 K中某个变量的分量，要么选择一个包含某个子句的分量，且该子句包含一个子句中的未赋值变量，其中一个变量被设为F，另外两个变量未赋值。在第一种情况下， K_j 包含一个已赋值变量，因此至多产生两个分支。在第二种情况下， K_j的一个子句 $\{a,b,p\}$ 包含一个已赋值变量 p，其中 a、b位于 K_j 中。若 p 被设为 T，则 a 和 b 均为 F；否则其中恰有一个被设为 T。由于a 和 b 决定了 K_j的赋值，因此这里同样至多产生两个分支。在第三种情况下， K_j包含 y，或包含一个子句 $\{a,b,y\}$，其中 a、b位于 K_j中；对于某个子句 $\{x,y,z\}$， x 被设为 F。在后一种情况下，当且仅当 a 和 b 为 F时，y 才被设为 T，因此至多有一种 K_j 的赋值会将 y 设为 T，至多有两种赋值会将其设为 F。对 z 及其分量同样成立。如果 K_j 还包含 z 或包含 z的子句，则至多有一个分支将 y 设为 T，且至多有一个分支将 z 设为 T。 y 和 z 这两个变量顶点也可能位于不同的四边形分量中。在这种情况下， K_j 至多有一种赋值会将 y 设为 T，随后 z 被设为 F，这使得 z所在分量至多有两种赋值。 K_j 至多有两种赋值会将y设为 F，随后 z被设为 T，这使得剩余赋值至多有一种。因此，两个分量合计贡献的因子至多为四。由此，搜索树至多有 $3\cdot 2^{s-1}$ 个叶节点。我们得出结论：该算法会终止，其最坏情况下的运行时间为 $\mathcal{O}(3\cdot 2^{s-1}n) = \mathcal{O}(2^s n)$。

□

请注意，含有许多四边形分量的实例相对少见，而且实例的树宽可能很高，但四边形分量的数量却很少。

总体而言，我们发现，随着 k 增大， k-划分的 1-in-3-SAT 中此类实例的数量会减少。这一点反映在下面基于计数论证得出的不可能性结果中。

定理 7.8. *所有平面 5-分割 1-in-3-SAT 实例均不可满足。*

证明. 取一个 $\mathcal{I}=(X,C,P)$ ∈平面 5-分割 1-in-3-SAT 实例，并令 $G=(V,E)$ 为其 SAT 图。首先注意，每条边都连接一个子句顶点和一个变量顶点，因此 $|E| = 5|X| = 3|C|$，从而$|C| = \frac{5}{3}|X|$。根据欧拉公式，

$$|F| = 2 - |V| + |E| = 2 - \frac{8}{3}|X| + 5|X| = 2 + \frac{7}{3}|X|.$$

由于 G 是二部的，每个面都有偶数条边。对所有面的长度求和会将每条边计数两次，因此

$$\sum_{k\geq 2} 2k\,|F_{2k}| = 2|E| = 10|X| \qquad \text{and} \qquad \sum_{k\geq 2} |F_{2k}| = |F| = 2 + \frac{7}{3}|X|.$$

由此可得

$$\sum_{k\geq 3} (k-2)\,|F_{2k}| \;=\; \frac{|X|}{3} - 4.$$

反设该实例可满足，并令 X^1 和 X^0 分别为被赋值为 T和 F的变量集。每个子句恰好包含一个被赋值为 T的变量，因此 $5|X^1|$等于子句数，即 $\frac{5}{3}n$。所以 $|X^0| = \frac{2}{3}n$。

对于 $t\in X^1$ 和 $w\in X^0$，令 $a(t,w)$ 表示同时包含 t 和 w的子句数。包含 w的五个子句中，每个都恰好包含一个被赋值为 T的变量，因此 $\sum_{t\in X^1} a(t,w) = 5$为奇数。因此，满足 $O \geq |X^0| = \frac{2}{3}n$的 O个数，即使 $a(t,w)$ 为奇数的有序对 (t,w) 的数量。

固定 $t\in X^1$，并设 $c_1,\ldots,c_5$ 为包含 t 的子句，这些子句按照嵌入中的顺时针顺序环绕 t 标记。包含 c_i 和 c_{i+1} 之间、位于 t 处的顶点的面，还包含关联顶点 $\ldots, y_i, c_i, t, c_{i+1}, z_{i+1}, \ldots$。对每个 i，设 y_i 为在 c_i 和 c_{i+1} 之间、位于 t 处的角所对应面的边界上紧邻 c_i 之前的顶点， z_{i+1} 为紧邻 c_{i+1}之后的顶点。那么， y_i 和 z_i 是 c_i 中除 t之外的两个变量，因此 $c_i = \{t, y_i, z_i\}$。于是， $a(t,w)$ 表示 w 在这五对 (y_i, z_{i+1}) 中出现的次数。如果该面是四边形，那么 $y_i = z_{i+1}$，且这一对不会影响 $a(t,w)$ 的奇偶性。因此，每个包含 t 且长度至少为六的面，至多会使 $a(t,w)$ 的两个值成为奇数。所以， O 至多是此类面中取值为 T 的变量处角数的两倍。

面边界上任意两个连续变量都不相同，且属于同一个子句，因此它们不会同时取值为 T。所以，长度为 $2k$ 的面至多有 $\lfloor k/2 \rfloor \leq k-2$ 个位于取值为 T 的变量处的角，其中 $k \geq 3$。结合 $\sum_{k\geq 3}(k-2)$ $|F_{2k}| = \binom{|X|}{3} - 4$，可得矛盾：

$$\frac{2}{3}n \leq O \leq 2\sum_{k\geq 3}\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor |F_{2k}| \leq 2\sum_{k\geq 3}(k-2)\,|F_{2k}| = \frac{2}{3}n - 8,$$

□

该定理表明，在 $k=5$ 的情形下，平面性、连通性和 1-in-3 可满足性并不相容。由于每个 3-连通图都必然是连通的，而 5-分区子句集意味着某个变量出现五次，定理 7.8 推出，平面 3-连通 5-分区 1-in-3-SAT 不存在是实例。

这说明了从平面 3-连通 4-分区 1-in-3-SAT 到平面 3-连通 5-分区 1-in-3-SAT 的复杂度跃迁：后者可以在常数时间内判定。此外，对于 $k>5$，平面 3-连通 k-分区 1-in-3-SAT 的复杂性是平凡的：

观察 7.9。对于 $k>5$，不存在平面 k-分区 *1-in-3-SAT* 的实例。

证明。一个 3-连通 k-划分 1-in-3-SAT 实例的 SAT 图的平均度为 $\frac{6k}{k+3}$，对于 $k \geq 6$，该值至少为 4。然而，每个 SAT 图都是二分图，根据欧拉公式，平面二分图的平均度严格小于 4。因此，对于 $k>5$，平面 3-连通 k-划分 1-in-3-SAT 既没有是实例，也没有否实例。

□

8 一种将 k 维匹配与 k 元素集的精确覆盖联系起来的方法

我们的主要结果依赖于证明 k-划分 1-in-3-SAT 各种变体的困难性。这些结果与 k 元素集的精确覆盖和 k 维匹配问题有着自然的联系。

k 维匹配（kDM-E3）	
输入：	非空且两两不相交的集合 $U_1, U_2, \ldots, U_k$ 以及一个由 k 元组组成的集合族 $T_U \subseteq U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k$
问题：	使得 $U := \bigcup_{i=}^{k}{}_1 U_i$ 中的每个元素恰好出现在 T_U 中的三个 k-元组中，并且没有 $u \in U_i$ 和 $u' \in U_j$（含有 $i \neq j$）恰好出现在相同的三个 k-元组中。 是否存在一个子集 $M \subseteq T_U$，满足 $\lvert M\rvert = \lvert U_1\rvert$，使得 M 中任意两个不同的元组都不在任何坐标上相同?

我们将这样的子集 $M \subseteq T_U$ 称为 $|M| = |U_1|$，使得 M 中的任意两个不同元组在任何坐标上都不相同，这称为完美匹配。是否存在完美匹配的问题，是关于三次 k-一致强 k-可着色超图的完美匹配问题（见 Hazan、Safra 和 Schwartz [HSS03]），并附加如下要求：不同类中的任意两个元素不能恰好属于相同的三个元组。由于这一要求只限制了实例，因此下面的所有困难性结果同样适用于不受限制的问题。下文中，我们将使用匹配问题和可满足性问题的图表示，并通过下标区分这两类图，记为 G_{SAT} 和 G_{MAT}。

令 $G_{\mathrm{MAT}}(U_1, \ldots\ldots, U_k, T_U)$ 表示具有顶点 $\bigcup_{i=1}^{k} U_i \cup T_U$ 和边的二部关联图

$$\{\{u,t\} \mid u \in U,\, t \in T_U,\, \text{and } u \in t\}.$$

与 Sat 图类似，我们称 $\mathcal{I}_{\mathrm{MAT}} = (U_1, \ldots\ldots, U_k, T_U)$ 这一 kDM-E3 实例是平面的，当且仅当 $G_{\mathrm{MAT}}(U_1, \ldots\ldots, U_k, T_U)$ 是平面的。若 $\mathcal{I}_{\mathrm{MAT}}$ 是 kDM 的一个实例，且任意两个元组的公共元素不超过一个，即对于每一对不同的 k-元组 t, $t' \in T_U$，都有 $d_H(t, t') \geq k-1$，则称该实例是线性的；其中 d_H 是汉明距离，用来计算两个元组不同的位置数。

此外，对于 k-Partitioned 1-in-3-SAT 的一个实例 $\mathcal{I}=(X,C,P)$，定义映射 φ：$X\to\times_{i=1}^{k}P_i$，使得 $\varphi(x)=(c_x,1,c_x,2,\ldots,c_x,k)$，其中 c_x,i 是 P_i 中包含 x 的唯一子句；该子句存在且唯一，因为 P_i 是 X 的一个划分。也就是说，φ 将变量 $x\in X$ 映射为一个 k-元组，该元组表示分区 $P_1,P_2,\ldots,P_k$ 中包含 x 的子句。此外，φ 是单射：任意两个不同的变量 x 和 x' 不会在每个分区中都共享一个子句，因此 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x')$ 至少在一个坐标上不同。因此，给定 φ 像中的一个元组，只有一个变量包含在该元组中的所有子句内。

此外，如果我们将实例 $\mathcal{I}_{\mathrm{MAT}}=(U_1,\ .....,\ U_k,\ T_U)$ 与给定的 k-划分 1-in-3-SAT 实例 $\mathcal{I}_{\mathrm{SAT}}$ 关联起来（定义如下），那么所得结果确实满足 kDM-E3 的要求，因此是一个有效实例。根据定义，对于每个 $x\in X$，$\varphi(x)\in P_1\times\cdots\times P_k=U_1\times\cdots\times U_k$。当且仅当 $x\in c$ 时，子句 $c\in P_i$ 是 $\varphi(x)$ 的第 i 个坐标。由于 c 恰好包含三个变量，且 φ 是单射，因此 c 恰好出现在三个不同的 k 元组中。此外，请注意，如果两个子句 $c\in P_i$ 和 $c'\in P_j$（其中 $i\neq j$）恰好出现在相同的三个元组中，那么 $\{\varphi(x)\mid x\in c\}=\{\varphi(x)\mid x\in c'\}$，而 φ 的单射性将意味着 $c=c'$，这与 P_i 和 P_j 不相交相矛盾。

定义 8.1. 设 $k\geq 2$。令 $\mathcal{I}_{\mathrm{SAT}}=(X,C,P)$ 为一个 k-分区 1-in-3-SAT 实例。我们将与 $\mathcal{I}_{\mathrm{SAT}}$ 相关联的 kDM-E3 实例 $\mathcal{I}_{\mathrm{MAT}}=(U_1,\ldots,U_k,T_U)$ 定义为：对于所有 i 和 $T_U=\{\varphi(x)\mid x\in X\}$，由 $U_i=P_i$ 给出。反过来，设 $\mathcal{I}'_{\mathrm{MAT}}=(U_1,\ldots,U_k,T_U)$ 为一个 kDM-E3 实例。我们将与 $\mathcal{I}'_{\mathrm{MAT}}$ 相关联的 k-分区 1-in-3-SAT 实例 $\mathcal{I}'_{SAT}=(X,C,P)$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
&X=\{x_t\mid t\in T_U\},\\
&P_i=\{\{x_t\mid t=(u_1,\ldots,u_k)\in T_U \text{ and } u_i=u\}\mid u\in U_i\}\quad \text{for each } i\in\{1,\ldots,k\},\\
&P=\langle P_1,P_2,\ldots,P_k\rangle,\ \text{and}\\
&C=\bigcup_{i=1}^{k}P_i.
\end{aligned}
$$

我们得到，与一个 $\mathcal{I}'_{\mathrm{MAT}}=(U_1,\ldots,U_k,T_U)$ 的 kDM-E3 实例相关联的 k-分区 1-in-3-SAT 实例 $\mathcal{I}'_{\mathrm{SAT}}$ 确实也是一个 k-分区 1-in-3-SAT 实例：根据定义，对于每个 $u\in U_i$，恰有三个元组 $t=(u_1,\ldots,u_k)\in T_U$ 满足 $u_i=u$，因此，C 中的每个子句都恰好包含三个变量。由于任意两个元组都不相等，我们有 $|\{i\in\{1,\ldots,k\}\mid\exists c\in P_i:\ \text{对于 }\mathcal{I}'_{\mathrm{SAT}},\ \{x,x'\}\subseteq c\}|<k$。此外，每个 P_i 都是 X 的一个分区，因为对于每个 $t=(u_1,\ldots,u_k)\in T_U$，$u_i=u$ 必须恰好针对一个 $u\in U_i$ 设为 T，因为 T_U 是基于 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_k$ 构成的。因此，每个变量 $x_t\in X$ 恰好属于 P_i 中的一个子句。分区 $P_1,\ldots,P_k$ 两两不相交：对于满足 $i\neq j$ 的 $u\in U_i$ 和 $u'\in U_j$，我们有 $\{x_t\mid t=(u_1,\ldots,u_k)\in T_U$ 和 $u_i=u\}=\{x_t\mid t=(u_1,\ldots,u_k)\in T_U$，且 $u_j=u'\}$ 当且仅当 u 和 u' 出现在完全相同的三个元组中，而 kDM-E3 的定义排除了这种情况。由此可知，$\mathcal{I}'_{\mathrm{SAT}}$ 是一个 k-分区 1-in-3-SAT 实例，并且我们建立了在 kDM-E3 实例与 k- 分区 1-in-3-SAT 实例之间双向转换的方法。两种转换都能在线性于输入规模的时间内计算，因此它们构成了两个方向上的多项式时间归约。

注意，对于一个称为 $\mathcal{I}_{\mathrm{MAT}}=(U_1,\ .....,\ U_k,\ T_U)$ 的 kDM-E3 实例、其对应的称为 $\mathcal{I}_{\mathrm{SAT}}=(X,\ C,\ P)$ 的 k-划分 1-in-3-SAT 实例，以及进一步与 $\mathcal{I}_{\mathrm{SAT}}$ 相关联的 kDM-E3 实例 $\mathcal{I}'_{\mathrm{MAT}}$，我们有：$\mathcal{I}'_{\mathrm{MAT}}$ 可以通过重命名 U 中的元素从 $\mathcal{I}_{\mathrm{MAT}}$ 得到。

我们可以研究相关联的 1-in-3-SAT 实例和匹配实例的满足赋值与完美匹配之间的关系。

命题 8.2。设 $\mathcal{I}_{SAT}=$（X、C、P）是一个 k-划分 *1-in-3-SAT* 实例。在对 C 中的每个子句进行 *1-in-3* 满足的 X 的真值赋值与和 $\mathcal{I}_{SAT}$ 相关联的 k 的实例 $\mathcal{I}_{MAT}=$（U_1，$.....$，U_k，T_U）的完美匹配之间，存在一一对应关系。

证明。令 β：$X\to\{T,F\}$ 为一个真值赋值。我们定义

$$M_\beta=\{\varphi(x)\mid x\in X \text{ and } \beta(x)=T\}.$$

回顾一下，当且仅当 $x\in c$ 时，子句 $c\in P_i$ 是 $\varphi(x)$ 的第 i 个坐标。因此，M_β 中包含 c 的元组，恰好是满足 $x\in c$ 且 $\beta(x)=T$ 的元组 $\varphi(x)$。如果 β 1-in-3 满足 C，那么每个子句 $c\in C$ 中恰有一个变量被设为 T，因此每个元素 $c\in U$ 恰好出现在 M_β 的一个元组中，而 M_β 是一个完美匹配。注意，完美匹配恰好就是kDM-E3 中所求的解：集合 $M\subseteq T_U$ 恰好覆盖 U 的每个元素一次，当且仅当 $|M|=|U_1|$，且 M 中任意两个不同的元组在任何坐标上都不相同；反向蕴含用到了 $|U_i|=|T_U|/3=|U_1|$

对所有 i 均成立。由于 $|\{i \in \{1,\dots,k\} \mid \exists c \in P_i\colon\ \{x,x'\} \subseteq c\}| < k$, φ 是单射，因此，对于所有以 1-in-3 满足 C 的真值赋值 $\beta \neq \beta'$，$M_\beta \neq M_{\beta'}$。

反过来，设 M 是 $\mathcal{I}_{\mathrm{MAT}}$的完美匹配。由于 $T_U = \{\varphi(x) \mid x \in X\}$，我们可以将$M = \{\varphi(x) \mid x \in X'\}$写成 $X' = \varphi^{-1}(M) \subseteq X$。设 $\gamma\colon X \to \{T,F\}$，其中当且仅当 $x \in X'$时，$\gamma(x) = T$。对于每个子句 $c \in C$，M 中包含 c 的元组恰好是满足 $x \in c \cap X'$的元组 $\varphi(x)$。由于M 是完美匹配，因此恰有一个这样的元组；又由于 φ是单射，c恰好包含一个满足 $\gamma(x) = T$的变量 x。因此，γ 1满足 C的 -in-3 条件，并且根据构造，$M_\gamma = M$。于是，

$$\Psi\colon \{\beta\colon X \to \{T,F\} \mid \beta \text{ 1满足 } C\} \to \{M \subseteq T_U \mid M\text{的 -in-3 条件，且是 } \mathcal{I}_{\mathrm{MAT}}\}\text{的完美匹配}$$

其中 $\Psi(\beta) = M_\beta$ 是 X 的真值赋值与实例 $\mathcal{I}_{\mathrm{MAT}}$ 中的完美匹配之间的双射映射，这些真值赋值使 C 满足 1-in-3-SAT kDM-E3。 □

将每个子句 $c \in C$ 映射到元素 $c \in U$，并将每个变量 $x \in X$ 映射到k-元组 $\varphi(x) \in T_U$，所得映射是 $G_{\mathrm{SAT}}(X,C,P)$与 $G_{\mathrm{MAT}}(U_1,\dots,U_k,T_U)$的顶点集之间的双射，因为 $U = C$ 到 φ 是单射，且像为 T_U。它保持边关系，因为当且仅当 c是 $\varphi(x)$的一个坐标时，$x \in c$ 成立。以类似方式处理逆方向，我们得到：对于 $\mathcal{I}_{\mathrm{SAT}} = (X,C,P) \in k$-Partitioned 1-in-3-SAT 和 $\mathcal{I}_{\mathrm{MAT}} = (U_1,\dots,U_k,T_U)$（即相应的 kDM-E3 实例），$G_{\mathrm{SAT}}(X,C,P)$ 与$G_{\mathrm{MAT}}(U_1,\dots,U_k,T_U)$ 同构。因此，平面性和线性性得以保持。

这一对应关系启发了本文。由于我们关于 k-划分 1-in-3-SAT 的困难性结果即使在额外的结构限制下仍然成立，因此可以利用这一对应关系，将结果直接从可满足性问题转移到 k维匹配问题。

推论 8.3 (定理 6.6)**.** *平面 3-连通 3DM-E3 是 NP-完全的，其计数变体为 #P-完全。*

计数问题为#P完全。

这回答了 Hasan、Mondal 和 Rahman [HMR22]提出的问题：“当每个变量出现在 3 个子句中时，平面 3-连通 1-in-3-SAT 是否仍然是 NP困难的？”由于我们的归约保持解的数量，解之间的双射可在多项式时间内计算，且正 1-in-3-SAT 是 ASP完全的 [BDD+20, 引理 2.1], 这也表明，平面 3DM 是 ASP完全的，其计数变体为 #P-完全，从而回答了 Bosboom、Demaine、Hesterberg、Kimball 和 Kopinsky [BDD+20]提出的开放问题。本文还再次证明，计算立方平面X3C的解的数量是 #P-完全的；这一问题由 Moore 和 Robson [MR01]提出，并由 Cai 和 Fan [CF23]证明。

推论 8.4 (定理 6.7)。 *对于每个 $k \geq 3$，线性 3-连通 kDM-E3 是 NP-完全的，其计数变体是$\#P$完全。*

推论 8.5 (定理 7.5)。 *平面3-连通4DM-E3 是 NP-完全的，其计数变体是$\#P$完全。*

推论 8.6 (定理 7.7)。 *平面3-连通4DM-E3 在以四边形分量的数量为参数时是固定参数可解的。*

Cor论 8.7 (推论 6.9)。 *对于 $k \geq 3$，不存在平面线性 kDM-E3 的实例* .

推论 8.8 (定理 7.8)。 *平面5DM-E3 不存在是实例。*

推论 8.9 (观察 7.9)。 *对于 $k > 5$，不存在平面 kDM-E3 的实例。*

为避免冗余，我们没有列出一些直接推论，例如包含某个 NP-完全类的类也是 NP-完全的。同样，对于证明问题是平凡的或具有固定参数可解性，我们给出了一个算法，该算法自然也适用于受限输入。

由 k-元集合构成的精确覆盖-E3（XkC-E3）	
输入：	一个有限集 X 以及一个由 k 元子集组成的集合族 $\mathcal{S}$，这些子集取自 X，且 X 中的每个元素恰好出现在 $\mathcal{S}$ 的三个成员中。
问题：	是否存在一个子集族 $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$，使得 X 中的每个元素都恰好出现在其中一个成员中属于 $\mathcal{S}'$?

对于有限集 A 和由 A 的子集构成的集合族 $\mathcal{S}$，精确覆盖的关联图 $G(A, \mathcal{S})$ 的顶点集为 $A \cup \mathcal{S}$，并且当 $u \in S \in \mathcal{S}$ 时存在一条边 $\{u,S\}$。

定理 8.10。 存在一个从 k-划分 *1-in-3-SAT* 到由 k-集构成的精确覆盖的简约归约，并且保持平面性、线性性和 *3*-连通性。

Van Bevern、Bredereck、Chen、Froese、Niedermeier 和 Woeginger [vBBC+15] 曾提出疑问：平面 4-集合精确覆盖问题是否为 NP困难。MIT Hardness Group（Abel、Demaine、Diomidova、Li 和 Zhou）最近对此给出了答案 [MAD+26]：当$k \in \{3,4\}$ 时，平面 k-集合精确覆盖问题为 NP困难；否则可在多项式时间内求解。我们通过从k-划分 1-in-3-SAT 规约，给出另一种证明。

证明。 设 $\mathcal{I} = (X, C, P)$ 是一个 k-划分 1-in-3-SAT 实例，其中 $P = \langle P_1, \ldots, P_k \rangle$。对于$x \in X$和 $i \in \{1, \ldots, k\}$，令 $c_{i,x}$ 表示包含 x 的 P_i 中唯一的子句。对每个子句 $c \in C$，引入一个不同的新元素 u_c，并定义

$$A := \{u_c : c \in C\}, \qquad S_x := \{u_c : c \in C,\ x \in c\} \quad \text{for all } x \in X, \qquad \mathcal{S} := \{S_x : x \in X\}.$$

这需要线性时间。由于各元素 u_c 互不相同，

$$u_c \in S_x \iff x \in c \qquad \text{for all } x \in X \text{ and } c \in C. \tag{1}$$

每个包含 x 的子句都属于某个 P_i，因此等于 c_i；x、c_1、x，……，c_k、x 两两不同，因为 P_1、……、P_k 两两不相交。因此，$S_x = \{u_{c_{1,x}}, \ldots, u_{c_{k,x}}\}$ 恰有 k 个元素。映射σ: $X \to \mathcal{S}$, $x \mapsto S_x$ 是一个双射：根据定义，它是满射；而若 $S_x = S_{x'}$ 与 $x \neq x'$，则对每个 i 都有 $u_{c_i,x} \in S_{x'}$，从而由 (1) 得到 $\{x, x'\} \subseteq c_{i,}{}_x \in P_i$，这与 $|\{i \in \{1, \ldots, k\} \mid \exists c \in P_i\text{: } \{x, x'\} \subseteq c\}| < k$ 矛盾。根据 (1)，$\mathcal{S}$ 中包含 u_c 的成员是满足 $x \in c$ 的集合 S_x；由于 σ 是单射，这些恰好是三个互不相同的集合。因此，$(A, \mathcal{S})$ 是 XkC-E3 的一个实例。

对于 β: $X \to \{0,1\}$，令 $\Phi(\beta) := \{S_x : \beta(x) = 1\}$。由 (1) 及 σ 的单射性可知，对每个 $c \in C$，映射 σ 将 $\{x \in c\text{: } \beta(x) = 1\}$ 限制为到 $\{S \in \Phi(\beta) : u_c \in S\}$ 的双射。因此，当且仅当 $\Phi(\beta)$ 是 A 的精确覆盖时，β 1-in-3- 满足 C。由于 σ 是双射，Φ 也是双射：$\{0,1\}^X \to 2^{\mathcal{S}}$；因此，$\Phi$ 将 $\mathcal{I}$ 的 1-in-3 满足赋值与 $(A, \mathcal{S})$ 的精确覆盖一一对应，该归约是保解的。

最后，由 (1) 可知，双射 $x \mapsto S_x$, $c \mapsto u_c$ 是从 $G_{\mathrm{SAT}}(X, C)$ 到 $G(A, \mathcal{S})$ 的同构。因此，平面性、线性性和 3-连通性均得以保持。 □

由此得到以下推论：

推论 8.11 (定理6.6)。 平面 *3*-连通的 *3*-集合精确覆盖-*E3* 是 *NP*-完全的，其计数变体是 *#P*-完全的。

推论 8.12 (定理6.7)。 对于每个 $k \geq 3$，线性 *3*-连通的 k-集合精确覆盖-*E3* 是 *NP*-完全的，其计数变体是 *#P*-完全的。

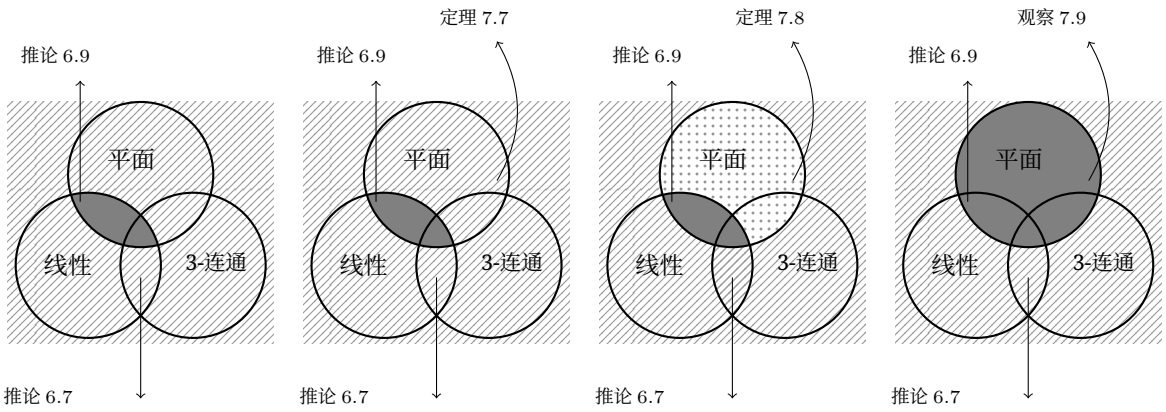
等价地，由定理 8.10 可知，对于每个子句恰有三个文字、且每个变量恰有 k 次出现的单调线性公式，XSat 是 NP-完全的，其中每个 $k \geq 3$；这证实了 Porschen、Schmidt、Speckenmeyer 和 Wotzlaw [PSSW14] 所提出猜想中 XSat 部分的子句大小为三的情形。

推论 8.13 (定理7.5)。 平面 *3*-连通的 *4*-集合精确覆盖-*E3* 是 *NP*-完全的，其计数变体是 *#P*-完全的。

9 结论

本文针对每个 k，对 k-划分 1-in-3-SAT 在‘平面’、‘线性’和‘3-连通’这几种性质的所有组合下，建立了完整的复杂度分类。由此，我们推导出了 kDM 和 XkC 的相应结果。请注意，在 kDM 中，我们假设没有 $u \in U_i$和 $u' \in U_j$ 与 $i \neq j$ 出现在完全相同的三个 k-元组中；而在 k-划分中，我们要求 $|\{i \in \{1, \ldots, k\} \mid \exists c \in P_i\text{: } \{x, x'\} \subseteq c\}| < k$。图 19 以 k-划分 1-in-3-SAT 的形式概述了这些结果。我们还证明了 NP-完全变体的计数版本是 #P-完全的。

我们首先展示了将图构件嵌入 Sat 图的思路，这一做法源自 Moore 和 Robson [MR01]。这些构件经过设计，使得所得公式具有所需性质。我们首先将这一方法应用于 3-分区 1-in-3-SAT。为实现平面性，我们将每个



(a) 3-划分的　(b) 4-分区的　(c) 5-划分的　(d) k-划分，$k > 5$

图 19：k-划分 1-in-3-SAT 在平面性、线性性和 3-连通性（“3-连通”）各种组合下的复杂性概览。斜线区域表示 NP-困难，灰色区域表示不存在实例，点状区域表示该问题是平凡的，因为其中只有否实例。箭头指向确立相应区域复杂性的结果。

边交叉替换为交叉器件。类似地，我们插入线性性小工具，使公式成为线性的。受 Hasan、Mondal 和 Rahman [HMR22] 提出的问题启发 —— 当每个变量恰好出现在三个子句中时，平面 3- 连通 1-in-3-SAT 是否仍为 NP困难——我们着重研究如何将结果扩展到具有 3-连通性这一附加性质。为此，我们在图中添加了网格结构，以便再次插入构件，并证明所得图是 3-连通的。随后，我们将研究扩展至 $k > 3$。对于 4- 分区 1-in-3-SAT，我们从构件插件系统的思路中提炼出一般方法，并构造了能够模拟子句或变量顶点的构件。尽管平面 3-连通 4-分区 1-in-3-SAT 是 NP-完全的，我们证明了以四边形分量的数量为参数时，该问题是固定参数可解的。最后，我们将结果推广至 kDM 和 XkC。具体而言，我们针对 van Bevern、Bredereck、Chen、Froese、Niedermeier 和 Woeginger [vBBC$^+$15]提出的复杂性问题给出了另一种解答：当限制实例中的每个元素恰好出现在三个集合中时，X4C 的复杂性如何？这一问题近期也由 MIT Hardness Group [MAD$^+$26]解决。

我们认为这些结果为进一步研究受限可满足性问题提供了动机：Sat 的 k-划分变体提供了一个复杂性理论框架，揭示了诸如 kDM 和 XkC 等相关问题中的结构。我们将以下开放问题留待未来研究。

问题 9.1。对于哪些 $r \geq 4$，将立方 *3*-连通 *3DM* 限制为关联图围长为 $2r$ 的实例后，该问题是 *NP*-完全的？对于哪些 r，其计数版本是 *#P*-完全的？

AI 使用披露

- 第 1–5 节和第 8 节的内容是在未使用大语言模型的情况下完成的。本工作的其余部分使用大语言模型的情况如下。
- 内容：

  – 引理 7.1 的主要灵感源于与 Claude Opus 5.5 的交流。– 图 14、15 和 16 中的构件，以及图 18 中的图示例，均通过使用 Claude Code（Opus 5.5）生成的代码进行计算机搜索找到。图 13 中的图由 Codex（GPT-6.1 Sol）生成的代码找到。– 附录中引理 9.6 的证明所涉及的推导由 Claude Code（Opus 5.5）计算完成。– 定理 7.8 得益于 Claude Opus 5.5 提供的大量修正。

- 风格和记号：

– 图 11 和图 19 的 LaTeX 代码由 GPT-6.1 Sol 生成。– 最终稿由 Claude Opus 5.5 校对，以检查数学错误、拼写和可读性。

所有由 AI 生成的内容、代码输出和建议均已由作者审阅并核实，作者对本文内容承担全部责任。

参考文献

[BDD+20] Jeffrey Bosboom、Erik D. Demaine、Martin L. Demaine、Adam Hesterberg、Roderick Kim-ball 和 Justin Kopinsky。路径谜题：带路径约束的离散断层成像是困难的。《Graphs and Combinatorics》，36:251–267，2020年。[BK98] Therese Biedl 和 Goos Kant。正交图绘制的更优启发式方法。《Computa-tional Geometry》，9(3):159–180，1998年2月。[CF23] Ji n-Yi Cai 和 Austen Z. Fan。平面三路边完美匹配导出 Holant 二分定理。arXiv 预印本 arXiv:2303.16705，2023年。[CH96] Nadia Creignou 和 Miki Hermann。广义可满足性计数问题的复杂性。《Information and Computation》，125(1):1–12，1996年2月。[DDD24] Andreas Darmann、Janosch Döcker 和 Britta Dorn。非全相等 3-SAT 的一个更加简单的困难变体。arXiv 预印本 arXiv:2412.03395，2024年。[DF86] M. E. Dyer 和 A. M. Frieze。平面 3DM 是 NP-完全的。《Journal of Algorithms》，7(2):174–184，1986年6月。[DKK02] Krzysztof Diks、Łukasz Kowalik 和 Maciej Kurowski。平面图的一个新 3着色判据。载于 Luděk Kučera（编），《Graph-Theoretic Concepts in Computer Science》，Lecture Notes in Computer Science 第2573卷，第138–149页。Springer，2002年。[Gon85] Teofilo F. Gonzalez。使最大簇间距离最小化的聚类。《Theoretical Computer Science》，38:293–306，1985年。[HM09] Dávid Hudák 和 Tomáš Madaras。关于最小度为5且围长为4的 1-平面图的局部结构。《Discussiones Mathematicae Graph Theory》，29(2):385–400，2009年。[HMR22] Md. Manzurul Hasan、Debajyoti Mondal 和 Md. Saidur Rahman。3-连通性约束下的正平面可满足性问题。《Theoretical Computer Science》，917:81–93，2022年5月。[HMRS98] Harry B. Hunt、Madhav V. Marathe、Venkatesh Radhakrishnan 和 Richard E. Stearns。平面计数问题的复杂性。《SIAM Journal on Computing》，27(4):1142–1167，1998年8月。[HSS03] Elad Hazan、Shmuel Safra 和 Oded Schwartz。关于 k-维匹配近似的复杂性。载于《Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization: Algorithms and Techniques》（APPROX 2003 和 RANDOM 2003），Lecture Notes in Computer Science 第2764卷，第83–97页。Springer，2003年。[HT74] John Hopcroft 和 Robert Tarjan。高效的平面性测试。《Journal of the ACM》，21(4):549–568，1974年。[MAD+26] MIT Hardness Group、Zachary Abel、Erik D. Demaine、Jenny Diomidova、Jeffery Li 和 Zixiang Zhou。应用于 KPlumber 和多格骨牌铺砌的平面图定向框架。arXiv 预印本 arXiv:2603.03488，2026年。[MR01] C. Moore 和 J.M. Robson。使用简单瓷砖的困难铺砌问题。《Discrete & Computational Geometry》，26(4):573–590，2001年1月。

[MR08] Wolfgang Mulzer 和 Günter Rote。最小权三角剖分是 NP困难的。*Journal ofthe ACM*, 55(2):1–29，2008年5月。[Nie06] Rolf Niedermeier。固定参数算法导论，《牛津数学及其应用讲座丛书》第31卷。牛津大学出版社，牛津，2006年。[PSSW14] Stefan Porschen、Tatjana Schmidt、Ewald Speckenmeyer 和 Andreas Wotzlaw。线性 CNF 类的 XSAT 和 NAE-SAT。《离散应用数学》，167:1–14，2014年4月。[PSZ09] Stefan Porschen、Ewald Speckenmeyer 和 Xishun Zhao。线性 CNF 公式与可满足性。《离散应用数学》，157(5):1046–1068，2009年3月。[Sch78] Thomas J. Schaefer。可满足性问题的复杂性。载于第十届 ACM计算理论研讨会论文集, STOC '78，第216–226页。ACM出版社，1978年。[Sch98] Alexander Schrijver。正则二分图中的 1-因子计数。*Journal of Combinato-rial Theory, Series B*，72(1):122–135，1998年1月。[Špa08] Simon Špacapan。图的笛卡尔积的连通性。*Applied Mathematics Let-ters*，21(7):682–685，2008年。[TW11] Mu-Tsun Tsai 和 Douglas B. West。欧拉三角剖分的 3-可着色性的新证明。《当代数学艺术》，4(1):73–77，2011年。[vBBC+15] René van Bevern、Robert Bredereck、Jiehua Chen、Vincent Froese、Rolf Niedermeier 和 Gerhard J. Woeginger。基于网络的顶点溶解。*SIAM Journal on Discrete Math-ematics*，29(2):888–914，2015年。[yWo25] yWorks GmbH。yEd图形编辑器（3.25.1版）。https://www.yworks.com/yed，2025年。

附录

第5节附录

T-交叉 T-交叉由变量 z_1、z_2、z_3、z_4 和 f 以及八个辅助变量和 16 个线性子句组成，如图 20 所示。恰有一个真值赋值 β 能够 1-in-3 满足 T-交叉中的子句。它还满足 $\beta(z_1) = \beta(z_2) = \beta(z_3) = \beta(z_4) = T$。

F-交叉 F-交叉由一个 T-交叉、变量 y_1、y_2、y_3、y_4、b 以及四个额外的线性子句组成，如图21所示。只有一个真值赋值 β 能够 1-in-3 满足 F-交叉中的每个子句。它还满足 $\beta(y_1) = \beta(y_2) = \beta(y_3) = \beta(y_4) = F$。

线性等式构件 线性等式构件 $LEQ(x_i)$ 可将出现在子句 c_{j_1}、c_{j_2}、c_{j_3}、c_{j_4} 中的一个变量 x_i 替换为四个变量 x_i、$_{j_1}$、x_i、$_{j_2}$、x_i、$_{j_3}$、x_i、$_{j_4}$，使子句 c_{j_1}、c_{j_2}、c_{j_3}、c_{j_4} 成为线性的。它包含一个 F-交叉、三个辅助变量以及十二个额外的线性子句，如图 22 所示。当且仅当 β 1满足 $\beta(x_{i,j_1}) = \beta(x_{i,j_2}) = \beta(x_{i,j_3}) = \beta(x_{i,j_4})$ 时，真值赋值能够使该构件中的子句 1-in-3 满足。

以下引理与三划分构件的引理类似，也适用于四个分区。其证明也与相应的证明类似。

引理 9.2. 设 TC 是一个由变量构成的 T-交叉

$$A = \{z_1, z_2, z_3, z_4\} \cup \{f\} \cup \{d_i, e_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$$

以及如图 *20* 所示的子句 $C_A = \{c_j \mid 1 \leq j \leq 16\}$。那么，恰好存在一个真值赋值 β：$A \to \{T, F\}$，使得 *1-in-3* 满足 C_A 中的每个子句。该真值赋值满足β（z_1）$= \beta$（z_2）$= \beta$（z_3）$= \beta$（z_4）$= T$。

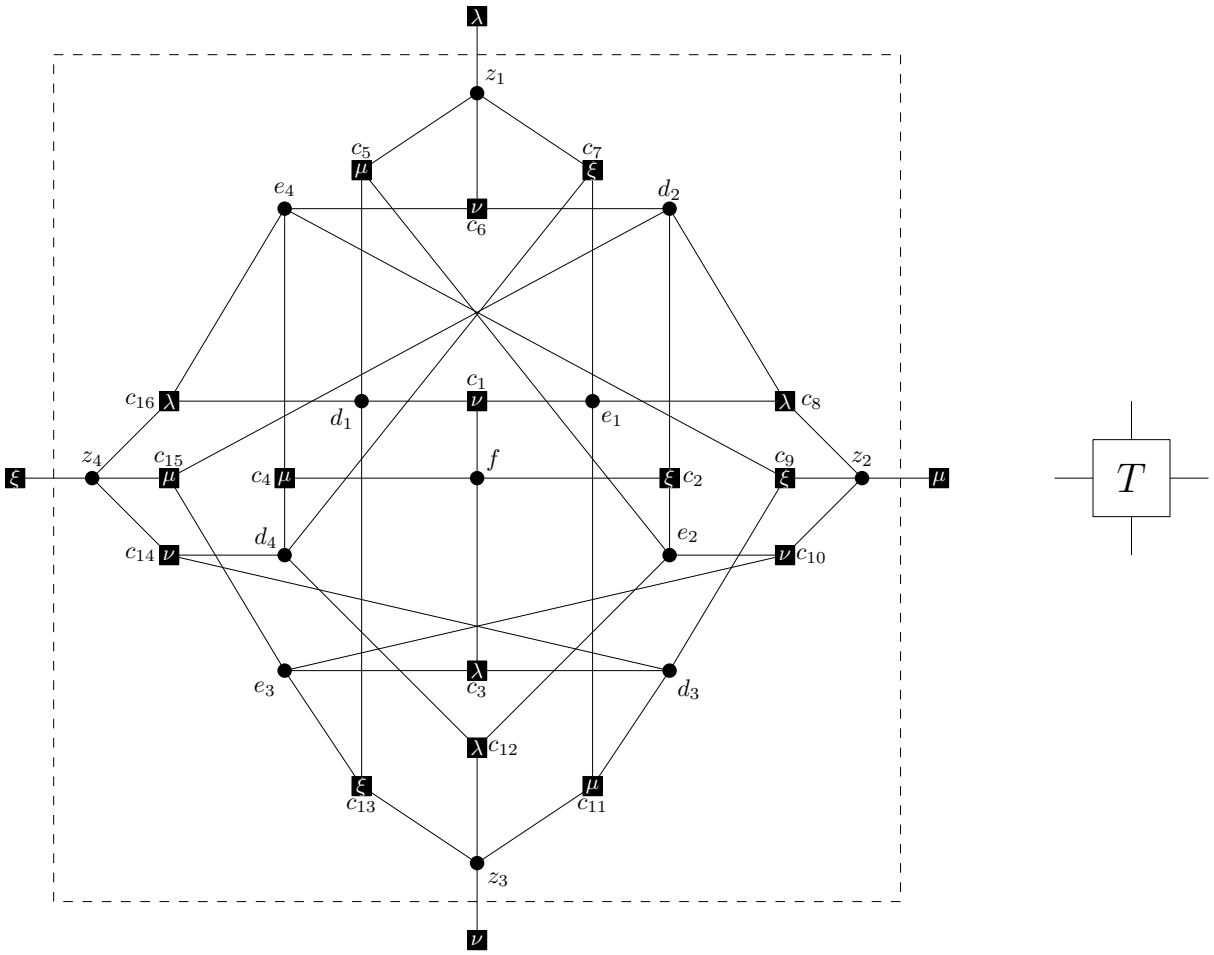


图 20： T-交叉及其缩写。

引理 9.3。令 FC 为一个具有变量的 F-交叉

$$A = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \cup \{b\} \cup \mathrm{var}(TC)$$

如图 *21* 所示。于是，恰有一个真值赋值 β： $A \to \{T, F\}$ 能使 $\mathrm{cl}(FC)$ 中的每个子句都满足 ***1-in-3***。此真值赋值满足 $\beta(y_1) = \beta(y_2) = \beta(y_3) = \beta(y_4) = F$。

引理 9.4. 设 $LEQ(x_i)$ 是变量 x_i的一个线性等式构件，其中 x_i 包含在子句c_{j_1}、 c_{j_2}、 c_{j_3}、 c_{j_4}中。它用变量替换 x_i

$$A = \{x_{i,j_1}, x_{i,j_2}, x_{i,j_3}, x_{i,j_4}\} \cup \{a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}\} \cup \mathrm{var}(FC_i)$$

以及子句 $C_A = \{c_{i,j} \mid 1 \le j \le 12\} \cup \mathrm{cl}(FC_i)$，如图 *22* 所示。于是，对于 $\mathrm{var}(LEQ(x_i))$，恰有两个真值赋值 β_1 和 β_2 能使 $\mathrm{cl}(LEQ(x_i))$ 中的每个子句都满足 ***1-in-3***。此外， β_1和 β_2 满足

$$\begin{aligned} &\beta_1(x_{i,j_1}) = \beta_1(x_{i,j_2}) = \beta_1(x_{i,j_3}) = \beta_1(x_{i,j_4}) = T, && \beta_1(a_{i,1}) = \beta_1(a_{i,2}) = \beta_1(a_{i,3}) = F, \\ &\beta_2(x_{i,j_1}) = \beta_2(x_{i,j_2}) = \beta_2(x_{i,j_3}) = \beta_2(x_{i,j_4}) = F, && \beta_2(a_{i,1}) = \beta_2(a_{i,2}) = \beta_2(a_{i,3}) = T. \end{aligned}$$

引理 9.5. 设 $LEQ(x_i)$ 是变量 x_i的一个线性等式构件。$\mathrm{cl}(LEQ(x_i))$ 中的所有子句都是线性的。

第 7 节的扩展证明

在表 1 和表 2 中，我们纳入了粘合顶点。

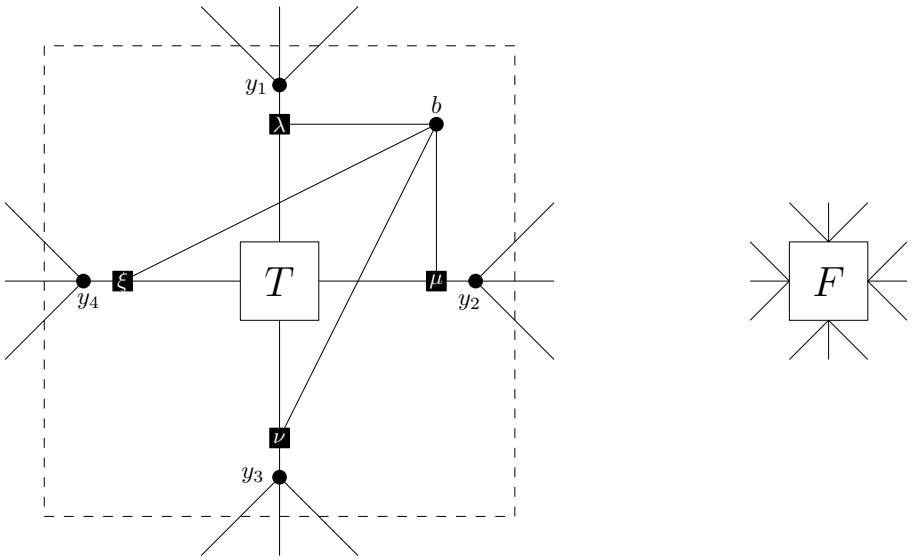


图21： F-交叉及其缩写。

P_1	P_2	P_3	P_4
$\{a_2, d_6, k_1\}, \{a_4, d_4, k_4\}$ $\{a_5, d_5, k_3\}, \{a_6, b_1, f\}$ $\{b_2, d_3, e_2\}, \{e_1, h, k_2\}$	$\{a_2, d_3, k_1\}, \{a_4, d_5, k_4\}$ $\{a_5, d_4, k_3\}, \{a_6, b_2, f\}$ $\{d_2, e_1, g_2\}, \{e_2, h, k_2\}$	$\{a_2, d_3, k_2\}, \{a_3, d_6, k_1\}$ $\{a_4, b_2, f\}, \{a_5, d_5, k_4\}$ $\{d_4, e_1, g_2\}, \{e_2, h, k_3\}$	$\{a_2, d_2, k_2\}, \{a_3, d_3, k_1\}$ $\{a_4, b_1, f\}, \{a_5, d_4, k_4\}$ $\{b_2, d_5, e_2\}, \{e_1, h, k_3\}$
$\{a_1, p_2, z_2\}, \{a_3, p_4, z_1\}$ $\{a_7, p_3, z_4\}, \{a_8, p_1, z_6\}$ $\{z_3, z_5, o_1\}, \{z_7, z_8, o_2\}$	$\{a_3, p_2, z_1\}, \{a_7, p_4, z_4\}$ $\{a_8, p_1, z_2\}, \{g_1, p_3, z_3\}$ $\{z_5, z_8, o_1\}, \{z_6, z_7, o_2\}$	$\{a_6, p_3, z_4\}, \{a_7, p_4, z_5\}$ $\{a_8, p_2, z_2\}, \{g_1, p_1, z_3\}$ $\{z_1, z_6, o_2\}, \{z_7, z_8, o_1\}$	$\{a_1, p_1, z_2\}, \{a_6, p_4, z_4\}$ $\{a_7, p_3, z_3\}, \{a_8, p_2, z_1\}$ $\{z_5, z_8, o_2\}, \{z_6, z_7, o_1\}$
$\{d_1, q_2, z_{10}\}, \{d_2, q_4, z_9\}$ $\{d_7, q_3, z_{12}\}, \{d_8, q_1, z_{14}\}$ $\{z_{11}, z_{13}, o_3\}, \{z_{15}, z_{16}, o_4\}$	$\{d_6, q_3, z_{12}\}, \{d_7, q_4, z_{13}\}$ $\{d_8, q_2, z_{10}\}, \{g_3, q_1, z_{11}\}$ $\{z_9, z_{14}, o_4\}, \{z_{15}, z_{16}, o_3\}$	$\{d_2, q_2, z_9\}, \{d_7, q_4, z_{12}\}$ $\{d_8, q_1, z_{10}\}, \{g_3, q_3, z_{11}\}$ $\{z_{13}, z_{16}, o_3\}, \{z_{14}, z_{15}, o_4\}$	$\{d_1, q_1, z_{10}\}, \{d_6, q_4, z_{12}\}$ $\{d_7, q_3, z_{11}\}, \{d_8, q_2, z_9\}$ $\{z_{13}, z_{16}, o_4\}, \{z_{14}, z_{15}, o_3\}$

表 1： C-构件的子句，包括粘合顶点。

P_1	P_2	P_3	P_4
$\{i_1, b_2, z_2\}, \{i_2, b_5, z_3\}$ $\{i_5, b_4, z_6\}, \{i_6, b_3, z_5\}$ $\{i_7, b_1, z_4\}, \{i_8, b_6, z_1\}$ $\{z_7, z_8, o_1\}$	$\{i_5, b_5, z_6\}, \{i_7, b_2, z_4\}$ $\{i_8, b_3, z_1\}, \{i_9, b_1, z_5\}$ $\{l_1, b_4, z_3\}, \{l_2, b_6, z_7\}$ $\{z_2, z_8, o_1\}$	$\{i_5, b_5, z_3\}, \{i_7, b_2, z_5\}$ $\{i_8, b_3, z_8\}, \{i_9, b_1, z_4\}$ $\{l_1, b_4, z_2\}, \{l_2, b_6, z_1\}$ $\{z_6, z_7, o_1\}$	$\{i_1, b_2, z_4\}, \{i_2, b_5, z_7\}$ $\{i_5, b_4, z_3\}, \{i_6, b_3, z_1\}$ $\{i_7, b_1, z_5\}, \{i_8, b_6, z_8\}$ $\{z_2, z_6, o_1\}$
$\{i_9, b_8, z_{10}\}, \{i_{11}, b_9, z_{12}\}$ $\{i_{12}, b_7, z_{14}\}, \{i_{14}, b_{10}, z_9\}$ $\{z_{11}, z_{13}, o_2\}, \{z_{15}, z_{16}, o_3\}$	$\{i_6, b_9, z_{11}\}, \{i_{11}, b_{10}, z_{12}\}$ $\{i_{12}, b_7, z_{10}\}, \{i_{14}, b_8, z_9\}$ $\{z_{13}, z_{16}, o_2\}, \{z_{14}, z_{15}, o_3\}$	$\{i_6, b_7, z_{11}\}, \{i_{10}, b_9, z_{12}\}$ $\{i_{11}, b_{10}, z_{13}\}, \{i_{12}, b_8, z_{10}\}$ $\{z_9, z_{14}, o_3\}, \{z_{15}, z_{16}, o_2\}$	$\{i_9, b_7, z_{10}\}, \{i_{10}, b_{10}, z_{12}\}$ $\{i_{11}, b_9, z_{11}\}, \{i_{12}, b_8, z_9\}$ $\{z_{13}, z_{16}, o_3\}, \{z_{14}, z_{15}, o_2\}$
$\{i_{10}, b_{14}, z_{17}\}, \{i_{13}, b_{12}, z_{18}\}$ $\{i_{15}, b_{13}, z_{20}\}, \{i_{16}, b_{11}, z_{22}\}$ $\{z_{19}, z_{21}, o_4\}, \{z_{23}, z_{24}, o_5\}$	$\{i_{10}, b_{12}, z_{17}\}, \{i_{15}, b_{14}, z_{20}\}$ $\{i_{16}, b_{11}, z_{18}\}, \{i_{17}, b_{13}, z_{19}\}$ $\{z_{21}, z_{24}, o_4\}, \{z_{22}, z_{23}, o_5\}$	$\{i_{14}, b_{13}, z_{20}\}, \{i_{15}, b_{14}, z_{21}\}$ $\{i_{16}, b_{12}, z_{18}\}, \{i_{17}, b_{11}, z_{19}\}$ $\{z_{17}, z_{22}, o_5\}, \{z_{23}, z_{24}, o_4\}$	$\{i_{13}, b_{11}, z_{18}\}, \{i_{14}, b_{14}, z_{20}\}$ $\{i_{15}, b_{13}, z_{19}\}, \{i_{16}, b_{12}, z_{17}\}$ $\{z_{21}, z_{24}, o_5\}, \{z_{22}, z_{23}, o_4\}$
$\{i_3, b_{19}, z_{27}\}, \{i_4, b_{17}, z_{29}\}$ $\{i_{17}, b_{16}, z_{26}\}, \{i_{18}, b_{18}, z_{30}\}$ $\{i_{19}, b_{15}, z_{28}\}, \{i_{20}, b_{20}, z_{25}\}$ $\{z_{31}, z_{32}, o_6\}$	$\{i_{13}, b_{18}, z_{27}\}, \{i_{18}, b_{19}, z_{30}\}$ $\{i_{19}, b_{16}, z_{28}\}, \{i_{20}, b_{17}, z_{25}\}$ $\{l_3, b_{20}, z_{31}\}, \{l_4, b_{15}, z_{29}\}$ $\{z_{26}, z_{32}, o_6\}$	$\{i_{13}, b_{18}, z_{26}\}, \{i_{18}, b_{19}, z_{27}\}$ $\{i_{19}, b_{16}, z_{29}\}, \{i_{20}, b_{17}, z_{32}\}$ $\{l_3, b_{20}, z_{25}\}, \{l_4, b_{15}, z_{28}\}$ $\{z_{30}, z_{31}, o_6\}$	$\{i_3, b_{19}, z_{31}\}, \{i_4, b_{17}, z_{25}\}$ $\{i_{17}, b_{16}, z_{28}\}, \{i_{18}, b_{18}, z_{27}\}$ $\{i_{19}, b_{15}, z_{29}\}, \{i_{20}, b_{20}, z_{32}\}$ $\{z_{26}, z_{30}, o_6\}$

表2：包含粘合顶点的 X-构件的子句。

1-in-3 满足赋值中的取值依据以下规则得出。规则（R1）在引理 7.6 中得到证明。规则（R2）–（R4）直接由 1-in-3 可满足性推出。假设真值赋值 β 满足子句 $\{x, y, z\}$。

(R1) 如果 β 也满足 $\{x', y', z'\}$, $\beta(x) = \beta(x')$ 和 $\beta(y) = \beta(y')$，那么 $\beta(z) = \beta(z')$（参见引理 7.6）。

(R2) 如果 $\beta(x) = \beta(y)$，那么 $\beta(x) = \beta(y) = F$ 和 $\beta(z) = T$。

(R3) 如果 $\beta(x) = T$，那么 $\beta(y) = \beta(z) = F$。

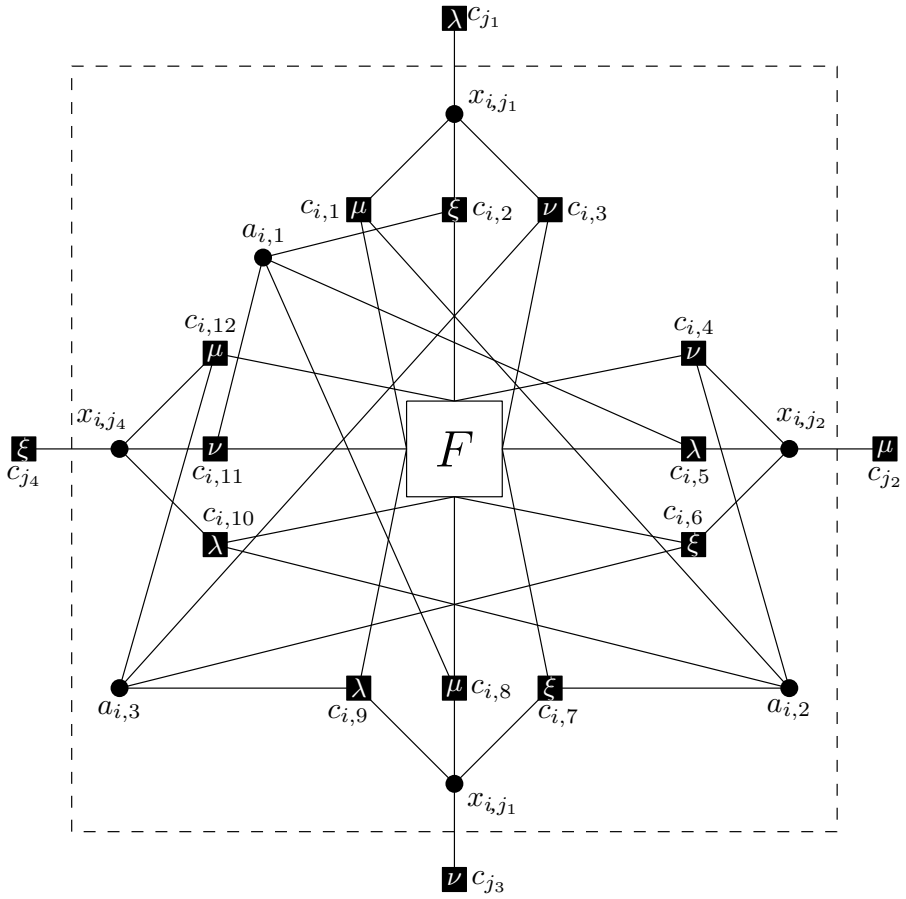


图 22：四个分区的线性化构件。

(R4) 如果 $\beta(x) = F$，那么 $\beta(y) = \neg\beta(z)$。

这些规则可以直接用于推导 X-构件和C-构件的以下性质。

引理 *9.6. (a)* 设 β 满足 C构件的所有子句，并将其粘合顶点 g_1、g_2、g_3 作为额外变量。那么，对于所有 j、m，β 在字母相同的变量上取值相同，$\beta(g_1) = \beta(a_1)$，$\beta(g_2) = \beta(b_1)$，$\beta(g_3) = \beta(d_1)$，以及 $\beta(p_j) = \neg\beta(a_m)$，$\beta(q_j) = \neg\beta(d_m)$，$\beta(z_j) = F$和 $\beta(o_j) = T$。

(b) 设 β 是 X构件的一个 *1-in-3* 满足赋值，其中粘合顶点也作为额外变量，且对于 $j \in \{1,\ldots,4\}$，$\beta(l_j) = \beta(i_j)$，并设 $\nu = \beta(i_1)$。那么，对于所有 j，$\beta(i_j) = \nu$、$\beta(b_j) = \neg\nu$、$\beta(z_j) = F$以及 $\beta(o_j) = T$。

证明。考虑两个子句 $\{a_2, k_1, d_6\}, \{a_2, k_1, d_3\}$。如果 $\beta(d_3) = T$，那么我们有 $\beta(k_1) = F$and$\beta(a_2) = F$，因为这三个变量都包含在子句 $\{a_2, k_1, d_3\}$ 中。但如果 $\beta(k_1) = F$ and$\beta(a_2) = F$，那么 $\beta(d_6) = T$，这是由子句 $\{a_2, k_1, d_6\}$ 得出的。类似地，如果 $\beta(d_3) = F$，那么我们有 $\beta(k_1)$ 或 $\beta(a_2)$ 等于 T，因为这三个变量都包含在子句 $\{a_2, k_1, d_3\}$ 中。但由子句 $\{a_2, k_1, d_6\}$ 可知，$\beta(d_6) = F$。无论哪种情况，我们都有 $\beta(d_3) = \beta(d_6)$。细心的读者或许能看出，这与第 3 节中相等性验证器的逻辑有关。

按照相同的风格，我们推导出 1-in-3 满足赋值的奇偶性。我们以简略形式列出两个构件的结果：

Derivation for the C-gadget $\{a_2, k_1, d_6\}, \{a_2, k_1, d_3\} \Rightarrow \beta(d_6) = \beta(d_3)$
,$\{a_2, d_6, k_1\}, \{a_2, d_3, k_2\} \Rightarrow \beta(k_1) = \beta(k_2)$, $\{a_2, k_1, d_6\}, \{a_2, k_2, d_2\} \Rightarrow \beta(d_6) = \beta(d_2)$,$\{d_6, k_1, a_2\}, \{d_6, k_1, a_3\} \Rightarrow \beta(a_2) = \beta(a_3)$,
$\{e_1, g_2, d_2\}, \{e_1, g_2, d_4\} \Rightarrow \beta(d_2) = \beta(d_4)$,$\{b_2, e_2, d_3\}, \{b_2, e_2, d_5\} \Rightarrow \beta(d_3) = \beta(d_5)$, $\{b_1, f, a_4\}, \{b_1, f, a_6\} \Rightarrow \beta(a_4) = \beta(a_6)$,
$\{a_4, f, b_1\}, \{a_6, f, b_2\} \Rightarrow \beta(b_1) = \beta(b_2)$,$\{k_2, h, e_1\}, \{k_2, h, e_2\} \Rightarrow \beta(e_1) = \beta(e_2)$, $\{d_2, e_1, g_2\}, \{d_3, e_2, b_2\} \Rightarrow \beta(g_2) = \beta(b_2)$,
$\{h, e_1, k_2\}, \{h, e_1, k_3\} \Rightarrow \beta(k_2) = \beta(k_3)$,$\{d_6, k_1, a_2\}, \{d_4, k_3, a_5\} \Rightarrow \beta(a_2) = \beta(a_5)$, $\{a_2, d_6, k_1\}, \{a_5, d_4, k_4\} \Rightarrow \beta(k_1) = \beta(k_4)$,
$\{d_6, k_1, a_2\}, \{d_4, k_4, a_4\} \Rightarrow \beta(a_2) = \beta(a_4)$, $\{p_1, z_2, a_8\}, \{p_1, z_2, a_1\} \Rightarrow \beta(a_8) = \beta(a_1)$,$\{p_1, a_8, z_2\}, \{p_1, a_8, z_6\} \Rightarrow \beta(z_2) = \beta(z_6)$,
$\{a_8, z_2, p_1\}, \{a_8, z_2, p_2\} \Rightarrow \beta(p_1) = \beta(p_2)$,

$\{p_1,a_8,z_2\},\{p_2,a_8,z_1\}\Rightarrow\beta(z_2)=\beta(z_1)$, $\{z_1,z_6,o_2\}$: $\beta(z_1)=\beta(z_6)\Rightarrow\beta(z_1)=F$, $\beta(o_2)=T$,$\{z_2,a_8,p_2\}$: $\beta(z_2)=F\Rightarrow\beta(a_8)=\neg\beta(p_2)$, $\{o_2,z_5,z_8\}$: $\beta(o_2)=T\Rightarrow\beta(z_5)=F$, $\beta(z_8)=F$,$\{z_8,z_7,o_1\}$: $\beta(z_8)=F\Rightarrow\beta(o_1)=\neg\beta(z_7)$, $\{o_2,z_6,z_7\}$: $\beta(o_2)=T\Rightarrow\beta(z_7)=F$,$\{z_1,a_3,p_4\}$: $\beta(z_1)=F\Rightarrow\beta(p_4)=\neg\beta(a_3)$, $\{z_1,a_3,p_2\}$: $\beta(z_1)=F\Rightarrow\beta(a_3)=\neg\beta(p_2)$,$\{o_1,z_3,z_5\}$: $\beta(o_1)=T\Rightarrow\beta(z_3)=F$, $\{z_5,a_7,p_4\}$: $\beta(z_5)=F\Rightarrow\beta(a_7)=\neg\beta(p_4)$, $\{z_3,g_1,p_1\}$: $\beta(z_3)=F\Rightarrow\beta(p_1)=\neg\beta(g_1)$, $\{z_3,g_1,p_3\}$: $\beta(z_3)=F\Rightarrow\beta(g_1)=\neg\beta(p_3)$,$\{p_1,a_8,z_2\}$, $\{p_4,a_6,z_4\}\Rightarrow\beta(z_2)=\beta(z_4)$, $\{q_1,z_{10},d_8\},\{q_1,z_{10},d_1\}\Rightarrow\beta(d_8)=\beta(d_1)$,$\{q_1,d_8,z_{10}\},\{q_1,d_8,z_{14}\}\Rightarrow\beta(z_{10})=\beta(z_{14})$, $\{d_8,z_{10},q_1\},\{d_8,z_{10},q_2\}\Rightarrow\beta(q_1)=\beta(q_2)$,$\{q_1,d_8,z_{10}\},\{q_2,d_8,z_9\}\Rightarrow\beta(z_{10})=\beta(z_9)$, $\{z_9,z_{14},o_4\}$: $\beta(z_9)=\beta(z_{14})\Rightarrow\beta(z_9)=F$, $\beta(o_4)=T$,$\{z_{10},d_8,q_2\}$: $\beta(z_{10})=F\Rightarrow\beta(d_8)=\neg\beta(q_2)$, $\{o_4,z_{13},z_{16}\}$: $\beta(o_4)=T\Rightarrow\beta(z_{13})=F$, $\beta(z_{16})=F$,$\{z_{16},z_{15},o_3\}$: $\beta(z_{16})=F\Rightarrow\beta(o_3)=\neg\beta(z_{15})$, $\{o_4,z_{14},z_{15}\}$: $\beta(o_4)=T\Rightarrow\beta(z_{15})=F$,$\{z_9,d_2,q_4\}$: $\beta(z_9)=F\Rightarrow\beta(q_4)=\neg\beta(d_2)$, $\{z_9,d_2,q_2\}$: $\beta(z_9)=F\Rightarrow\beta(d_2)=\neg\beta(q_2)$,$\{o_3,z_{11},z_{13}\}$: $\beta(o_3)=T\Rightarrow\beta(z_{11})=F$, $\{z_{13},d_7,q_4\}$: $\beta(z_{13})=F\Rightarrow\beta(d_7)=\neg\beta(q_4)$,$\{z_{11},g_3,q_1\}$: $\beta(z_{11})=F\Rightarrow\beta(q_1)=\neg\beta(g_3)$, $\{z_{11},g_3,q_3\}$: $\beta(z_{11})=F\Rightarrow\beta(g_3)=\neg\beta(q_3)$,$\{q_1,d_8,z_{10}\},\{q_4,d_6,z_{12}\}\Rightarrow\beta(z_{10})=\beta(z_{12})$.

X构件的推导 $\{b_1,i_7,z_4\},\{b_1,i_7,z_5\}\Rightarrow\beta(z_4)=\beta(z_5)$, $\{b_1,z_4,i_7\},\{b_1,z_5,i_9\}\Rightarrow\beta(i_7)=\beta(i_9)$,$\{z_4,i_7,b_1\},\{z_5,i_7,b_2\}\Rightarrow\beta(b_1)=\beta(b_2)$, $\{b_1,z_4,i_7\},\{b_2,z_4,i_1\}\Rightarrow\beta(i_7)=\beta(i_1)$, $\{b_1,i_7,z_4\},\{b_2,i_1,z_2\}\Rightarrow\beta(z_4)=\beta(z_2)$,$\{z_4,i_7,b_1\},\{z_2,i_1,b_4\}\Rightarrow\beta(b_1)=\beta(b_4)$, $\{b_1,i_7,z_4\},\{b_4,i_1,z_3\}\Rightarrow\beta(z_4)=\beta(z_3)$, $\{b_1,z_4,i_7\},\{b_4,z_3,i_5\}\Rightarrow\beta(i_7)=\beta(i_5)$,$\{b_1,i_7,z_4\},\{b_4,i_5,z_6\}\Rightarrow\beta(z_4)=\beta(z_6)$, $\{z_2,z_6,o_1\}$: $\beta(z_2)=\beta(z_6)\Rightarrow\beta(z_2)=F$, $\beta(o_1)=T$,$\{o_1,z_2,z_8\}$: $\beta(o_1)=T\Rightarrow\beta(z_8)=F$, $\{z_3,i_5,b_4\}$: $\beta(z_3)=F\Rightarrow\beta(b_4)=\neg\beta(i_5)$, $\{z_6,i_5,b_5\}$: $\beta(z_6)=F\Rightarrow\beta(i_5)=\neg\beta(b_5)$,$\{z_3,i_2,b_5\}$: $\beta(z_3)=F\Rightarrow\beta(i_2)=\neg\beta(b_5)$, $\{o_1,z_6,z_7\}$: $\beta(o_1)=T\Rightarrow\beta(z_7)=F$, $\{z_7,i_2,b_6\}$: $\beta(z_7)=F\Rightarrow\beta(i_2)=\neg\beta(b_6)$,$\{z_8,i_8,b_6\}$: $\beta(z_8)=F\Rightarrow\beta(b_6)=\neg\beta(i_8)$, $\{z_8,i_8,b_3\}$: $\beta(z_8)=F\Rightarrow\beta(b_3)=\neg\beta(i_8)$, $\{z_5,i_6,b_3\}$: $\beta(z_5)=F\Rightarrow\beta(b_3)=\neg\beta(i_6)$, $\{b_1,i_7,z_4\},\{b_3,i_8,z_1\}\Rightarrow\beta(z_4)=\beta(z_1)$,$\{b_7,z_{10},i_{12}\},\{b_7,z_{10},i_9\}\Rightarrow\beta(i_{12})=\beta(i_9)$, $\{b_7,i_{12},z_{10}\},\{b_7,i_6,z_{11}\}\Rightarrow\beta(z_{10})=\beta(z_{11})$,$\{b_7,i_{12},z_{10}\},\{b_7,i_{12},z_{14}\}\Rightarrow\beta(z_{10})=\beta(z_{14})$, $\{i_{12},z_{10},b_7\},\{i_{12},z_{10},b_8\}\Rightarrow\beta(b_7)=\beta(b_8)$,$\{b_7,i_{12},z_{10}\},\{b_8,i_{12},z_9\}\Rightarrow\beta(z_{10})=\beta(z_9)$, $\{z_9,z_{14},o_3\}$: $\beta(z_9)=\beta(z_{14})\Rightarrow\beta(z_9)=F$, $\beta(o_3)=T$,$\{z_{10},i_{12},b_8\}$: $\beta(z_{10})=F\Rightarrow\beta(i_{12})=\neg\beta(b_8)$, $\{z_{11},i_6,b_9\}$: $\beta(z_{11})=F\Rightarrow\beta(i_6)=\neg\beta(b_9)$,$\{z_{11},i_{11},b_9\}$: $\beta(z_{11})=F\Rightarrow\beta(b_9)=\neg\beta(i_{11})$, $\{z_{11},z_{13},o_2\}$: $\beta(z_{11})=F\Rightarrow\beta(z_{13})=\neg\beta(o_2)$,$\{o_3,z_{13},z_{16}\}$: $\beta(o_3)=T\Rightarrow\beta(z_{13})=F$, $\beta(z_{16})=F$, $\{o_2,z_{15},z_{16}\}$: $\beta(o_2)=T\Rightarrow\beta(z_{15})=F$, $\{z_9,i_{14},b_{10}\}$: $\beta(z_9)=F\Rightarrow\beta(b_{10})=\neg\beta(i_{14})$, $\{z_9,i_{14},b_8\}$: $\beta(z_9)=F\Rightarrow\beta(i_{14})=\neg\beta(b_8)$,$\{b_1,i_7,z_4\},\{b_9,i_{11},z_{12}\}\Rightarrow\beta(z_4)=\beta(z_{12})$, $\{z_{12},i_{10},b_{10}\}$: $\beta(z_{12})=F\Rightarrow\beta(i_{10})=\neg\beta(b_{10})$,$\{b_{11},z_{18},i_{16}\},\{b_{11},z_{18},i_{13}\}\Rightarrow\beta(i_{16})=\beta(i_{13})$, $\{b_{11},i_{16},z_{18}\}$, $\{b_{11},i_{16},z_{22}\}\Rightarrow\beta(z_{18})=\beta(z_{22})$,$\{i_{16},z_{18},b_{11}\},\{i_{16},z_{18},b_{12}\}\Rightarrow\beta(b_{11})=\beta(b_{12})$, $\{b_{11},i_{16},z_{18}\},\{b_{12},i_{16},z_{17}\}\Rightarrow\beta(z_{18})=\beta(z_{17})$, $\{z_{17},z_{22},o_5\}$: $\beta(z_{17})=\beta(z_{22})\Rightarrow\beta(z_{17})=F$, $\beta(o_5)=T$, $\{z_{18},i_{16},b_{12}\}$: $\beta(z_{18})=F\Rightarrow\beta(i_{16})=\neg\beta(b_{12})$,$\{o_5,z_{21},z_{24}\}$: $\beta(o_5)=T\Rightarrow\beta(z_{21})=F$, $\beta(z_{24})=F$, $\{z_{24},z_{23},o_4\}$: $\beta(z_{24})=F\Rightarrow\beta(o_4)=\neg\beta(z_{23})$,$\{o_5,z_{22},z_{23}\}$: $\beta(o_5)=T\Rightarrow\beta(z_{23})=F$, $\{z_{17},i_{10},b_{14}\}$: $\beta(z_{17})=F\Rightarrow\beta(b_{14})=\neg\beta(i_{10})$,$\{z_{17},i_{10},b_{12}\}$: $\beta(z_{17})=F\Rightarrow\beta(i_{10})=\neg\beta(b_{12})$, $\{o_4,z_{19},z_{21}\}$: $\beta(o_4)=T\Rightarrow\beta(z_{19})=F$,$\{z_{21},i_{15},b_{14}\}$: $\beta(z_{21})=F\Rightarrow\beta(i_{15})=\neg\beta(b_{14})$, $\{z_{19},i_{17},b_{11}\}$: $\beta(z_{19})=F\Rightarrow\beta(b_{11})=\neg\beta(i_{17})$,$\{z_{19},i_{17},b_{13}\}$: $\beta(z_{19})=F\Rightarrow\beta(i_{17})=\neg\beta(b_{13})$, $\{b_1,i_7,z_4\},\{b_{14},i_{14},z_{20}\}\Rightarrow\beta(z_4)=\beta(z_{20})$,$\{b_{15},i_{19},z_{28}\},\{b_{15},i_{19},z_{29}\}\Rightarrow\beta(z_{28})=\beta(z_{29})$, $\{b_{15},z_{28},i_{19}\},\{b_{15},z_{29},i_4\}\Rightarrow\beta(i_{19})=\beta(i_4)$,$\{z_{28},i_{19},b_{15}\},\{z_{29},i_{19},b_{16}\}\Rightarrow\beta(b_{15})=\beta(b_{16})$, $\{b_{15},z_{28},i_{19}\},\{b_{16},z_{28},i_{17}\}\Rightarrow\beta(i_{19})=\beta(i_{17})$,$\{b_{15},i_{19},z_{28}\},\{b_{16},i_{17},z_{26}\}\Rightarrow\beta(z_{28})=\beta(z_{26})$, $\{z_{28},i_{19},b_{15}\},\{z_{26},i_{13},b_{18}\}\Rightarrow\beta(b_{15})=\beta(b_{18})$,$\{b_{15},i_{19},z_{28}\}$, $\{b_{18},i_{13},z_{27}\}\Rightarrow\beta(z_{28})=\beta(z_{27})$, $\{z_{28},i_{19},b_{15}\},\{z_{29},i_4,b_{17}\}\Rightarrow\beta(b_{15})=\beta(b_{17})$,$\{b_{15},i_{19},z_{28}\},\{b_{17},i_4,z_{25}\}\Rightarrow\beta(z_{28})=\beta(z_{25})$, $\{b_{15},z_{28},i_{19}\},\{b_{17},z_{25},i_{20}\}\Rightarrow\beta(i_{19})=\beta(i_{20})$,$\{b_{15},i_{19},z_{28}\},\{b_{17},i_{20},z_{32}\}\Rightarrow\beta(z_{28})=\beta(z_{32})$, $\{z_{26},z_{32},o_6\}$: $\beta(z_{26})=\beta(z_{32})\Rightarrow\beta(z_{26})=F$, $\beta(o_6)=T$,$\{z_{27},i_{18},b_{18}\}$: $\beta(z_{27})=F\Rightarrow\beta(b_{18})=\neg\beta(i_{18})$, $\{z_{27},i_{18},b_{19}\}$: $\beta(z_{27})=F\Rightarrow\beta(i_{18})=\neg\beta(b_{19})$, $\{z_{27},i_3,b_{19}\}$: $\beta(z_{27})=F\Rightarrow\beta(i_3)=\neg\beta(b_{19})$, $\{o_6,z_{30},z_{31}\}$: $\beta(o_6)=T\Rightarrow\beta(z_{30})=F$, $\beta(z_{31})=F$, $\{z_{31},i_3,b_{20}\}$ $\beta\ z_{31}=F\Rightarrow\beta\ i_3=\neg\beta\ b_{20}$ $\{z_{32},i_{20},b_{20}\}$ $\beta\ z_{32}=F\Rightarrow\beta\ b_{20}=\neg\beta\ i_{20}$:()()(),:()()().

□

由此得到以下命题:

命题 7.3 的证明。根据构造，两个构件都是平面且为 4-分区的。 C-构件。设β 是一个 1-in-3 满足赋值。由引理 9.6(a)，取 $\beta(g_1)=\beta(a_1)$， $\beta(g_2)=\beta(b_1)$，$\beta(g_3)=\beta(d_1)$，则 β 在每个字母上取一个值，记作 $\beta(a)$，依此类推；并且 $\beta(p)=\neg\beta(a)$， $\beta(q)=\neg\beta(d)$，$\beta(z)=F$， $\beta(o)=T$。因此，形式为 $\{a,p,z\}$、 $\{d,q,z\}$ 和 $\{z,z,o\}$的子句都得到满足，其中一个字母代表它的任意一个变量。其余子句的形式为 $\{a,d,k\}$、 $\{a,b,f\}$、 $\{b,d,e\}$、 $\{e,h,k\}$，其中 g_1、 g_2、 g_3 计作 a、 b、 d；结合 $T=1$ 和 $F=0$，它们表示

$$\beta(a)+\beta(d)+\beta(k)=\beta(a)+\beta(b)+\beta(f)=\beta(b)+\beta(d)+\beta(e)=\beta(e)+\beta(h)+\beta(k)=1.$$

根据前三个方程， $\beta(a)$ $\beta(b)$ $\beta(d)$中至多有一个取值为 T；如果它们都不取该值，那么$\beta(k)=\beta(f)=\beta(e)=T$，这与第四个方程矛盾。因此， $\beta(u)=T$恰好对一个 $u\in\{a_1,b_1,d_1\}$成立，而 u决定了所有取值：在字母 a、 b、 d、 e、 f、 h、 k中，如果 $u=a_1$，恰有 a、 e取值 T；如果 $u=b_1$，恰有 b、 k取值 T；如果 $u=d_1$，恰有 d、 f、 h取值 T。反过来，这三种选择中的每一种都满足所有子句。

X-构件。根据引理 9.6(b)，一个 1-in-3 满足赋值会使四个输出顶点都取同一个值 ν，而该值由 ν决定。反过来，对于 ν的两种取值，取值 $\beta(i_j)=\nu$、 $\beta(b_j)=\neg\nu$、 $\beta(z_j)=F$、$\beta(o_j)=T$，并令 $\beta(l_j)=\nu$，即可满足所有子句，因为它们属于 $\{i,b,z\}$和 $\{z,z,o\}$这两种形式，其中 i表示 i_1、.....、 i_{20}中的任意一个，而 l_1、.....、 l_4。

□