近似最小三角形划分

GuilhermeD.daFonseca 艾

克斯-马赛大学和 LIS，法国

arXiv:2611.31146v1 [cs.CG] 23 Nov 2026

摘要

设 $\rho(P)$ 为简单多边形 P 的划分中三角形的最小数量，其中该多边形有 n 个顶点，且三角形角点可以是任意点（斯坦纳点）。目前尚不清楚能否在多项式时间内计算 $\rho(P)$。我们不假设一般位置：当 P 的顶点共线时，一条三角形边可以经过多个顶点，而好的划分会利用这一点。P 的每个顶点都是任何划分中某个三角形的角点，因此 $\rho(P) \geq n/3$，且任何含有 $n-2$ 个三角形的三角剖分都是一个 3-近似算法，可在 $O(n)$ 时间内计算。这是目前已知的最佳近似比。

我们分两步改进这一结果。首先，设 $\rho_0(P)$ 为所有角点均为 P 顶点的划分中三角形的最小数量；根据 Asano、Asano 和 Pinter（1986）的结果，该值可在 $O(n^3)$ 时间内计算。我们证明，除非 P 是一个三角形，否则 $\rho_0(P) \leq 2\rho(P) - 2$，而且这一界是紧的。因此，斯坦纳点最多能将三角形数量减少一半，$\rho_0(P)$ 是一个 2-近似算法，可在 $O(n^3)$ 时间内计算。其次，我们打破无施泰纳点划分的 2 倍近似比障碍。我们观察到，只有当最优划分中的斯坦纳点很少，且每个斯坦纳点周围都有许多三角形时，$\rho_0(P)$ 才接近 $2\rho(P)$。对于这种情况，我们对划分进行动态规划：其中，P 内部的每个斯坦纳点都通过一条由三角形边构成的直线段连接到 P 的一个顶点，从而在 $O(n^{12})$ 时间内得到一个$_5$ $_3$-近似算法。

2012 年 ACM 学科分类计算理论 →计算几何；计算理论 → 近似算法分析

关键词与短语三角形划分、三角形覆盖、斯坦纳点、多边形分解、近似算法

1 引言

将多边形分解成少量简单部分，是计算几何中的经典课题 [17], ，而三角形是所有部分中最简单的。每个含有 n 个顶点的简单多边形都可以剖分为 $n-2$ 个三角形，所需 $O(n)$ 时间 [7]。然而，如果目标是将多边形划分为尽可能少的内部互不相交的三角形，三角剖分可能并不高效：三角形的一条边可能穿过多个共线顶点，而三角形角点也可能是多边形顶点之外的点，这些点称为斯坦纳点。对于一个多边形 P，我们记：$\rho(P)$ 为将 P 划分为三角形时所需三角形的最小数量；$\rho_0(P)$ 为在所有不使用斯坦纳点的划分中最小的数量

划分，其角点是 P 的顶点。

显然，$\rho(P) \leq \rho_0(P) \leq n-2$。我们要探究 $\rho_0(P)$（可在 $O(n^3)$ 时间内计算）[4], 对 $\rho(P)$ 的近似效果。我们还引入一个中间量 $\rho_\star(P)$，即具有受限施泰纳点的类 $\Pi_\star$ 中划分的最小规模，定义如下。

若 P 中任意三个顶点都不共线，则每个无施泰纳点划分都是三角剖分，且 $\rho_0(P) = n-2$。当存在共线顶点时，三角形边可能经过凹顶点，而 $\rho_0(P)$ 可能远小于 $n-2$（图 1a）。它可以小至 $n/3$，这是可能的最小值，因为 P 的每个顶点都是某个三角形的角点（引理1）：一个三角形沿其一条边粘接互不相交的三角形齿时，其 $\rho_0 = n/3$。施泰纳点也利用了同样的现象：即使任意三个顶点都不共线，带有施泰纳端点的三角形边也可能经过 P 的一个顶点（图 1b）。

Asano、Asano 和 Pinter [4] 通过动态规划在 $O(n^3)$ 时间内计算出 $\rho_0(P)$，而 $\rho_0(P)$ 等于 $n-2$ 减去共线顶点的相容三元组的最大数量 [8]。计算 ρ 对于带孔多边形 [15], 是 NP困难的，而对于简单多边形，其复杂性尚未解决。边延长线的交点处加入施泰纳点可以减少三角形的数量，而最优划分也可能需要在线段上加入施泰纳点，这些线段连接着上述交点 [4,

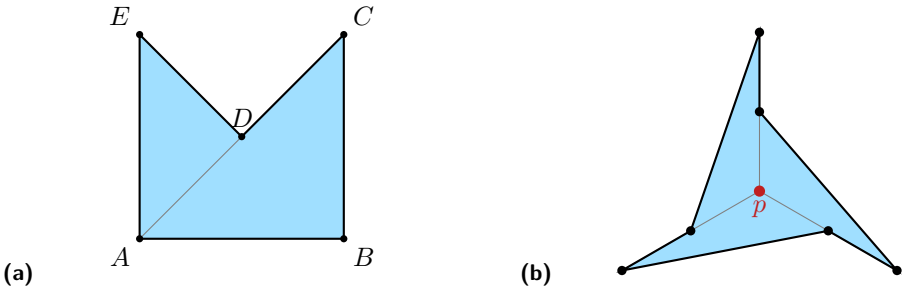


图 1 (a) 一个带有 $\rho_0 = 2 < n - 2 = 3$ 的五边形。(b) 一个不存在三个共线顶点的六边形，因此 $\rho_0 = n - 2 = 4$，使用一个施泰纳点 p 划分为 3 个三角形。

第 4] 节。由此产生了两个猜想：对于每个 k，都有某个多边形需要进行 k 轮这种构造；而且 $O(\sqrt{n})$ 轮总是足够的[4, 第 4] 节。Kleist 和 Scherzer [13] 以一种有力的方式推翻了第二个猜想：存在一个顶点坐标为有理数的简单多边形，其所有最小划分都含有坐标为无理数的施泰纳点，而无论进行多少轮构造，都无法生成这些点。Abrahamsen、Blikstad、Nusser 和 Zhang [2]称这个问题是简单多边形划分问题中“或许最基本”的未解问题。目前已知的近似因子仅为 3 [13]：P 的每个顶点都必须是某个三角形的角点，因此 $\rho(P) \geq n/3$；而任何三角剖分都含有 $n-2$ 个三角形，且可在 $O(n)$ 时间内计算出来 [7]。对于带 h 个孔的多边形，同样的论证可得近似因子 $3 + 6h/n \leq 5$ [13]。只有对于特殊多边形，才已知比 $n/3$ 更强的下界：若 P 为凸多边形 [5],，则 $\rho(P) = n - 2$；更一般地，若 P 至多有两个凹顶点且其顶点处于一般位置 [13]，结论也成立。

覆盖。一个相关问题允许重叠。令 $\kappa(P)$ 表示包含于 P 中且其并集为 P （一个覆盖）的三角形的最小数量，使得 $\kappa(P) \leq \rho(P)$。覆盖问题更难：计算 κ 是 $\exists\mathbb{R}$-完全 [1] 且为 APX困难 [9]。最近，基于凸多边形覆盖的 6-近似算法 [6]，有人为简单多边形给出了 12-近似算法 [13],。对于带孔多边形，根据早期工作 [11],，如 [13] 中所写，可得到一个 $O(\log n)$-近似算法。如果 P 的任意两条边都不共线，那么一个三角形至多覆盖三条边，因此 $\kappa(P) \geq n/3$，三角剖分是一个 3-近似算法 [9]。对于具有共线边的情形，划分对于覆盖的用途十分有限：在最坏情况下，$\rho(P)/\kappa(P) = \Theta(\alpha(n))$，其中 α 是反阿克曼函数。上界源于线段排列中单个面的复杂性 [18, 12]：P 的补集位于由最小覆盖的 3κ 条边构成的排列的一个面内，因此 $n = O(\kappa\,\alpha(\kappa))$；下界则来自一个基于线段下包络的构造 [3] [20]。我们在附录 A 中写出了下界。因此，三角剖分以因子 $O(\alpha(n))$近似 κ，但任何划分（无论是否使用施泰纳点）都无法以常数因子近似 κ，而覆盖问题的常数因子算法必须输出相互重叠的三角形。

我们的结果。
1. 施泰纳点至多节省一半。除非 P是一个三角形，否则 $\rho_0(P) \leq 2\rho(P) - 2$（定理 9），且这是紧的（命题10）。在一般位置下，这表示对于 $n \geq 4$，$\rho(P) \geq n/2$。2. 一个 5/3-近似。我们定义一类 $\Pi_\star$ 划分，其中每个施泰纳点都位于两条不同直线上，每条直线都经过 P的两个顶点；并且 P 内部的每个施泰纳点都通过一条线段与 P 的某个顶点相连，该线段位于这样的一条直线上，被三角形边覆盖，且其相对内部不包含任何三角形角点。一个至多包含 $\rho_\star(P)$ 个三角形的划分（在 $\Pi_\star$上取最优值）可以在 $O(n^{12})$ 时间内计算出来

（定理 18），并且 $\rho_\star(P) \leq \frac{5\rho(P)}{3}^{-2}$（定理 19）。指数很大，我们无意对其进行缩减。

3. 孔。对于一个有 h 个孔的多边形 P，$\rho_0(P) \leq 2\rho(P) + h - 1 \leq \frac{5}{2}\rho(P)$（定理 11）。这给出了一个 $\frac{5}{2}$-近似算法，运行时间为 $O(n^{3+2h})$，改进了三角剖分的因子 $3 + 6h/n$ [13]，并且当 h 为常数时可在多项式时间内运行。

技术。 三角剖分使用 $n - 2$ 个三角形。最优划分只有一种方式可以减少三角形数量：以每个施泰纳点为代价，将 P 的顶点吸收到三角形边的相对内部（引理2）。为得到无施泰纳点划分，我们将三角形边的每个极大直线段收缩为其在 P 中首末顶点之间的线段，沿这些线段切割 P，再对所得部分进行三角剖分。这样几乎保留了所有吸收操作。例外情况是被吸收的顶点紧邻边的施泰纳端点；每个施泰纳点所导致的这类顶点数至多等于与其相邻的三角形数。将这项损失与平凡上界 $\rho_0 \leq n - 2$ 进行权衡，便得到因子2；此外，每个施泰纳点可有一个三角形的松弛量，每条无效射线可有半个三角形的松弛量；这里的射线是指从施泰纳点出发且未因吸收损失而计费的射线。

只有当最优划分中的斯坦纳点很少，且从斯坦纳点出发的几乎每条射线都吸收一个顶点时，因子2才会达到。在这种情况下，我们保留斯坦纳点，而不将其移除。我们保留那些位于穿过 P 中顶点对的两条直线上的斯坦纳点，并且这些点沿其中一条直线能看到 P 中的一个顶点；随后，我们围绕这些点重新构造三角形。每舍弃一个点，对于其旁边每一次未能实现的吸收，都要付出一个三角形的代价，再减去该点分摊的角度计数。每一次未能实现的吸收所对应的代价，都由一条非生产射线、一个被边的连续段穿过的斯坦纳点，或舍弃点自身所分摊的部分来补偿，因此代价至多等于松弛量。保留的点仍通过三角形边的直线连续段与 P 的顶点相连。这一性质使多项式时间动态规划成为可能：它扩展了 ρ_0 [4] 的动态规划，并将候选斯坦纳点连接到 P 的顶点上。

结构安排。 第 2 节介绍了支撑我们所有界的角度恒等式。第 3 节证明因子2、其紧性以及向带孔多边形的推广。第 4 节定义类 $\Pi_\star$，在其中构造近似最优划分，给出动态规划，并推导出因子 $\frac{5}{3}$。附录 A 列出了已知的、关于划分与覆盖之间关系的下界。

2 预备知识

本节确定划分所用的记号，并陈述角度恒等式（引理2），该恒等式用吸收顶点和施泰纳点的数量来表示划分的大小。我们所有的上界和下界都由此推导得出。本节还指出，区域可以在不使用其平坦角点的情况下进行三角剖分（引理 3）。这些结论已为人所知，或可由经典论证得出；我们在此给出简短证明。

设 P 是一个简单多边形，其顶点集为 V，$n = |V|$，且 θ_v 是 $v \in V$ 处的内角。P 的顶点可以共线，但不会有三个连续顶点共线，因此 $\theta_v \neq \pi$。

设 $\mathcal{T}$ 是将 P 划分为三角形的一个划分。角点 是$\mathcal{T}$中某个三角形的顶点。施泰纳点 是$\mathcal{T}$中一个不属于 P 顶点的角点。对于施泰纳点 p，令 c_p 表示$\mathcal{T}$中以 p 为角点的三角形数量。由于三角形的角小于 π，$c_p \geq 2$。令 S 为施泰纳点集合，$c(S) = \sum_{p \in S} c_p$ 表示施泰纳角点的数量。

▶ **引理1** ([13, 断言 24])。 P的每个顶点都是 T 的一个角点。因此 $n \leq 3|T| - c(S)$。

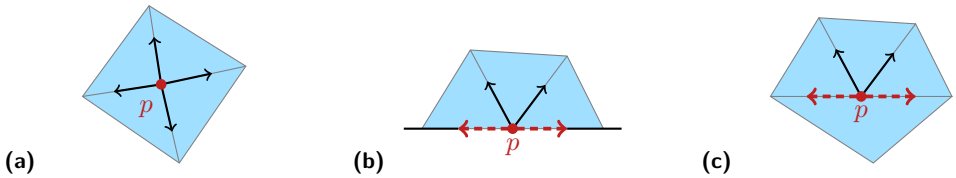


图2 (a) 全点、(b) 边界点和 (c) T形交点的射线。承载射线以红色虚线表示。

证明。 设 $v \in V$。包含 v 的三角形中， v 要么是一个角点，要么位于某条边的相对内部；在后一种情况下，它覆盖了 π 处的一个角 v。由于 $\theta_v < 2\pi$ 且 $\theta_v \neq \pi$，后一类三角形至多有一个，并且有一个三角形在 v处有一个角点。计算角点数，$3|\mathcal{T}| \geq n + c(S)$。 ◀

对于无施泰纳点划分，所得界限 $\rho_0(P) \geq n/3$ 已出现在 [8,定理 3]中。若顶点 P 位于三角形 $\mathcal{T}$的一条边的相对内部，则称其为吸收顶点 。该边是唯一的，因为一个三角形若在一条边的相对内部含有 v ，则会覆盖 v处的角 π ，并且 $\theta_v < 2\pi$。设 μ 为吸收顶点的数量。以施泰纳点 p 为角点的三角形，其角度总和为 $s_p\pi$；当 p 位于 P 的一条边的相对内部（即边界点）或某个三角形的一条边的相对内部（即T形交点）时， $s_p = 1$ ，否则为 $s_p = 2$ （即全点）。如果 $s_p = 1$，则以 p 为角点的三角形填满 p处的一个半平面，该半平面由一条直线界定，我们称这条直线为 p的承载直线 。

▶ **引理2** （角度恒等式 [13, 引理 9]）。 $|\mathcal{T}| = n - 2 - \mu + \sum_{p\in S} s_p$。

证明。 按角点对所有三角形的角求和，得到 $|\mathcal{T}|\pi = \sum_{v\in V} \theta_v - \mu\pi + \sum_{p\in S} s_p\pi = (n - 2 - \mu + \sum_{p\in S} s_p)\ \pi$。 ◀

[13, 引理 9] 中的版本统计边界角点和内部角点，并利用欧拉公式证明；其中，被吸收顶点和 T 形交点是具有平角的角点。对于无施泰纳点划分，关于退化三角形的相应界为 [8,引理 2]。由于三角剖分中没有被吸收顶点或施泰纳点，因此，与三角剖分相比，划分恰好节省 $\mu - \sum_{p\in S} s_p$ 个三角形：每个被吸收顶点节省一个，再减去每个施泰纳点的代价 s_p p。

射线。 施泰纳点的一条射线 p 是某条以该点 p 为端点的边 p延伸的方向。全点有 c_p 条射线。边界点或 T 形交点有 $c_p + 1$ 条射线，其中两条位于其承载直线上：该点 p 两侧最外侧的三角形，其边都落在这条直线上，并以 p为端点。这两条射线是承载射线。 p 的非承载射线集合 R_p 有 $|R_p| = c_p - 2 + s_p$ （图2）。

区域三角剖分。 我们通过切割 P 将其划分为多个区域，并对每个区域进行三角剖分，同时不使用其平角顶点。设 F 为一个有界开区域，其边界是有限条线段的并。对于边界上的一点 x ，在以 x 为中心的小圆盘与 F 的交集中，包含有限个以 x为顶点的开圆扇形，我们称它们为 x处 F 的关联 。若某个关联的角为 π，则称其平坦 。一个点可能有多个关联，例如位于裂缝末端或边界与自身相接处；其中一些关联可能是平坦的，而另一些则不是。

▶**引理 3.** 设 F 是一个有界、开、单连通区域，其边界是有限条线段的并。那么， F 的闭包是由内部互不相交的三角形组成的并，这些三角形的

内部位于 F 中，并且每个三角形在其每个角点处的角都属于 F的非平坦关联。

证明。对于简单多边形，删除平角顶点并进行三角剖分即可得到该引理。一般情况下，我们沿用每个简单多边形都有一条对角线的证明 [10,定理 3。1], ，并对 F 的非平坦关联数进行归纳。¯凸包 F 的每个顶点都位于 ∂F上，且 F 在此类顶点处的每个关联的角都小于 π。凸包至少有三个顶点，因此 F 至少有三个非平坦关联。取w 为一个凸包顶点，并考察 w处 F 的一个关联。其两条边界射线都位于 ∂F中。从 w 出发，沿每条射线前进，只要该点仍位于 ∂F 上，且 F 在该点包含位于关联一侧的半圆盘；令 a 和 b 为这一条件不再成立时所到达的点。令 T 为三角形 awb。那么 F 包含 T 中靠近半开线段 $[w,a)$和 $[w,b)$的点；此外，F 在 a 处、位于 $[w,a)$旁边且在 T 一侧的关联，以及 b处、位于 $[w,b)$旁边且在 T一侧的关联，都不是平坦的。令 H为 $\partial F \cap T$中不位于$[w,a) \cup [w,b$上的点集；它是紧集，并包含 a 和 b。

若 H 中有点不在直线 ab 上，令 ℓ 为经过 H 中距 ab 最远点且平行于 ab 的直线，并令 z 为 $H \cap \ell$ 的某个连通分支的一个端点。T 内部位于 ℓ 之外且在 w 一侧的部分不含 ∂F 中的点，并与 F 相交，因此它位于 F 中。于是开线段 wz 位于 F 中，且以 z 为中心、在 w 一侧的开半圆盘也位于其中。点 z 是 T 的内部点，因为它不在 ab 上，也不在 $[w,a) \cup [w,b$ 上。 F 在 z 处包含该半圆盘的关联并非平坦：否则 ℓ 会位于 ∂F 中 z 的两侧，而这些属于 T 内部的点会使 $H \cap \ell$ 延伸至 z 之外。我们沿着 wz 切割 F。

否则， H 位于直线 ab 上，而 T 的内部不含 ∂F 中的点且与 F 相交，因此位于 F 中。如果开线段 ab 位于 ∂F 中，那么 F 就是 T 的内部，我们便完成了。如果它不与 ∂F 相交，则它位于 F 中，我们沿着 ab 切割 F。否则，开线段 ab 上的某个点 z 是 $\partial F \cap ab$ 的一个连通分支的端点。 ab 中紧邻 z 且位于一侧的点位于 F 中，因此 F 在 z 处包含 T 内部靠近 z 的部分的关联，其角大于 π；我们沿着位于 F 中的开线段 wz 切割 F。

在每种情况下，切割都是 F 中的一条开线段，其端点落在 ∂F 上，并且附近包含该切割的非平坦关联中。由于 F 是单连通的，切割将 F分成两个由有限条线段围成的单连通区域 F_1 和 F_2 。它们的关联与 F的关联相同，但切割端点处的关联一分为二，且切割上的点获得平坦关联。因此， F 的平坦关联仍然是平坦的， F_1 或 F_2 的每个非平坦关联都包含在 F的某个非平坦关联中，并且 F_1 和 F_2合起来的非平坦关联数至多比 F多两个。由于它们各自至少有三个非平坦关联，因此各自都少于 F，我们对 F_1 和 F_2应用归纳法。◀

候选点。 一条顶点对直线 是经过 P的两个顶点的直线。令$\mathcal{C}$ 为 P 中同时位于两条不同顶点对直线上的点集； $|\mathcal{C}| = O(n^4)$。$\mathcal{C}$ 中的点是我们的算法计算出的划分可能采用的施泰纳点。

3 个斯坦纳点最多节省一半

本节证明， $\rho_0(P) \leq 2\rho(P) - 2$ ，除非 P 是一个三角形（定理 9）。直观地说，与三角剖分相比，划分会为多边形中位于三角形边中部的每个顶点节省一个三角形，同时会为最优划分$\mathcal{T}$中的每个施泰纳点付出一或两个三角形。我们从$\mathcal{T}$开始，沿着由其三角形边形成的直线前进。在每条直线上，我们只保留从多边形的第一个顶点到最后一个顶点的线段。这些线段是不相交对角线，因此我们可以沿它们进行切割，并将各部分进行三角剖分

而不使用施泰纳点，跳过沿切割线平坦排列的顶点。γ的每一项节省量都会保留下来，但有一个例外：某个顶点是其所在直线上的最外侧顶点，且紧邻一个施泰纳点。每一项这样的损失都可以归因于一条从施泰纳点引出的边。因此，无施泰纳点划分比最优划分至多多出施泰纳点处三角形角点的数量。另一方面，多边形的每个顶点都是某个三角形的角点，因此，三角剖分中的三角形数量至多是最优划分的三倍，减去同样的施泰纳角点数量。当施泰纳点的角点较少时，第一个界较好；当角点较多时，第二个界较好；两者中较优者至多是最优划分的两倍。轮轴图中，一个中央施泰纳点在每条从它引出的边上都有一项节省量，这表明无施泰纳点划分不可能优于最优划分的两倍。

弦。 直线上的一个分支是包含在该直线中的三角形边并集的一个连通分支；每个分支都是一条线段。在边沿两条或更多直线径直穿过的全点处，我们允许分支沿其中至多一条直线穿过该点继续延伸，并在其他直线上于该点终止（合并规则）。对于包含 P 中至少两个顶点的分支 $\hat{K}$，其弦 K 是 K 上连接 P 中最前和最末顶点的线段。每条弦连接 P 中的两个顶点，并位于 P 中，因为 $K \subseteq K \subseteq P$。

►**引理4**。 P 在一条弦上相邻两个顶点之间的线段是一条边或 a P 的对角线，并且任意两条这样的线段都不相交。

证明。 设 uw 是这样一条线段。它位于 P 中，且其相对内部不含 P 中的顶点。若它与一条边的相对内部相接，则它不可能穿过该边，因此在接触点附近沿着该边延伸。由于它的端点是顶点，所以它与该边重合。否则，它就是一条对角线。

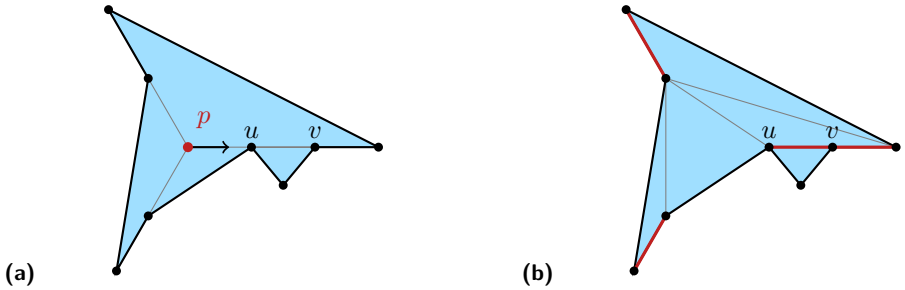
划分的两条边不会相交。假设两条位于不同直线上的此类线段在点 x 处相交。点 x 不是 P 的顶点，因为这些线段的相对内部不含顶点。因此，有些边沿其中一条直线穿过 x。如果 x 位于另一条直线上的边 f 的相对内部，那么沿 x 的延长线将进入由 f 围成的三角形内部，而其中没有边。因此，边沿两条直线都直接穿过 x，所以 x 是一个完全施泰纳点；根据合并规则，两个分支中的一个终止于 x，这就产生了矛盾。◄

根据引理4，沿所有弦切割 P 后，可由互不相交的对角线将其分成简单多边形，我们称之为面。它们的角点是 P 的顶点。若某个面的一个角点处的角为 π，则该角点是平坦的； Φ 表示这些面的平坦角点总数。对每个面进行三角剖分且不使用其平坦角点，可得到一个无施泰纳点划分，其大小由角度计数给出。

► **引理 5**。 所得的划分有 $n-2-\Phi$ 个三角形。
证明。 所有面在其所有顶点处的角度和为 $\sum_v \theta_v = (n-2)\,\pi$。一个面 F具有n_F个顶点，其中 Φ_F个为平坦顶点，其角度和为 $(n_F-2)\,\pi$，并产生 $n_F-2-\Phi_F$个三角形。◄

保留与丢失的吸收。 还需证明 Φ 接近 μ。设 v 是被吸收到三角形 Δ的一条边上的顶点，并设 K 是包含该边的分支。我们称v 为保留，如果它不是 K上 P 的第一个或最后一个顶点；否则称其为丢失 （图 3）。设 L为丢失顶点的数量。

►**引理 6.** 每个保留的顶点 v 都是包含以 v 为中心、位于 Δ一侧的小半圆盘的面的平角顶点。因此 $\Phi \geq \mu - L$，其中 μ 是吸收顶点的数量。



(a) (b)

图 3 (a) 含有一个斯坦纳点 p 的划分。在沿箭头延伸的分支上，u 丢失，而 v 被保留。(b) 弦（红色）以及一个未使用平坦角 v 的无施泰纳点划分。

ˆ**证明。** 顶点 v 位于 K的相对内部。半圆盘位于Δ的内部，且不与任何弦相交，因此有一个面包含它，并且该面在 v处的角为 π 。不同的保留顶点对应不同的平角顶点。◀

丢失顶点归算到斯坦纳点的射线上。斯坦纳点 p 的端射线 是 p 的一条射线，其分支终止于 p。

▶**引理7。** 每条端射线都是非承载射线。每个丢失顶点 v 都是沿某条端射线所见的 P 的第一个顶点，而 v 由该端射线确定。因此，$L \leq \sum_{p\in S} |R_p|$，其中 R_p 是 p 的非承载射线集合。

证明。 在边界点或 T 形交点处，各边沿承载直线继续延伸 p，因此承载射线不是端射线。设 v 是丢失顶点，且被吸收到分支 K 上的一条边中。该分支越过 v 后仍向两侧延伸，其中一侧不再包含 P 的其他顶点。该侧上 e 的端点 K 是角点而非顶点，因此它是一个斯坦纳点；K 终止于 e，而 v 是 P 上距 K 最近的顶点。e◀

按照引理7，将每个丢失顶点 v 分配给一条端射线：也就是说，分配给从 K 的一端射入 v 的分支K 、且 v 是 P的第一个顶点的那条射线；这种分配是单射。若有丢失顶点分配给 R_p 中的一条射线，则该射线是有效的；否则就是无效的。设 λ 为无效射线的数量，则 $L = \sum_p |R_p| - \lambda$。

因子2。结合这些引理，可用最优划分来界定 ρ_0 。对于风车图，这个界是精确的（第3.1节）。

▶**引理 8。**对于含有 S个施泰纳点的简单多边形 P 的任意最优划分，

$$\rho_0(P) \leq \rho(P) + \sum_{p\in S}(c_p - 2) - \lambda,$$

其中 c_p 是角点位于 p的三角形数量。

证明。由引理2和5–7，$\rho_0(P) \leq n - 2 - \Phi \leq n - 2 - \mu + L = n - 2 - \mu + \sum_p(s_p + c_p - 2) - \lambda = \rho(P) + \sum_p(c_p - 2) - \lambda$。◀

▶**定理 9。** 对于每个简单多边形 P，以及其包含斯坦纳点 S 和 λ条无效射线的任意最优划分 P，

$$\rho_0(P) \leq 2\rho(P) - 1 - |S| - \lambda/2.$$

此外，$\rho_0(P) \leq 2\rho(P) - 2$ 若 P不是三角形。因此，针对 ρ_0 [4]的动态规划是一种针对 ρ 的 2 倍近似算法，运行时间为 $O(n^3)$ 。

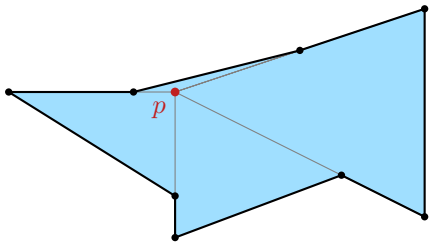


图4 一个围绕施泰纳点 p、由四个三角形组成的风车。该多边形有八个顶点，且其中任意三个都不共线，因此 $\rho_0 = 6$，而 $\rho = 4$。在从 p 发出的每条射线上，两个三角形边中较长的一条会吸收较近的顶点。

证明。 引理 8 给出 $\rho_0 \le \rho + c(S) - 2|S| - \lambda$，而三角剖分结合引理1给出 $\rho_0 \le n - 2 \le 3\rho - c(S) - 2$。两个界中较小者至多为它们的平均值。若 P 不是三角形，则 $\rho \ge 2$。若 $S = \emptyset$，最优划分不含 Steiner 点，且$\rho_0 = \rho \le 2\rho - 2$。否则 $|S| \ge 1$，取平均后的界 $2\rho - 1 - |S| - \lambda/2$ 给出$\rho_0 \le 2\rho - 2$。 ◀

因此，只有当最优划分中的施泰纳点很少且几乎所有射线都是有效的时，ρ_0 才能接近 2ρ。这样一来，两个平均界也必须彼此接近，因此 $c(S) \approx \rho$，并且少数施泰纳点各自拥有许多角点。第 4 节处理这种情况。本节其余部分将证明，对于无施泰纳点划分，因子2是紧的，并将定理 9 推广到带孔多边形。

3.1 无施泰纳点划分的紧性：风车

现在我们证明定理 9 是紧的：任何输出无施泰纳点划分的算法，都无法以优于 2 的因子逼近 ρ。极值多边形是风车，其中单个施泰纳点会在其每条射线上吸收一个顶点。

由 $m \ge 3$ 个三角形组成的风车 是三角形 $(p,\ \ell_i g_i,\ \ell'_{i+1} g_{i+1})$ 在 $i \in \mathbb{Z}_m$ 时的并集。这里 p 是原点，$g_0, \dots, g_{m-1}$ 是按逆时针顺序排列的单位向量，且相邻角小于 π；对于每个 i，$\ell_i,\ \ell'_i > 0$ 满足 $\ell_i \ne \ell'_i$（图4）。射线 g_i 上的两个三角形终止于不同距离处，因此该射线上有两个顶点，较近的那个被较长的边吸收。因此，风车有 $n = 2m$ 个顶点和 $\rho \le m$。

▶**命题10。** 对于每个 $m \ge 3$，都存在一个满足 $\rho = m$ 和 $\rho_0 = 2m - 2 = 2\rho - 2$ 的风车。

证明。 一般性地选取方向和长度，使得没有三个顶点共线。于是，在无施泰纳点划分中，没有顶点会被吸收。由引理2以及 $\mu = 0$ 和$S = \emptyset$可知，每个无施泰纳点划分恰有 $n - 2 = 2m - 2$个三角形。由定理 9 得 $\rho \ge (\rho_0 + 2)/2 = m$，因此 $\rho = m$。 ◀

轮轴图以等号达到引理 8 和定理 9 的界 $\rho_0 \le 2\rho - 2$，并表明在没有施泰纳点的情况下，因子2无法改进。轮轴图的中心位于$\mathcal{C}$中，因为其每条射线上都有两个顶点，而从中心到其中较近顶点的线段，按照第 4 节的定义，是一条连接，因此轮轴图划分属于该节中定义的类 $\Pi_\star$，并且对于命题10中的轮轴图也是如此 $\rho_\star = \rho$。

3.2 带孔多边形

弦构造可扩展到带孔多边形，而施泰纳点所节省的三角形数量仍至多约为一半，此外每个孔还会增加一个三角形的加性项。对于 h 个孔，

三角剖分使用 $n+2h-2$ 个三角形，并且可在 $O(n^{3+2h})$ 时间内计算 ρ_0 [4]。因此，下面的界在 $O(n^{3+2h})$ 时间内给出了一个 $(2+\frac{h-1}{\rho})$-近似。

▶ **定理 11**。 对于每个带有 h 个孔的多边形 P， $\rho_0(P) \leq 2\rho(P) + h - 1 \leq \frac{5}{2}\rho(P)$。

证明。 P的角度和现在为（$n+2h-2$）π，因此引理2写作 $|\mathrm{T}| = n+2h-2-\mu+\sum_{p\in S} s_p$。弦构造不变，但面可能带有孔，并且连接两个边界分支的弦可能使一个面变成弱简单的；我们分别计算一个面的每个角关联。一个具有 n_F 个顶点、其中 h_F 个为平坦顶点且带有 Φ_F 个孔的面 F 产生 $n_F+2h_F-2-\Phi_F$个三角形，就像一个具有 $n_F-\Phi_F$ 个顶点和 h_F个孔的多边形 [16],，对角度和求和后，总共得到 $n+2h-2-\Phi$ 个三角形。与之前一样， $\rho_0 \leq \rho + c(S)$ 。三角剖分给出 $\rho_0 \leq n+2h-2 \leq 3\rho - c(S) + 2h - 2$。对两个界取平均得到第一个不等式。最后，凸包的至少三个顶点不能被吸收，因此 $\mu \leq n-3$ 和 $\rho \geq n+2h-2-\mu \geq 2h+1$，从而得到第二个不等式。◀

4 击败因子2

本节通过保留施泰纳点而非将其移除，改进了定理 9 中的因子 2。直观来说，只有当最优划分 $\mathcal{T}$中的施泰纳点很少，并且几乎每条从这些点出发的边都被计作损失的节省量时，弦构造才会损失一个接近 2 的因子。因此，我们不再移除所有施泰纳点，而是保留那些位于两条穿过顶点对的直线交点处、且沿其中一条直线通过一条边与某个顶点相连的施泰纳点。我们像之前一样重建划分，现在也在保留点处进行切割，并使每个保留点继续与其对应顶点相连。损失的节省量现在归因于从被舍弃的施泰纳点出发的边，而每条这样的边都通过以下三种方式之一得到补偿：一条从不产生节省量的施泰纳点出发的边、其所在直线经过的某个施泰纳点，或舍弃该施泰纳点时节省的三角形。因此，重建后的划分比最优划分至多多出弦构造与最优值两倍之间差额的两倍。为了找到这种类型中的最佳划分，我们扩展无斯坦纳点划分的动态规划，将顶点对替换为点对，其中的点可以是顶点，也可以是与某个顶点相连的候选点。连接保留点与顶点的线段会将每个施泰纳点连接到边界，因此这些三角形构成一棵动态规划可以遍历的树。第一种构造得到的结果为最优值的两倍减去差额，第二种构造得到的结果至多为最优值加上差额的两倍；两者中较优者至多为最优值的五分之三。

类。 令$\mathcal{T}$，为 P 的一个三角形划分。**连接** r 是$\mathcal{T}$，中施泰纳点的一条线段ru，其中 u 是 P 的一个顶点，且经过 r 和 u 的直线是顶点对直线， ru 包含于 $\mathcal{T}'$ 的各边之并中，并且 $\mathcal{T}'$ 的任何角点都不位于ru的相对内部。令 $\Pi_\star$ 为 P 的三角形划分类，满足 (i) 每个施泰纳点都位于$\mathcal{C}$中；(ii) P 内部的每个施泰纳点都有一条连接。令 $\rho_\star(P)$ 为 $\Pi_\star$ 中划分的最小规模。施泰纳点可以位于边的相对内部，三角形也可以有两个或三个施泰纳角点。无施泰纳点划分属于 $\Pi_\star$，因此 $\rho \leq \rho_\star \leq \rho_0$。

第 4.1 节围绕保留的施泰纳点重建$\mathcal{T}$，并将代价计入舍弃点的射线。第 4.2 节选择保留的点，证明所得结果属于 $\Pi_\star$，并支付带电射线的代价。第 4.3 节给出动态规划，第 4.4 节则合并这些界。

4.1 保留斯坦纳点

现在，我们将第 3 节的弦构造推广到保留一组指定斯坦纳点的划分。对于保留点集合为空的情况，下面的构造与

弦构造完全相同。一般而言，重构后的划分会为每个被吸收顶点或无法保留在边的相对内部的 T形交点多付出一个三角形，并且每舍弃一个斯坦纳点就会节省 s_q 个三角形 q。

设 $M \subseteq S$ 为要保留的斯坦纳点集合； $S \setminus M$ 中的点将被舍弃。若施泰纳点 p 的射线在越过 p 后所在的分支包含 P 的一个顶点，则称该射线为含顶点射线 。我们假设每个保留点都位于 ∂P 上，或具有一条含顶点射线。

构造。 在每个分支上， P 的顶点以及保留的施泰纳点都是该分支的锚点 。切割线 是同一分支上两个相邻锚点之间的线段。面 是从 P 的内部去掉切割线的并集后得到的连通分支。面是单连通的（见下文引理 12），根据引理 3，我们对每个面进行三角剖分时不使用其平坦关联；所得结果记为 $\Psi(M)$。

带电射线。 P 的被吸收顶点位于一条边的相对内部，T形交点也如此；我们将该边所属的分支称为该点所在的分支。设 x 是一个被吸收顶点或一个保留的 T形交点， K 是其所在的分支。若 K 在 x 的某一侧上没有锚点，则称 x 在该侧上暴露。每个暴露点 x 为该侧上指向 x 、位于 K 末端的射线充电；若 x 在两侧都暴露，则它为两条射线中的一条充电。设 χ 为带电射线的数量。

▶ **引理 12 (**保留集引理)。 切割线不会交叉，每个面都是单连通的，并且 $\Psi(M)$ 的每个施泰纳点都位于 M 中。每条带电射线都是某个舍弃点的端射线，而该舍弃点的第一个锚点就是对它带电的点；并且没有射线被重复带电。此外，

$$|\Psi(M)| \;\le\; \rho + \chi - \sum_{q \in S \setminus M} s_q.$$

证明。 切割线位于各边的并集中，因此，与引理4的证明类似，两条位于不同直线上的切割线只有在边沿两条直线都直线延伸经过的点处才可能交叉。 P 的顶点不在切割线的相对内部，因为顶点都是锚点。否则该点就是完全施泰纳点，因为在边界点和 T形交点处，边只沿承载直线直线延伸；根据合并规则，两个分支中必有一个在此处终止，因此该分支的任何切割线都不会以该点为相对内部点。所以切割线不会交叉。 P 内部的每个保留点，都通过沿含顶点射线依次排列的切割线与某个顶点相连，因此 ∂P 与切割线的并集是连通的；每个面都是单连通的，尽管可能是弱简单的，并且在保留点处带有裂缝。舍弃点永远不会是切割线的端点，而切割线只有在保留边界点处才会终止于 P 某条边的相对内部。因此，面边界上所有不属于 $V \cup M$ 的点，都位于切割线或边的相对内部，且其所有关联都是平坦的。根据引理 3， $\Psi(M)$的每个角点都位于 $V \cup M$中。

设 x 暴露在其分支 K的一条边上，并设 e 是该边上 K 的端点。那么， e 是 $\mathcal{T}$的一个角点，它既不是顶点也不是保留点，因此 e 被丢弃。由于 K终止于 e，所以指向 x 的 e 的射线是一条端射线，其第一个锚点是 x。一条带电射线确定其第一个锚点，因此不会有射线被充电两次。

令 μ' 表示 $\Psi(M)$的吸收顶点数， s'_p 表示其三角形在施泰纳点 p处的角度和除以 π。令 $S' \subseteq M$ 表示 $\Psi(M)$ 的施泰纳点集合。根据引理 2，分别应用于 $\mathcal{T}$和 $\Psi(M)$，

$$|\Psi(M)| - \rho = (\mu - \mu') + \sum_{p \in S'} (s'_p - s_p) - \sum_{p \in S \setminus S'} s_p,$$

且最后一个和至少为 $\sum_{q\in S\setminus M} s_q$。我们证明，$\mu-\mu'$ 不大于暴露的吸收顶点数；对于 S' 中暴露的 T 形交点，$s'_p - s_p$ 至多为 1；对于 S' 的其他点，$s'_p - s_p$ 至多为 0。由于每个暴露点都会计入一条射线，这就证明了该界。

吸收顶点。设 u 被吸收到三角形 Δ_u 的一条边上，其中 Δ_u 属于$\mathcal{T}$，并假设 u未暴露。于是切割线覆盖了其所在分支上 u 的一个邻域，而 u 处位于 Δ_u 内部的半圆盘不与任何切割线相交。因此，这个半圆盘位于 u处某个面的平坦关联中。根据引理 3，$\Psi(M)$中没有三角形的角 u 处于此关联中，所以 u 位于 $\Psi(M)$ 一条边的相对内部；也就是说，u 被吸收到 $\Psi(M)$ 中。

保留点。设 $p\in M$ 是 $\Psi(M)$的一个施泰纳点。若 p 是$\mathcal{T}$的一个全点，则$s'_p \le 2 = s_p$；若 p 是一个边界点，则 $s'_p = 1 = s_p$。设 p 是$\mathcal{T}$的一个 T形交点，由三角形 Δ_p的一条边承载，且满足 $s_p = 1$ 和 $s'_p \le 2$。若 p 未暴露，则如上所述，p 处位于 Δ_p 内部的半圆盘处于某个面的平坦关联中，p 位于 $\Psi(M)$一条边的相对内部，并且 $s'_p = 1$。◀

带电射线是舍弃点的端射线，因此根据引理7，它们位于集合 R_q 中。因此 $\chi \le \sum_{q\in S\setminus M}|R_q|$，而引理 12 给出 $|\Psi(M)| \le \rho + \sum_{q\in S\setminus M}(c_q-2)$；对于 $M=\emptyset$，这是引理 8 的弱形式。下一小节将更仔细地界定 χ。

4.2 关联点

现在我们选取保留点：即$\mathcal{C}$ 中沿顶点对直线可见 P 的顶点的点。它们的连接在线段构造（第 4.1 节）后仍然保留，因此重建后的划分位于 $\Pi_\star$中；我们用 $\lambda+|S|$支付其带电射线的代价，至多为定理 9 松弛量的两倍。

施泰纳点 p 的一条射线的第一个角点，是$\mathcal{T}$上位于该射线且距离 p最近的角点。它必定存在，因为有一条边沿该射线离开 p，且从 p 到第一个角点的线段位于这条边上。位于 P 内部的施泰纳点 r，若其一条射线落在顶点对直线上，且以 P 的某个顶点 u 为第一个角点，则称其为关联的；此时 ru 是$\mathcal{T}$中 r 的连接。令

$$M = \{r\in S\cap\mathcal{C} : r\in\partial P \text{ or } r \text{ is linked}\}.$$

关联点具有一条含顶点射线，因此引理 12 适用于 M。

▶ **引理 13**。划分 $\Psi(M)$ 属于 $\Pi_\star$。

证明。根据引理 12，$\Psi(M)$ 的每个施泰纳点都位于 $M\subseteq$ C 中，因此 (i) 成立。设 r 是 $\Psi(M)$ 中位于 P 内部的一个施泰纳点。那么 r 是关联点：r 的某条射线位于一条顶点对直线上，且其第一个角点是 P 的一个顶点 u。点 r 和 u 是这条射线所在分支的锚点，它们之间没有 T 的角点，因此它们是相邻的锚点，且 ru 是一次切割。每次切割都位于某个面的边界上，而该边界由该面三角形的边覆盖，因此 ru 位于 $\Psi(M)$ 的边的并集中。根据引理 12，$\Psi(M)$ 的角点位于 $V\cup M$ 中；根据引理 1，这些也是 T 的角点，因此 $\Psi(M)$ 没有角点位于 ru 的相对内部。于是 ru 是 r 在 $\Psi(M)$ 中的一条连接，(ii) 成立。◀

现在我们来界定带电射线的数量。如果 x 位于分支的相对内部，则分支会经过施泰纳点 x。至多有一个分支经过 x：如果 x 是边界点或 T形交点，则边只能沿其承载直线径直穿过 x，因为在该直线的另一侧是 P 的外部，或是其边承载 x 的三角形的内部；如果 x 是全点，这就是合并规则。

直观地说，每条带电射线都是某个舍弃点 q的端射线，并且如果它是有效的，那么其所在分支包含分配给它的顶点。如果该射线所在的直线上没有其他顶点，那么该分支会越过这个顶点继续延伸，直到一个施泰纳点，而该施泰纳点反向射出的射线是

12 近似最小三角形划分

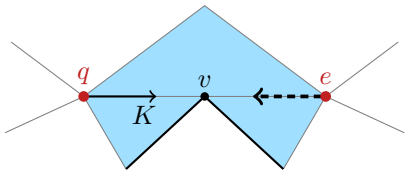


图5 引理14证明中的一条2型带电射线：分支 K 只有一个顶点 v。 q 的有效射线与 e 处无效的配对射线相配（虚线）。

无效的，如图5所示。如果这条直线是顶点对直线，那么要么在顶点之前存在一个施泰纳点，要么 q 可以直接看到该顶点；在后一种情况下， q 不在$\mathcal{C}$中，否则它就会被连接并保留，而这条射线的代价由项 s_q支付。

▶ **引理14**。 对于上文定义的集合 M， $\chi \le \lambda + |S| + \sum_{q\in S\setminus M} s_q$。

证明。 设 η 是一条带电射线。根据引理 12，它是舍弃点 q的一条端射线，因此它位于 R_q 中（引理7）；设 K 是它所在的分支，该分支终止于 q。我们区分四种类型。

类型*1*： η 无效。

类型*2*： η 有效，且其直线不是顶点对直线。设 v 是分配给 η的丢失顶点。那么， P 在 K上只有一个顶点 v，而 v 被吸收到 K上的一条边中。因此，K 越过 v 延伸至另一端 e；该端是一个角点而非顶点，所以 $e \in S$。 e 指向 v 的射线是一条端射线，因此位于 R_e中。它唯一可能被分配到的顶点是 v，而该顶点已分配给 η，因此 e 的射线无效。我们称它为 η 的配对射线 （图5）。由于 K 有两个端点，不同的2型射线有不同的配对射线。若 η 的配对射线不带电，我们称其为2a型；否则称为2b型。在2b型中， η 及其配对射线都带电，且各自带电是由其第一个锚点决定的（引理 12）。 K上的锚点是 v 及保留点，而 v 只为一条射线充电，因此 K 经过一个保留点。

类型 *3*： η 有效，其直线是顶点对直线，且它的第一个角点 x 是一个施泰纳点。分配给 η 的顶点是沿 K 越过 q后 P 上的第一个顶点，且它是一个角点，因此x 严格位于 q 与该顶点之间，并且 K 经过 x。

类型 *4*： η 有效，其直线是顶点对直线，且它的第一个角点是 P的一个顶点。于是 $q \notin \mathcal{C}$：否则 q 会位于 ∂P 上或与之相连，而 q 就会被保留。因此， η的直线是经过 q的唯一一条顶点对直线。全点在一条直线上至多有两条射线；边界点或 T形交点在一条直线上至多有一条非承载射线，因为这些射线位于一个开半平面内。因此 q 至多有 s_q 条类型 4 的射线。

现在我们来计数。类型 1 的射线和类型 2a 射线的配对射线都无效，且彼此不同，因为前者被计费，而后者没有。因此，类型 1 和 2a 的射线至多有 λ 条。将每一条类型 2b 或 3 的射线映射到其分支经过的一个施泰纳点，选择方式如上。该点可以确定这个分支，因为至多只有一个分支经过它。对于类型 2b，分支位于一条不是顶点对直线的直线上；对于类型 3，分支位于顶点对直线上，因此这两种类型使用不同的点。类型 2b 的分支只包含一个顶点，因此只有一条有效端射线。若两条类型 3 的射线有相同的第一个角点 x，它们就会位于该分支的两端；此时该分支除相对内部中的 x 外不包含其他角点，因此不含顶点，也没有有效射线。所以该映射是单射，类型 2b 和 3 的射线至多有 $|S|$ 条。最后，类型 4 的射线至多有$\sum_{q\in S\setminus M} s_q$ 条。◀

▶ **引理 15**。 $\rho_\star \le \rho + \lambda + |S|$.

证明。 根据引理 12–14， $\Psi(M)$ 是 $\Pi_\star$ 中的一个划分，其中 $|\Psi(M)| \le \rho + \chi - \sum_{q\in S\setminus M} s_q \le \rho + \lambda + |S|$。◀

4.3 动态规划

现在说明如何在 $O(n^{12})$ 时间内计算出一个至多包含 $\rho_\star$ 个三角形的划分。该算法扩展了用于无施泰纳点划分 [4]的动态规划：状态是一对终端，而不是一对顶点，其中终端是 P 的一个顶点，或是附着于某个顶点的 $\mathcal{C}$中的一个点；从顶点到其附着点的线段起到连接线段的作用。每个推导都会产生一个划分，这是一个绕数恒等式。$\Pi_\star$ 中的每个划分都能被找到，这源于平面图及其对偶图的生成树之间的对偶性：连接线段以及 ∂P 中连续角点之间除一个部分外的所有部分，构成边图的生成树，因此三角形构成一棵树，而推导则可由这棵树读出。

终端与状态。设 v_0、……、v_{n-1} 是 P的顶点，按逆时针顺序排列，且$v_n = v_0$。终端是一个形如 $t = (k, p)$的数对，其中 $0 \le k \le n$，满足 $p = v_k$；或者 $k < n$ 且 $p \in \mathsf{C}$ 位于边 $v_k v_{k+1}$的相对内部；或者 $k < n$ 且 $p \in$C 位于 P的内部，且该点在经过 v_k的顶点对直线上。我们称 p 附着于 v_k。P 的一条边包含 C 上的 $O(n^2)$个点，每条经过 v_k的 $O(n)$条顶点对直线也如此，因此共有 $O(n^4)$个终端。我们将闭多边形曲线视为有向线段的形式和，并对 $z \in xy$ 取模，其中$xy + yx = 0$ 和 $xy = xz + zy$（即视为 1-链），并用ω_γ 表示 γ的绕数；它在 γ 之外定义，并且对求和具有可加性。对于 $i \le j$，令 γ_{ij} 为链$v_i v_{i+1} + \cdots + v_{j-1} v_j$。状态 $X(t_1, t_2)$是由两个不同终端 $t_1 = (k_1, p_1)$和 $t_2 = (k_2, p_2)$组成的有序对，其中 $k_1 \le k_2$。其曲线如图 6a 所示。

$$\gamma_X = \gamma_{k_1 k_2} + v_{k_2} p_2 + p_2 p_1 + p_1 v_{k_1}.$$

由这条曲线围成的区域可能是弱简单的，也可能是退化的；我们从不直接使用该区域，只使用这条曲线。如果 (L1) $k_1 = k_2$ and v_{k_1}, p_1, p_2 共线，或者 (L2) $k_2 = k_1 + 1$, $p_2 = v_{k_2}$, 和 p_1 位于边 $v_{k_1} v_{k_2}$上，则该状态是一个叶节点。这两种情况下 $\gamma_X = 0$。

转移。 $X = X(t_1, t_2)$ 的一个转移 由一个与 t_1 和 t_2 不同、且满足 $k_1 \le k_3 \le k_2$ 的终端 $t_3 = (k_3, p_3)$ 给出，其中三元组 $p_2 p_1 p_3$ 为逆时针方向或共线；含有重复点的三元组也视为共线。其代价分别为 1 或 0。它会转移到状态 $Y_1 = X(t_1, t_3)$ 和 $Y_2 = X(t_3, t_2)$（图 6b），并且

$$\gamma_X = \partial(p_2 p_1 p_3) + \gamma_{Y_1} + \gamma_{Y_2}, \tag{1}$$

因为 $\gamma_{k_1 k_3} + \gamma_{k_3 k_2} = \gamma_{k_1 k_2}$，线段 $v_{k_3} p_3$，$p_3 v_{k_3}$ 和 $p_1 p_3$，$p_3 p_1$ 和 $p_3 p_2$，$p_2 p_3$相互抵消。X 的推导 是一个有限转移树，以 X 为根，其叶节点是叶状态。其代价是各转移代价之和，而 $D(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 是 X的推导的最小代价。根状态为 $X_0 = X((0, v_0), (n, v_n))$，且 $\gamma_{X_0} = \partial P$。

▶ **引理16** (可靠性)。如果 $D(X_0) < \infty$，那么代价为 $D(X_0)$ 的推导会得到 P 的一个三角形划分，其中有 $D(X_0)$ 个三角形，且所有角点都位于 $V \cup \mathcal{C}$ 中。

证明。 逆时针三角形的绕数在其内部为1，在外部为 0；共线三元组围成的曲线绕数为 0。沿推导应用方程（1），其$D(X_0)$ 逆时针三角形 Δ_ℓ 几乎处处满足 $\sum_\ell \mathbf{1}_{\Delta_\ell} = \omega_{\partial P} = \mathbf{1}_P$。因此，它们的内部两两不相交，其并集为 P，且它们的角点都是终端中的点。◀

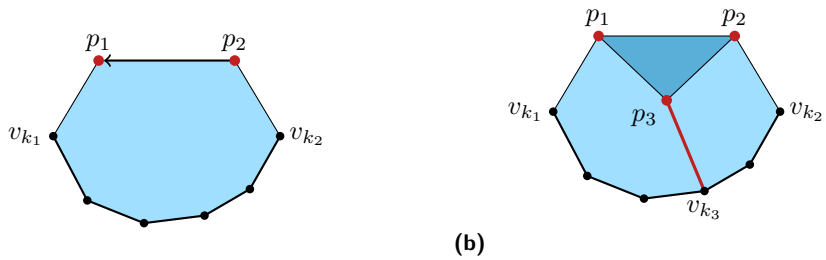


图 6 (a) 状态 $X(t_1, t_2)$，其中有 $t_1 = (k_1, p_1)$ 和 $t_2 = (k_2, p_2)$；箭头表示线段 p_2p_1。(b) 一次转移，其中有 $t_3 = (k_3, p_3)$：三角形 $p_2p_1p_3$ 为深色，得到的两个状态沿线段 $v_{k_3}p_3$ （红色）以相反方向遍历。

求值。值 $D(X)$ 是下列方程的最小解：对于叶节点，$D(X) = 0$；对于其他状态，$D(X) = \min\{\text{cost} + D(Y_1) + D(Y_2)\}$，其中最小值取遍 X 的转移。若某个转移满足 $k_3 \in \{k_1, k_2\}$，则会转移到具有相同索引对的状态；并且存在代价为零的转移环，因此我们不按固定顺序处理状态。相反，我们采用 Knuth 对 Dijkstra 算法的推广 [14]。由于转移的值代价 $+D(Y_1) + D(Y_2)$ 关于 $D(Y_1)$ 和 $D(Y_2)$ 单调不减，且至少与它们各自相等，因此该方法适用。该算法按值从小到大的顺序确定状态。当确定状态 $X(t_a, t_b)$ 后，它会利用满足 $X(t_b, t_c)$ 已确定且 $t_3 = t_b$ 成立的转移，更新每个状态 $X(t_a, t_c)$；并利用满足 $X(t_c, t_a)$ 已确定且 $t_3 = t_a$ 成立的转移，更新每个状态$X(t_c, t_b)$。存储值确定时所作的选择，即可得到代价为 $D(X_0)$ 的推导。各值均为整数；由于三角剖分属于 $\Pi_\star$，根据下文的引理 17，$D(X_0) \le n - 2$；因此可以忽略较大的值，桶队列的每次操作摊销耗时为 $O(1)$。

该类中的所有划分均可找到。固定一个划分 $\mathcal{T}' \in \Pi_\star$（不一定是最优的），并为 P内部 $\mathcal{T}'$ 的每个施泰纳点 r 选择一条连接线段 ru_r。这些连接线段与相邻角点之间的 ∂P 的部分（除一部分外）构成由 $\mathcal{T}'$的各边组成的平面图的一棵生成树，因此，其余边构成该图的对偶图的一棵生成树；对偶图的节点是三角形和 P的外部。以外部为根读取这棵树，可得到一个推导，其中每个三角形对应一次代价为 1 的转移。

令 Q 为$\mathcal{T}'$的角点集合。根据引理1，该集合包含 V；令 E 为$\mathcal{T}'$的边的并集。$E \setminus Q$ 中的每个点都位于包含它的每条边的相对内部，而这些边位于同一条直线上，因为边不会相交。因此，$E \setminus Q$ 的连通分支的闭包是线段，它们构成一个顶点集为Q的平面图 G。G 的有界面是$\mathcal{T}'$中三角形的内部，而无界面是 P的补集。图 G 是连通的，因为相交的两个三角形的边界也相交，并且 P（即这些三角形的并集）是连通的。G 中位于 ∂P上的一条边，其一侧是无界面，另一侧是一个三角形；沿 ∂P逆时针方向定向该边时，该三角形位于其左侧。其他每条边的两侧各有一个三角形。

令 $v_0 = b_0, b_1, \ldots, b$ 为按逆时针顺序排列的 ∂P上的角点。边界边是该顺序中相邻角点之间的边，而 bv_0 是根边。每条选定的连接都是 G的一条边，因为它位于 E中，端点是角点，且其相对内部不含角点。每个不在 ∂P 上的角点都是位于 P内部的施泰纳点 r，并且恰好是某条选定连接的一个端点，其另一个端点是 P的一个顶点。因此，条边界边和选定的连接构成 G的一棵生成树 B：由路径 $b_0 \ldots b$ 及悬挂边组成。G 中不属于 B 的边是根边和对角线。

对于角点 q，令 $\beta(q)$ 在 $q \in \partial P$ 时为 q，否则为 u_q；并令 $\iota(q)$ 为满足以下条件的指标：

$\beta(q) = b_{\iota(q)}$。令 $k(q)$ 为满足 $k < n$ 的指标，使得 $\beta(q)$ 位于边 $v_k v_{k+1}$ 上且不同于 v_{k+1}，并令 $t_q = (k(q)$ $q)$。根据 (i) 和连接的定义， t_q 是一个终端，而不同的角点对应不同的终端。此外， $k(q)$ 关于 $\iota(q)$ 单调不减。

- (O1) 如果 xy 是逆时针定向的边界边，或是任意方向定向的选定连线，那么 $k(x) \leq k$ (y)，且 $X(t_x, t_y)$ 是一个叶节点。对于连接 r 和 v_k 的连线， $k(x) = k(y) = k$，且 (L1) 成立，因为 x、 y 中有一个是 v_k。对于不以 y 为顶点的边界边， x 和 y 位于同一条边 $v_k v_{k+1}$ 上， $k(x) = k(y) = k$，且 v_k、 x、 y 共线，因此 (L1) 成立。对于边界边， $y = v_{k+1}$， $k(x) = k$， $k(y) = k + 1$，且 x 位于边 $v_k v_{k+1}$ 上，因此 (L2) 成立。

设 T^* 是一个图，其节点为 G 的各个面；对于 G 中不属于 B 的每条边，都在 T^* 中对应一条边，连接该边两侧的两个面。根据生成树与其补集之间的经典对偶性， T^* 是一棵树：它是连通的，因为平面中树 B 的补集是连通的，所以任意两个面之间都存在一条折线路径，该路径避开 B 和 Q，并且只有限次穿过 G 的边；此外，它的边数比 G 少 $|Q| - 1$，根据欧拉公式，这比其节点数少一。无界面仅与不属于 B 的边中的根边相邻，因此它是 T^* 的一个叶节点，并以此为根对 T^* 定根。对于 T^* 的一条边 d，也就是根边或对角线，设 Δ_d 为位于 d 远离根的一侧的三角形，并令 $\mathcal{T}_d$ 为 Δ_d 子树中的三角形集合。将 d 定向为 yx，使 Δ_d 位于其左侧。

▶ **引理 17.** $D(X_0) \leq |T'|$ 对于每个划分 T' $\in \Pi_\star$。

证明。我们使用上述记号，并证明两个断言。

断言 1： $k(x) \leq k(y)$ 对于 T^* 的每条边 $d = yx$ 都成立。对于根边， $x = v_0$ 且 $k(x)$ $= 0$。设 d 是一条对角线，并令 $\gamma_d = \sum_{\Delta \in \mathbf{T}_d} \partial\Delta$ 为 G 的边上的一个 1-链。有向边在 γ_d 中的系数为 [：当其左侧的三角形属于 T 时， $_d] - [$；当其右侧的三角形属于 T 时， $_d]$。对于除 d 以外的对角线，其两侧的三角形在 $T^* - d$ 中相邻，因此二者要么都属于 $\mathbf{T}_d$，要么都不属于 T，故系数为 0。对于根边，其左侧的三角形是根的子节点，仅当 d 是根边时才属于 $\mathbf{T}_d$，因此系数为 0。 $d = yx$ 的系数为 1，而逆时针方向的边界边的系数为 0 或 1，因为其右侧是无界面。因此 $\gamma_d = yx + \gamma'$，其中 γ' 是 B 上的一个链，其逆时针方向的边界边上的系数为 0 或 1。由于 γ_d 是闭曲线之和， γ' 的边界为 $y - x$；又由于 B 是一棵树， γ' 是 x 到 y 在 B 中的路径。此路径沿着从 $b_{\iota(x)}$ 到 $b_{\iota(y)}$ 的边界路径延伸。若 $\iota(x)$ $> \iota(y)$，它将沿顺时针方向经过边界边，而这些边在逆时针方向上的系数为 -1。因此 $\iota(x)$ $\leq \iota(y)$ 且 $k(x) \leq k(y)$。

断言 2：对于 T^* 的每条边 $d = yx$， $X_d = X(t_x, t_y)$ 都是一个状态，且 $D(X_d) \leq |\mathbf{T}_d|$。根据断言 1，并且由于不同的角点对应不同的终端，它确实是一个状态。我们对 $|\mathbf{T}_d|$ 使用归纳法。令 $x = q_0$、 q_1、 ……、 $q_I = y$ 为 $\partial\Delta_d$ 上按逆时针顺序排列的角点，使得 d 是从 q_I 到 q_0 的边，并且每个 $q_i q_{i+1}$ 都是 G 的一条边， Δ_d 位于其左侧。若 $q_i q_{i+1}$ 属于 B，则它是沿逆时针方向的连接或边界边，因此根据 (O1)， $k(q_i) \leq k(q_{i+1})$，且 $X(t_{q_i}, t_{q_{i+1}})$ 是一个叶节点。否则， $q_i q_{i+1}$ 是一条对角线 d'：它不是根边；根边唯一的三角形是根的子节点，而仅当 d 是根边时，该三角形才是 Δ_d。 d' 另一侧的三角形是 T^* 中 Δ_d 的一个子节点，因此它是 $\Delta_{d'}$，位于 $q_{i+1} q_i$ 的左侧，并且 $X_{d'} = X(t_{q_i}$, $t_{q_{i+1}})$。根据断言 1， $k(q_i) \leq k(q_{i+1})$；根据归纳假设， $D(X_{d'}) \leq |\mathbf{T}_{d'}|$。

因此，对于所有 $i < j$， $X(t_{q_i}, t_{q_j})$ 都是一个状态。点q_0、 ……、 q_I按逆时针顺序位于凸集 Δ_d的边界上，因此对于 $i < j < l$，三元组 $q_l q_i q_j$ 的方向为逆时针或共线；而 $t_3 = t_{q_j}$ 是从 $X(t_{q_i}, t_{q_l})$ 到 $X(t_{q_i}, t_{q_j})$ 和 $X(t_{q_j}, t_{q_l})$ 的一次转移。如果 q_i、 q_j、 q_l 是 Δ_d 的角点，其代价为 1；如果它们位于 Δ_d 的一条边上，其代价为 0。通过对角线对顶点为 0、1、……、 I的凸多边形进行三角剖分，且这些对角线包含

Δ_d角点的索引对（若它们不是多边形边）。一个三角形由这三个角点构成，其余每个三角形的顶点都位于 Δ_d的一侧。从多边形边 $\{0, I\}$ 向内读取此三角剖分，可得到一棵总代价为 1 的转移树，该树从 X_d 通向状态 $X(t_{q_i},\ t_{q_{i+1}})$（对于 $i < I$）。因此， $D(X_d)$ $\leq 1 + \sum_{d'} |\mathcal{T}_{d'}| = |\mathcal{T}_d|$，其中$d' \neq d$ 遍历 $\partial\Delta_d$上的对角线。

对于根边 $d = bv_0$，我们有 $y = b$ 且 $k(b) = n-1$，由断言 2 可得 $D(X_d) \leq |\mathcal{T}'|$。三元组 $v_n v_0 b$ 含有一个重复点，因此 $t_3 = t_{\bar{b}}$ 是从 X_0 到 X_d 、代价为 0 的转移，且$X(t_{\bar{b}},\ (n,\ v_n))$；后者根据 (L2) 是一个叶节点。因此 $D(X_0) \leq |\mathcal{T}'|$。◀

▶ **定理 18。 </style}一个 的三角形划分，其三角形数量不超过 (**P) ，并且每个三角形的斯坦纳点都位于 P的顶点对所确定的两条不同直线上，可以在 $O(n^{12})$时间内计算得到。

证明。将引理 16 和 17 应用于 $\Pi_\star$中的一个最优划分后，为 X_0 计算出的推导给出一个划分，其斯坦纳点位于 C 中，且包含 $\rho(P) \leq D(X_0) \leq \rho_\star(P)$ 个三角形。终端数为 $O(n^4)$，状态数为 $O(n^8)$。Knuth 算法对每组三个终端检查 O 次 (1)，并进行一次方向测试，因此需要 $O(n^{12})$ 时间和 $O(n^8)$ 空间。C 中的点具有输入中次数为常数的有理坐标，因此每次测试需要 $O(1)$ 次算术运算。计算不含重复点的 C 和终端，并测试哪些点位于 P中，需要 O (n^5) 时间。◀

4.4 近似因子

结合这两种构造可知， $\rho_\star$ 优于因子2。直观而言，只有当松弛量 $|S| + \lambda/2$ 很小时， ρ_0 才接近2ρ，此时 $\rho_\star$ 也接近 ρ。

▶ **定理 19。** 对于任意简单多边形 P,

$$\rho_\star(P) \leq \frac{5\rho(P) - 2}{3},$$

其中， $\rho_\star(P)$ 是 $\Pi_\star$中划分的最小规模。因此，定理 *18* 的动态规划是一个$5\ 3$-近似算法，可在 $O(n^{12})$ 时间内运行。

证明。 根据 $\rho_\star \leq \rho_0$ 以及定理 9 和引理 15， $3\rho_\star \leq 2\rho_0 + \rho_\star \leq 2(2\rho - 1 - |S| - \lambda/2) +$ $(\rho + \lambda + |S|) = 5\rho - 2 - |S| \leq 5\rho - 2$。◀

参考文献

1 Mikkel Abrahamsen. 覆盖多边形甚至更加困难。见第*62*届*IEEE*计算机科学基础研讨会论文集（*FOCS 2021*），第375–386页。IEEE，2022年。 doi:10.1109/FOCS52979.2021.00045。2 Mikkel Abrahamsen、Joakim Blikstad、André Nusser 和 Hanwen Zhang。多项式时间内对简单多边形进行最小星形划分。*TheoretiCS*，5(2):1–68，2026年。预印本见第56届ACM计算理论研讨会论文集（STOC 2024）。 doi:10.46298/theoretics.26.2。3 Giedrius Alkauskas。具有最多边数的正三角形并，2025年。 arXiv:2510.22584。4 Takao Asano、Tetsuo Asano 和 Ron Y. Pinter。多边形三角剖分：效率与最小性。算法杂志，7(2):221–231，1986年。 doi:10.1016/0196-6774(86)90005-2。5 Kiril Bankov。将多边形划分为三角形。数学竞赛，23(2):23–29，2010年。网址： https://www.wfnmc.org/Journal%202010%202.pdf#page=27。

6 Reilly Browne、Prahlad Narasimham Kasthurirangan、Joseph S. B. Mitchell 和 Valentin Polishchuk。简单多边形中凸覆盖和隐藏集的常数因子近似算法。见第64届IEEE计算机科学基础研讨会论文集（FOCS 2023），第1357–1365页。IEEE，2023年。 doi:10.1109/FOCS57990.2023.00083。7 Bernard Chazelle。线性时间内对简单多边形进行三角剖分。《离散与计算几何》，6(3):485–524，1991年。预印本见第31届IEEE计算机科学基础研讨会论文集（FOCS 1990）。 doi:10.1007/BF02574703。8 Chiuyuan Chen 和 Ruei-Chuan Chang。关于多边形三角剖分的最小性。BIT，30(4):570–582，1990年。 doi:10.1007/BF01933206。9 Tobias Christ。超越三角剖分：用三角形覆盖多边形。见第12届算法与数据结构国际研讨会论文集（WADS 2011），《计算机科学讲义》第6844卷，第231–242页。Springer，2011年。 doi:10.1007/978-3-642-22300-6_20。10 Mark de Berg、Otfried Cheong、Marc van Kreveld 和 Mark Overmars。《计算几何：算法与应用》。Springer，第3版，2008年。 doi:10.1007/978-3-540-77974-2。11 Stephan J. Eidenbenz 和 Peter Widmayer。具有对数级性能保证的最小凸覆盖近似算法。《SIAM计算杂志》，32(3):654–670，2003年。预印本见第9届欧洲算法研讨会论文集（ESA 2001）。doi:10.1137/S0097539702405139。12 Leonidas J. Guibas、Micha Sharir 和 Shmuel Sifrony。具有两个自由度的一般运动规划问题。《离散与计算几何》，4(5):491–521，1989年。预印本见第4届ACM计算几何研讨会论文集（SoCG 1988）。 doi:10.1007/BF02187744。13 Linda Kleist 和 Lena Scherzer。多边形的三角形覆盖：近似算法与复杂性。见第38届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集（SODA 2027），2027年。即将出版。完整版本：arXiv:2610.23634；定理编号以该版本为准。14 Donald E. Knuth。Dijkstra 算法的一种推广。《信息处理快报》，6(1):1–5，1977年。 doi:10.1016/0020-0190(77)90002-3。15 Andrzej Lingas。非直线型孔洞的威力。见国际自动机、语言与程序设计专题讨论会论文集（ICALP 1982），《计算机科学讲义》第140卷，第369–383页。Springer，1982年。 doi:10.1007/BFb0012784。16 Joseph O’Rourke。《艺术画廊定理与算法》。牛津大学出版社，1987年。17 Joseph O’Rourke、Subhash Suri 和 Csaba D. Tóth。多边形。载于 Jacob E. Goodman、Joseph O’Rourke 和 Csaba D. Tóth 编，《离散与计算几何手册》，第30章，第787–810页。Chapman and Hall/CRC，第3版，2017年。 doi:10.1201/9781315119601。18 Richard Pollack、Micha Sharir 和 Shmuel Sifrony。通过平移序列分离两个简单多边形。《离散与计算几何》，3(2):123–136，1988年。 doi:10.1007/BF02187902。19 Micha Sharir 和 Pankaj K. Agarwal。《Davenport–Schinzel序列及其几何应用》。剑桥大学出版社，1995年。20 Ady Wiernik 和 Micha Sharir。用线段实现非线性Davenport–Schinzel序列的平面实现。《离散与计算几何》，3(1):15–47，1988年。预印本见第27届IEEE计算机科学基础研讨会论文集（FOCS 1986）。 doi:10.1007/BF02187894。

人工智能声明

本文在 AI 助手 Claude（Anthropic）的鼎力协助下完成。Claude 参与了算法和证明的开发、编写用于测试它们的代码，

核查证明和参考文献，并撰写本文。作者核查了所有结果，并对本文内容负责。

划分与覆盖

本附录详细写出引言中陈述的下界 $\rho(P)/\kappa(P) = \Omega(\alpha(n))$。这是 [3] 中概述的构造：一个由 N 个三角形组成的简单多边形可以有 $\Omega(N\,\alpha(N))$ 条边：将一组具有较长下包络的线段 [20] 转化为一个每条线段对应一个三角形覆盖的多边形。我们将详细阐述这一构造，并统计凹顶点而非边的数量。

▶ **引理20** (之后 [3])。对于无穷多个 N，存在简单多边形，其 $\kappa(P) \le N+1$且 $\rho(P) = \Omega(N\,\alpha(N))$。

证明。对于线段 s 和 $x \in \mathbb{R}$，令 $s(x)$ 为满足 $(x,y) \in s$的最小 y；若不存在，则令 $s(x) = +\infty$。设 Σ 为有限线段集合。如果存在 $x_1 < \cdots < x_\Lambda$和 $\tau_1,\dots,\tau_\Lambda \in \Sigma$，且满足 $\tau_i \neq \tau_{i+1}$，使得对于每个 $s \in \Sigma\setminus\{\tau_i\}$，$x_i$位于 τ_i的 x投影内部，且 $\tau_i(x_i) < s(x_i)$，那么我们称 Σ 的下包络长度至少为 Λ。存在常数 $c_0 > 0$，使得对于无穷多个 N，某个由 N 条线段构成的集合具有长度至少为 $c_0 N\,\alpha(N)$ [20] 的下包络（另见 [19, 第 4]章）。

固定这样一个集合 Σ，使得 $|\Sigma| = N$。线段端点以及 x_1、……、x_Λ 的微小扰动不会破坏定义条件：点 x_i 仍处于 τ_i 在 x 轴上的投影内部，因此 $\tau_i(x_i)$ 连续变化；而 $s(x_i)$ 关于 x_i 以及 s 的端点下半连续，因为线段是闭集，所以严格不等式仍然成立。因此，我们可以假设 Σ 中没有垂直线段、任意两条线段不平行、没有三条线段交于同一点，并且线段的端点、它们的两两交点以及 x_1、……、x_Λ 的 x 坐标两两不同。映射 $(x,y) \mapsto (x,y')$（其中 y' 是 y 的递增仿射函数）保持这些性质，因此我们还可以假设，对某个 $R > 0$，$\Sigma \subset (-R,R) \times (0,1)$。令 $s_0 = [-R,R] \times \{1\}$ 和 $\Sigma_0 = \Sigma \cup \{s_0\}$。

多边形。令 $A = (0,\ 1)$ 和 $f(x,\ y) = \left(\frac{x}{1+y},\ \frac{y}{1+y}\right)$。这是一个射影映射，也是从半平面 $y > -1$ 到半平面 $y < 1$ 的双射，其逆映射为 $(u,\ v) \mapsto \left(\frac{u}{1-v},\ \frac{v}{1-v}\right)$。它将线段映射为线段，并将从点 q 出发的向上竖直射线映射为线段 $f(q)A$ 去掉点 A。对于 $s \in \Sigma_0$，令 $T_s = \mathrm{conv}(f(s) \cup \{A\})$，这是一个非退化三角形，因为 s 不是竖直的，并令

$$P = \bigcup_{s\in\Sigma_0} T_s.$$

于是 $\kappa(P) \le N+1$。三角形 T_s是竖直半条带 $H_s = \{(x,\ y) : s(x) \le y\}$ 的像，也就是 $T_s \setminus \{A\} = f(H_s)$。因此 $P\setminus\{A\} = f(U)$，其中

$$U = \bigcup_{s\in\Sigma_0} H_s = \{(x,y) : -R \le x \le R,\ y \ge \mathrm{env}(x)\}, \qquad \mathrm{env}(x) = \min_{s\in\Sigma_0} s(x) \le 1.$$

令 $-R = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_J = R$为 $\pm R$以及 Σ的线段端点和两两交点的 x坐标。在每个区间 $(\xi_{j-1},\ \xi_j)$ 上，Σ_0 中其 x投影包含该区间的线段集合是固定的，且其中任意两条都不交。因此，由于任意两条线段都不平行，且 s_0 严格位于 Σ的每条线段上方，同一条线段 $\sigma_j \in \Sigma_0$会在整个区间上取得包络。因此，∂U 由两条射线 $\{\pm R\} \times [1,\infty)$ 以及一条 x 单调的多边形路径 Γ 组成，该路径从 $(-R,\ 1)$ 延伸至 $(R,\ 1)$，由 σ_j 在

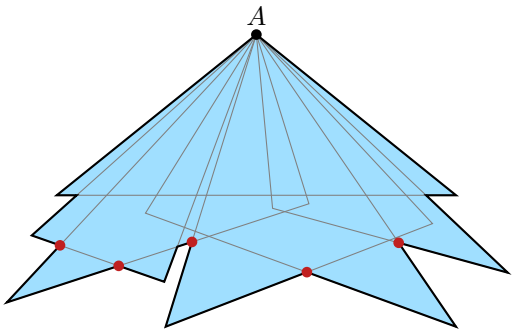


图7 由五条线段构成的多边形 P。三角形 T_s 以灰色绘出；最上方的三角形是 T_{s_0}。红色顶点来自下包络上的交点，且为凹顶点。

$[\xi_{j-1}, \xi_j]$组成，其中连续图像在 ξ_j处由一条竖直线段（也可能是一个点）连接。由于 f 是一个将竖直直线映射为经过 A的直线的同胚，P 是由多边形曲线 $f(\Gamma) \cup f(R, 1)A \cup Af(-R, 1)$围成的闭区域。该曲线是简单的：$f(\Gamma)$是简单的，因为 f 是单射；而 A 处的两条线段位于直线 $x = \pm R$的像上，这些直线仅在 $(\pm R, 1)$ 处与 Γ 相交。因此，P 是一个简单多边形，且 A 位于其核中（图7）。

凹顶点。设 $0 < j < J$ 满足：$\sigma_j \neq \sigma_{j+1}$ 和 ξ_j 是集合 Σ中两条线段的交点的 x 坐标。则 ξ_j 不是端点的 x 坐标，因此 env 在 ξ_j 处连续，且σ_j 和σ_{j+1} 都包含 $p = (\xi_j, \text{env}(\xi_j))$。没有其他线段包含 p，所以在 ξ_j 附近，每条其他线段都严格位于 p上方；而在 p 附近，集合 U 是位于σ_j 和σ_{j+1}所对应直线上方的闭半平面的并集。这些直线互不相同，并在 p 处相交，因此 p 是 U 的一个顶点，其内角大于 π。映射 f 在 p处是局部微分同胚，且将直线映射为直线，因此 $f(p)$ 是 P的一个凹顶点。

现在令 $1 \leq i < \Lambda$。线段 τ_i 是在 x_i 处的唯一极小值点（对于 s_0也如此，因为 $\tau_i(x_i) < 1$），因此对于包含 x_i的区间 (ξ_{j-1}, ξ_j)，$\tau_i = \sigma_j$，对 τ_{i+1}也同样如此。由于 $\tau_i \neq \tau_{i+1}$，某个 $\xi_j \in (x_i, x_{i+1})$满足 $\sigma_j \neq \sigma_{j+1}$。如果 Σ 中任一线段的端点的 x坐标都不在 (x_i, x_{i+1}) 内，那么 ξ_j 就是某个交点的 x坐标，并且 P有一个凹顶点 $f(p)$，其 p位于带状区域 $(x_i, x_{i+1}) \times \mathbb{R}$内。这些带状区域彼此不相交，其中至多 $2N$ 个包含某个端点的 x坐标。因此 P 至少有 $\Lambda - 1 - 2N \geq c_0 N\,\alpha(N)$个 $-2N-1$ 凹顶点。根据引理1，将 P划分为三角形的每种划分都至少包含上述数量的三分之一的三角形；而 $\rho(P) = \Omega(N\,\alpha(N))$，因为$\alpha(N) \to \infty$。根据引言中的上界 [18, 12]，$P$有 $n = O(N\,\alpha(N))$个顶点，因此对于这些多边形，$\rho(P)/\kappa(P) = \Theta(\alpha(n))$。◀

因此，三角剖分能以因子 $O(\alpha(n))$ 近似 κ，但无论是否使用施泰纳点，都不存在能够输出划分并以常数因子近似 κ 的算法。因此，三角形覆盖 [13] 的常数因子算法必须输出相互重叠的三角形。