arXiv:2611.31151v1 [math.AC] 23 Nov 2026

标准分次近戈伦斯坦埃尔哈特环具有单峰的 h-向量

TAKAYUKI HIBI 和 SORA MIYASHITA

ABSTRACT. 我们证明，每个标准分次近 Gorenstein Ehrhart 环的 h-向量（h_0，……，h_s）都是单峰的，且峰值位于位置 $\lceil s/2 \rceil$。更一般地，若由其典范迹理想的一次部分生成的理想的根基包含齐次极大理想，则标准分次 Ehrhart 环具有交替递增的 h-向量。在特征零或二的情形下，每个此类环的一般阿廷约化都具有强 Lefschetz 性质。我们还证明，对于维数至少为二且 h-向量为（1，h_1，……，h_s）的每个标准分次近 Gorenstein 整环，其 $s \geq 2$，其中 $h_1 - h_s \leq 1$。在 level 情形下，这个 h-向量既是凹的，也是交替递增的。若 $h_1 = h_s$，则 $h_1 = \cdots = h_s$。

1. INTRODUCTION

设 $R = \bigoplus_{j \geq 0} R_j$ 是域 k 上的一个标准分次 Cohen–Macaulay 代数。记 $d = \dim R$，并令 $\mathfrak{m}_R = \bigoplus_{j>0} R_j$ 为其齐次极大理想。Hilbert 级数 $\mathrm{Hilb}_R(t) = \sum_{j \geq 0} (\dim_k R_j) t^j$ 具有如下形式：$h_R(t)/(1-t)^d$，其中 $h_R(t) = 1 + h_1 t + \cdots + h_s t^s$ 且 $h_s \neq 0$。我们称 $h_R(t)$ 为 h-多项式，并称 $h(R) = (1, h_1, \ldots, h_s)$ 为 R 的 h-向量。当存在某个 j 使得 $h_0 \leq \cdots \leq h_j \geq \cdots \geq h_s$ 且 $0 \leq j \leq s$ 时，h-向量称为单峰的。若对于每个 i（满足 $1 \leq i < s$），都有 $h_i^2 \geq h_{i-1} h_{i+1}$，则称其为对数凹的。

根据 Stanley 的经典结果，每个标准分次戈伦斯坦代数的 h-向量都是对称的 [S78，定理 4。1], 而每个具有对称 h-向量的标准分次 Cohen–Macaulay 整环都是 Gorenstein [S78，定理 4。4]。对称的 h-向量不一定是单峰的。例如，Stanley 构造了一个阿廷戈伦斯坦代数，其 h-向量为 (1，13，12，13，1）[S78，例 4。3]。

下面的猜想源于 Hibi 和 Stanley，至今仍未解决。

猜想 1.1 ([H89，猜想 1。5], [S89，猜想 4 (a)，第 512])。 域上的每个标准分次戈伦斯坦整环都具有单峰 h-向量。

Stanley 最初提出的猜想要求标准分次 Cohen–Macaulay 整环具有更强的对数凹性，并指出 Gorenstein 情形可能是一个限制条件。Conca、Singh 和 Varbaro 构造了具有非单峰 h-向量的半标准分次 Gorenstein 正规整环 [CSV25，定理 4。2]。他们的例子表明，猜想 1.1 中的标准分次假设至关重要。

设: $P \subset \mathbb{R}^d$ 为一个格多面体。其指数分次 $A_P = k[x^{\mu}]$ 是一个正规 Cohen–Macaulay 整环 [Hoc72, Theorem 1]。当且仅当 P 具有整数分解性质（IDP）时，它是标准分次的：对于每个$n \geq 1$，nP 中的每个格点都可以表示为 n 个 P中的格点之和。A_P的 Hilbert 级数具有如下形式：$h_P^*(t)/(1-t)^{\dim P + 1}$。分子是 h^*-多项式 $h_P^*(t) = \sum_{i=0}^{s} h_i t^i$,

Date：2026年11月21日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：13H10，05E40；次要分类号：13A02，52B20。*Key words and phrases.* 近 Gorenstein 环，Ehrhart 环，典范迹理想，Frobenius 分裂，强 Lefschetz 性质，分次整环，单峰性，层环。

其中 $h_s \neq 0$。其系数向量 $h^*(P) = (h_0, \ldots\ldots, h_s)$ 是 P 的 h^*-向量。若 P 具有 IDP，则 $h^*(P) = h(A_P)$。我们用 relint 表示 相对内部，并取 P 在仿射张成空间中的内部。若 A_P 是 Gorenstein 的，我们就称 P 为 $Gorenstein$ 。

1992年，Hibi 猜想所有自反格多胞体的 h^*（P）。这里，若一个满维格多胞体的原点位于其内部，则称其为自反的，当且仅当其极体是格多胞体。Mustaţă 和 Payne 给出了一个反例 [MP05，例 1。1], Payne 还在自反单形中构造了更多反例[P08，定理 1。4]。这些例子不具有整数分解性质。对于标准分次 Gorenstein 环，Ohsugi 和 Hibi 也提出了单峰性猜想 [OH06，引言]。

Bruns 和 R¨omer 证明了具有正规单模三角剖分的 Gorenstein 多胞体具有单峰性 [BR07，定理 1]。Adiprasito、Papadakis、Petrotou 和 Steinmeyer 宣布了针对 Gorenstein 整数分解多胞体、去除三角剖分假设的结果[APPS22]。Adiprasito、Papadakis 和 Petrotou 证明了自反整数分解多胞体具有单峰性 [APP25，定理 1。4]（另见 [AKOPP26，推论 6。3]）。根据 [BR07，推论 7],每个 Gorenstein 整数分解多胞体都与某个自反整数分解多胞体具有相同的 h^*-多项式，因此每个 Gorenstein 整数分解多胞体都具有单峰性。另一方面，Ferroni 构造了具有非单峰 h^*-向量的光滑整数分解多胞体，以及具有非对数凹 h^*-向量的 Gorenstein 整数分解多胞体 [F26]。

这就引出了一个问题：当标准分次 Ehrhart 环为近 Gorenstein 时， h-向量是否仍然是单峰的。设 ω_R 表示 R的分次典范模。典范迹理想为 $\mathrm{tr}_R(\omega_R) = \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\omega_R, R)} \varphi(\omega_R)$，其中求和遍历所有次数的齐次映射。当且仅当 $\mathrm{tr}_R(\omega_R) = R$[HHS19，引理 2.1]时，环 R 为 Gorenstein。Cohen–Macaulay 环 R 是近 Gorenstein 的，当 $\mathrm{tr}_R(\omega_R) \supseteq \mathfrak{m}_R$[HHS19]时。若 ω_R 由单一次数的元素生成，则环 R 为 level；若 $\mathrm{Hom}_R(\omega_R, R)$ 由单一次数的元素生成，则其为反典范 level（参见 [Pa19，定义 3.3]）。

对于整数分解性质 $(0,1)$-多面体 P， A_P的近似 Gorenstein 性质已在[HKMM23，定理 34]中得到刻画。

如果一个 h-向量的各项从左端开始交替地从两端读起时呈非递减，则称其为 交替递增的 。

我们对典范迹理想使用以下条件 [M26a，定义 1。1]:

$$(\natural) \qquad \sqrt{[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 R} \supseteq \mathfrak{m}_R.$$

以下是我们的第一个主要结果。

定理 A。 设 P 是一个 *IDP* 格多面体，并且 $R = A_P$ 具有 h-向量 $h(R) = (h_0, \ldots, h_s)$。假设以下条件之一成立：

(1) R 满足$(\natural)$；(2) R 是层且是反典范 *level*，并且 $[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 \neq 0$；(3) R 是层，并且 P 具有一个内部格点。

那么 $h(R)$ 是交替递增的，即

$$h_0 \leq h_s \leq h_1 \leq h_{s-1} \leq \cdots \leq h_{\lceil s/2 \rceil}.$$

特别地， $h_0 \leq \cdots \leq h_{\lceil s/2 \rceil} \geq \cdots \geq h_s$，因此 h-向量是单峰的，峰值位于位置 $\lceil s/2 \rceil$。

若 R 是近 Gorenstein 的，则 $[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 = R_1$。因此 $(\natural)$ 成立，而定理 A给出以下 (1) 推论。

推论 1.2. 标准分次近 *Gorenstein Ehrhart* 环的 h-向量$(h_0, \ldots, h_s)$ 是单峰的，峰值位于第 $\lceil s/2 \rceil$ 项。

在特征零或特征二下， R （定理A 中的）的一般阿廷约化具有强 Lefschetz 性质（推论 3.9(a)）。在 Gorenstein 情形下，这由[APP25，定理 6，1] 以及 [PP20中的开性陈述（命题 13）6]可得。

对于 level Ehrhart 环，定理A (3) 回答了 [Hi19] 中的单峰性问题，且也可由 [APP25] 推出（见注 3.10）。

对于维数为 $d \geq 2$ 的标准分次近 Gorenstein 整环， $h_s = 1$ 迫使 R 为 Gorenstein [M26b，定理 1。2]。我们将 h_s 与余维数 $h_1 = 维数_k R_1 - d$进行比较。若一个 h向量是 凹的，则 $h_i - h_{i-1} \geq h_{i+1} - h_i$ 对每个 $1 \leq i < s$均成立。

以下是我们的第二个主要结果。

定理 *B.* 设 R 是域上的标准分次近 *Gorenstein* 整环，满足 $\dim R \geq 2$ 且其 h-向量为 $h(R) = (1, h_1, \ldots, h_s)$，其中 $s \geq 2$。假设 $h_1 - h_s \leq 1$。则 $h_s \leq h_1$，且 $h(R)$是单峰的，最大值为 $\max_i h_i - h_{\lceil s/2 \rceil} \leq 1$。在特征零下， R 的一般阿廷约化具有强 *Lefschetz* 性质。若 R 是层，则 $h(R)$是凹且交替递增的。特别地，它是对数凹的，且峰值位于位置 $\lceil s/2 \rceil$。若 $h_1 = h_s$，则 R 是层，且 $h(R) = (1, h_1, \ldots, h_1)$。

定理A 和B 给出了猜想 1.1的一种推广。

猜想 1.3。 域上的每个标准分次近 *Gorenstein* 整环都有单峰的 h-向量。

我们研究 Frobenius 分裂 Cohen–Macaulay 代数，以便将应用扩展到 Ehrhart 环之外。在例 3.12中，我们证明，由光滑普通平面三次曲线构造的近 Gorenstein Rees 代数的一般阿廷约化在 $\mathbb{F}_2$ 上具有强 Lefschetz 性质。对于边界是诱导子复形的三角剖分球，我们恢复了其 h-向量的交错不等式；并且在特征二下，其 Stanley–Reisner 环的一般阿廷约化具有强 Lefschetz 性质（推论 3.13）。

对于 Ehrhart 环，典范理想及其逆理想中的单项式由 P 上方锥的格点决定。特别地，定理 A 中关于典范迹理想的假设在转到特征二时仍然成立。由于 h-向量也仅取决于 P，所得不等式对任意域都成立。

对于分次代数 $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ 和整数 $p \geq 1$， p 阶 Veronese 子环 $S^{(p)} = \bigoplus_{j \geq 0} S_{pj}$ 按 $[S^{(p)}]_j = S_{pj}$ 分次。关于定理 B，我们在第 4 节证明，$K[x, y]^{(h_s)}$ 映到域扩张 K/k 上 R 的一个阿廷约化 A 。事实上，对于某个分次 Artin 代数 $C = K[x, y]/J$，有 $A \cong C^{(h_s)}$。根据引理 4.2， C 的希尔伯特函数是单峰的，因此其子序列 $h_i = \dim_K C_{ih_s}$ 也是单峰的。在 level 情形下，我们还得到凹性。为估计中间项，我们比较某个典范理想 I 的 R 与 R/I 的 Hilbert 级数。在特征零下，Veronese 表示还赋予 R 的一般阿廷约化强 Lefschetz 性质（定理 4.4）。

2. Canonical trace ideals and Artinian reductions

本节描述典范迹理想的一次部分，以及阿廷约化上的乘法配对。设 R 是一个定义在 k 上、维数为 d 的标准分次 Cohen–Macaulay 代数，并令 $s = \deg h_R(t)$。我们采用分次约定$[M(a)]_j = M_{j+a}$，并记 $\operatorname{indeg} M = \min\{j : M_j \neq 0\}$，表示非零有限生成分次模 M 的初始次数。

令 $Q^*(R)$ 表示 R 的<sty le id='3'>分次全分式环，其通过求所有齐次非零因子的逆得到。分次分式理想是一个有限生成的分次

R-子模 $I \subseteq Q^*(R)$。我们将 $I^{-1} = (R : I) = \{v \in Q^*(R) : vI \subseteq R\}$ 记为。如果 I 包含 $Q^*(R)$ 的一个齐次单位元，则局部化将齐次映射 $I \to R$ 识别为与 I^{-1} 中齐次元素的乘法，因此 $\mathrm{tr}_R(I) = II^{-1}$ [M26a，引理 2.6]。如果一个齐次理想与 ω_R 同构（相差一个分次平移），则称其为典范理想。在整环上，ω_R 的平移可以与一个分次分式理想 [识别，参见 BH98，命题 3.3.18]。更一般地，如果 R 是约化的，且一个分次理想 $I \subseteq R$ 表示 ω_R 的一个平移，则 I 包含一个齐次非零因子。

一次时，乘积 II^{-1} 可能会受到 I 的多个次数分量的贡献。下一个引理给出了 I 的最低次数分量足以满足条件的情形。

引理 2.1. 设 I 是一个分次分式理想，且同构于 ω_R 的一个移位，并假设 I 包含一个属于 $Q^*(R)$ 的齐次单位元。令 $a =$ 初始次数 I。若 R 是整环，或 R 是层，或 $\mathrm{ht}([\text{迹}_R(\omega_R)]_1 R) \geq 2$，则

$$[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 = I_a[I^{-1}]_{1-a}. \tag{1}$$

这里右侧的乘积是各对乘积所张成的 k。

证明。不妨设 k 是无限的。事实上，式（1）两边在扩张到 $k(t$ 时可交换，因为 I 是有限表示的，且 $I^{-1} = \mathrm{Hom}_R(I, R)$。由忠实平坦性可知等式可下降。

我们有 $\mathrm{tr}_R(\omega_R) = II^{-1}$。若 $I = uR$，则 $I_a = ku$ 且 $I^{-1} = u^{-1}R$，从而得到式（1）。这包括 $d = 0$ 的情形，此时 $I = Q^*(R) = R$。因此，不妨设 $d > 0$ 且 $II^{-1} \subseteq \mathfrak{m}_R$。若 $[II^{-1}]_1 = 0$，则公式显然成立。否则，迹的初始次数为一。

假设 R 是整环或是层。由于 I 在每个极小素理想处都成为秩为一的自由模，R 是一般地 Gorenstein。因此，根据 I_a，[M26a，注 3，14], 以及 [M26a，引理 2.12 (2)] 给出迹的初始次数中的一个元素，其湮灭子为零。

剩下的情形是考虑 $\mathrm{ht}([II^{-1}]_1 R) \geq 2$。令 $X = I_a[I^{-1}]_{1-a}$ 和 $Y = \sum_{j>a} I_j[I^{-1}]_{1-j}$，从而 $[II^{-1}]_1 = X + Y$。对于 $j > a$，乘积 $I_a[I^{-1}]_{1-j}$ 属于真理想 II^{-1} 的次数 $a + 1 - j \leq 0$ 部分，故其为零。因此 $YI_a = 0$。

由于 R 是 Cohen–Macaulay 且域是无限域，我们可以在 $[II^{-1}]_1$中选取正则序列θ_1，θ_2。由于 $YI_a = 0$，我们有 $XY = 0$。选取 $x_i \in X$ 和 $y_i \in Y$，使得$\theta_i = x_i + y_i$。于是 $\theta_2 x_1 = x_2 x_1 = \theta_1 x_2$。由于 θ_2 模 θ_1是正则的，我们有 $x_1 \in \theta_1 R$。它们都是线性形式，因此对于某个标量 λ，有 $x_1 = \lambda\theta_1$。若 $\lambda = 0$，则 $\theta_1 = y_1$ 湮灭$I_a \neq 0$。这与 θ_1的正则性矛盾。因此 x_1 是非零因子。由于 $x_1 Y = 0$，我们有 $Y = 0$。因此 $[II^{-1}]_1 = X$，如所需。□

对于序列 $\Theta = (\theta_1, \ldots\ldots, \theta_n)$ 和 R-模 N，记 $\Theta N = (\theta_1, \ldots\ldots, \theta_n)N$。序列 Θ个 d 线性形式称为参数线性系，如果 $R/\Theta R$ 是阿廷的。代数 $R/\Theta R$ 是 R的阿廷约化。选择参数时，我们允许进行域扩张。

固定 R_1 的一个 k-基 $x_1, \ldots, x_e$。设 $F = k(t_{ij} : 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq e)$，其中 t_{ij} 在 k 上代数独立，并令 $\theta_i = \sum_{j=1}^{e} t_{ij} x_j$ 和 $R_F = R \otimes_k F$。依照 Papadakis 和 Petrotou [PP20，定义 2.2],，我们称 $A_{\mathrm{gen}} = R_F/(\theta_1, \ldots, \theta_d)R_F$ 为 R 的一般阿廷约化。形式 $\theta_1, \ldots, \theta_d$ 构成参数线性系，因为这类系统在 k 上的系数空间中构成非空开子集。

标准分次阿廷代数 A 若存在一个线性形式 $\ell \in A_1$，使得对于每一对整数 $0 \leq a < b$，映射 $\times \ell^{b-a} : A_a \to A_b$都具有最大秩，则称其具有强 *Lefschetz* 性质。这样的形式称为强 *Lefschetz* 元素。

根据 [BH98，推论 4.4.6 (a)], 初始次数 $\omega_R = d - s$ 和维数 $k[\omega_R]_{d-s} = h_s$。

为比较 $h(R)$ 的各项，我们将 R 和 ω_R 对同一组参数取模。第一个约化的希尔伯特函数给出从零次开始的 $h_0,\dots,h_s$，而第二个约化的希尔伯特函数给出从 $d-s$ 次开始的 $h_s,\dots,h_0$。

引理 2.2. 令 K/k 为任意域扩张，并令 Θ 为 $R_K = R\otimes_k K$的任意参数线性系。设 $A = R_K/\Theta R_K$和 $M = (\omega_R\otimes_k K)/\Theta(\omega_R\otimes_k K)$。对每个整数$i$，乘法诱导出一个完美配对 $A_i \times M_{d-i} \longrightarrow M_d \cong K$，即一个 K-线性同构 $M_{d-i}\to \mathrm{Hom}_K(A_i, M_d)$，由 $m\mapsto(a\mapsto am)$ 给出。M 的最高非零次数为 d，且对每个满足 $0\le i\le s$的 i，都有$\dim_K A_i = \dim_K M_{d-i} = h_i$。$A_i$ 中的每个非零类都与 $[\omega_R]_{d-i}$中某个元素的像配对非零。同样，M_{d-i} 中的每个非零类都与 R_i中某个元素的像配对非零。

证明。序列 Θ 是正则的，因为 R_K 是 Cohen–Macaulay。因此，$\mathrm{Hilb}_A(t) = h_R(t)$，且 $M(d)\cong\omega_A\cong\mathrm{Hom}_K(A,K)$，作为分次 A-模 [BH98、推论 3.6.14、定理 3.6.19 (a) 及练习 3.3.31]。$\mathrm{Hom}_K(A,K)$在次数 $-i$上的分量是 $\mathrm{Hom}_K(A_i,K)$，而 A 的作用为$(b\varphi)(a) = \varphi(ba)$。因此，$M_{d-i}$是 A_i的对偶，且该配对是求值，因为$(b\varphi)(1) = \varphi(b)$。由于对每个 $i<0$，$A_0 = K$ 且 $A_i = 0$，所以 M 的最高非零次数是 d。最后，$[\omega_R]_{d-i}$ 和 R_i 的 k-基的像分别张成M_{d-i} 和 A_i，且系数取自 K。因此，对每个非零类，至少有一个这样的基元素与之的乘积非零。□

在（♮）下，必要时将 $[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1$ 扩张到 k 后，我们可以在 $k(t)$ 中选取参数 [M26a, 注记 3.3 (1)、(3)、(4)]。引理 2.2 中两个约化的最高非零次数由此给出以下包含关系。

引理 2.3。 若 R 满足 (♮)，则 $R_{>s}\subseteq[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1R$ 和 $[\omega_R]_{>d}\subseteq[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1\omega_R$。

证明。选取这样一个参数系 Θ。由引理 2.2，$R/\Theta R$ 和 $\omega_R/\Theta\omega_R$ 在大于 s 的次数上消失，且 d分别如此。每个 θ_i 都属于 $[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1$,，因此包含关系成立。由忠实平坦性，它们下降到 k。□

以下引理给出了定理 A 证明中用到的两个包含关系。

引理 2.4. 令 $I\subsetneq R$ 为一个包含齐次非零因子的分次理想，且同构于作为分次模的 ω_R。设 $r=$初始次数I，使得 $s=d-r$。假设以下条件至少有一个成立。

(1) R 满足(♮)；(2) R 是层且是反典范 ***level***，并且 $[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1\neq 0$；(3) R 是层且 $r=1$。

Then

$$u^2\in I_rR \qquad \textit{for every } i \textit{ with } 0\le 2i\le s \textit{ and every } u\in I_{d-i},$$
$$u^2\in [I^{-1}]_{1-r}R \quad \textit{for every } i \textit{ with } 0\le 2i< s \textit{ and every } u\in R_{s-i}.$$

证明。由于 I 是正规的，$r\ge 1$。若 $s=0$，则 $d=r$ 且仅第一重包含成立，其中 $u\in I_r$，故 $u^2\in I_rR$。因此我们可以假设 $s\ge 1$，此时 $d=s+r\ge 2$。

若 R 满足 (♮)，则 $\sqrt{[\mathrm{tr}_R(I)]_1R}=\mathfrak{m}_R$，所以 $[\mathrm{tr}_R(I)]_1R$ 的高度为 $d\ge 2$。由引理 2.1 和 2.3，我们有 $[\mathrm{tr}_R(I)]_1 = I_r[I^{-1}]_{1-r}$、$I_{>d}\subseteq[\mathrm{tr}_R(I)]_1I$，以及 $R_{>s}\subseteq[\mathrm{tr}_R(I)]_1R$。若$0\le 2i\le s$，则每个 $u\in I_{d-i}$的平方都属于 $I_{2(d-i)}$，其中 $2(d-i)\ge 2d-s=d+r>d$。因此 $u^2\in[\mathrm{tr}_R(I)]_1I\subseteq I_rR$，因为 $I^{-1}I\subseteq R$。若 $0\le 2i<s$，则 $2(s-i)\ge s+1$。所以每个 $u\in R_{s-i}$ 都满足 $u^2\in[\mathrm{tr}_R(I)]_1R\subseteq[I^{-1}]_{1-r}R$，因为 $I_r\subseteq R$。

在情形（2）中，Gorenstein 环满足 (♮)，因此我们可以假设 II^{-1} 是真子理想。I 和 I^{-1} 的生成次数之和为一，因为它们的乘积由单个

次数生成，且 $[II^{-1}]_1 \neq 0$。因此 $I = I_r R$ 和 $I^{-1} = [I^{-1}]_{1-r} R$。第一个包含关系成立，因为对于每个 $u \in I$， $u^2 \in I$。第二个包含关系由 $R \subseteq I^{-1}$ 得出。

最后，在条件 (3) 下，我们有 $r = 1$、 $I = I_1 R$ 和 $1 \in [I^{-1}]_0$。因此，对每个 $u \in I$，都有 $u^2 \in I_1 R$，而 $R \subseteq [I^{-1}]_0 R$。□

3. Frobenius splittings and Ehrhart rings

本节中，我们证明定理A中的不等式： $h_i \leq h_{s-i}$ 对每个 i 满足$0 \leq 2i \leq s$，以及 $h_{s-i} \leq h_{i+1}$ 对每个 i 满足 $0 \leq 2i < s$。特征二下 Ehrhart 环的 Frobenius 分裂启发了一个判据，用阿廷约化上的两个乘法映射来刻画这些不等式。

在特征二下，环 R 的 Frobenius 分裂是一个加法映射 $\sigma : R \to R$，满足对于所有 a、 $b \in R$ 和 σ， $\sigma(a^2 b) = a\sigma(b)$，且 $\sigma(1) = 1$。若理想 I 满足$\sigma(I) \subseteq I$ [，则称其相容分裂（BK05，定义 1.1.3]）。若对于某个 $e \geq 0$ 有 $a^{2^e} \in I$，则反复应用σ 即可得到 $a \in I$。因此，每个相容分裂的理想都是根基；取 $I = 0$ 可知 R 是约化的。

例 3.1. 设 $P \subset \mathbb{R}^q$ 是一个格多面体，并取 $k = \mathbb{F}_2$。令 $C = \mathbb{R}_{\geq 0}(P \times \{1\})$，且 $L =$ 张成 $\mathbb{R}(C) \cap \mathbb{Z}^{q+1}$。Ehrhart 环为 $A_P = \mathbb{F}_2[C \cap L]$。在其单项式基上定义

$$\sigma_P(X^{\boldsymbol{a}}) = \begin{cases} X^{\boldsymbol{a}/2}, & \boldsymbol{a} \in 2L, \\ 0, & \boldsymbol{a} \notin 2L. \end{cases}$$

若 $\boldsymbol{a} \in C \cap 2L$，则 $\boldsymbol{a}/2 \in C \cap L$。由于 $\sigma_P(1) = 1$ 且 $\sigma_P(X^{2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}}) = X^{\boldsymbol{b}} \sigma_P(X^{\boldsymbol{a}})$， σ_P 的 $\mathbb{F}_2$-线性延拓是一个 Frobenius 分裂。满足 $\boldsymbol{a} \in \operatorname{relint}(C) \cap L$ 的单项式 $X^{\boldsymbol{a}}$ 张成一个真理想 I。根据 Danilov–Stanley 定理 [BH98，定理 6.3.5]， $I \cong \omega_{A_P}$ 是关于 Ehrhart 分次的分次 A_P-模。该理想是相容分裂的，因为只要 $\boldsymbol{a} \in \operatorname{relint}(C) \cap 2L$，就有 $\boldsymbol{a}/2 \in \operatorname{relint}(C) \cap L$。

例3.2. 对于顶点为 $1, \ldots, n$ 的单纯复形 Δ，令 $S = \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$。在 S 的单项式上，定义

$$\sigma(x^{\boldsymbol{a}}) = \begin{cases} x^{\boldsymbol{a}/2}, & \text{if every exponent is even,} \\ 0, & \text{if some exponent is odd.} \end{cases}$$

乘以一个单项式的平方会使指数增加偶数，因此其 $\mathbb{F}_2$-线性扩张满足 $\sigma(u^2 m) = u\sigma(m)$，对所有 $u, m \in S$ 都成立。由于 $\sigma(1) = 1$，这就是 S 的 Frobenius 分裂。对于每个满足 $\sigma(m) \neq 0$ 的单项式 m，相同的变量整除 m 和 $\sigma(m)$。因此， σ 保持所有由无平方因子单项式生成的理想，包括 Δ 的斯坦利–赖斯纳理想。出于同样的原因，诱导得到的 $\mathbb{F}_2[\Delta]$ 的 Frobenius 分裂保持所有由无平方因子单项式生成的理想。

下面是定理 A 证明中的关键引理。我们将线性组合的系数取为独立变量，这样就可以对它们求导。这将得到一个关于乘积平方的关系。应用 Frobenius 分裂后，便得到关于乘积本身的关系。

引理 *3.3.* 设 R 是特征二的域 k 上的标准分次代数。设σ 是 R的一个 *Frobenius* 分裂，并设 $\mathfrak{a}$ 是满足 $\sigma(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$ 的理想。设 $U \subseteq Q^*(R)$ 是由次数为 δ 的齐次元素构成的非零有限维 k-子空间。分别选取 R_1 和 U的基 $x_1, \ldots, x_e$ 及 $g_1, \ldots, g_b$，并固定 $n \geq 1$。令 T表示域 k 上的一个代数独立变量元组，其中包含一个 $n \times e$ 矩阵 (t_{ij}) 的各个元素以及变量 $z_1, \ldots, z_b$。在 $K = k(T)$ 上，设 $\theta_i = \sum_{j=1}^{e} t_{ij} x_j$， $q = \sum_{\ell=1}^{b} z_\ell g_\ell$和$\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$。其中 $R_K = R \otimes_k K$和 $\mathfrak{a}_K = \mathfrak{a} \otimes_k K$。

设 $f \in R_K$，并令 u 为 $Q^*(R)$ 的任意非零齐次元素。若 $u^2 \in UR$ 且 $2\deg u - \delta \geq n$，则只要 $qf^2 \in \Theta\mathfrak{a}_K$，就有 $uf \in \Theta\mathfrak{a}_K$。

证明。 根据假设，$qf^2 = \sum_{i=1}^{n} \theta_i f_i$ 对于某个 f_1、……、$f_n \in \mathfrak{a}_K$ 成立。两边乘以 $\theta_1 \cdots \theta_n$ 得

$$qf^2 \theta_1 \cdots \theta_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 F_i, \qquad F_i = \Big(\prod_{j \neq i} \theta_j\Big) f_i \in \mathfrak{a}_K. \tag{2}$$

对于 T 中的每个变量 v，令 ∂_v 表示在 $Q^*(R) \otimes_k K$ 上关于 v 的形式微分。它将 v 映为 1，并在 $Q^*(R)$ 以及 T 中的其他变量上取零。根据乘积法则，也可以确定有理函数上的 ∂_v，因为对于每个非零的 $h \in k[T]$，都有 $\partial_v(h^{-1}) = -h^{-2}\partial_v h$。若 $c_\nu \in K$ 且 $a_\nu \in \mathfrak{a}$，则 $\partial_v(\sum_\nu c_\nu a_\nu) = \sum_\nu (\partial_v c_\nu) a_\nu \in \mathfrak{a}_K$，因为 $\partial_v c_\nu \in K$。在特征二下，即使 f 依赖于 v，也有 $\partial_v(f^2) = 2f\,\partial_v f = 0$。

固定 $1 \leq \ell \leq b$ 和 j_1，……，$j_n \in \{1, \ldots, e\}$。将 $D = \partial_{z_\ell}\partial_{t_{1j_1}} \cdots \partial_{t_{nj_n}}$ 应用于（2）。在左侧，导数会消去 f^2。在剩余因子中，z_ℓ 只出现在 q 中，其中 $\partial_{z_\ell} q = g_\ell$，而 t_{ij_i} 只出现在 θ_i 中，其中 $\partial_{t_{ij_i}} \theta_i = x_{j_i}$。

在右侧，每个系数导数 ∂ 满足 $\partial(\theta_i^2) = 2\theta_i \partial(\theta_i)$，$= 0$ 在特征二下成立。因此，乘积法则给出 $\partial(\theta_i^2 F) = \theta_i^2 \partial F$ 对每个 F 都成立。逐步应用这一结果可得 $D(\theta_i^2 F_i) = \theta_i^2 D(F_i)$，因此（2）变为

$$g_\ell x_{j_1} \cdots x_{j_n} f^2 = \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 D(F_i) \in (\theta_1^2, \ldots, \theta_n^2)\mathfrak{a}_K. \tag{3}$$

由齐次性，$u^2 \in UR$ 给出 $u^2 = \sum_{\ell=1}^{b} g_\ell w_\ell$，其中 $w_\ell \in R_{2\text{次数}\,u-\delta}$。由于 R 是标准分次的，且 $2\deg u - \delta \geq n$，每个 w_ℓ 都是 R-线性组合，组合项为这些乘积 $x_{j_1} \cdots x_{j_n}$。在（3）中取相应的线性组合，得到

$$(uf)^2 = \sum_{\ell=1}^{b} g_\ell w_\ell f^2 \in (\theta_1^2, \ldots, \theta_n^2)\mathfrak{a}_K.$$

现在我们利用分裂从 $(uf)^2$ 过渡到 uf。在 $R[T]$ 上，令

$$\widetilde{\sigma}\left(\sum_\nu a_\nu T^\nu\right) = \sum_\mu \sigma(a_{2\mu}) T^\mu.$$

因此，我们保留指数全为偶数的项，并将其指数减半。乘以 $c^2 T^{2\alpha}$ 后，应用 $\widetilde{\sigma}$ 会得到因子 cT^α。由于在特征二中平方可以相加，且 $\widetilde{\sigma}(1) = 1$，这就定义了一个分裂。它保持 $\mathfrak{a}[T]$ 不变，因为 $\sigma(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$。局部化公式 $\widetilde{\sigma}(h/s) = \widetilde{\sigma}(hs)/s$ 将该分裂延拓到 R_K。此延拓保持 $\mathfrak{a}_K$ 不变。进一步将 R 中的齐次非零因子局部化，得到 $Q^*(R) \otimes_k K$ 的一个分裂，且它在 R_K 上与原分裂一致。选取 $b_i \in \mathfrak{a}_K$，使得 $(uf)^2 = \sum_i \theta_i^2 b_i$。应用 $\widetilde{\sigma}$ 得到

$$uf = \widetilde{\sigma}\big((uf)^2\big) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \widetilde{\sigma}(b_i) \in \Theta\mathfrak{a}_K. \qquad \square$$

在特征二下，Adiprasito、Papadakis 和 Petrotou 对参数线性系的系数求体积映射的导数 [APP25，引理 5。1]。他们由此推出平方非消失性，并通过模二约化转到特征零[APP25，定理 3.3 和 6。5], 与 [KLS26，第 3 节2]中所述相同。在引理 3.3 中，我们对理想成员关系求导，因此 g_ℓ 表达式中的元素 q 可能属于一个分式理想。

设 I 是一个包含非零因子的分次理想。模参数约化后，乘以 I 中的一个元素可得到一个映射，将 R 的约化映至 I的约化。乘以 I^{-1} 中的一个元素则得到一个方向相反的映射。我们使用引理 3.3 证明下面两个映射都是单射。

命题 *3.4.* 设 R 是域 k 上的标准分次代数， k 的特征为二，并且具有 *Frobenius* 分裂 σ。设 I 是一个包含齐次非零因子的分次理想，并假设 $\sigma(I) \subseteq I$。令 $d = \dim R$、 $r = \operatorname{indeg} I$，以及 $s = d - r$。选取 k- 基 x_1、 ……、 x_e （属于 R_1）， g_1、 ……、 g_b （属于 I_r），以及 v_1、……、 v_c（属于 $[I^{-1}]_{1-r}$）。令 $F = k(t_{j\ell})$ 和 $K = F(z_1$、……、z_b、w_1、……、$w_c)$，其中所有系数在 k 上代数独立。对于每个满足 $1 \le j \le d$ 的 j，令 $\theta_j = \sum_{\ell=1}^{e} t_{j\ell} x_\ell$。此外，令

$$q = \sum_{\ell=1}^{b} z_\ell g_\ell, \qquad q' = \sum_{\ell=1}^{c} w_\ell v_\ell.$$

若 $[I^{-1}]_{1-r} = 0$，取 $q' = 0$。令 $R_K = R \otimes_k K$ 和 $I_K = I \otimes_k K$。这些形式 $\Theta = (\theta_1$、……、$\theta_d)$ 构成 R_K 的参数线性系。令 $A = R_K/\Theta R_K \cong A_{\text{gen}} \otimes_F K$，并令 $M = I_K/\Theta I_K$。在每个断言中， f 是类 f 在K 上的任意齐次代表元，而 u 是在 k 上选取的。

(1) 设 $0 \le 2i \le s$。假设对于每个 $0 \ne f \in A_i$，都存在一个元素 $u \in I_{d-i}$，使得 $u\bar{f} \ne 0$属于 M_d，并且 $u^2 \in I_r R$。那么，对于每个这样的 $\bar{f}$，都有 $qf^2 \notin \Theta I_K$。特别地，乘以 q 给出一个单射 $A_i \longrightarrow M_{r+i}$。(2) 设 $0 \le 2i < s$。假设对于每个 $0 \ne f \in M_{r+i}$，都存在一个元素 $u \in R_{s-i}$，使得 $u\bar{f} \ne 0$ 属于 M_d，并且 $u^2 \in [I^{-1}]_{1-r} R$。那么，对于每个这样的 $\bar{f}$，都有 $q'f^2 \notin \Theta I_K$。特别地，乘以 q' 给出一个单射 $M_{r+i} \longrightarrow A_{i+1}$。

特别是，如果两个假设在 i 处都成立，那么 维数$_K$ $A_i \le$ 维数$_K$ $M_{r+i} \le$ 维数$_K$ A_{i+1}.

证明。 如果 $d = 0$，那么 $R = I = k$，由此可得所述结论 $qf^2 \ne 0$ 对非零标量q 以及 f 成立。 设 $d \ge 1$。线性参数的 d-元组构成 k 上的一个非空开集。由于 $t_{j\ell}$ 代数独立， Θ 是一个参数系。两个乘法映射都有定义，因为 $qR_K \subseteq I_K$ 且 $q'I_K \subseteq R_K$。

对于 (1)，并选取一个代表元 $f \in [R_K]_i$。设 $qf^2 \in \Theta I_K$并选取 u，如 (1) 所示。由于 $2i \le s$，我们有 2 deg $u - r = 2(d-i) - r = d + s - 2i \ge d$。结合 $u^2 \in I_r R$，即可应用引理 3.3，取 $\mathfrak{a} = I$ 和 $U = I_r$。它推出 $uf \in \Theta I_K$。因此 $uf = 0$ 属于 M_d，这与 u 的选取矛盾。

对于 (2)，并选取一个代表元 $f \in [I_K]_{r+i}$。假设 $q'f^2 \in \Theta I_K$并选取 u，如 (2) 所示。它的非零平方属于 $[I^{-1}]_{1-r}R$，因此 $[I^{-1}]_{1-r} \ne 0$。由于$2i \le s-1$，我们有 2 deg $u-(1-r) = 2(s-i) - 1 + r = d+s-1-2i \ge d$。应用引理 3.3，令 $\mathfrak{a} = I$、 $U = [I^{-1}]_{1-r}$和 q' 代替 q。我们再次得到 $uf \in \Theta I_K$，这与 u的选取矛盾。

最后，若 (1) 中有 $qf = 0$，则将 $qf \in \Theta I_K$ 乘以 $f \in R_K$。若 (2) 中有 $q'f = 0$，则将$q'f \in \Theta R_K$ 乘以 $f \in I_K$。这两种情况都与相应的平方非消失性矛盾。

更一般地，如果对于每个非零源类，都可以选择 u，使其在 M、 $u^2 \in I_r R$ 中的乘积非零，且 2 deg $u - r \ge d$，那么 (1) 的证明适用于任意次数。在类似假设 $u^2 \in [I^{-1}]_{1-r} R$ 和 2 deg $u - (1-r) \ge d$ 下，(2) 的证明同样成立。□

对于 Cohen–Macaulay 代数，引理中的配对 2.2 给出了命题所需的非零乘积 3.4。由此得到以下判据。

定理 3.5。 设 R 是域 k 上的维数为 d 的标准分次 *Cohen–Macaulay* 代数，且 k 的特征为二。设 $I \subseteq R$ 是一个分次理想，并且作为分次

模同构于，并假设 R 具有 *Frobenius* 分裂 σ，其中 $\sigma(I) \subseteq I$。令 $r =$ 初始次数 I和 $h(R) = (h_0, \ldots, h_s)$，从而 $s = d - r$。

对于固定整数 i，考虑以下条件

$$u^2 \in I_r R \qquad \text{for every } u \in I_{d-i}, \tag{4}$$

$$u^2 \in [I^{-1}]_{1-r} R \qquad \text{for every } u \in R_{s-i}. \tag{5}$$

若 $0 \le 2i \le s$ 且 (4) 成立，则 $h_i \le h_{s-i}$。若 $0 \le 2i < s$ 且 (5) 成立，则 $h_{s-i} \le h_{i+1}$。若这两个条件分别在各自的范围内对每个 i 都成立，则 $h(R)$ 是交替递增的，因而是单峰的。

证明。由于 R 是约化的，其典范理想 I 包含一个齐次非零因子。取 A 和 M 如命题 3.4所示。引理 2.2 表明，对于 A_i中的每个非零类，都存在一个元素 $u \in I_{d-i}$ 与其配对非平凡。同样，M_{r+i}中的每个非零类都与某个 $u \in R_{s-i}$非平凡配对。条件（4）和（5）分别给出了命题 3.4中的两个单射。它们的维数给出了所需的不等式，因为 $\dim_K A_j = h_j$ 且 $\dim_K M_{r+i} = h_{s-i}$。 □

定理 A 的证明。对于锥 C over $P \times \{1\}$，令 I 表示 A_P中内部单项式构成的理想。I 和 I^{-1} 的指数集仅取决于 C[HMP19 的命题 4.1 和推论 4.2]中的格点。因此，它们的极小单项式生成元的次数，以及层性和反典范层性，均与域无关。当且仅当 II^{-1} 包含一个一次单项式时，才有 $[II^{-1}]_1 \neq 0$。此外，对于 A_P 的每个一次单项式 m，都存在某个 $N \ge 1$ 使得 $m^N \in [II^{-1}]_1 A_P$，当且仅当 (♮) 成立。这两项陈述都仅取决于 I 和I^{-1} 的指数集。Hilbert 级数统计格点数，因此我们可以在 $\mathbb{F}_2$上进行讨论。由例 3.1 可知，单项式分裂 σ_P 保持 I。在情形 (3) 中，P 的一个内部格点给出初始次数 $I = 1$。因此，在各情形下，引理 2.4 均在各自的适用范围内给出 (4) 和 (5)。交错不等式现在由定理 3.5 得出。□

注 3.6。根据 [M26a，命题 4。1]，当且仅当其典范迹理想包含$\mathbf{x}^w t$ 对 w 的每个 P顶点都成立时，IDP 格多面体的 Ehrhart 环 P满足 (♮)。

我们称 R 为局部戈伦斯坦，$R_{\mathfrak{p}}$ 对每个素理想 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}_R$都是 Gorenstein。满足 (♮) 的每个环都是局部戈伦斯坦，因为典范迹理想刻画了非 Gorenstein 轨迹 [HHS19，引理 2。1]。即使是局部戈伦斯坦 Ehrhart 环，其 h-向量也可能不是单峰的。Ferroni 构造了一个光滑 IDP 多面体 P，其$h^*(P)$ [F26，定理 4。1]。由于 A_P是标准分次的，且 Proj A_P是光滑的，A_P在去心谱上是正则的。

在定理 3.5中交错不等式的假设下，可以选取 q和 q'，使得 qq' 是一般阿廷约化中的强 Lefschetz 元素。

定理 3.7。设 R 是域 k 上的一个 d 维标准分次 *Cohen–Macaulay* 代数，其中 k 的特征为二。设 $I \subseteq R$ 是一个分次理想，作为分次R-模同构于 ω_R。假设 R 存在一个 *Frobenius* 分裂 σ，使得 $\sigma(I) \subseteq I$。令 $r =$ 初始次数 I和 $s = d - r$。假设

$$u^2 \in I_r R \qquad \text{for every } i \text{ with } 0 \le 2i \le s \text{ and every } u \in I_{d-i},$$

$$u^2 \in [I^{-1}]_{1-r} R \quad \text{for every } i \text{ with } 0 \le 2i < s \text{ and every } u \in R_{s-i}.$$

令 A_{gen} 为 $F = k(t_{ij})$ 上的 R 的一般阿廷约化，其中 t_{ij} 是一般线性参数系的系数。分别在固定的 I_r 和 $[I^{-1}]_{1-r}$ 的 k 基底下，取线性组合 q 和 q'，使其系数在 F 上代数独立。令 K 为将这些系数添加到 F 所得到的域。于是

qq' 的像是 $A = A_{\mathrm{gen}} \otimes_F K$ 的一个强 *Lefschetz* 元素。此外，可以在 F 中选取 q 和 q' 的系数，使它们的乘积的像成为 A_{gen} 的一个强 *Lefschetz* 元素。

证明。若 $s = 0$，则 $h_R(t) = 1$，因此 A_{gen} 和 A 都集中在零次上。对于任意系数的选取，次数为一的元素 qq' 因此为零。它是一个强 Lefschetz 元素，因为定义中的每个映射的目标空间都是零，因此具有最大秩。现在假设 $s \geq 1$。令 Θ 为定义 A_{gen}的一般线性参数系，并设 $I_K = I \otimes_k K$和 $M = I_K/\Theta I_K$。考虑以下乘法映射序列

$$A_0 \xrightarrow{\times q} M_r \xrightarrow{\times q'} A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_s \xrightarrow{\times q} M_d.$$

对每个满足 $0 \leq i \leq s$的 i，令 $D_{2i} = A_i$ 和 $D_{2i+1} = M_{r+i}$。交替地乘以q 和 q'，定义了 $\bigoplus_{j=0}^{2s+1} D_j$上的一个次数为一的线性映射 φ，且 $\varphi(D_{2s+1}) = 0$。对于每个$0 \leq j \leq 2s+1$，记 $\langle x, y\rangle = xy$为引理 2.2 中的完美配对 $D_j \times D_{2s+1-j} \to M_d$。对于每个 $0 \leq j \leq 2s$ 以及所有 $x \in D_j$, $y \in D_{2s-j}$，我们有 $\langle \varphi x, y\rangle = \langle x, \varphi y\rangle$。若 j 为偶数，则 $x, y \in A$，且两边都等于 $\bar{q}$ (xy)，其中 $\bar{q}$ 是 q 在 M_r中的类。若 j 为奇数，取 $x, y \in M$的代表元 $\tilde{x}, \tilde{y} \in I_K$。两边分别为 $(q'x)y$和 $x(q'y)$。由于 $q'I_K \subseteq R_K$，二者都是 $(q'\tilde{x})\tilde{y} = \tilde{x}(q'\tilde{y})$模 ΘI_K的类。

对于 $0 \leq 2i \leq s$，引理 2.2 表明，对每个非零的 $x \in A_i$，都存在一个元素 $u \in I_{d-i}$，使得 $\bar{u}x \neq 0$ 属于 M_d。对于 $0 \leq 2i < s$，同一引理表明，对每个非零的 $y \in M_{r+i}$，都存在一个元素 $v \in R_{s-i}$，使得 $\bar{v}y \neq 0$ 属于 M_d，因为 $d - (r+i) = s - i$。这里，$\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 分别是 M 和 A 中的像。关于平方的假设给出 $u^2 \in I_r R$ 和 $v^2 \in [I^{-1}]_{1-r}R$ 分别属于相应的范围。因此，命题 3.4 (1) 和 (2) 表明，对每个 $0 \leq j \leq s$，$\varphi\colon D_j \to D_{j+1}$ 都是单射。

当 $s = 2i$ 时，中间映射 $D_s \to D_{s+1}$ 是 $A_i \xrightarrow{\times q} M_{r+i}$；当 $s = 2i+1$ 时，它是 $M_{r+i} \xrightarrow{\times q'} A_{i+1}$。任取非零的 $z \in D_s$，并选取一个齐次代表元 f。元素 $\langle z, \varphi z\rangle \in M_d$ 在 s 为偶数时由 qf^2 表示，在 s 为奇数时由 $q'f^2$ 表示。s 为偶数时，命题 3.4 (1) 给出 $qf^2 \notin \Theta I_K$；s 为奇数时，命题 3.4 (2) 给出 $q'f^2 \notin \Theta I_K$。因此，$\langle z, \varphi z\rangle \neq 0$。

固定 j，使得 $0 \leq j \leq s$。对于每个非零的 $x \in D_j$，我们有 $z = \varphi^{s-j}x \neq 0$，并且

$$\langle x, \varphi^{2s+1-2j}x\rangle = \langle \varphi^{s-j}x, \varphi^{s+1-j}x\rangle = \langle z, \varphi z\rangle \neq 0.$$

因此 $\varphi^{2s+1-2j}\colon D_j \to D_{2s+1-j}$ 是单射，故由对偶性可知它是同构。现在固定任意一对 $0 \leq m \leq n \leq 2s+1$。若 $m + n \leq 2s+1$，从 D_m 出发的同构可分解为经过 $\varphi^{n-m}\colon D_m \to D_n$，因此此映射是单射。若 $m + n > 2s+1$，从 D_{2s+1-n} 到 D_n 的同构可分解为经过 $\varphi^{n-m}\colon D_m \to D_n$，因此此映射是满射。

在 $A_a = D_{2a}$ 上，映射 $\varphi^{2(b-a)}$ 是乘以 ℓ^{b-a} 的乘法，其中 $\ell = qq'$。映射 $A_a \to A_b$ 在 $a + b \leq s$ 时是单射，在 $a + b \geq s+1$ 时是满射。因此对于每个 $0 \leq a < b \leq s$，它的秩为 $\min\{h_a, h_b\}$，且 ℓ 是定义在 K 上的强 Lefschetz 元素。在固定的 F 组基下，为这些映射各选取一个非零极大子式。它们的乘积是一个关于 q 和 q' 的系数、定义在 F 上的非零多项式。由于 F 是无限的，我们可以在 F 中选取系数，使得此乘积非零。由此得到的 qq' 是 A_{gen} 的强 Lefschetz 元素。□

结合引理 2.4与定理 3.5 和 3.7 可得以下推论。

推论 3.8. 设 R 是特征为 *2* 的域上的标准分次 *Cohen–Macaulay* 代数，具有 *Frobenius* 分裂 σ 以及一个真分次理想 $I \cong \omega_R$，满足$\sigma(I) \subseteq I$，其中该同构保持次数。若满足以下条件之一，则 $h(R)$ 交替递增，且 R 的一般阿廷约化具有强 *Lefschetz* 性质：

(1) R 满足(♮)；(2) R 是层且具有反典范 *level*，并且 $[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 \neq 0$；(3) R 是层且 初始次数 $\omega_R = 1$。

证明。 由于 R 是约化的， I 含有一个齐次非零因子。在这三种情况下，引理2.4 分别在相应范围内给出（4）和（5）。定理3.5 给出交错不等式，而定理3.7 给出强 Lefschetz 性质。□

我们将乘法映射应用于 IDP 格多面体的 Ehrhart 环。回顾一下， O-序列是域上标准分次代数的希尔伯特函数。

推论 3.9。 设 P 是一个 *IDP* 格多面体， $R = A_P$ 是其在域 k上的 *Ehrhart* 环。记 $h^*(P) = (h_0, \ldots\ldots, h_s)$，并令 $h_j = 0$ 表示 $j < 0$ 或 $j > s$。假设下列条件至少有一项成立。

（1） R 满足（♮）；（2） R 是层且反典范 *level*，并且 $[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 \neq 0$；（3） R 是层，且 P 有一个内部格点。

则以下断言成立。

(a) 若 k 的特征为零或二，则 R 的一般阿廷约化具有强 *Lefschetz* 性质。(b) 以下两个序列都是 O-序列。

$$\big(\max\{h_j - h_{j-1}, 0\}\big)_{j\geq 0}, \qquad \big(\max\{h_j - h_{s+1-j}, 0\}\big)_{j\geq 0}.$$

证明。 若 $s = 0$，则一般阿廷约化是一个域，因此 $\ell = 0$ 是强 Lefschetz 元素，且两个序列都是 (1，0，……)。假设 $s \geq 1$。

(a) 令 I 为由内部单项式张成的典范理想，如例 3.1 中所述，并令 $r =$ 为 $\mathrm{indeg}\, I$。在 R_1的单项式基中，将独立变量 t 用作参数 Θ 的系数。令 $F = k(\mathbf{t})$，并令 $A = R_F/\Theta R_F$ 为一般阿廷约化。分别在 I_r 和 $[I^{-1}]_{1-r}$的单项式基中，取线性组合 q和 q'，其系数 z 和 w 相互独立。令 $K = F(\mathbf{z}, \mathbf{w})$，并令 $A_K = A \otimes_F K$。对于$k = \mathbb{F}_2$，引理 2.4 和定理 3.7 给出 A_K的强 Lefschetz 元素 $\ell = qq'$。

对每一对 $0 \leq a < b \leq s$，令 B_b 的列为乘积 $\theta_j m$，其中 m 是次数为 $b-1$ 的单项式，并用 R_b 的单项式基表示。将从 R_a 到 R_b 的乘法（乘以 $(qq')^{b-a}$）对应的列附加上去。秩的增量就是从 $A_a \otimes_F K$ 到 $A_b \otimes_F K$ 的乘以 $qq'^{\,b-a}$ 的乘法的秩。在单项式基中，乘法会将指数相加。因此，具有整数系数的相同多项式在 $\mathbf{t}$，$\mathbf{z}$，$\mathbf{w}$ 中给出每种特征下的矩阵元素。此外，在每种特征下，秩 $B_b = \dim_k R_b - h_b$。因此，对每个 $(a,\ b)$，增广矩阵都有一个大小为 $\mathrm{rank}\, B_b + \min\{h_a, h_b\}$ 的子式，其行列式模二非零。这个行列式在任何特征为零或二的域上都非零。由于 $F = k(\mathbf{t})$ 是无限集，我们可以在 F 中选取 $\mathbf{z}$ 和 $\mathbf{w}$ 的取值，使所选行列式的乘积非零。取这些系数时， qq' 是 F 上A 的强 Lefschetz 元素。

(b) 与定理 A 的证明中一样，假设和 $h^*(P)$ 与基域无关。取 $k = \mathbb{F}_2$ 并保留 A_K, q, q' 和 $\ell = qq'$ （a）中的系数，其中 q和 q'的系数仍然在 F上代数独立。由于 ℓ是一个强 Lefschetz 元素， $A_K/(\ell)$ 具有第一个希尔伯特函数。

令 $I_K = I \otimes_k K$且 $M = I_K/\Theta I_K$。齐次理想 j 的次数 $q'M$ 分量是由 q' 从 M_{r+j-1} 到 $[A_K]_j$的乘法映射的像。由引理 2.2，源空间的维数为 h_{s+1-j}。对于 $1 \leq j \leq (s+1)/2$，引理 2.2 和 2.4 给出了命题 3.4(2) 在 $i = j-1$ 处的假设，因此该映射是单射。对于 $(s+1)/2 < j \leq s$，

定理 A给出 $h_{j-1} \geq h_j$，因此由 ℓ 从 $[A_K]_{j-1}$ 到 $[A_K]_j$ 的乘法映射是满射。由于 $q[A_K]_{j-1} \subseteq M_{r+j-1}$，我们得到

$$[A_K]_j = \ell[A_K]_{j-1} \subseteq q'M_{r+j-1} \subseteq [A_K]_j.$$

因此，乘以 q' 在每个次数 $1 \leq j \leq s$上都具有最大秩。由于 $M_{r-1} = 0$， $A_K/q'M$的零次分量维数为一。因此， $A_K/q'M$具有第二个希尔伯特函数。此外， $\ell \in q'M$，所以存在一个自然的满射 $A_K/(\ell) \to A_K/q'M$。□

注 3.10。 在定理 A的情形 (3) 中， [SVL13中的问题 2 所要求的交错不等式21] 由 [APP25的推论 2.2 和定理 24], 得出， $s =$维数 P。推论 3.9(a) 中的强 Lefschetz 性质在此情形下由 [APP25的定理 2.1 和 61] 得出， $j = 1$ 其中定理 6.1 中有

例 3.11。 考虑其坐标环为

$$R = \mathbb{Q}[u^{51}, u^{50}v, u^{49}v^2, u^{48}v^3, u^{37}v^{14}, u^{36}v^{15}, v^{51}],$$

其七个生成元的次数均为一次。通过 Macaulay2 [M2] 可以验证， R 是 Cohen–Macaulay 的，且 $h(R) =$ (1, 5, 9, 13, 12, 9, 2)。这个向量是凹的且交替递增，并且 $h_s = 2$ 和 $h_1 - h_s = 3$。推论 3.9 (b) 中的第一个序列是O序列 (1, 4, 4, 4, 0, . . .)。第二个序列以 (1, 3, 0, 1) 开头，因此不可能是 O序列。因此， $h(R)$不可能是满足定理 A 假设的某个 IDP 多面体的 h^*向量。特别地， R 不是近 Gorenstein 的。

我们以 Ehrhart 环之外的两个应用结束本节。首先，我们将推论 3.8(1) 应用于一个 Rees 代数。

例 3.12. 设 C 是定义在 $k = \mathbb{F}_2$上的光滑普通平面三次曲线的齐次坐标环。例如，将 $y^2 + xy = x^3 + x$中的魏尔斯特拉斯方程 [Sch22第 2 节 (4)] 齐次化可得

$$C = k[x, y, z]/(y^2z + xyz + x^3 + xz^2).$$

设 $A = C[x_1, x_2, x_3]$并令 $R = A[\mathfrak{m}_A T]$， 按 $\deg(aT^j) = \deg_A a$对齐次的$a \in \mathfrak{m}_A^j$进行分次。由于 A 是六个变量上的三次超曲面， $R_{\mathfrak{m}_R}$ 是 Cohen–Macaulay 环，且其典范迹理想等于其极大理想 [EY26，例 2。11]。典范迹理想是齐次的，且与局部化可交换，因此 $\mathrm{tr}_R(\omega_R) = \mathfrak{m}_R$。因此 R 是近 Gorenstein 的。

普通性给出 C [KKP+21 的齐次弗罗贝尼乌斯分裂，例 2.3.1]。将 R 写成塞格雷积 $A \# B$，其中 $B = k[u, v]$ [Si00，命题 6 的证明1]。在多项式环 $k[x_1, x_2, x_3]$ 和 B上，我们分别使用例3.2中定义的弗罗贝尼乌斯分裂。这些映射与 C 的分裂的张量积，限制后给出 R 的一个分裂，并保持 $I = (x_1x_2x_3A) \# (uvB)$。由于 $\omega_C \cong C$，这个真理想是分次典范理想，见 [GW78，定理 4.3.1]。由推论 3.8 (1)， R的一般阿廷约化具有强 Lefschetz 性质。

接下来，我们将推论 3.8 (3) 应用于具有诱导边界的三角剖分球的 Stanley–Reisner 环。对于一个s维单纯复形 Δ，我们将其 h-向量记作 $h(\Delta) = (h_0(\Delta) \ldots, h_{s+1}(\Delta))$，其中 $h_i(\Delta)$ 是其 Stanley–Reisner 环 $k[\Delta]$的 h多项式中 t^i 的系数。下一个推论中的交错不等式已见于 [A26，第 5.1 节，(17) 和定理 5.1]。关于 Lefschetz 断言，单射由 Adiprasito 和 Yashfe [AY21] 的论证得出，详见 [A26，第 5.1] 节。满射则可通过将球面勒夫谢茨定理 [PP20，推论 9.10] 应用于锥化之后得出 $\partial\Delta$。

推论 3.13. 设 Δ 是一个 s 维球的三角剖分，且 $\partial\Delta$ 是 Δ 的诱导子复形。那么 $h_{s+1}(\Delta) = 0$，并且序列 $h_0(\Delta), \dots, h_s(\Delta)$ 交替递增。此外，对于每个特征为二的域 k，$k[\Delta]$ 的一般阿廷约化具有强 *Lefschetz* 性质。

证明。对于单个顶点，$h(\Delta) = (1, 0)$，且阿廷约化是一个域。对于 $s \geq 1$，环 $R = \mathbb{F}_2[\Delta]$ 是 Cohen–Macaulay。根据 Hochster 定理 [S96，定理 II.7.3]，$x_F = \prod_{v \in F} x_v$ 的内部面 F 的单项式生成了 R的分次典范理想 I。由于 $\partial\Delta$ 是诱导的，每个由边界顶点支撑的面都属于 $\partial\Delta$。因此，每个内部面都包含一个内部顶点，而内部顶点对应的变量生成 I。所以 R 是层的，初始次数为 $\omega_R = 1$，且 $\deg h_R = \dim R - 1 = s$。

由于 I 由变量生成，例 R 中的 Frobenius 分裂3.2 保留I。推论3.8(3) 给出了 $\mathbb{F}_2$上的两个断言。将参数域从 $\mathbb{F}_2(\mathbf{t})$ 扩张到 $k(\mathbf{t})$，即可得到对每个特征二的域 k 上的勒夫谢茨断言。□

4. A numerical criterion for unimodality

本节证明定理 B。在适当的域扩张 K/k上，我们首先构造一个从 $K[x, y]$ 的 Veronese 子环到 R的阿廷约化的分次满射。其希尔伯特函数给出单峰性。为了估计 $h(R)$ 的中间项，我们接着使用 R的典范理想。

由引理 2.1可知，标准分次 Cohen–Macaulay 整环的典范迹理想的一次部分由乘积 vu张成，其中 u 属于一个典范分式理想的最低次数分量，而 v 属于其逆理想的互补次数分量。下面的引理利用这些乘积构造所需的满射。

引理 4.1。 设 R 是域 k 上的标准分次 *Cohen–Macaulay* 整环。设 E、$W \subseteq Q^*(R)$ 是非零有限维的 k-子空间，且各自集中在单一次数上，并满足 $EW \subseteq R_1$。假设 维数$_k E \geq 2$，且 $\operatorname{ht}((EW)R) \geq 2$。令 $p =$维数$_k W$、$K = k$ 和 $R_K = R \otimes_k K$。对于每个余维数为 $p + 1$ 的充分一般的子空间 $L \subseteq [R_K]_1$，存在一个分次满射 $K[x, y]^{(p)} \to R_K/(L)$。

证明。固定 $0 \neq v_1 \in E$ 并取 $v \in E \setminus kv_1$。分式 $r = v/v_1$ 将 $(v_1W)R$ 映入 R。如果该理想包含正则序列 a，b，那么 $b(ra) = a(rb)$ 将推出 $ra \in aR$，进而得到$r \in R_0 = k$。因此，非零理想 $(v_1W)R$ 的高度为一，因为 R 是 Cohen–Macaulay。取一个包含它的高度一素理想 $\mathfrak{p}$。关于 $(EW)R$ 的高度假设给出 $v_2 \in E$和 $w \in W$，使得 $v_2w \notin \mathfrak{p}$。特别地，$v_2w \notin v_1W$，所以 $\dim_k R_1 \geq p + 1$。

取 W的一组基 $u_1, \dots, u_p$，并构造矩阵

$$M = \begin{pmatrix} v_1u_1 & v_1u_2 & \cdots & v_1u_p \\ v_2u_1 & v_2u_2 & \cdots & v_2u_p \end{pmatrix}.$$

如果不存在该域上的可逆行、列运算能够将一个元素变为零，那么称线性形式矩阵在域上是 1-一般的。对于 M，这意味着其行的每个非零线性组合的元素都线性无关。我们在 k上验证这一点。比值$t = v_1/v_2 = (v_1w)/(v_2w)$是 $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$中的非零元素。如果 t 在 k上代数，那么 $k[t]$将是一个域，且 t 将是 $R_\mathfrak{p}$中的单位元。因此 t 是超越的。对于每个 $\lambda \in k$，令 g 为它在 k上的最小多项式。元素 $g(t)$是非零的零次齐次元素，因此是 $Q^*(R)$中的单位元。在 $Q^*(R) \otimes_k k$ 中，它能被 $t - \lambda$整除，因此 $t - \lambda$ 在其中也是单位元。因此，对所有 $[a$，乘法 $av_1 + bv_2 = v_2(at + b)$ 在$W \otimes_k k$ 上都是单射：$b] \in \mathbb{P}^1(k)$。所以 M 在 k上是 1-一般的。

现在在 K 上工作，并从记号中省略标量扩张。映射 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(R_1)$ 将 $([a : b], [w])$ 发送到 $[(av_1 + bv_2)w]$，由 1-一般性可知处处有定义。其像

的维数至多为 p，因为 $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{p-1}$。每个后续的一般超平面都会使交集的维数降低一维，而一般超平面不会与有限点集相交。因此， $p+1$ 个定义在 R_1 上的一般线性泛函在该像上没有公共零点。它们的公共核 L 是一个余维数为 $p+1$ 的一般子空间，并且不包含任何非零乘积 $(av_1 + bv_2)w$。因此， M 的行的每个非零线性组合模 L 后仍具有线性无关的元素，所以该约化矩阵是 1-一般的。

以 R_1/L 的基为变量的多项式环映射到 $R/(L)$。约化矩阵的各项现在是 $p+1$ 个变量的线性形式。由于 $(v_1u_i)\ (v_2u_j) = (v_1u_j)\ (v_2u_i)$ 在 R中成立，其 2×2 阶子式在 $R/(L)$中消失。若 $p \geq 2$，根据 [E05，推论 6.9 (b)]，这些子式生成一条有理正规曲线的理想。因此，其坐标环 $k[x,y]^{(p)}$ 映射到$R/(L)$。若 $p = 1$，则 R_1/L 上的多项式环本身有两个变量。□

接下来我们证明，每个形如 $k[x,y]^{(p)}/J$ 的非零分次 Artin 代数都具有单峰希尔伯特函数。

引理 4.2. 设 $S = k[x,y]$，设 $p \geq 1$，并设 J 是 $S^{(p)}$ 的一个齐次理想，使得$A = S^{(p)}/J$ 非零且为阿廷的。那么 S/JS 是阿廷的，并且 $A = (S/JS)^{(p)}$。记$H_A(i) =$ 维数$_k A_i$。那么 H_A 是单峰的。对每个满足 $H_A(j) < pj+1$的 $j \geq 0$，对所有 $i \geq j$，都有 $H_A(i+1) \leq H_A(i)$。

证明。对于每个 $j \geq 0$，我们都有 $[JS]_{pj} = \sum_{i=0}^{j} J_i S_{p(j-i)} = J_j$，因为 $S_{p(j-i)}$ 是 $S^{(p)}$ 的次数为 $(j-i)$ 的分量，而含有 $i = j$ 的项是 J_j。因此 $A = C^{(p)}$，其中 $C = S/JS$。环 C 是有限的 A 模，因为 S 是有限的 $S^{(p)}$ 模，所以 C 是阿廷的。

我们可以假设 k 是无限的，因为扩张域会保持 Hilbert 函数不变。记 $H_C(n)$ 为 $=\dim_k C_n$，并令 e 为满足 $H_C(e) < e+1$ 的最小非负整数。由[I05，引理 2.3]，对每个 $0 \leq n < e$，都有 $H_C(n) = n+1$，且对每个$n \geq e$，都有 $H_C(n+1) \leq H_C(n)$。因此，子序列 $H_A(i) = H_C(pi)$ 是单峰的。若 $H_A(j) < pj+1$，则$pj \geq e$，所以对每个 $i \geq j$，都有 $H_A(i+1) = H_C(pi+p) \leq H_C(pi) = H_A(i)$。□

为了估计中间项，我们比较 h_i 和 h_{s+1-i}。

引理 4.3. 设 R 是域 k 上的一个 d 维标准分次 *Cohen–Macaulay* 整环，其 h-向量为 $(1, h_1, \ldots, h_s)$，其中 $d, s \geq 1$。假设 $[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 \neq 0$ 且$0 \leq h_1 - h_s \leq 1$。则

$$0 \leq h_i - h_{s+1-i} \leq h_1 - h_s \qquad \text{for every } i \text{ with } 1 \leq i \leq \lceil s/2 \rceil. \tag{6}$$

证明。取一个分次分式理想 $I \cong \omega_R(d-s)$，使得初始次数 $I = 0$ 且维数$_k I_0 = h_s$。由引理 2.1 得到 $I_0[I^{-1}]_1 = [\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 \neq 0$。固定 $0 \neq v \in [I^{-1}]_1$。理想 $J = vI \cong \omega_R(d-s-1)$ 是一个真典范理想。因此，由 [BH98, 命题 3.3.18 (b)]， $G = R/J$ 是维数为 $d-1$ 的 Gorenstein 环。写作 $G = S/Q$，其中 S 是以 G_1 的一组基为变量的多项式环。由于 $J_1 = vI_0$ 的维数为 h_s，我们有维数$_k G_1 = d + h_1 - h_s$。因此

$$c := \mathrm{ht}\, Q = \dim_k G_1 - \dim G = (d + h_1 - h_s) - (d-1) = 1 + h_1 - h_s.$$

正合列 $0 \to J \to R \to G \to 0$ 和分次对偶给出

$$(1-t)h_G(t) = h_R(t) - t^{s+1}h_R(t^{-1}).$$

对于 $1 \leq i \leq s$，右侧 t^i 的系数为 $h_i - h_{s+1-i}$。

由于 $c \leq 2$，Serre 定理在 S 的齐次极大理想处给出 c 的极小生成元 Q [E95，推论 21。20]因此 Q 由一个齐次正则序列生成。如果 $h_1 = h_s$，那么 $Q = (f)$ 和 $(1-t)h_G(t) = 1 - t^{\deg f}$。比较次数可得 $\deg f = s+1$，因此所指示的所有差均为零。

如果 $h_1 = h_s + 1$，那么 Q 有两个生成元。设 $a \le b$ 为它们的次数。那么

$$(1-t)h_G(t) = (1 + t + \cdots + t^{a-1})(1 - t^b), \qquad a + b = s + 2.$$

特别是，$b > \lceil s/2 \rceil$。对于所述范围内的每个 i，t^i 的系数在 $i < a$时为 1，否则为 0。□

在标准分次近 Gorenstein 环中，$[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 R = \mathfrak{m}_R$。由于 ht $\mathfrak{m}_R = \dim R$，定理B 可由下述命题推出。

定理 4.4. 设 R 是域 k上的标准分次 *Cohen–Macaulay* 整环，其h-向量为 $(1, h_1, \ldots, h_s)$，其中 $s \ge 1$ 且 $h_1 - h_s \le 1$。假设 $ht([tr_R(\omega_R)]_1 R) \ge 2$。那么 $h_s \le h_1$，且 $h(R)$ 是单峰的，最大值为 $max_i\, h_i - h_{\lceil s/2 \rceil} \le 1$。若 $char\, k = 0$，则 R 的一般阿廷约化具有强 *Lefschetz* 性质。若 R 是层的，则 $h(R)$是凹且交替递增的。特别是，在此情况下它是对数凹的，且$h_{\lceil s/2 \rceil} = max_i\, h_i$。若 $h_1 = h_s$，则 R是层的，且 $h_1 = \cdots = h_s$。

证明。若 $s = 1$，则每个线性阿廷约化的底都在一次，而每个非零线性形式都是强 Lefschetz 元素。其余断言由$h(R) = (1, h_1)$得出。设 $s \ge 2$，并令 $d = \dim R$。选取一个分次分式理想 I，使其作为分次 R-模与 $\omega_R(d-s)$ 同构。由[BH98，推论 4.4.6 (a)]，可知初始次数 $I = 0$ 且维数$_k\, I_0 = h_s$。根据引理 2.1，$I_0[I^{-1}]_1 = [\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1$。由于高度假设，$[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 \ne 0$，因此有 $[I^{-1}]_1 \ne 0$。若对某个非零 v 有 $[I^{-1}]_1 = kv$，则$[\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1 R \subseteq vI$。但 vI 是一个真典范理想，因此由 [BH98，命题 3.3.18 (b)]，其高度为一。故 $\dim_k [I^{-1}]_1 \ge 2$。

在 k 上应用引理 4.1，其中取 $E = [I^{-1}]_1$ 和 $W = I_0$。由于 $\dim_k W = h_s$，我们得到一个分次满射 $B = k[x,y]^{(h_s)} \longrightarrow R/(L)$，对每个余维数为 $h_s + 1$ 的充分一般子空间$L \subseteq R_1$ 均成立，其中 $R = R \otimes_k k$。由于 $h_1 - h_s \le 1$，有 $\dim L = d + h_1 - h_s - 1 \le d$。因此，这样一个一般 L 的基可以扩充为 R 的参数线性系 Θ。于是 B 映到 $A = R/\Theta R$ 上，且 $\dim_k A_j = h_j$。引理 4.2 给出了 $h(R)$ 的单峰性。

若 char $k = 0$，引理 4.2 给出 $A = C^{(h_s)}$，且 $C = k[x,y]/J$ 是阿廷的。根据 HMNW03 的命题 4.4]，取一个强 Lefschetz 元素 $u \in C_1$，见 [。对每一对 $0 \le a < b \le s$，从 A_a 到 A_b 的乘法 $(u^{h_s})^{b-a}$，等同于从 C_{ah_s} 到 C_{bh_s}的乘法 $u^{(b-a)h_s}$。因此，u^{h_s} 是 A 的强 Lefschetz 元素。所有线性参数约化的希尔伯特函数均为 $h(R)$，所以，对此选择而言，能够证明最大秩的子式在其无限系数域上的一般参数及一般线性形式下仍非零。因此，A_{gen} 具有强 Lefschetz 性质。

假设 $h_1 \le h_s$。那么 $H_A(1) = h_1 < h_s + 1$。引理 4.2给出 $h_1 \ge h_2 \ge \cdots \ge h_s$，因此 $h_1 = \cdots = h_s$。若 R是 Gorenstein，则它是层的。否则，ω_R在其最低次数上有 $h_s = h_1$个极小生成元。高度假设给出一个非零 $x \in [\mathrm{tr}_R(\omega_R)]_1$。由于 R 是整环，x 是非零因子，因此根据 R，[MO，命题 4.4 (2)]，它是层的。

剩下需要考虑 $h_1 = h_s + 1$。由引理 4.3，$0 \le h_i - h_{s+1-i} \le 1$ 对每个 i 满足$1 \le i \le \lceil s/2 \rceil$。因此 $|h_i - h_{s+1-i}| \le 1$ 对每个 i 满足 $1 \le i \le s$。由于 $h_1 = h_s + 1 > h_0$，我们可以选取 $m \ge 1$ 满足 $h_m =$最大值$_i\, h_i$。指标 $\lceil s/2 \rceil$ 位于 m 和 $s + 1 - m$之间。因此，单峰性给出 $h_{\lceil s/2 \rceil} \ge$最小值$\{h_m, h_{s+1-m}\} \ge h_m - 1$。

现在假设 R 是层的。那么 R 及其阿廷约化 A 也都是层的。A 的每个非零齐次元素在 A_s中都有一个非零倍数，因为次数最大的非零齐次倍数属于底。根据 Veronese 分次，x^{h_s} 和 y^{h_s} 在$B \to A$ 下的像都属于 A_1。对每个 $2 \le j \le s$，考虑映射

$$A_{j-2} \xrightarrow{(y^{h_s}, -x^{h_s})} A_{j-1}^{\oplus 2} \xrightarrow{(x^{h_s}, y^{h_s})} A_j.$$

它们的复合为零。对每个 $k \geq 2$，x, y 中次数为 kh_s 的每个单项式都能被 x^{h_s} 或 y^{h_s}整除，因为既不能被二者整除的单项式次数至多为 $2h_s - 2$。因此$A_k = x^{h_s}A_{k-1} + y^{h_s}A_{k-1}$，所以第二个映射是满射。若 $z \in A_{j-2}$属于第一个映射的核，则 $x^{h_s}z = y^{h_s}z = 0$。由于 $s-j+2 \geq 2$，令 $k = s-j+2$取相同值可得$zA_{s-j+2} = 0$。由层性可知 $z = 0$，因此第一个映射是单射。所以对每个 $2 \leq j \leq s$，都有 $h_{j-2} + h_j \leq 2h_{j-1}$。因此 $h(R)$ 是凹函数。对每个 $1 \leq i < s$，由凹性和算术—几何平均不等式可得 $h_i \geq (h_{i-1} + h_{i+1})/2 \geq \sqrt{h_{i-1}h_{i+1}}$。两边平方可得 $h_i^2 \geq h_{i-1}h_{i+1}$。

剩下要证明的是 $h_i \leq h_{s-i} \leq h_{i+1}$ 对每个 i 满足 $0 \leq i < s/2$ 的情形。第二个不等式由 (6) 在 $i+1$ 处推出。若 $i = 0$，则第一个不等式成立，$1 \leq h_s$。假设 $1 \leq i < s/2$且 $h_i > h_{s-i}$。那么 $h_k - h_{k-1} \leq -1$ 对某个 k 满足 $i < k \leq s-i$。由凹性，所有后续差值都不大于 -1，因此 $h_{s-i+1} \leq h_{s-i} - 1 \leq h_i - 2$。这与 (6) 在 i 处矛盾。□

例 4.5。考虑以下两条射影单项式曲线，其齐次坐标环为

$$R = \mathbb{Q}[u^{21}, u^{17}v^4, u^{12}v^9, u^9v^{12}, u^8v^{13}, v^{21}],$$
$$S = \mathbb{Q}[u^{27}, u^{22}v^5, u^{15}v^{12}, u^{12}v^{15}, u^{10}v^{17}, v^{27}].$$

每个环中所示的生成元次数均为一次。环 R 是 [M24 中定理 3.11 的证明之情形 $d = 4$] 中构造的类型为四的例子。特别地，R 是近 Gorenstein 的，但不是层的。其 h-向量为 (1，4，7，6，3)，其最大值出现在中间项。

对于 S，可以用 Macaulay2 [M2] 验证 S 是 Cohen–Macaulay 整环，$\mathrm{tr}_S(\omega_S) = \mathfrak{m}_S$，且 $h(S) = (1, 4, 7, 6, 6, 3)$。因此，$S$是近 Gorenstein 且 $h_1 - h_5 = 1$。定理 4.4 中规定的中间项为 $h_3 = 6$，而 $h_2 = 7$ 是最大值。这使得界 $\max_i h_i - h_{\lceil s/2 \rceil} \leq 1$中取等号。此外，$h_3^2 = 36 < 42 = h_2h_4$，所以 $h(S)$ 不是对数凹的。因此，根据定理 4.4，S 不是层。

注 4.6。在特征零的代数闭域上，具有 $s \geq 2$和 $h_1 = \cdots = h_{s-1} \geq h_s \geq 2$的标准分次 Cohen–Macaulay 整环是层的 [Y95，推论 3。11], [Y97，引理 5 (2) 和命题 6]。

Acknowledgments

第一作者部分获得了日本学术振兴会（JSPS）科研补助金 JP25K07100 的资助。第二作者获得了日本学术振兴会（JSPS）科研补助金 JP25KJ1744 的资助，并感谢杉山教授提供促成此次合作的机会。作者使用 ChatGPT 检查证明、进行计算、核对参考文献并修改文本；所有数学内容均由作者承担全部责任。

References

[AKOPP26] Karim Alexander Adiprasito、Eric Katz、Ryoshun Oba、Stavros Argyrios Papadakis 和 Vasiliki Petrotou，《Cohen–Macaulay 环上体积映射的 Frobenius 恒等式》，预印本，arXiv: 2605.02479v1，2026年。[APP25] Karim Alexander Adiprasito、Stavros Argyrios Papadakis 和 Vasiliki Petrotou，《格多胞形与半群代数：一般 Lefschetz 性质及 Parseval–Rayleigh 恒等式》，预印本，arXiv: 2509.14152，2025年。[APPS22] Karim Alexander Adiprasito、Stavros Argyrios Papadakis、Vasiliki Petrotou 和 Johanna Kristina Steinmeyer，《超越 Ehrhart 理论中的正性》，预印本，arXiv: 2210.10734，2022年。[AY21] Karim Adiprasito 和 Geva Yashfe，《分划复形：组合交换代数导论》，载于《组合学综述 2021》，伦敦数学

学会讲义丛书，第470卷，剑桥大学出版社，剑桥，2021年，1–42页。[A26] Christos A. Athanasiadis，《单纯复形的三角剖分与 theta 多项式》，东北数学杂志 (2) 78 (2026)，第3期，423–441页。[BH98] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog，《Cohen–Macaulay 环》，修订版，剑桥高等数学研究丛书，第39卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[BK05] Michel Brion 和 Shrawan Kumar，《几何与表示论中的 Frobenius 分裂方法》，《数学进展》第231卷，Birkh¨auser，波士顿，2005年。[BR07] Winfried Bruns 和 Tim R¨omer，《Gorenstein 多胞体的 h-向量》，《组合理论杂志》A辑 114 (2007)，第1期，65–76页。[CSV25] Aldo Conca、Anurag K. Singh 和 Matteo Varbaro，《特殊正交群的不变量环具有非单峰的 h-向量》，代数及其应用杂志 24 (2025)，第13–14期，2540001，10页。[E95] David Eisenbud，《交换代数：以代数几何为视角》，数学研究生教材，第150卷，Springer-Verlag，纽约，1995年。[E05] David Eisenbud，《syzygy 几何：交换代数与代数几何的第二课程》，数学研究生教材，第229卷，Springer，纽约，2005年。[EY26] Naoki Endo 和 Ken-ichi Yoshida，《二维正则局部环上的近 Gorenstein 爆破代数》，预印本，arXiv:2607.24019，2026年。[F26] Luis Ferroni，《Ehrhart 理论中的单峰性把戏》，预印本，arXiv:2609.10513v2，2026年。[GW78] Shiro Goto 和 Keiichi Watanabe，《关于分次环，I》，《日本数学学会杂志》30 (1978)，第2期，179–213页。[M2] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman，《Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统》，网址：https://macaulay2.com。[HKMM23] Thomas Hall、Max K¨olbl、Koji Matsushita 和 Sora Miyashita，《近 Gorenstein 多胞形》，Electronic Journal of Combinatorics 30 (2023)，第4期，论文编号 P4.42，21页。[HMNW03] Tadahito Harima、Juan C. Migliore、Uwe Nagel 和 Junzo Watanabe，《阿廷 K-代数的弱与强 Lefschetz 性质》，Journal of Algebra 262 (2003)，第1期，99–126页。[HHS19] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi 和 Dumitru I. Stamate，《典范模的迹》，Israel Journal of Mathematics 233 (2019)，第1期，133–165页。[HMP19] J¨urgen Herzog、Fatemeh Mohammadi 和 Janet Page，《Hibi 环与正规仿射半群环非戈伦斯坦轨迹的测度》，Journal of Algebra 540 (2019)，78–99页。[H89] Takayuki Hibi，《无瑕 O-序列与 Cohen–Macaulay 整环的希尔伯特函数》，《纯粹与应用代数杂志》60 (1989)，第3期，245–251页。[H92] Takayuki Hibi，《凸多胞形上的代数组合学》，Carslaw Publications，Glebe，1992年。[Hi19] Akihiro Higashitani，《格多胞形的 δ-向量的单峰性及两个相关性质》，European Journal of Mathematics 5 (2019)，第2期，333–355页。[Hoc72] Melvin Hochster，《环面的不变量环、由单项式生成的 Cohen–Macaulay 环与多胞形》，Annals of Mathematics (2) 96 (1972)，第2期，318–337页。[I05] Anthony Iarrobino，《高度二理想的 Betti 分层》，Journal of Algebra 285 (2005)，第2期，835–855页。[KKP+21] Zhibek Kadyrsizova、Jennifer Kenkel、Janet Page、Jyoti Singh、Karen E. Smith、Adela Vraciu 和 Emily E. Witt，《特征二下的三次曲面》，Transactions of the American Mathematical Society 374 (2021)，第9期，6251–6267页。[KLS26] Kalle Karu、Matt Larson 和 Alan Stapledon，《微分算子、各向异性与单纯球面》，International Mathematics Research Notices 2026 (2026)，第13期，rnag147。[M24] Sora Miyashita，《齐次环的层性与近 Gorenstein 性之比较》，《纯粹与应用代数杂志》228 (2024)，第4期，107553。[M26a] Sora Miyashita，《近 Gorenstein 性质的线性推广及其在 Veronese 子代数中的应用》，数学通讯 299 (2026)，第9期，2436–2451页。

[M26b] Sora Miyashita, 《伪Gorenstein环何时变为Gorenstein环? 》, 《伦敦数学学会通报》58（2026）, 第1期, e70186。[MO] Sora Miyashita 和 Taiga Ozaki, 《通过典范迹构造高维Teter环》, 即将发表于《日本数学学会杂志》, arXiv:2512.06761。[MP05] Mircea Mustaţă 和 Sam Payne, 《Ehrhart多项式与弦理论Betti数》, 《数学年刊》333（2005）, 第4期, 787–795。[OH06] Hidefumi Ohsugi 和 Takayuki Hibi, 《特殊单形与Gorenstein环面环》, 《组合理论杂志》A辑 113（2006）, 第4期, 718–725。[Pa19] Janet Page, 《Hibi 环的Frobenius复杂度》, 《纯粹与应用代数杂志》223（2019）, 第2期, 580–604。[PP20] Stavros Argyrios Papadakis 和 Vasiliki Petrotou, 《单纯球面的特征2各向异性》, 预印本, arXiv:2012.09815, 2020。[P08] Sam Payne, 《Ehrhart级数与格点三角剖分》, 《离散与计算几何》40（2008）, 第3期, 365–376。[Sch22] Stefan Schr¨oer, 《有理数域上具有半阿贝尔约化和二等分点的椭圆曲线》, 《数论杂志》231（2022）, 80–101。[Si00] Anurag K. Singh, 《多符号Rees代数与强 F-正则性》, 《数学杂志》235（2000）, 335–344。[S96] Richard P. Stanley, 《组合学与交换代数》, 第二版, 《数学进展》第41卷, Birkh¨auser Boston, 1996。[SVL13] Jan Schepers 和 Leen Van Langenhoven, 《整闭格多胞体的单峰性问题》, 《组合学年刊》17（2013）, 571–589。[S78] Richard P. Stanley, 《分次代数的希尔伯特函数》, 《数学进展》28（1978）, 第1期, 57–83。[S89] Richard P. Stanley, 《代数、组合学与几何学中的对数凹序列和单峰序列》, 《纽约科学院年刊》576（1989）, 500–535。[Y95] KohjiYanagawa, 《Castelnuovo引理与Cohen–Macaulay齐次整环的 h-向量》, 《纯粹与应用代数杂志》105（1995）, 第1期, 107–116。[Y97] Kohji Yanagawa, 《关于Cohen–Macaulay齐次整环的 h-向量的一则注记》, 《日本数学杂志》（新辑）23（1997）, 第1期, 179–186。

Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology The University of Osaka Suita Osaka 565-0871 Japan , , , , ,T.H.: *Email address* hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp *Email address*,S.M.: u804642k@ecs.sci.osaka-u.ac.jp