arXiv:2611.31147v1 [math.OA] 23 Nov 2026

$C^*(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2)$ 不具有局部提升性质

JEAN ROYDOR

摘要。我们证明，对于所有整数 $k,\ m \geq 2$，全群 C^*-代数 $C^*(\mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_m)$ 均不具有局部提升性质，从而否定了 Ozawa 的小泽强基尔希伯格猜想。我们的证明受到 Ioana 关于希尔伯特–施密特稳定性的构造的启发。随后，我们通过证明 $C^*(\mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_m)$ 不能局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$，进一步加强了这一结果。因此，提升性质、局部提升性质以及局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 的性质在最大张量积下均不保持。

1. 引言

Kirchberg 在 [9] 引入了局部提升性质。一个含单位元的 C^*-代数 A 具有局部提升性质 （LLP），是指每个含单位元的完全正（u.c.p.）映射 $\alpha:\ A \to C/J$（其中J 是含单位元的 C^*-代数中的闭理想） C，都能在每个有限维算子系统 $E \subset A$ 上拥有一个 u.c.p. 提升。 提升性质 （LP）则要求在整个 A 上存在 u.c.p. 提升。

局部提升性质与弱期望性质之间的对偶关系在康尼斯嵌入问题中发挥了核心作用；参见 [13]。Junge 和 Pisier 证明了 $\mathbb{B}(\ell_2)$不具有局部提升性质 [8]。可 amenable 群和自由群的满群 C^*代数具有局部提升性质。Thom 给出了第一个其满群 C^*代数不具有局部提升性质的具体群；该群具有性质 (T) [15]。Ioana、Spaas 和 Wiersma 将相对性质 (T) 与上同调障碍相结合，证明了其他一些满群 C^*代数也不具有局部提升性质，其中包括 $C^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))$ [7, 推论 B]。

2004 年，Ozawa 提出最大张量积是否保持局部提升性质的问题，并指出只需考虑 $C^*(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{F}_\infty)$ [11, 第 3] 节末尾。他后来将问题归结为 $C^*(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2)$，并将其与自己的强 Kirchberg 猜想联系起来 [12, 定理 4] 后的讨论。Enders 和 Shulman 证明，该代数具有局部提升性质，当且仅当 $\mathrm{Ext}(C^*(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2))$ 是一个群 [4, 推论 7.6]。该问题也见于 [5, 问题 1.6]，并列于 Pisier 著作中的未决问题之中 [13, 第 25] 章。

定理 A。对于整数 $k, m \geq 2$，群的全 C^*-代数 $C^*(\mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_m)$ 不具有局部提升性质。

由于 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ 具有 Haagerup 性质，因此不存在满足以下条件的无限子群 H：$(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2, H)$ 具有相对性质(T)。据我们所知，这是首个不存在此类子群、但其群的全 C^*-代数不具有局部提升性质的例子。定理A 也回答了 [5, 问题 1。8]。

~ ~设 $H \subset H$ 为希尔伯特空间，令 $\Phi_H\colon \mathbb{B}(H) \to \mathbb{B}(H)$ 为压缩算子 $\Phi_H(X) = P_H X|_H$，其中 P_H 是到.....上的正交投影

H。小泽对局部提升性质的重新表述 [12, 引理 5] 给出如下推论。

推论 B。 存在 $\kappa > 0$，使得对于每个整数 $m \geq 2$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在一个整数 $N \geq 1$ 和酉元 U_1、.....、U_m、V_1、.....、$V_m \in U(\ell_2^N)$，满足

$$\|[U_i, V_j]\| \leq \varepsilon \qquad (1 \leq i, j \leq m),$$

使得对于任意希尔伯特空间 $\widetilde{H} \supset \ell_2^N$ 和满足条件的酉元 $\widetilde{U}_1$、.....、$\widetilde{U}_m$、$\widetilde{V}_1$、.....、$\widetilde{V}_m \in U(\widetilde{H})$，有

$$[\widetilde{U}_i, \widetilde{V}_j] = 0 \qquad (1 \leq i, j \leq m),$$

有

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \|\Phi_{\ell_2^N}(\widetilde{U}_i) - U_i\|, \|\Phi_{\ell_2^N}(\widetilde{V}_i) - V_i\| \right\} > \kappa.$$

日期：2026年11月17日。

一个 C^*-代数 A 局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$，当且仅当对于每个有限维子空间$E \subset A$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个单射线性映射 $j\colon E \to C^*(\mathbb{F}_\infty)$，使得

$$\|j\|_{\mathrm{cb}}\,\|j^{-1} : j(E) \to E\|_{\mathrm{cb}} < 1 + \varepsilon.$$

这里 $\|\cdot\|_{\mathrm{cb}}$ 是完全有界范数。局部提升性质蕴含可局部嵌入到$C^*(\mathbb{F}_\infty)$。正如 [14], 所解释的，局部可嵌入性是局部提升性质/弱期待性质对偶性中局部提升性质一侧的商弱期望性质的类似概念。我们得到以下加强结论。

定理 C。 对于整数 $k, m \geq 2$，全群 C^*-代数 $C^*(\mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_m)$ 不能局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$。

每个 $C^*(\mathbb{F}_k)$ 都具有提升性质，并且局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$。由于 $C^*(\mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_m) = C^*(\mathbb{F}_k) \otimes_{\max} C^*(\mathbb{F}_m)$，定理 A 和 C 表明，这三种性质均不在最大张量积下保持。

我们的构造受到 Ioana 关于希尔伯特–施密特稳定性的工作的启发。他构造了一个从 $C^*(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2)$ 到矩阵代数的带迹超积的 $*$-同态，且不存在 $*$-同态提升，并提出该映射是否存在酉完全正提升 [6, p. 4031]。我们在每个因子中使用三个生成元：其中两个提供谱隙估计，第三个则编码与沃尔什基变形相关联的矩阵族。指数为二的包含$\mathbb{F}_3 \hookrightarrow \mathbb{F}_2$ 随后给出秩二情形。

令 u_1、u_2、u_3 为 $\mathbb{F}_3$ 的自由生成元，并令 e 为其单位元。

定理 D。 存在 $c > 0$ 和有限维希尔伯特空间 $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$，每个空间都带有两组三元组$U_{i,n}$、$V_{i,n} \in U(H_n)$、$i = 1$、2、3，使得

$$\max_{1\leq i,j\leq 3} \|[U_{i,n}, V_{j,n}]\| \longrightarrow 0,$$

并且，对于每个 n、希尔伯特空间 K 上的每个酉表示 $\pi\colon \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \to U(K)$，以及每个 $T \in \mathbb{B}(H_n, K)$，

$$\sum_{i=1}^{3} \big(\|\pi(u_i, e)T - TU_{i,n}\|_{\mathrm{HS}}^2 + \|\pi(e, u_i)T - TV_{i,n}\|_{\mathrm{HS}}^2\big) \geq c\|T\|_{\mathrm{HS}}^2. \tag{1.1}$$

这里 $\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \mathrm{Tr}(T^*T)$，其中 Tr 未归一化。
Let

$$q : \ell_\infty(\mathbb{B}(H_n)) \longrightarrow \ell_\infty(\mathbb{B}(H_n))/c_0(\mathbb{B}(H_n))$$

为商映射。渐近交换关系在此商中给出一个 $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ 的酉表示ρ，定义为

$$\rho(u_i, e) = q((U_{i,n})_n), \qquad \rho(e, u_i) = q((V_{i,n})_n) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

这两组三元组取自 Ioana 的分块构造 [6, 关于命题 1.5 的证明，第 5 节。1], 其中的交换子在算子范数意义下已经趋于零 [6, 引理 6.3 和备注 1。9]我们使用在两个外层张量因子上关于共轭作用具有谱隙的成对元素 [6,引理 4。3]。

与 Ioana 的变形类似，我们的构造会根据张量分量的度对其进行衰减 [6, 构造 1.7、引理 6.2 和式 (6.1)]。我们通过同一个矩阵代数中的两个极大交换子代数的 Walsh 基来实现这一机制，这两个基由旋转每个张量因子得到；Ioana 则在双重张量积中进行研究。他利用扰动结果以及彼此不相容的多项式维数界和指数维数界 [6, 推论 6.4 和引理 6.5–6。6]。我们通过标准形式，对与近似交织算子相关联的单个向量进行估计，以此取代维数论证（引理 3.1 和命题 4.3）。变形控制其 Walsh 度（命题 2.2）；矩阵谱隙与互补子空间的精确交换带来一致强制性（引理 4.1 和命题 4.2），从而在相关的 Walsh 空间上得到（4.3）。由此便得到定理 1.1中的交织障碍（D ），适用于任意希尔伯特空间上的表示。

2. 六个酉元的构造

2.1. 同一个立方体上的两个 Walsh 基。 我们用 $\mathrm{tr}_k = k^{-1}\mathrm{Tr}$ 表示 $\mathbb{M}_k$ 上的归一化迹。对于含幺子 C^* 代数 $D \subset \mathbb{M}_k$，令 $L_2(D)$ 表示带有内积 $\langle b, c\rangle = \mathrm{tr}_k(c^*b)$ 的 D，其范数为 $\|b\|_2$。对于 $n \geq 2$，设 $[n] = \{1, \dots, n\}$ 以及 $H_n^0 = (\ell_2^2)^{\otimes n}$，于是 $\mathbb{B}(H_n^0) = \mathbb{M}_2^{\otimes n} \cong \mathbb{M}_{2^n}$，并令

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_n = (1 - 1/n)^{1/2}\sigma + n^{-1/2}\tau \in \mathbb{M}_2.$$

由于 $\sigma\tau = -\tau\sigma$，σ_n 是无迹自伴酉算子。对于 $k \in [n]$，定义

$$x_{k,n} = 1_2^{\otimes(k-1)} \otimes \sigma \otimes 1_2^{\otimes(n-k)} \in \mathbb{M}_{2^n},$$
$$y_{k,n} = 1_2^{\otimes(k-1)} \otimes \sigma_n \otimes 1_2^{\otimes(n-k)} \in \mathbb{M}_{2^n},$$

where 1_2 是单位矩阵，指数为零的因子省略。对于 $S \subseteq [n]$，put

$$\chi_{S,n} = \prod_{k \in S} x_{k,n}, \qquad \psi_{S,n} = \prod_{k \in S} y_{k,n} \quad \text{in } \mathbb{M}_{2^n}, \qquad \chi_{\varnothing,n} = \psi_{\varnothing,n} = 1_{H_n^0}.$$

这些群

$$G_n = \{\chi_{S,n} : S \subseteq [n]\}, \qquad F_n = \{\psi_{S,n} : S \subseteq [n]\} \subset \mathcal{U}(H_n^0)$$

由实矩阵组成。它们的张成空间 $\mathcal{A}_n = \operatorname{span} G_n$ 和 $\mathcal{B}_n = \operatorname{span} F_n$ 是 $\mathbb{M}_{2^n}$ 的含单位元阿贝尔子代数。这些群 G_n 和 F_n 分别构成 $L_2(\mathcal{A}_n)$ 和 $L_2(\mathcal{B}_n)$ 的标准正交基，称为它们的 ***Walsh*** 基。我们将次数 $|S|$ 赋予 $\chi_{S,n}$ 和 $\psi_{S,n}$。它们的交换子满足

$$G_n' \cap \mathbb{M}_{2^n} = \mathcal{A}_n,$$
$$F_n' \cap \mathbb{M}_{2^n} = \mathcal{B}_n.$$

用 $\triangle$ 表示对称差，我们有

$$x_{k,n}\chi_{S,n} = \chi_{S \triangle \{k\},n} \qquad \text{for every } k \in [n] \text{ and } S \subseteq [n]. \tag{2.1}$$

引理 2.1。 对于 $k \in [n]$ 和 $z \in G_n \cup F_n$，$\|[x_{k,n}, z]\| \leq 2n^{-1/2}$。保迹条件期望 $E_{\mathcal{B}_n} : \mathbb{M}_{2^n} \to \mathcal{B}_n$ 满足

$$E_{\mathcal{B}_n}(\chi_{S,n}) = (1 - 1/n)^{|S|/2}\psi_{S,n} \qquad \textit{for every } S \subseteq [n]. \tag{2.2}$$

证明。唯一非零的交换子出现在 $z = \psi_{T,n}$ 与 $k \in T$ 之间，其范数为 $\|[\sigma, \sigma_n]\| = 2n^{-1/2}$。张量积迹给出

$$\langle \chi_{S,n}, \psi_{T,n} \rangle = \begin{cases} (1 - 1/n)^{|S|/2}, & S = T, \\ 0, & S \neq T. \end{cases}$$

由于 $E_{\mathcal{B}_n}$ 是到 $L_2(\mathcal{B}_n)$ 上的正交投影，这就证明了（2.2）。 □

对于 $L_2(\mathcal{A}_n)$ 中的向量，它与 $L_2(\mathcal{B}_n)$ 的接近程度决定了其 Walsh 度（包括具有希尔伯特空间系数的情形）；这将帮助我们在 Walsh 空间中构造一个 Walsh 数较小的近似不变向量。

命题 2.2。 设 H 是一个希尔伯特空间，设 $n \geq 2$，并记

$$x = \sum_{S \subseteq [n]} c_S \otimes \chi_{S,n} \in H \otimes L_2(\mathcal{A}_n), \qquad c_S \in H.$$

对于每个 $\delta > 0$，

$$\sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S| \geq \delta n}} \|c_S\|^2 \leq (1 - e^{-\delta})^{-1} \operatorname{dist}(x, H \otimes L_2(\mathcal{B}_n))^2. \tag{2.3}$$

此外，

$$\sum_{S\subseteq[n]} \frac{|S|}{n}\|c_S\|^2 \le (1-e^{-1})^{-1}\,\mathrm{dist}\big(x, H\otimes L_2(\mathcal{B}_n)\big)^2. \tag{2.4}$$

距离取自 $H\otimes L_2(\mathbb{M}_{2^n})$。

证明。由（2.2）和正交性，

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}\big(x, H\otimes L_2(\mathcal{B}_n)\big)^2 &= \|x\|^2 - \|(1_H\otimes E_{\mathcal{B}_n})x\|^2 \\ &= \sum_{S\subseteq[n]} \big[1-(1-1/n)^{|S|}\big]\|c_S\|^2.\end{aligned} \tag{2.5}$$

对于 $0\le p\le n$，

$$1-(1-1/n)^p \ge 1-e^{-p/n} \ge (1-e^{-1})p/n,$$

根据 $r\mapsto 1-e^{-r}$ 在 $[0,1]$上的凹性。对于 $p\ge \delta n$，相同的表达式至少为 $1-e^{-\delta}$。这就证明了两个不等式。□

2.2. 一致谱隙估计。 根据 [6, 引理 4，3], 存在常数 $C>0$和酉元

$$R_{1,n}, R_{2,n}\in \mathcal{U}(\ell_2^n) \qquad (n\ge 2)$$

使得

$$\|x-\mathrm{tr}_n(x)1_n\|_2^2 \le C\sum_{i=1}^{2}\|R_{i,n}xR_{i,n}^*-x\|_2^2 \qquad \text{for every } x\in\mathbb{M}_n. \tag{2.6}$$

其中 1_n 是单位矩阵。对于未归一化的希尔伯特–施密特范数，以及将酉元替换为其逐元素共轭，估计式仍然成立。上横线表示在标准基下逐元素复共轭。映射 $x\mapsto \mathrm{tr}_n(x)1_n$ 是到 $\mathbb{C}1_n$上的正交投影。将此不等式中的算子与任意希尔伯特空间上的单位元作张量积，不等式仍然成立；这可通过在该空间的一组正交归一基下展开得到。

2.3. 这两个三元组。 对于 $n\ge 2$，令 $m_n=2^{n+1}$，先枚举 G_n，再将 F_n 枚举为 $(z_{l,\,n})_{l=1}^{m_n}\subset\mathcal{U}(H_n^0)$，并保留单位元的两次出现。令

$$H_n=\ell_2^n\otimes H_n^0\otimes \ell_2^{m_n}.$$

利用标准对角矩阵单位 $e_{kk}\in\mathbb{M}_n$、$k\in[n]$以及 $e_{ll}\in\mathbb{M}_{m_n}$、$l\in[m_n]$，定义$U_{i,\,n}$，$V_{i,\,n}\in\mathcal{U}(H_n)$、$i=1,2,3$，定义如下

i	$U_{i,n}$	$V_{i,n}$
1	$R_{1,n}\otimes 1\otimes 1$	$1\otimes 1\otimes R_{1,m_n}$
2	$R_{2,n}\otimes 1\otimes 1$	$1\otimes 1\otimes R_{2,m_n}$
3	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_{kk}\otimes x_{k,n}\otimes 1$	$\displaystyle\sum_{l=1}^{m_n} 1\otimes z_{l,n}\otimes e_{ll}$.

(2.7)

每个 1 都是相应张量因子上的单位元。除 $[U_{i,n},V_{j,n}]$ 之外，所有交换子 $[U_{3,n},V_{3,n}]$都消失；其中的 (k,l)-块为 $[x_{k,n},z_{l,n}]$。引理 2.1 给出

$$\max_{1\le i,j\le 3}\|[U_{i,n},V_{j,n}]\|\le 2n^{-1/2}\longrightarrow 0. \tag{2.8}$$

下一个命题将由$V_{3,n}$ 实施的共轭作用与$\mathcal{A}_n$ 和$\mathcal{B}_n$所对应的正交投影联系起来，并采用希尔伯特空间系数。

命题 2.3。 设 H 为一个希尔伯特空间，且 $n \geq 2$。设 $E_A, E_B \in \mathbb{B}(H \otimes L_2(\mathbb{B}(H_n)))$为投影到以下空间上的正交投影

$$H \otimes L_2(\mathbb{M}_n) \otimes L_2(\mathcal{A}_n) \otimes \mathbb{C}1_{m_n},$$
$$H \otimes L_2(\mathbb{M}_n) \otimes L_2(\mathcal{B}_n) \otimes \mathbb{C}1_{m_n},$$

分别地，置 $S_3 = 1_H \otimes \operatorname{Ad} V_{3,\,n} \in U(H \otimes L_2(\mathbb{B}(H_n)))$，其中 $\operatorname{Ad} V_{3,\,n}(x) = V_{3,\,n} x V_{3,\,n}^*$ 对 $x \in \mathbb{B}(H_n)$成立。于是，对于每个 $h \in H \otimes L_2(\mathbb{M}_n) \otimes L_2(\mathbb{M}_{2^n}) \otimes \mathbb{C}1_{m_n}$，

$$\|h - E_A h\|^2 + \|h - E_B h\|^2 = \|S_3 h - h\|^2. \tag{2.9}$$

证明。 对于指示子空间中的 h，以及 $(G,\ E) = (G_n,\ E_A)$ 或 $(F_n,\ E_B)$，第 2.1 节中的交换子恒等式给出

$$Eh = |G|^{-1} \sum_{g \in G} (1_H \otimes 1 \otimes \operatorname{Ad} g \otimes 1)h.$$

这里，$\operatorname{Ad} g(x) = gxg^*$ 对 $x \in \mathbb{M}_{2^n}$成立。事实上，对有限群的酉表示取平均可得到投影到其不变向量上的正交投影。因此

$$\begin{aligned} |G|^{-1} \sum_{g \in G} \|(1_H \otimes 1 \otimes \operatorname{Ad} g \otimes 1)h - h\|^2 &= 2\|h\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle Eh, h\rangle \\ &= 2\|h - Eh\|^2. \end{aligned}$$

由于 $|G_n| = |F_n| = m_n/2$，利用块公式（2.7），其中 $\|e_{ll}\|_2^2 = m_n^{-1}$对每个 $l \in [m_n]$均成立，得到

$$\begin{aligned} \|h - E_A h\|^2 + \|h - E_B h\|^2 &= m_n^{-1} \sum_{l=1}^{m_n} \|(1_H \otimes 1 \otimes \operatorname{Ad} z_{l,n} \otimes 1)h - h\|^2 \\ &= \|S_3 h - h\|^2. \end{aligned}$$

□

3. 转为标准形式

在命题 4.3 的证明中，我们转为标准形式，以便在估计中消去 π 对第二个因子的作用。以下引理可视为吸收原理。设 M 是一个冯·诺伊曼代数，令 M_*^+ 为其正正规泛函构成的锥。其标准希尔伯特空间 $L_2(M)$ 带有左表示 $\lambda_M\colon M \to \mathbb{B}(L_2(M))$ 以及正锥 $\mathfrak{P}_M \subset L_2(M)$。每个 $\varphi \in M_*^+$都有唯一的代表元 $\xi_\varphi \in \mathfrak{P}_M$满足

$$\varphi(x) = \langle \lambda_M(x)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle \qquad \text{for every } x \in M.$$

内积对第一个变量线性。设 $\theta : M \to \mathbb{B}(H)$ 是希尔伯特空间 H 上的正规幺表示，且 v_1 和单位向量，$v_2 \in H$。令 $\varphi_j(x) = \langle \theta(x)v_j, v_j\rangle$，$j = 1$，2. 荒木–山上不等式 [1,定理 2] 给出

$$\|\xi_{\varphi_1} - \xi_{\varphi_2}\|_{L_2(M)}^2 \leq 2\|v_1 - v_2\|^2. \tag{3.1}$$

$L_2(\mathbb{M}_n)$ 的正锥是 $\mathbb{M}_n^+$。对于 $z \in \mathbb{M}_n$和 $w \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_n)$，定义 L_z，$\operatorname{Ad} w \in \mathbb{B}(L_2(\mathbb{M}_n))$ 如下：

$$L_z X = zX, \qquad (\operatorname{Ad} w)X = wXw^* \qquad (X \in \mathbb{M}_n).$$

算子 $\operatorname{Ad} w$ 是酉算子。对于 $N = M \bar{\otimes} \mathbb{M}_n$，我们采用标准的同一视图

$$L_2(N) = L_2(M) \otimes L_2(\mathbb{M}_n), \qquad \lambda_N(x \otimes z) = \lambda_M(x) \otimes L_z.$$

引理 3.1。 设 $M \subset \mathbb{B}(K)$ 是希尔伯特空间 K上的含幺冯·诺伊曼代数，且 $n \geq 1$。对于单位向量 $v \in K \otimes \ell_2^n$，令 $\varphi \in N_*^+$为其在 $N = M \bar{\otimes} \mathbb{M}_n$上的向量态，并令 $\xi = \xi_\varphi \in \mathfrak{P}_N \subset L_2(N)$。那么，对于每个 $a \in U(M)$、$b \in U(M_\prime)$ 以及 z、$w \in U(\mathbb{M}_n)$，

$$\|(\lambda_M(a) \otimes L_z)\xi - \xi\| = \|(a \otimes z)v - v\|, \tag{3.2}$$
$$\|(1_{L_2(M)} \otimes \operatorname{Ad} w)\xi - \xi\|^2 \leq 2\|(b \otimes w)v - v\|^2. \tag{3.3}$$

证明。 由于 v 和 ξ 表示同一个态，

$$\|(a\otimes z)v - v\|^2 = 2 - 2\,\mathrm{Re}\;\varphi(a\otimes z) = \|(\lambda_M(a)\otimes L_z)\xi - \xi\|^2.$$

由于 $b\in M'$，$(b\otimes w)v$ 在 N 上的态为 $\varphi\circ(\mathrm{id}_M\otimes\mathrm{Ad}(w^*))$。其正锥代表元为 $(1_{L_2(M)}\otimes \mathrm{Ad}\,w)\xi$。将 (3.1) 应用于 v 和 $(b\otimes w)v$，即可证明 (3.3)。□

4. 强制性论证的定量形式

4.1. 从谱隙估计到一致强制性。 我们先给出一个简单的观察，凸显下文引入的 Walsh 空间的一个关键特征。

引理 4.1。 设 H 是一个希尔伯特空间，$L\in\mathbb{B}(H)^+$, $P\in\mathbb{B}(H)$ 是一个正交投影，并且 $U\in U(H)$。若

$$P\le\gamma L,\qquad U^*PU = 1_{\mathcal{H}} - P$$

对于某个 $\gamma>0$，则

$$L + (U-1_{\mathcal{H}})^*(U-1_{\mathcal{H}}) \ge (2\gamma+1)^{-1}1_{\mathcal{H}}.$$

证明。 对于 $\xi\in\mathcal{H}$，我们有 $\|\xi\|^2 = \|P\xi\|^2 + \|PU\xi\|^2$。因此，$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$中的三角不等式给出

$$\|\xi\| \le 2^{1/2}\|P\xi\| + \|(U-1_{\mathcal{H}})\xi\| \le (2\gamma)^{1/2}\|L^{1/2}\xi\| + \|(U-1_{\mathcal{H}})\xi\|.$$

应用柯西–施瓦茨不等式。 □

固定 $n\ge 2$ 和一个希尔伯特空间$\mathcal{K}$。对于 $S\subseteq[n]$，令 $p_S\in\mathbb{M}_n$ 为投影到由 S标记的坐标上的正交投影。我们考虑 Walsh 空间

$$\mathcal{W}_n = \bigoplus_{S\subseteq[n]} (\ell_2^n\otimes\mathcal{K}),$$

并定义正交投影 $P_n\in\mathbb{B}(\mathcal{W}_n)$ 和归一化 Walsh 数算子$N_n\in\mathbb{B}(\mathcal{W}_n)^+$，如下所示

$$P_n = \bigoplus_{S\subseteq[n]} (p_S\otimes 1_{\mathcal{K}}),\qquad N_n = \bigoplus_{S\subseteq[n]} \frac{|S|}{n}\,1_{\ell_2^n\otimes\mathcal{K}}.$$

对于 $w=(w_S)_{S\subseteq[n]}\in\mathcal{W}_n$，记作 $w_S=\sum_{k=1}^n e_k\otimes w_{k,S}$，其中 $(e_k)_{k=1}^n$ 是 ℓ_2^n 的典范基，且 $w_{k,S}\in\mathcal{K}$。在这些坐标下，对于每个 $k\in[n]$ 和 $S\subseteq[n]$，

$$(P_nw)_{k,S} = \begin{cases} w_{k,S}, & k\in S,\\ 0, & k\notin S,\end{cases}\qquad (N_nw)_{k,S} = \frac{|S|}{n}\,w_{k,S}.$$

下一个命题给出了$\mathcal{W}_n$上的一致强制性估计。它结合了矩阵谱隙估计、势 N_n，以及一个将 $\mathrm{ran}\;P_n$ 与 $\ker P_n$互换的酉算子。

命题 4.2. 令 $R_1,\ R_2\in\mathcal{U}(\ell_2^n)$ 满足

$$\|x - \mathrm{tr}_n(x)1_n\|_{\mathrm{HS}}^2 \le C\sum_{i=1}^{2}\|R_ixR_i^* - x\|_{\mathrm{HS}}^2 \qquad \textit{for every } x\in\mathbb{M}_n \tag{4.1}$$

对于某个 $C>0$，其中 $\mathrm{tr}_n = n^{-1}\,\mathrm{Tr}$。对于 $A_1,A_2\in U(\mathcal{K})$，置

$$W_i = \bigoplus_{S\subseteq[n]} (R_i\otimes A_i)\in\mathcal{U}(\mathcal{W}_n)\qquad (i=1,2).$$

若 $W_3\in U(\mathcal{W}_n)$ 满足 $W_3^*P_nW_3 = 1_{\mathcal{W}_n} - P_n$，则

$$\|N_n^{1/2}w\|^2 + \sum_{i=1}^{3}\|W_iw - w\|^2 \ge (4C+3)^{-1}\|w\|^2 \qquad \textit{for every } w\in\mathcal{W}_n. \tag{4.2}$$

证明。 记 $w=(w_S)_{S\subseteq[n]}\in\mathcal{W}_n$，其中 $w_S\in\ell_2^n\otimes\mathcal{K}$。令 $h_S\in\mathbb{M}_n^+$ 由下式确定

$$\operatorname{Tr}(xh_S^2)=\langle(x\otimes 1_{\mathcal{K}})w_S,w_S\rangle\qquad\text{for every } x\in\mathbb{M}_n.$$

因此 $\|h_S\|_{\mathrm{HS}}=\|w_S\|$。引理 3.1应用于这些向量泛函，根据齐次性可得

$$\sum_S\|R_ih_SR_i^*-h_S\|_{\mathrm{HS}}^2\le 2\|W_iw-w\|^2\qquad(i=1,2).$$

因此，（4.1）意味着

$$\sum_S\|h_S-\operatorname{tr}_n(h_S)1_n\|_{\mathrm{HS}}^2\le 2C\sum_{i=1}^2\|W_iw-w\|^2.$$

由于

$$\|P_nw\|^2=\sum_S\|h_Sp_S\|_{\mathrm{HS}}^2,\qquad n\operatorname{tr}_n(h_S)^2\le\|h_S\|_{\mathrm{HS}}^2=\|w_S\|^2,$$

由三角不等式可得

$$\begin{aligned}\|P_nw\|&\le\Big(\sum_S\|h_S-\operatorname{tr}_n(h_S)1_n\|_{\mathrm{HS}}^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_S|S|\operatorname{tr}_n(h_S)^2\Big)^{1/2}\\&\le\Big(2C\sum_{i=1}^2\|W_iw-w\|^2\Big)^{1/2}+\|N_n^{1/2}w\|.\end{aligned}$$

Put

$$L=N_n+\sum_{i=1}^2(W_i-1_{\mathcal{W}_n})^*(W_i-1_{\mathcal{W}_n})\in\mathbb{B}(\mathcal{W}_n)^+.$$

由柯西–施瓦茨不等式可得 $P_n\le(2C+1)L$。引理 4.1应用于 P_n、L、W_3，可证得 (4.2)。 □

4.2. 与表示及三元组相关联的 Walsh 空间$(U_{i,n})_{i=1}^3$。固定 $n\ge 2$，并取希尔伯特空间 K 上的酉表示 $\pi\colon\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3\to\mathcal{U}(K)$。令$M=\pi(\mathbb{F}_3\times\{e\})''\subset\mathbb{B}(K)$。回顾第 2.3 节，

$$H_n=\ell_2^n\otimes H_n^0\otimes\ell_2^{m_n}.$$

定义

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n&=L_2(M)\otimes L_2(\mathbb{B}(H_n))\\&=L_2(M)\otimes L_2(\mathbb{M}_n)\otimes L_2(\mathbb{M}_{2^n})\otimes L_2(\mathbb{M}_{m_n}),\\\mathcal{W}_n&=L_2(M)\otimes L_2(\mathbb{M}_n)\otimes L_2(\mathcal{A}_n)\otimes\mathbb{C}1_{m_n}\subset\mathcal{L}_n.\end{aligned}$$

这里 $1_{m_n}\in L_2(\mathbb{M}_{m_n})$ 的范数为一。本小节中仅使用第一个三元组 $(U_{i,n})_{i=1}^3$。对于 $i=1,2,3$，令

$$\widetilde{W}_i=\lambda_M(\pi(u_i,e))\otimes L_{\overline{U_{i,n}}}\in\mathcal{U}(\mathcal{L}_n),\qquad W_i=\widetilde{W}_i|_{\mathcal{W}_n}.$$

算子 λ_M 和 L_x 是第 3 节中定义的左作用。上横线表示在 H_n 的标准张量基下取共轭作用 (2.7) 式表明 $W_i\mathcal{W}_n=\mathcal{W}_n$，因此 $W_i\in\mathcal{U}(\mathcal{W}_n)$。

令 $\Omega_n=\{-1,1\}^n$，其均匀概率测度为 μ_n。利用标准的等距同一化

$$L_2(\mathbb{M}_n)\simeq\ell_2^n\otimes\ell_2^n,\qquad L_2(\mathcal{A}_n)\simeq L^2(\Omega_n,\mu_n),$$

其中 $\chi_{S,n}$ 对应于 $\varepsilon\mapsto\prod_{k\in S}\varepsilon_k$，并按沃尔什基展开，我们得到

$$\mathcal{W}_n\simeq\bigoplus_{S\subseteq[n]}(\ell_2^n\otimes(L_2(M)\otimes\ell_2^n)).$$

这是第 4.1 节中 $\mathcal{K}=L_2(M)\otimes\ell_2^n$的情形；我们保留记号 P_n，N_n。在每个直和项上，W_i对于 $i=1$，2，其作用为

$$\overline{R_{i,n}}\otimes(\lambda_M(\pi(u_i,e))\otimes 1_{\ell_2^n}).$$

对于 $w \in \mathcal{W}_n$，使用第 $w_{k,\ S} \in L_2(M) \otimes \ell_2^n$ 节中的坐标 4.1。由（2.1），第三个酉算子满足

$$(W_3 w)_{k,S} = \big(\lambda_M(\pi(u_3, e)) \otimes 1_{\ell_2^n}\big) w_{k, S\triangle\{k\}} \qquad (k \in [n],\ S \subseteq [n]).$$

因此 W_3 将各分量互换，而 $k \in S$ 和 $k \notin S$，所以 $W_3^* P_n W_3 = 1_{\mathcal{W}_n} - P_n$。由于逐项共轭作用不会改变矩阵间隙（2.6），命题 4.2 推出

$$\|N_n^{1/2} w\|^2 + \sum_{i=1}^{3} \|W_i w - w\|^2 \geq (4C+3)^{-1} \|w\|^2 \qquad \text{for every } w \in \mathcal{W}_n. \tag{4.3}$$

4.3. **从近似交织算子到 Walsh 空间中的近似不变向量**。下一个命题将近似交织算子转化为单位向量 $w \in \mathcal{W}_n$，使其在 W_1、W_2、W_3 作用下的位移很小，且 $\|N_n^{1/2} w\|$ 也很小。强制性估计（4.3）进而排除了足够小的交织缺陷。

命题 4.3。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\eta > 0$，使得对每个 $n \geq 2$ 以及每个酉表示 $\pi : \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \to U(K)$（作用在希尔伯特空间 K 上）都满足以下结论。若 $T \in \mathbb{B}(H_n, K)$ 满足

$$\|T\|_{\mathrm{HS}} = 1, \qquad \sum_{i=1}^{3} \Big(\|\pi(u_i, e) T - T U_{i,n}\|_{\mathrm{HS}}^2 + \|\pi(e, u_i) T - T V_{i,n}\|_{\mathrm{HS}}^2 \Big) \leq \eta, \tag{4.4}$$

于是存在一个单位向量 $w \in \mathcal{W}_n$，使得

$$\|N_n^{1/2} w\|^2 + \sum_{i=1}^{3} \|W_i w - w\|^2 < \varepsilon. \tag{4.5}$$

证明。固定 $\varepsilon > 0$（我们将在最后选择 $\eta > 0$）。首先转到标准形式。将希尔伯特–施密特算子空间 $\mathrm{HS}(H_n, K)$ 与 $K \otimes H_n$ 等距同一，近似交织算子 T 给出一个单位向量 $v \in K \otimes H_n$，使得对于每个 $i = 1, 2, 3$，

$$\|(\pi(u_i, e) \otimes \overline{U_{i,n}}) v - v\| = \|\pi(u_i, e) T - T U_{i,n}\|_{\mathrm{HS}},$$
$$\|(\pi(e, u_i) \otimes \overline{V_{i,n}}) v - v\| = \|\pi(e, u_i) T - T V_{i,n}\|_{\mathrm{HS}}.$$

令 $\xi \in \mathcal{L}_n$ 为正锥中表示 v 在 $M \bar{\otimes} \mathbb{B}(H_n)$ 上的向量态的单位向量。置

$$S_i = 1_{L_2(M)} \otimes \mathrm{Ad}\, \overline{V_{i,n}} \in \mathcal{U}(\mathcal{L}_n) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

由于 $\pi(e, u_i) \in M'$，引理 3.1 给出

$$\sum_{i=1}^{3} \|\widetilde{W}_i \xi - \xi\|^2 \leq \eta, \qquad \sum_{i=1}^{3} \|S_i \xi - \xi\|^2 \leq 2\eta. \tag{4.6}$$

现在将其投影到 Walsh 空间 $\mathcal{W}_n$ 上。令 $h \in \mathcal{L}_n$ 为 ξ 到其上的正交投影

$$L_2(M) \otimes L_2(\mathbb{M}_n) \otimes L_2(\mathbb{M}_{2^n}) \otimes \mathbb{C} 1_{m_n}.$$

由（2.6），应用于维数 m_n，

$$\|\xi - h\|^2 \leq C \sum_{i=1}^{2} \|S_i \xi - \xi\|^2 \leq 2C\eta. \tag{4.7}$$

因此，

$$\|S_3 h - h\| \leq (2\eta)^{1/2} + 2\|\xi - h\|.$$

令 $E_A, E_B \in \mathbb{B}(\mathcal{L}_n)$ 为到 $\mathcal{W}_n$ 和上的正交投影

$$L_2(M) \otimes L_2(\mathbb{M}_n) \otimes L_2(\mathcal{B}_n) \otimes \mathbb{C} 1_{m_n}.$$

由于 $\overline{V_{3,\ n}} = V_{3,\ n}$，命题 2.3（其中 $H = L_2(M)$）给出

$$\|h - E_A h\|^2 + \|h - E_B h\|^2 = \|S_3 h - h\|^2. \tag{4.8}$$

令 $w_0 = E_A h = E_A\xi \in \mathcal{W}_n$。要应用命题 2.2，注意到

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(w_0, \operatorname{ran} E_B)^2 &= \|(1_{\mathcal{L}_n} - E_B)w_0\|^2 \\ &\le 2(\|h - E_A h\|^2 + \|h - E_B h\|^2).\end{aligned} \tag{4.9}$$

该命题以系数空间 $L_2(M)\otimes L_2(\mathbb{M}_n)$，可得

$$\|N_n^{1/2} w_0\|^2 \le (1-e^{-1})^{-1}\operatorname{dist}(w_0, \operatorname{ran} E_B)^2.$$

此外，$\|\xi - w_0\|^2 = \|\xi - h\|^2 + \|h - E_A h\|^2$。由前述估计可知，存在一个仅依赖于 C 的常数 $C_0 > 0$，使得

$$\|\xi - w_0\|^2 + \|N_n^{1/2} w_0\|^2 \le C_0\eta. \tag{4.10}$$

最后，我们只需对 w_0 进行归一化。由于 $W_i\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_n$，投影 E_A 与 W_i 可交换。因此

$$\sum_{i=1}^{3}\|W_i w_0 - w_0\|^2 = \sum_{i=1}^{3}\|E_A(\widetilde{W}_i\xi - \xi)\|^2 \le \eta.$$

此外，$\|w_0\|^2 = 1 - \|\xi - w_0\|^2 \ge 1 - C_0\eta$。对于 $C_0\eta < 1$，单位向量 $w = w_0/\|w_0\|$ 满足

$$\|N_n^{1/2} w\|^2 + \sum_{i=1}^{3}\|W_i w - w\|^2 \le (1 - C_0\eta)^{-1}(C_0+1)\eta < \varepsilon$$

前提是 $\eta > 0$ 足够小。此选择与 n、K 和 π 无关。 □

5. 主要结果的证明

5.1. **定理 D 的证明。** 定理 D由 (2.8)、(4.3) 和命题 4.3 得出。 □

5.2. **定理 A 的证明。** 我们也用 ρ 表示将定理 后定义的表示延拓得到的酉 $*$-同态：D：

$$\rho : C^*(\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3) \longrightarrow \ell_\infty(\mathbb{B}(H_n))/c_0(\mathbb{B}(H_n)).$$

假设 $C^*(\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3)$ 具有局部提升性质。在由 (u_i, e) 和 (e, u_i) 张成的算子系统上提升 ρ，$i = 1$、2、3，并利用 Arveson 定理延拓坐标映射。这给出单位完全正映射 $\beta_n : C^*(\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3) \to \mathbb{B}(H_n)$，满足

$$\|\beta_n(u_i, e) - U_{i,n}\| \longrightarrow 0, \qquad \|\beta_n(e, u_i) - V_{i,n}\| \longrightarrow 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

选取 Stinespring 膨胀 $\beta_n(x) = J_n^*\pi_n(x)J_n$，其中 $\pi_n : C^*(\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3) \to \mathbb{B}(K_n)$ 是一个酉 $*$-表示，且 $J_n \in \mathbb{B}(H_n, K_n)$ 是一个等距算子。对于 $g \in \mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3$ 和 $X \in \mathcal{U}(H_n)$，

$$(\dim H_n)^{-1}\|\pi_n(g)J_n - J_n X\|_{\mathrm{HS}}^2 = 2\operatorname{Re}\operatorname{tr}_{\dim H_n}(1 - X^*\beta_n(g)) \le 2\|\beta_n(g) - X\|_2. \tag{5.1}$$

此处 $\|\cdot\|_2$ 表示归一化希尔伯特–施密特范数。应用（1.1），其中 $T = J_n$。由于$\|J_n\|_{\mathrm{HS}}^2 =$ 维数 H_n 且 $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|$，（5.1）得到

$$c \le 2\sum_{i=1}^{3}\big(\|\beta_n(u_i, e) - U_{i,n}\| + \|\beta_n(e, u_i) - V_{i,n}\|\big) \longrightarrow 0,$$

矛盾。

包含关系 $\mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3 \subset \mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_k\times\mathbb{F}_m$ 对于 k，$m \ge 2$，可由指数为二的嵌入 $\mathbb{F}_3$，$\to \mathbb{F}_2$ 以及每个自由群的前两个生成元推出。由于 LLP 会传递到子群 [5, 的全群 C^*-代数，17],推论 3. 定理得证。□

5.3. **定理 C 的证明。** 回顾一下，幺迹$_A$代数 C^*上的迹态 A 若可 ***amenable***，是指其 GNS 表示 π_{tr_A}： $A \to \pi_{\mathrm{tr}_A}(A)''$ 可延拓为定义在 $\mathbb{B}(K)$上的单位完全正映射，其中 $A \subset \mathbb{B}(K)$ [3, 定理 3.1.6(5)]。我们将使用 [14] 中局部可嵌入性的以下推论。

命题 5.1。 设 A 是一个含幺 C^*-代数，且局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$。设 $\alpha\colon A \to M$ 是一个含幺 $*$-同态，其中 M 是一个有限冯·诺伊曼代数，具有忠实正规迹态 tr_M，并且假设 $\mathrm{tr}_M \alpha$ 可 ***amenable***。对于任意含幺 C^*- 代数 D、含幺满射 $*$- 同态 $q\colon D \to M$ 以及有限维算子系统 $E \subset A$，存在一个单位完全正映射 $\beta\colon E \to D$，使得 $q\beta = \alpha|_E$。

证明。将 A 忠实地表示在 $\mathbb{B}(K)$ 中，并令 $\mathrm{tr}_A = \mathrm{tr}_M \alpha$。保迹识别 $\pi_{\mathrm{tr}_A}(A)'' \cong \alpha(A)'' \subset M$ 以及 amenability 给出一个 u.c.p. 延拓 $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{B}(K) \to M$，它是 α 的延拓。将局部可嵌入性的局部提升刻画 [13, 定理 20.5(v)]，应用于 $A \subset \mathbb{B}(K)$ 和 $\tilde{\alpha}$，给出局部完全压缩提升 $\widetilde{\alpha}\colon A \to D$，使得 $q\widetilde{\alpha} = \alpha$。由于 α 是单位完全正的，[13, 推论 9.47] 在 E 上给出一个单位完全正提升 $\beta\colon E \to D$，使得 $q\beta = \alpha|_E$。□

定理 C 的证明。剩余有限性提供了有限商群 Λ_n 的 $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ 及其相应的正则表示 r_n： $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \to \mathcal{U}(\ell_2(\Lambda_n))$ 使得 $r_n(g)$ 最终对每个 $g \neq (e,\ e)$ 的迹均为零。在 $H_n = H_n \otimes \ell_2(\Lambda_n)$上，令

$$\widehat{U}_{i,n} = U_{i,n} \otimes r_n(u_i, e), \qquad \widehat{V}_{i,n} = V_{i,n} \otimes r_n(e, u_i) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

这些酉元的交换子在算子范数下仍趋于零，并且满足（1.1），其中常数仍为 c。为验证后者，固定一个表示 $\pi\colon \mathcal{U}(K)$ 以及 $T \in \mathbb{B}(H_n,\ K)$。定义

$$\Theta_n(T)\xi = \sum_{h \in \Lambda_n} T(\xi \otimes \delta_h) \otimes \overline{\delta_h} \qquad (\xi \in H_n),$$

其中 $(\delta_h)_{h\in\Lambda_n}$ 是 $\ell_2(\Lambda_n)$ 的典范基。于是 $\Theta_n(T) \in \mathbb{B}(H_n,\ K \otimes \ell_2(\Lambda_n))$ 且 $\|\Theta_n(T)\|_{\mathrm{HS}} = \|T\|_{\mathrm{HS}}$，并且，对于每个 $g \in \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ 和 $X \in \mathbb{B}(H_n)$，

$$\begin{aligned}\|(\pi(g) \otimes \overline{r_n(g)})\Theta_n(T) - \Theta_n(T)X\|_{\mathrm{HS}} \\ = \|\pi(g)T - T(X \otimes r_n(g))\|_{\mathrm{HS}}.\end{aligned}$$

将 (1.1) 应用于 $\pi \otimes \overline{r_n}$ 和 $\Theta_n(T)$。

固定 $\mathbb{N}$ 上的一个自由超滤子 ω，令 $\|\cdot\|_{2,n}$ 表示 $\mathbb{B}(H_n)$ 上的归一化希尔伯特–施密特范数。定义带迹超积

$$\begin{aligned}M_\omega &= \ell_\infty(\mathbb{B}(\widehat{H}_n))/I_\omega, \\ I_\omega &= \{(X_n) \in \ell_\infty(\mathbb{B}(\widehat{H}_n)) : \lim_{n\to\omega} \|X_n\|_{2,n} = 0\},\end{aligned}$$

其商映射为 q_ω，忠实正规迹为

$$\mathrm{tr}_\omega(q_\omega((X_n))) = \lim_{n\to\omega} (\dim \widehat{H}_n)^{-1} \operatorname{Tr}(X_n).$$

放大矩阵定义了一个幺正 $*$-同态 $\alpha\colon C^*(\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \to M_\omega$，其定义为

$$\alpha(u_i, e) = q_\omega((\widehat{U}_{i,n})_n), \qquad \alpha(e, u_i) = q_\omega((\widehat{V}_{i,n})_n) \quad (i = 1, 2, 3).$$

计算这些矩阵中的一个字可得 $\mathrm{tr}_\omega \alpha = \mathrm{tr}_{\mathrm{can}}$，其中 $\mathrm{tr}_{\mathrm{can}}$ 为典范迹：$\mathrm{tr}_{\mathrm{can}}(e, e) = 1$，且对于 $g \neq (e, e)$，$\mathrm{tr}_{\mathrm{can}}(g) = 0$。有限维表示 r_n 的归一化迹逐点收敛到 $\mathrm{tr}_{\mathrm{can}}$，因此根据定理 3.1.6(2)，$\mathrm{tr}_{\mathrm{can}}$ 是可 amenable [3,。

假设 $C^*(\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3)$ 局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$。命题 5.1 将 α 通过q_ω 提升到由六个生成元张成的算子系统上。Arveson 定理将坐标映射扩张为单位完全正映射 β_n： $C^*(\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \to \mathbb{B}(H_n)$，其中

$$\lim_{n\to\omega} \|\beta_n(u_i, e) - \widehat{U}_{i,n}\|_{2,n} = 0, \qquad \lim_{n\to\omega} \|\beta_n(e, u_i) - \widehat{V}_{i,n}\|_{2,n} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

将放大估计（1.1）应用于 β_n 的 Stinespring 膨胀。计算（5.1）得

$$c \leq 2\sum_{i=1}^{3}\big(\|\beta_n(u_i,e)-\widehat{U}_{i,n}\|_{2,n}+\|\beta_n(e,u_i)-\widehat{V}_{i,n}\|_{2,n}\big) \xrightarrow[n\to\omega]{} 0,$$

矛盾。最后，局部可嵌入性在算子子空间下保持不变，而包含关系
$\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \subset \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_m$ 会诱导出全群 C^*-代数之间的等距 $*$-嵌入。□

备注 (其他群)。 穷尽列举我们结果适用的群并无太大意义，但我们列举几个例子。如果 G 包含 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$，那么$C^*(G)$ 不具有局部提升性质，也不能局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中：局部提升性质会传递到子群的全群C^*-代数上 [5, 推论 3。17], 而局部可嵌入性会传递到算子子空间上。例子包括与 $\mathbb{F}_2 \subset G_i$ 的直积 $G_1 \times G_2$；当 $n \geq 4$ 时的 SL_n({v17)，以及当 $n \geq 2$ 时的 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$；当 $n \geq 5$ [10, 时的辫群和纯辫群 B_n，PB_n 12]引理；亏格至少为二的闭定向曲面的映射类群；当 $n \geq 3$ 时的 $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_n)$ 和 $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$[2, 第 1] 节；以及定义图包含长度为四的诱导圈的直角 Artin 群。它们的有限指标子群也具有相同结论。对于 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$，这些结论则分别由 [7, 推论 B]和 [14], 得出。

致谢。我们感谢 Gilles Pisier 就弱期待性质和局部提升性质相关问题与我们进行了许多富有启发性的讨论。

AI 辅助。我们通过互动对话使用 ChatGPT 推导了某些证明。我们没有使用 Lean 检验这些证明。一年前，我们曾尝试将 Ioana 关于希尔伯特–施密特稳定性的工作应用于这个局部提升性质问题。我们原以为，在改变变形的同时保留谱隙估计即可，但这个想法行不通。几个月前，我们重新思考这个问题，并考虑到 [14] ，花了几周时间尝试证明 $C^*(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2)$ 局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$，也就是说，按照 Pisier 的记号，$d_f(C^*(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2)) = 1$第 20] 节中的 [13, 。这等价于 $d_f(S) = 1$，其中 S 是由四个典范酉生成元张成的算子系统。可以证明 $d_f(S) < 1.072$，这或许有助于解释局部提升性质问题为何如此困难。随后，我们回到最初的想法，并建议 ChatGPT 探索其他变形或半群。最终，我们建议使用 Walsh 半群（例如参见 Lust-Piquard 的工作）来解决这个问题。证明定理 C 的想法源自 [14]。

参考文献

[1] H. Araki 和 S. Yamagami，Hilbert–Schmidt 范数不等式，Commun. Math. Phys. 81 (1981)，第 1 期，89–96。doi:10.1007/BF01941801。[2] M. R. Bridson 和 R. D. Wade，自由群在 Aut(F_N) 中的直积，Geom. Funct. Anal. 34 (2024)，1337–1369。doi:10.1007/s00039-024-00688-5。[3] N. P. Brown，C^*-代数的不变均值与有限表示理论，Mem. Amer. Math. Soc. 184 (2006)，第 865 号。doi:10.1090/memo/0865。[4] D. Enders 和 T. Shulman，关于（局部）提升性质，预印本（2024），2026 年修订。arXiv:2403.12224v3。[5] F. Fournier-Facio 和 R. Willett，局部提升性质、FD 性质与近似表示的稳定性，预印本（2026）。arXiv:2603.18456。[6] A. Ioana，几乎交换的矩阵与积群的稳定性，J. Eur. Math. Soc. 27 (2025)，第 10 期，4027–4068。doi:10.4171/JEMS/1483。[7] A. Ioana、P. Spaas 和 M. Wiersma，具有 (T) 性质的群的满 C^*-代数提升性质的上同调障碍，Geom. Funct. Anal. 30 (2020)，第 5 期，1402–1438。doi:10.1007/s00039-020-00550-4。[8] M. Junge 和 G. Pisier，精确算子空间上的双线性形式及 $B(H) \otimes B(H)$，Geom. Funct. Anal. 5 (1995)，第 2 期，329–363。doi:10.1007/BF01895670。[9] E. Kirchberg，关于非半分裂扩张、张量积以及群 C^*-代数的精确性，Invent. Math. 112 (1993)，449–489。doi:10.1007/BF01232444。[10] S.-K. Ko 和 I. Potapov，辫子的复合问题：成员关系、单位元与自由性，预印本（2017）。arXiv:1707.08389。[11] N. Ozawa，关于 QWEP 猜想，Internat. J. Math. 15 (2004)，第 5 期，501–530。doi:10.1142/S0129167X04002417。[12] N. Ozawa，Tsirelson 问题与渐近交换酉矩阵，J. Math. Phys. 54 (2013)，第 3 期，032202。doi:10.1063/1.4795391。

[13] G. Pisier，张量积 C^*-代数与算子空间：*Connes–Kirchberg* 问题，剑桥大学出版社，2020 年。doi:10.1017/9781108782081。[14] J. Roydor，关于局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$，arXiv 预印本（2026）。[15] A. Thom，不具有分解性质的超线性群示例，Groups Geom. Dyn. **4** (2010)，第 1 期，195–208。doi:10.4171/GGD/80。

朱西厄数学研究所，索邦大学电子邮件地址： jroydor@imj-prg.fr