Draft version November 24, 2026 使用 LaTeX 双栏 样式
排版，采用 AASTeX7.0.1

arXiv:2611.31162v1 [astro-ph.IM] 23 Nov 2026

Shaderous：用于物理学研究与教学的浏览器端流体动力学代码

James Guillochon [1]

[1] *Independent Researcher*

摘要

Shaderous 是一款用于可压缩气体动力学和磁流体力学的三维代码，可在任何厂商的图形处理器上，通过浏览器中的 WebGPU 计算着色器运行。它结合了非分裂 MUSCL-Hancock 格式和 HLLC通量、多重网格泊松求解器、采用每块时间步长的块结构自适应网格细化、带 HLLD通量的约束输运、带吸积汇的点质量、采用 M1闭合的灰辐射输运、适用于低马赫数的隐式压力、涵盖简并电子至岩石和铁的表格式状态方程、冷却、黏性、热传导、电阻率、气体混合物，以及由基于13种同位素反应网络训练的神经网络实现的核燃烧。用户只需分享一个链接，学生便可在自己的笔记本电脑或手机上运行，因此该代码适用于各个层次的教学。一次运行仅限使用一块图形处理器：迄今为止，最大的自适应网格在 NVIDIA H200 上包含约1.75亿个网格单元。因此，该代码适合通过命令行进行参数扫描，而非运行规模最大的单次数值模拟。据我们所知，这项设计有三个方面是全新的。首先，流体动力学求解器不存储面通量。共享一个面的两个网格单元会计算出逐位相同的通量，因此，位于层级边界和时间步边界上的网格单元会重新计算邻块的通量，而不是保留通量寄存器。在自适应网格上，质量、动量和能量守恒达到舍入误差精度；补偿求和则使磁场散度保持在舍入误差精度。其次，整个计算步都在图形处理器上运行：时间步长和块向时间箱的分配都在图形处理器上归约，虚单元则在读取时计算，而非通过交换获得。第三，该代码以单精度进行计算，却能准确复现一系列天体物理系统；在206项验证测试中，涵盖了处于流体静力平衡的恒星和大气，也涵盖了激波、引力坍缩和磁化流。

关键词：流体动力学 — 流体动力学模拟 — 计算方法 — 图形处理器计算 — 天文学软件

1. 引言

用于天体物理气体动力学的网格代码，如 FLASH（B. Fryxell 等，2000）、RAMSES（R. Teyssier，2002）和 Athena++ （J. M. Stone 等，2020年），都是大型原生程序。用户使用编译器构建这些程序，
使用消息传递接口库；如果使用图形处理器，还需借助厂商工具链，然后在工作站或集群上运行程序，并在事后检查输出。这种工作流程适用于生产级科研，却不适合教学、在投入生产级运行之前探索问题，也不便于把结果交给同事，让他们在一分钟内复现并修改。

图形处理器最初是通过图形接口进入数值气体动力学领域的。在 CUDA 出现之前，求解器以片段程序的形式编写，通过读取和写入纹理来运行：线性代数和多重网格（J. Bolz 等，2003；N. Goodnight 等，2003；J. Kr¨uger 与 R. West- ermann，2003）、不可压缩云动力学（M. J. Harris 等人 2003），以及采用高分辨率有限体积格式求解二维和三维可压缩欧拉方程（T. R. Hagen 等人 2006）。J. D. Owens 等人（2007）对这一时期进行了综述。随后，通用工具链取代了图形技术路线，天体物理学领域也迎来了一代 GPU代码，其中包括 GAMER（H.-Y. Schive 等人 2010、2018）、P. Wang 等人（2010）的自适应求解器、P. Kestener 等人（2010）的欧拉求解器、Cholla（E. E. Schneider 和 B. E. Robertson 2015）、FARGO3D（P. Ben´ıtez-Llambay 和 F. S. Masset 2016）、Astaroth（J. Pekkil¨a 等人 2017年）、K-Athena（P. Grete 等人 2021）、QUOKKA（B. D. Wibking 和 M. R. Krumholz 2022）、Idefix（G. R. J. Lesur 等人 2023）、Kratos（L. Wang 2025）、AthenaK（J. M. Stone 等人 2026）、AGILE（O. Porth 等人 2026）和 RAMSES-GPU（R. Teyssier 等人 2026）。这些代码运行速度快，并能扩展到众多设备，但每一个都是使用 CUDA、HIP 或可移植性层构建的原生应用程序。

WebGPU 是一种现已由浏览器提供的图形和计算接口，无需安装即可将计算着色器引入所有台式计算机和许多手机。其着色语言 WGSL 可编译为本地驱动程序所接受的形式。现有一些从浏览器调用图形处理器的模拟器，分别用于反应扩散和心脏模型（A. Kaboudian 等人 2019）、Gross-Pitaevskii 方程（A. W.Baggaley 2026）以及等离子体湍流：A. Mallet 和 E. Abraham （2026）编写了一个在浏览器中运行的简化磁流体力学 WebGPU 求解器，它是其伪谱代码 taranis 的移植版本。[2] 我们没有发现任何能够处理激波、自引力或自适应细化的可压缩欧拉方程或磁流体力学方程求解器（第2节）。

本文介绍了 Shaderous，这是一款能够……的代码。所有流体和引力计算均在 WGSL 计算着色器中运行，代码可通过网址运行。该方案的任何部分都不是专为天体物理学设计的。它求解可压缩欧拉方程或磁流体力学（MHD）方程，可选择理想或电阻性形式，并可选用引力、扩散、湍流驱动、加热、冷却、灰辐射输运和核燃烧。对压力进行隐式处理，使其能够模拟液体等近似不可压缩流，而不必根据声速设定时间步长。这款代码在流体力学课程或其他领域的问题中同样适用。我们通过天体物理学问题展示它，因为这些问题能同时检验代码的各个部分：强激波、自引力、必须保持流体静力平衡的恒星、发生吸积的点质量、磁化盘、爆轰，以及偏离理想气体状态方程甚远的情形，例如简并电子、解离中的氢分子和熔融岩石。所用物理模型都是传统的，我们在全文中注明了其来源。真正的新意在于如何将该方案映射到为图形处理而设计的接口上。WebGPU 禁止在同一遍处理中同时读取和写入同一个四通道浮点纹理，不支持双精度，限制存储绑定的数量，而且只能异步向 CPU 返回数据。我们将每项限制都转化为设计选择。最终得到的代码能在自适应网格上将守恒误差控制在舍入误差范围内，无需存储任何流体动力学界面通量，从不交换虚单元，让每个时间步都在图形处理器上完成，并能在单精度下保持流体静力平衡物体的平衡，同时使磁场保持无散。

该代码也可由人工智能智能体驱动。编程接口和模型上下文协议服务器公开了页面的各项操作，而每次运行都由一个设置文档定义，其中只包含数字和名称。因此，用户可以用文字向智能体描述模拟，由智能体编写设置文档，依据代码自身的规则进行检查，运行模拟并读取结果（见第 11.3节）。

第2 节比较了 Shaderous 与早期工作的异同。第3 节介绍了 WebGPU 的约束及由此决定的数据布局。第4 节介绍流体力学格式，包括状态方程、混合物、核燃烧以及适用于低马赫数的隐式压力（第4.7节）。第5 节介绍无需存储通量即可实现守恒的通量计算；第6 节介绍自适应网格及其局部时间步；第7 节介绍引力、点质量与吸积汇；第8节介绍磁场；第9 节介绍辐射输运。第11 节介绍接口、问题、用于定义问题的配置文件、文件格式、脚本接口，以及智能体如何根据描述构建配置。第12节介绍该代码在教学中的用途；第13 节介绍验证套件；第14节介绍性能。第15节讨论局限性。

2. 与早期工作的关系

我们检索了三个领域中已有的代码：用于图形着色器通用计算的代码、用于天体物理流体的图形处理器代码，以及可在浏览器中运行的科学模拟器。

着色器时代的求解器在理念上与我们最为接近。T. R. Hagen 等人 (2006) 在均匀网格上通过片段程序求解可压缩欧拉方程，而 N. Goodnight 等人 (2003) 和 J. Bolz 等人 (2003) 也以相同方式运行多重网格算法。纹理中的自适应数据结构同样源自计算机图形学： A. E. Lefohn 等人 (2006) 在纹理中构建页表和八叉树，以便在图形处理器上进行随机访问。Shaderous 使用计算着色器而非片段程序，但沿用了相同的模型：状态存储在纹理中，并由每个网格单元的一次调用进行更新。它还加入了这些求解器所不具备的功能：自引力、层级间采用守恒耦合的自适应细化、局部时间步，以及天体物理问题中的物理过程。

在天体物理学的图形处理器代码中，GAMER（H.-Y. Schive 等，2010年，2018）在结构上与 Shaderous 最为接近：它像 Shaderous 一样，将网格细化为固定大小的网格块。相较之下，P. Wang 等人的（2010）自适应求解器则运行于 Enzo 参考系中任意大小的网格上。GAMER 遵循 M. J. Berger 和 P. Colella （1989年）的方法，利用细网格侧存储的通量修正细化边界粗网格侧的数据。Shaderous 的流体动力学求解器完全不存储通量（第 5 节）。

其中有几种代码还采用 C. R. Evans & J. F. Hawley

[2] https://alfredmallet.github.io/taranis/webgpu/rmhd2d.html

（1988）提出的约束输运方法求解理想磁流体力学，包括 K-Athena、Idefix 和 AthenaK。这些代码采用 Athena 的非分裂积分器（T. A.Gardiner &J. M.Stone 2005；J.M. Stoneet al. 2008；J. M. Stone &T. Gardiner 2009）。Shaderous 的磁流体力学求解器使用相同的积分器（第 8节），并且与这些代码一样，会存储面通量，并在细化边界处维护通量寄存器。

A. Kaboudian 等人（2019）和A. W.Baggaley（2026）的浏览器模拟器表明，通过 WebGL 和 WebGPU 在图形处理器上进行交互式计算是可行的。它们在均匀网格上求解反应扩散方程和薛定谔型方程，此类方程无需在激波或细化边界处满足守恒律。¨

最接近的早期代码是A. Mallet 和 E. Abraham（2026）开发的简化磁流体力学 WebGPU 求解器。它将其 JAX 代码 taranis 中的伪谱算法移植到浏览器。与 Shaderous 一样，它在 WebGPU 计算着色器中以单精度运行，并求解二维和三维磁化流体。简化磁流体力学假设存在强导引磁场和近似不可压缩等离子体，因此不会形成激波；伪谱方法则需要均匀周期网格。在这些限制下，它能够以较低的数值耗散追踪阿尔芬湍流，并提供 Shaderous 所缺少的工具：能谱和埃尔萨瑟变量。Shaderous 有三个部分沿用了该页面：在一段波数范围内进行随机强迫、其驱动湍流问题，以及若干磁化流体测试问题（阿尔芬波碰撞、埃尔萨瑟波包、撕裂和磁岛合并）。Shaderous 求解包含激波、引力和自适应细化的完全可压缩方程，但在给定分辨率下，其 Godunov格式的耗散更大。´

3. WEBGPU 的限制与数据布局

WebGPU 的四项属性影响了代码设计。每一项都是接口的属性，而非硬件的属性。

无法读写四通道浮点纹理。 计算通道只能以只写存储纹理的方式写入 rgba32float 纹理。因此，每次更新都要读取一份状态副本，并写入另一份副本。单通道 r32float 纹理则可以在一次遍历中读写，泊松求解器的红黑光顺器便利用了这一点。

存储缓冲区有限。默认限制允许每个着色器阶段使用的存储缓冲区很少，且单个绑定的上限为 128 MB。因此，我们改用三维纹理来存储状态：将密度和动量存放在一个 rgba32float 纹理中，将总能量、内能和一个被动标量存放在第二个纹理中。我们测量了存储缓冲区上的同一通量模板，发现它比在纹理上运行慢约 1.4 倍。

存储缓冲区上运行的速度比在纹理上慢约 1.4 倍。

不支持双精度。 WGSL 没有 64 位浮点类型。所有量都是 32 位浮点数，因此该方案必须在这种精度下保持流体静力平衡、追踪快速流动中的内能，并确保磁场无散度（第 4.3、 4.4 和 8.1 节）。

异步回读。 数据只能通过映射缓冲区在若干帧后返回 CPU。若代码在每个时间步之前都回读时间步长，就会造成停顿。Shaderous 在图形处理器上计算时间步长，将其写入一个小型缓冲区，并让后续遍历从中读取。CPU 无需等待即可读取诊断信息和细化指标。

WGSL 也不支持动态分派。一个小型预处理器会根据模块组装每个着色器：构建着色器时，选择要使用的状态方程、黎曼求解器、斜率限制器、冷却函数和扩散通量；更改其中任何一项，都会重新构建受影响的流水线。关闭的模块会映射到空操作桩，因此，不使用物种、冷却或扩散的运行不会为它们付出任何代价。

归约分阶段进行。时间步长、诊断量和细化指标都会用到归约。每个阶段都会将前一阶段的 4^3 条记录按块归并，因此求和以分层方式进行，从而减少单精度计算中的舍入误差。非负值的最大值通过对其位模式执行原子最大值来累积，因为这些位模式的排序与对应浮点数值的排序一致。

没有浏览器会报告其图形处理器有多少内存；而手机一旦内存耗尽，就会在 WebGPU 报告错误之前终止页面。因此，Shaderous 会根据浏览器确实报告的信息估算内存预算：独立桌面 GPU 为 2.5 GB，与系统共用内存的 GPU 为 2 GB，手机为 1 GB。用户可以更改这一设置。每次进行大型内存分配之前，页面都会在浏览器的本地存储中留下一条记录。下次加载页面时，如果这条记录仍然存在，就意味着页面在占用这么多内存时崩溃了，此后预算便会永久下调至低于该数值。若在服务器上运行且页面旁没有用户，内存预算则取自命令行（第11节）。

4. 流体动力学

Shaderous 使用包含引力的欧拉方程，

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v} + p\,\mathsf{I}) &= -\rho \nabla \Phi, \\ \partial_t E + \nabla \cdot \big[(E + p)\mathbf{v}\big] &= -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \mathcal{H} - \mathcal{C}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中， ρ 为密度， $\mathbf{v}$ 为速度， p 为压力， E为总能量密度， Φ为引力势，

I 为恒等项， $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{C}$ 分别为单位体积的加热率和冷却率。一个被动标量随气体输运，内能密度 e 与 E 同时演化（第 4.3 节）。

4.1. 方案

该方案采用无分裂的 MUSCL-Hancock 方法（B. van Leer 1979，1984），其形式见E. F. Toro（2009）。预测遍根据每个网格单元自身的重构斜率，将其状态向前推进半步。随后，更新遍根据半步值重构面状态，在每个网格单元的六个面上求解黎曼问题，并应用通量差和引力源项。加上计算信号速度和缩短时间步长的遍历，每个时间步共需四次遍历。在均匀网格上，预测器和更新步在读取守恒状态时会将其转换为原始变量，除非状态方程求逆的计算开销很大（第 14 节）。这样做开销更低，因为通量更新受纹理读取限制（即使去掉所有算术运算，耗时仍占原来的 85%），而仅重写状态的一次遍历比重复进行转换更耗时。图 1 展示了该方案在激波管、爆炸波和光滑流中的精度。

时间步长取三个限制中的最小值：$C\,\Delta x/$最大值 $\sum_i(|v_i|+c_\mathrm{s})$，$C\sqrt{\Delta x/}$最大值 $|\mathbf{g}|$，以及每对点质量的限制（第 7.4 节）。其中 $C=0.8$是 CFL 数，Δx 是网格单元尺寸，v_i 是沿坐标轴 i方向的速度分量，c_s 是声速，而 g是重力加速度。求和遍历各坐标轴，因为无分裂更新会在一步中加上每个坐标轴的通量，而最大值则遍历所有网格单元。时间步长还会缩短，以便恰好结束于下一个输出时刻。黏性和热传导会增加一个信号速率（第4.6节）。冷却不会限制时间步长（第 4.5节）。

通量来自 E. F. Toro 等人（1994）的 HLLC 求解器、A. Harten 等人（1983）的 HLL 求解器，或 HLLC 的低马赫数变体。波速采用 S. F. Davis （1988）的估计值，$S_\mathrm{L}=$最小值$(u_\mathrm{L}-c_\mathrm{L},\ u_\mathrm{R}-c_\mathrm{R})$ 和 $S_\mathrm{R}=$最大值$(u_\mathrm{L}+c_\mathrm{L},\ u_\mathrm{R}+c_\mathrm{R})$。其中 u 是垂直于面的速度，c 是声速，L 和 R 表示面的两侧。这些估计值只需要两侧的压力和声速，因此求解器不依赖于状态方程。正压气体使用 HLL，因为它没有可供 HLLC 求解的接触波。

低马赫数变体遵循B. Thornber 等人（2008）：传递给 HLLC 的速度跃变按局部马赫数进行缩放，因此缓慢流动不会受到阻尼

速率由声速设定：

$$\mathbf{v}_{\mathrm{L,R}} \to \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_\mathrm{L}+\mathbf{v}_\mathrm{R}) \pm \tfrac{z}{2}(\mathbf{v}_\mathrm{L}-\mathbf{v}_\mathrm{R}),$$
$$z=\min\bigl[1,\ \max\bigl(z_\mathrm{min},\ |\mathbf{v}_\mathrm{L}|/c_\mathrm{L},\ |\mathbf{v}_\mathrm{R}|/c_\mathrm{R}\bigr)\bigr].$$

我们将下限 z_min 设为 0.3。采用一个预测器和一个更新步，并使用下方所示的无限制三阶重构时，该方案依赖求解器自身的一些耗散；对于马赫数为 0.01 的 Gresho 涡旋（P. M. Gresho 和 S. T. Chan 1990），若下限为 0.1 或更低，动能将无限增长。将下限设为 0.3 时，该涡旋在64×64 个网格单元上经过两个时间单位后，动能损失 6%；而普通 HLLC 的损失为 15%。像N. Fleischmann 等人(2020年)那样缩放声波速度，也会消除压力跳跃的耗散；在本方案中，马赫数为 0.03 时这种做法不稳定。

4.2. 重构

默认重构将网格单元及其两个邻块所确定的抛物线上的值赋给每个面；对于斜率限制器所用的三单元模板，该方法具有三阶精度。面上的值为$q_\mathrm{c}+(\delta_\mathrm{far}+2\delta_\mathrm{near})/6$，其中 q_c 是网格单元中的值，δ_near 是面所在一侧邻块上的差值，δ_far 是另一侧邻块上的差值。三单元限制器无法区分光滑极值与跃变，因此会将两者都压平。遵循 M. ˇCada 和 M. Torrilhon（2009）的思路，我们只在某个量跨越一个网格单元的变化超过其自然尺度的 1% 时才应用限制器：对于速度，该量可以是密度、压力或声速。若将该尺度记作 Q，当 $(\delta^2_\mathrm{near}+\delta^2_\mathrm{far})/(0.01\,Q)^2$ 从 0.5 增至 1.5 时，面上的值会从无限制值逐渐过渡到受限制值。此处采用 B. Koren（1993）的限制器，并使用单调中心限制器的界限（B. van Leer 1977）。因此，光滑峰值能够保持其高度：平流测试中的最大误差比使用单调中心限制器时小 2.5 至 5 倍（图 1c）。小于 1% 的折角和跃变不会受到限制；对于轴对齐管道，激波管误差会高出几个百分点。单调中心、B. van Leer（1974）和 minmod（例如，P. L. Roe 1986）限制器仍可使用。

4.3. 单精度下的稳健性

单精度会丢失动能在总能量中占主导地位的气体压力。按照G. L. Bryan 等人（1995年年的双能量形式，我们在演化总能量的同时也演化内能，并在动能占主导地位时使用内能。只要总能量与动能之差低于总能量的 10^{-3}，或低于状态方程允许的最低内能

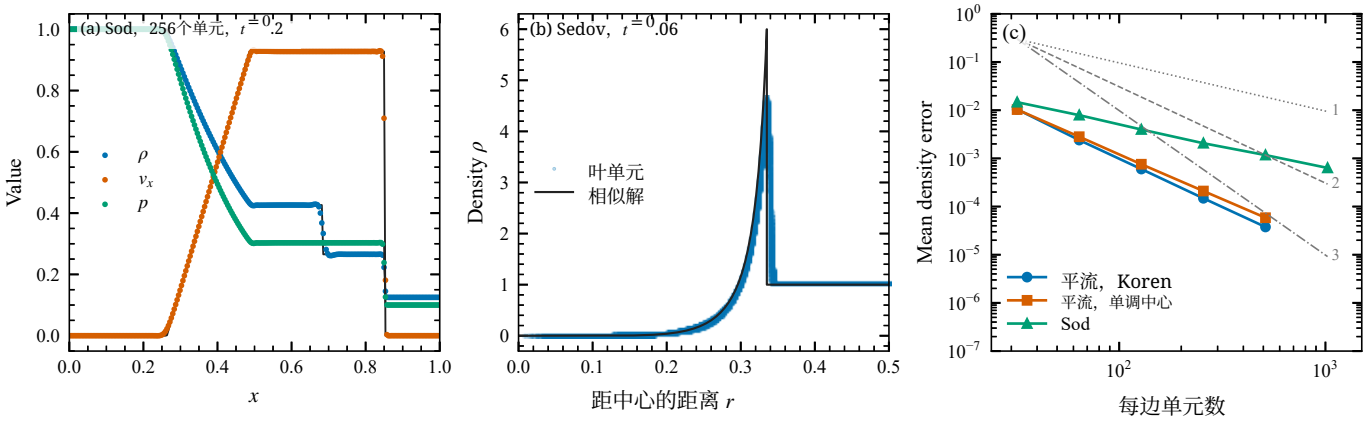


图 1。 流体动力学的精度。(a) 在 $t = 0.2$ 处，沿着 256^2 网格的中间行（点）绘制 Sod 激波管的密度、速度和压力，以及精确解（线）。(b) 在 $t = 0.06$时，自适应网格上三维 Sedov 爆炸的叶单元密度随到中心距离的变化（最细分辨率为 256个单元，共三个层级），每 33 个单元取一个点（总计 650 万个单元），并绘出相似解（线）。(c) 对角方向平流一周后，高斯分布在周期性盒子中的平均密度误差随每边单元数的变化；图中给出了默认限制器 B. Koren (1993) 和单调中心限制器的结果，以及 Sod 激波管的结果；灰线表示一阶、二阶和三阶收敛。

，我们就使用该内能。使用它时，我们会据此重建总能量，但简并气体除外。对于简并气体，我们保留保守更新所得的总能量，只从内能获取压力，因为即使总能量减去动能为负，简并气体仍有压力，至少不低于其冷电子所产生的压力。在两颗白矮星的碰撞中，每个强激波前方的网格单元内，这一差值都会变为负值。在压缩最强的时刻，于此处重建总能量会使其增加 2.3%。保留原值则使碰撞过程中总能量变化仅为 0.6%。若面状态的密度或压力非正，则该网格单元在该更新步降为一阶精度。在被激波检测器标记的网格单元旁，通量会从 HLLC 向 HLL 混合，从而抑制碳块不稳定性（J. J. Quirk, 1994）。当流动汇聚，且沿某一轴的两个邻块的压力之差超过较小压力的一半时，检测器就会标记该网格单元。它会参照流体静力平衡来衡量这一差值（第 4.4节）。密度和压力下限（默认分别为 10^{-10} 和 10^{-14}，以代码单位计）会处理剩余情况，并将设有下限的网格单元数量作为诊断信息报告。

4.4. 平衡良好重构

在流体静力平衡状态下，分层单元内的压力并不平滑，但压力与引力之间处于平衡。遵循 R. K¨appeli 和 S. Mishra (2014 年、 2016) 的做法，我们对每个邻居相对于该平衡状态的偏差进行限制和重构，

$$\delta p = (p_{\mathrm{n}} - p_{\mathrm{c}}) + \tfrac{1}{2}(\rho_{\mathrm{c}} + \rho_{\mathrm{n}})(\Phi_{\mathrm{n}} - \Phi_{\mathrm{c}}), \qquad (2)$$

其中，下标 c 和 n 分别表示网格单元及其相邻网格单元。步进到面时，平衡部分 $-\rho_{\mathrm{c}}\,\Delta\Phi$，会不受限制地加回，其中 $\Delta\Phi$ 是跨过该面到相邻网格单元的势差的一半。若网格单元满足方程（2）的梯形法则，且 $\delta p = 0$，那么共享同一面的两个网格单元具有相同的面压力。于是，一个网格单元两侧的面压力之差，恰好等于引力踢跃所增加的动量，因为踢跃所采用的加速度取自同一势的中心差分。预测器使用相同的斜率，因此能使气体保持静止状态。对于 HLLC，在两个压力相等且处于静止状态的状态之间，质量通量为零，因此无论梯度多陡，该状态都能保持到舍入误差的精度。HLL 则只要一个面两侧的密度不同，就会产生质量通量，因此无法精确保持这种状态。激波检测器依据同一平衡关系测量压力跳跃，因此不会将静止状态下梯度陡峭的大气判定为激波。密度每四个网格单元下降 e 倍的等温柱，在一次声波穿越后，其最大马赫数保持在 4×10^{-5}；而未采用平衡重构时，该值为 0.35（图2a）。Rayleigh–Taylor 问题的背景噪声低了 240 倍，Jeans 不稳定性增长率的误差则缩小了 12 倍。

4.5. 状态方程与冷却

每个状态方程都实现相同的四个函数（压力、声速、由压力求内能、温度），因此流体力学计算遍次与状态方程无关。Shaderous 提供理想气体、正压气体（等温或多方），以及局部热力学平衡下由理想气体和辐射压力组成的状态方程；其温度通过固定步数的牛顿迭代求得。每个 WGSL 模块都有一个 TypeScript 双精度镜像，用于测试。

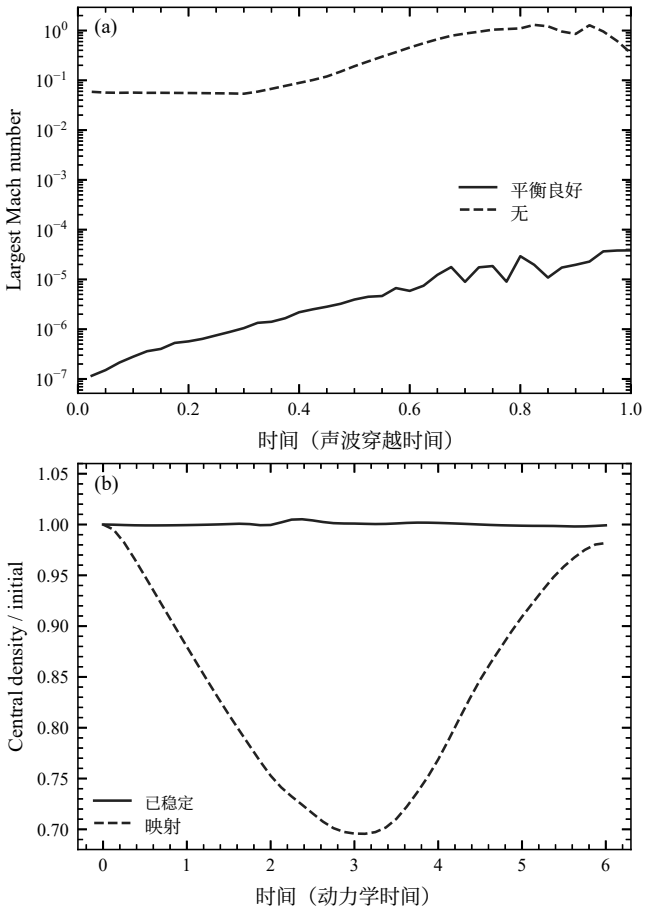


图 2. 单精度下的流体静力平衡。(a) 在一个等温柱中，密度每四个网格单元下降为原来的 e，经过一次声波穿越后，使用良平衡重构（实线）和不使用该重构（虚线）时的最大马赫数。(b) 自适应网格上的白矮星中心密度（ $1\,M_\odot$ ；最高分辨率为256个单元，共两级），相对于其初始值：使其与网格自身的势达到平衡（实线），以及从其解析剖面映射得到（虚线）。

另外四种状态方程会用到气体的组分；对于采用物理单位的问题，组分以物种及其质量分数列表的形式给出。第一种状态方程将任意相对论程度下完全简并电子的压力（S. Chandrasekhar 1935年）加入理想气体和辐射中，适用于白矮星。其密度尺度由每个核子所含电子数决定。各部分单独来看都符合热力学一致性，因此声速的平方是简并压与热部分 $\Gamma_1 p_{\rm th}/\rho$ 的导数之和，其中 Γ_1 是绝热指数，而 $p_{\rm th}$ 是该部分的压力。当费米动量低于 $m_{\rm e}c$的一半时，简并气体的压力和能量以级数求和，因为在单精度下，它们的闭式表达会相互抵消至零。第二种状态方程允许氢—氢在萨哈平衡中电离（M. N. Saha 1920年），因此平均分子量和内能（其中包括每次电离所需的 13.6 eV）会随温度变化。其绝热指数经过精确计算，在电离区会降至 1.3 以下。其温度通过限制在区间内的牛顿法求得。

第三种状态方程适用于会发生燃烧的白矮星物质。它按照 F. X. Timmes 和 F. D. Swesty（2000）的方法，处理任意简并度和温度下的电子与正电子。第一种状态方程为每个电子赋予 $\frac{3}{2}kT$ 的热能，叠加在简并气体之上；这远远超过简并电子所能吸收的热量。因此，它给出的受激波冲击的简并燃料温度低了两到五倍：在 10^7 g cm^{-3} 下，温度为 10^9 K 的气体会被算成 4.5×10^8 K。燃烧速率会按 T^{20} 或更快的速度增长，因此误差会决定是否点燃爆轰。我们以双精度计算电子–正电子气体的费米–狄拉克积分，并将其热自由能减去净电荷为零时电子–正电子对的热自由能后制成表，同时计算其一阶导数。该表以 $\log_{10}(\rho Y_{\rm e})$ 为自变量，其中 $Y_{\rm e}$ 是每个核子所含的电子数；另一自变量为 $\log_{10} T$，间隔为 0.02 个数量级。压力和能量是自由能的一阶导数，因此双三次 Hermite 插值能使它们在热力学上保持一致。净电荷为零时的电子–正电子对仅取决于温度，并以温度的切比雪夫级数表示。与 F. X. Timmes 和 F. D. Swesty（2000）的状态方程一样，离子采用理想气体模型，并加入辐射。离子还包含单组分等离子体的库仑能，其数值采用 D. G. Yakovlev 和 D. A. Shalybkov（1989）的拟合结果。库仑项会降低冷压力，因此，质量为 $1\,M_\odot$ 的碳氧白矮星比不考虑该项时小 6%，而题目中的白矮星均基于同一条冷曲线构建。与精确气体相比，双精度镜像计算出的能量和压力误差为 7×10^{-6}，声速平方的误差为 2×10^{-4}（第 99 百分位数）。图形处理器与镜像的能量和压力结果相差 2×10^{-5}，这正是单精度在通过迭代求得温度时所能达到的精度。

流体动力学状态给出能量或压力，因此温度通过对 $\ln T$ 使用牛顿法求得。每次迭代都会读取四个相邻纹理元素。它从一张包含三个平均核子数对应逆函数的粗略表开始，平均迭代 2.7 次即可收敛；而将气体视为经典气体的初始猜测则需要 9.3 次。该表、其逆函数以及配对级数共占用一张 4.3 MB 的纹理。每个列表形式的状态方程都共用一个模块，该模块会加载一张自由能表，将其绑定到图形处理器，对其进行插值，并通过牛顿法据此求得温度。

该模块在 TypeScript 中有一个镜像版本，其插值算法在 Python 中也有一份副本，可提供第 4.11 节中燃烧过程的参考温度。每个状态方程都会在表格之外添加自己的项。在燃烧网络运行时，碳氧爆轰每步所需时间比使用第一个状态方程时长 15%。我们还对自由能及其逆函数拟合了小型神经网络。在图形处理器上，使用牛顿法的表格计算速度是最佳逆函数网络的三倍，精度则高出约一千倍。

第四个状态方程描述氢和氦，适用范围从分子云到恒星包层。在这些环境中，气体的大部分热容都用于将一种物种转变为另一种：4.48 eV 的能量可使一个 $\mathrm{H_2}$，13分子解离，13.6 eV 可使一个氢原子电离，而 24.6 和 54.4 eV 分别可使氦电离一次和两次。我们沿用 K. Tomida 等人(2013) 的模型，将 $\mathrm{H_2}$、H、$\mathrm{H^+}$、He、$\mathrm{He^+}$、$\mathrm{He^{2+}}$ 和电子视为处于化学平衡的理想混合物，并用单位质量的一个自由能 F 来描述。每种物种都具有平动态和内态。对于 $\mathrm{H_2}$，内态包括转动和振动，其中正氢与仲氢的比例固定为 3:1。我们以 $\mathrm{H_2}$ 和 He 的基态为能量基准，因此能量在零温时为零，并采用教科书中的统计权重。K. Tomida 等人K. Tomida 等人(2013) 所用的 $\mathrm{H_2}$ 4权重比此处大 6 倍，因此在给定密度下，其解离温度约高 6%。在原子核数目固定时，使 F 最小化的丰度满足解离方程和萨哈方程，而它们可归结为一个关于电子密度的方程。由于 F 在丰度取值处于极小值，因此其一阶导数不涉及丰度的导数。对于 $h = F m_{\mathrm{u}}/kT$，

$$\frac{p}{\rho} = \frac{kT}{m_{\mathrm{u}}}\frac{\partial h}{\partial \ln \rho}, \qquad \varepsilon = -\frac{kT}{m_{\mathrm{u}}}\frac{\partial h}{\partial \ln T},$$

其中 ε 是单位质量的内能，m_{u} 是原子质量单位。

我们为两种组分制成了 h 表：太阳组成气体（氢质量分数为 0.7381，其金属元素计入氦）和纯氢。每张表的 $\log_{10}\rho$范围为 10^{-20} 至 10^{3} g cm^{-3}，步长为 0.1 dex；$\log_{10} T$ 范围为 10 至 10^{8} K，步长为 0.01 dex。表中还包含 h 的精确一阶导数及其混合导数。解离前沿和电离前沿在温度方向上很尖锐，在密度方向上则较宽，因此两个方向的间隔不同。插值和温度求解方法与白矮星表相同，但有两处改动。第一，h 在整张表中从 -100 变化到 100，若采用单精度，压力会被舍入到 10^{-4}，声速会被舍入到 10^{-2}。只有 h的导数才会用到，因此表中存储的是相邻节点之间 h 的差值，而不是h。第二，牛顿法以一张逆函数表为初始值，该表的分辨率与整张表相同。在解离和电离过程中，能量会在温度几乎不变时急剧上升；若初始猜测将气体视为经典气体，求解就会在此处停滞。单元测试中，求解平均需要 1.1 次计算，最多需要 3 次。每张表占用一个 5.2 MB 的纹理。在节点之间，模型表给出的压力精确到 6×10^{-5}，能量精确到 4×10^{-4}，声速平方最差时也精确到 0.4%；误差最大的位置在最低密度处的前沿上。在 Apple GPU 上，从压力转换为能量再转换回来的结果与 7×10^{-6}一致；能量和声速与双精度镜像的差异不超过 2.5×10^{-5}。

绝热指数 Γ_1 在低于 50 K 时为 5/3，此时 $\mathrm{H_2}$不发生转动；在几百开尔文时为 7/5。当 $\mathrm{H_2}$ 解离时，指数降至 1.1（在 10^{-8} g cm^{-3}时为 2000 K），氢电离时也会再次下降。这两处低谷都低于 4/3——自引力球体维持自身所需的最低指数；第一个低谷会引发原恒星的第二次坍缩（R. B. Larson，1969年）。在 10^{-13} g cm^{-3} 、温度为 10 K 时变得不透明的气体，其绝热线会在 10^{-8} g cm^{-3}处达到 2060 K。在 H. Masunaga 和 S.-i. Inutsuka（2000）的计算中，气体在 10^{-12} g cm^{-3}附近转为绝热，中心会在 10^{-7} g cm^{-3}附近达到 2000 K。该模型不包含简并电子，也不包含库仑项。压致电离通过一个替代项引入：它为每个束缚电子的自由能增加$kT\rho/\rho_{\mathrm{pi}}$；其中$\rho_{\mathrm{pi}} = 0.33$ g cm^{-3}是玻尔半径的硬球密度。我们没有用任何数据对其进行校准。由于它属于自由能的一部分，压力和能量因而保持一致。该项不会改变密度低于 0.01 g cm^{-3}的气体；而密度高于约 1 g cm^{-3}的热气体则会发生电离，与恒星内部的电离情况一致。若没有该项，萨哈方程会使太阳中心的氢有三分之一保持中性。因此，该表在任意温度下都适用于密度低于约 0.1 g cm^{-3} 的情况；在更高密度下，只要气体足够热而发生电离，也同样适用。在密度高于约 1 g cm^{-3} 的冷气体中，压力不一定会随温度或密度升高，而声速的平方则被限制为不低于 $0.01\,p/\rho$。辐射项 aT^4 具有解析形式，且为可选项。恒星内部需要它，而云则不需要，因为云中的辐射会逸散：在密度为 10^{-18} g cm^{-3}的云中，与 100 K 气体处于平衡的辐射所含能量将是气体能量的 100 倍。

对于岩石、铁和水，Shaderous 读取 ANEOS 的表格；ANEOS 是 S. L. Thomp-son & H. S. Lauson （1972）提出的解析状态方程，后来由 H. J.

梅洛什（2007 年）和 S. T. Stewart 等人（2020 年）进行了改动。我们通过 pyaneos 运行了四个已发表的输入文件（S. T. Stew- art 2026），即 M-ANEOS（S. L. Tho mp- son 等人，2019 年）的 Python 移植版：用于地幔的橄榄岩（S. T. Stewart 2022）、用于核心的铁合金 Fe85Si15（S. T. Stew- art 2020）、水（S. T. Stewart 2024），以及用于早期计算的岩石镁橄榄石（S. T. Stewart 等人，2019 年）。在已发表表格的节点处，pyaneos 以 5×10^{-9} 的精度复现这些表格，即复现到表格印刷时所采用的精度。四种材料共用一个网格，其中包含从 10^{-8} 到 100 g cm^{-3} 的 401 个密度值，以及从 50 K 到 10^{6} K 的 173 个温度值；这些值在对数空间中以 0.025 dex 的间隔均匀分布。ANEOS 以亥姆霍兹自由能的形式构建，但在电离流体中，它给出的压力和熵并不是其自由能的导数。在铁合金的 2×10^{4} K 状态下，它们与这些导数相差 1% 至 13%。如果将压力和熵作为斜率来制作自由能表，那么该表会自相矛盾；我们最初以这种方式构建的版本，在流体中位数处的误差达到了 3%。因此，我们将 ANEOS 给出的压力和能量制成表格，并将二者分别表示为双三次厄米插值，在每个节点处给出其一阶导数和混合偏导数。压力以 asinh($p/P_{\rm s}$) 的形式制表，其中 $P_{\rm s} = 10^{9}$ dyn cm^{-2}；这种表示在蒸气中对压力呈线性关系，而在凝聚态物质中呈对数关系。能量则制表为其超过冷曲线部分的对数；冷曲线是最低等温线上的自由能加上一个常数。节点处的斜率按单调三次插值的方式加以限制（F. N. Fritsch & R. E. Carlson 1980），因此只要节点上的能量随温度升高，插值后的能量也会随温度升高。在每种材料的节点之间随机选取 6,000 个状态，并与 ANEOS 进行比较后，液体和气体中的中位数误差分别为压力 10^{-6}、能量 10^{-5}，而固体中的误差更小。在蒸气穹顶内部，饱和压力从一个温度节点到下一个节点最多会增加 20 倍；在此区域，表格可将状态定位到约半个节点，即温度误差为 3%。一种材料的表格占用 2.2 MB，运行使用该材料时才会获取该表格。

流体动力学状态给出能量或压力，因此首先求出温度。根据网格单元的密度，在表的 173 行中进行二分查找，经过八步找到夹住该密度的两行；然后对两行之间的三次多项式使用牛顿法求出温度，并在限制斜率为零处改用假位法。声速的平方为 $(\partial p/\partial \rho)_T + \Gamma_{\rm G}(\partial p/\partial \ln T)_\rho/\rho$，其中 $\Gamma_{\rm G} = (\partial p/\partial T)_\rho/(\rho\,\partial \varepsilon/\partial T)$ 的取值限制在 0 到 5 之间，因此每一项都为正。对于压力是密度和能量函数的气体，其精确声速会将潜热乘以两个斜率的比值，而这两个斜率都在冷气体中趋于零。采用这种形式时，冷尘埃的声速为 26 km s^{-1}，并决定了完整运行的时间步长。对于参考密度及以上的固体和液态岩石、铁，我们的形式与已发表的表中的声速相符（S. T. Stewart 2020年、2022），在其各自节点处的误差在中位数处为 3×10^{-6}，在第 90 百分位处为 2×10^{-4}。在 2% 到 3% 的节点处，差异超过 1%。在图形处理器上，从能量反算出的压力与 float64 镜像的差异最坏不超过 10^{-4}，声速的差异不超过3×10^{-4}（第 99 百分位）。一次运行包含一种或两种材料，它们就是该运行中的物种（第4.10节）。在同时包含两种材料的网格单元中，每种材料所占的体积会调整到使两者在该网格单元的温度下压力相同。Shaderous 在运行首次使用这对材料时，在页面中求解这一闭合关系，耗时约一秒，并将结果存为另外三张表，对应的质量分数分别为 1/4、1/2 和 3/4。网格单元逐纹素混合其自身质量分数两侧的两张表，因此着色器读取混合物的方式与读取单一材料完全相同。在这些表各自对应的质量分数下，混合物的压力与每种材料在其自身密度下的压力相符，误差为 0.5%（第 90 百分位，两种材料均为凝聚态）。

光学薄冷却要么是温度的幂律函数并伴有均匀加热，要么采用H. Koyama &S.-i. Inutsuka (2002)提出的星际冷却函数，并经E. V´azquez-Semadeni et al. (2007)修正。在后一种情况下，单位体积内能的变化率为 $n\Gamma\,[1 - n\Lambda(T)/\Gamma]$，其中 n 是氢原子的数密度，单位为 cm^{-3}，Γ 是每个原子的加热率，T 是以开尔文为单位的温度，且

$$\frac{\Lambda(T)}{\Gamma} = 10^{7} \exp\left(\frac{-1.184 \times 10^{5}}{T + 1000}\right) + 1.4 \times 10^{-2}\sqrt{T} \exp\left(\frac{-92}{T}\right).$$

每次更新步结束时，在密度固定的条件下对内能进行冷却处理，最多分为 12 个二阶子步，每个子步使能量变化不超过十分之一。若某个子步会越过热平衡点，则在平衡点处停止，因此，即使冷却时间远短于时间步长，计算仍然稳定且不会过冲。冷却不会导致时间步长缩短。因此，网格单元的冷却速度可能快到 12 个子步都无法跟上。这样的网格单元在该步结束前便会停止冷却，能量损失最多约为 70%，并在下一步继续冷却。

4.6. 黏性和热传导

Shaderous 可为方程（1）添加黏性应力和热传导通量。动量通量增加$-\boldsymbol{\tau}$，能量通量增加 $-\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{q}$，其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \rho\nu\left[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{T}} - \tfrac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{v})\,\mathrm{I}\right], \\ \mathbf{q} &= -\kappa\rho\nabla T, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 T 为温度，运动黏度ν 和系数 κ 均为常数。绝热指数为 γ 的理想气体的温度随后以 $(\gamma-1)\kappa$ 的速率扩散。

两种通量都根据步长开始时的状态显式计算，并加到每个面的黎曼通量上。沿面法线方向的导数是该面两侧两个网格单元之差。横跨该面的导数则是两侧网格单元中心差分的平均值。面上 $\rho\nu$ 和 $\kappa\rho$ 中的密度取两侧网格单元密度中的较小值。若取其平均值，薄气体旁边的网格单元会比任何时间步长所允许的速度扩散得更快，快出两种密度之比。由于扩散项属于面通量的一部分，该通量的性质也适用于这些项。共享同一面的两个网格单元会计算出相同的比特，而第 6.2节和 6.3 节所述的匹配机制可在细化边界两侧以及处于不同时间步的块之间守恒动量和能量。在自适应网格上，块面的边缘处的横向差分需要边缘虚单元，而 Shaderous 从不计算这些虚单元。因此，共享该面的两个块都沿边缘采用单边差分。障碍物的面是静止壁面，气体会黏附在其上，热量也无法穿过。应力耗散产生的热量会加到单独演化的内能中（第 4.3 节）。

时间步长将扩散计为额外的信号速度 $2.5\,d\,D/\Delta x$，其中 d是维度数，Δx 是网格单元尺寸，而 D 是 $4\nu/3$ 和热扩散率中较大的值。因此，在扩散占主导时，步长会随 Δx^2减小。这里没有隐式求解，因此在细网格上处理强扩散会很缓慢。黏性会使通量更新的耗时增加 1.6 倍（二维）或 1.8 倍（三维），因为横向导数需要用到与正在更新的网格单元呈对角相邻的网格单元。单独的热传导不会增加可测量的耗时。

4.7. 近似不可压缩流

在缓慢流动中，决定显式格式步长的是声速，而非流速。在马赫数为 $\mathcal{M}$ 时，该格式所需的步数是仅由流动决定时的 $1+1/\mathcal{M}$ 倍，而其中大部分计算都用于模拟对物理过程影响甚微的声波。Shaderous 提供了两种补救方法，且可以结合使用：采用声速可设定的液体，以及对压力进行隐式处理的步长。

液体采用弱可压缩状态方程 $p=c_0^2(\rho-\rho_0)$，其中 ρ_0 是参考密度，声速 c_0 是一个常数，取值约为最快流动速率的十倍。这遵循 J. J. Monaghan (1994) 提出的弱可压缩光滑粒子流体动力学方法，其状态方程刚度更大，形式为

同类方程。此时，密度相对 ρ_0 的偏离约为 $\mathcal{M}^2$，这种偏离就是将流动视为不可压缩流动所产生的误差。采用相同声速的等温气体在精确算术下也同样适用。不过，其压力 $c_0^2\rho$是驱动马赫数0.1流动的 ρv^2 量级差异的一百倍，而线性形式只存储相对 ρ_0的偏离，单精度足以分辨这一偏离。共用的遍历为正压气体提供了 HLL 求解器（第4.1节），但该求解器没有剪切波。在 64^2 个网格单元上进行马赫数0.1的 Gresho 涡旋测试时，使用 HLL 求解器经过四圈旋转后，动能损失了 8.4%。因此，液体仍采用低马赫数 HLLC 求解器，使用该求解器时动能损失为 2.2%，与相同马赫数下的理想气体相当。内部能量的存储槽保存压缩弹性能，因此，只要数值格式能够守恒，总能量就能得到守恒。

隐式步骤遵循 N. Kwatra 等人(2009)。平流、黏性和湍流驱动保持显式，在流动允许的时间步内进行，而声波则采用隐式处理。对于液体，后向欧拉形式为，

$$\begin{aligned}\rho^{n+1} &= \rho^n - \Delta t\,\nabla\cdot\mathbf{m}^{n+1},\\ \mathbf{m}^{n+1} &= \mathbf{m}^{*} - \Delta t\,\nabla p^{n+1},\\ p^{n+1} &= p(\rho^n) + c_0^2\,(\rho^{n+1}-\rho^n),\end{aligned}\tag{4}$$

其中，上标 n 和 $n+1$ 分别表示时间步的起始和结束，$\mathbf{m}^*$ 是显式更新后留下的动量密度。消去 ρ^{n+1} 和$\mathbf{m}^{n+1}$ 后，可得到关于新压力的一个方程，

$$\frac{p^{n+1}}{c_0^2\,\Delta t^2} - \nabla^2 p^{n+1} = \frac{p(\rho^n)}{c_0^2\,\Delta t^2} - \frac{\nabla\cdot\mathbf{m}^{*}}{\Delta t},\tag{5}$$

在投影法中，该方程变为压力的泊松方程（J. B. Bell 等人，1989年），即 $c_0\to\infty$。对于理想气体，两边的第一项都除以 ρc_s^2 而不是 c_0^2，拉普拉斯算子变为$\nabla\cdot(\rho^{-1}\nabla p^{n+1})$，$p(\rho^n)$则变为在该时间步内平流后的压力，而$\mathbf{m}^*$ 则变为速度。我们求解的是相对于上一步压力的变化。在马赫数 0.001 时，单精度下压力本身的舍入误差与流动中的压力差一样大。

第4.1 节的预测器仅推进半步的平流，并以此前一步的压力梯度代替声学项。通过第5节的几何多重网格方法求解方程（7.1），采用热启动，每步进行三个 V 循环。对于没有物质穿过的面（例如盒子的壁面或障碍物表面），其系数为零；粗网格面则取铺满它的细网格面的平均值，因此障碍物无需掩码即可延伸到每一层。校正

通过面压力之差改变动量，并通过面质量通量之差改变密度，因此质量和动量守恒，误差仅为舍入误差。对于理想气体，面压力为（$\rho_{\mathrm{R}}\,p_{\mathrm{L}}+\rho_{\mathrm{L}}\,p_{\mathrm{R}}$）/（$\rho_{\mathrm{L}}+\rho_{\mathrm{R}}$），与 N. Kwatra 等人（2009）中的做法相同。压力对总能量所做的功也表示为面值之差，因此能量同样守恒。我们对已发表的格式做了一项改动。平流根据预测器的面速度输运气体，而这些速度的散度仅在一阶精度下为零。液体会将由此产生的密度误差推回去，但在气体中，该误差会转化为熵误差并持续存在。因此，每个面还会根据迎风状态乘以校正后的速度与预测器速度之差来进行输运。在该格式的双精度浮点数版本中，Gresho 涡旋的密度误差由 7% 降至 0.07%。

后向欧拉法会阻尼该步能够解析的声波，并使整个步长在时间上达到一阶精度。因此，该步在无需额外代价的情况下实现了时间中心化。其压力作用力为 $p_\theta = \theta p^{n+1} + (1-\theta)p^n$，求解中的散度为 $\theta\mathrm{m}^{n+1} + (1-\theta)\mathrm{m}^n$。像之前一样消元后，得到方程（5）的算子，但其第一系数除以 θ^2，因此该步仍只需进行一次包含三个 V 循环的求解。每个网格单元取 $\theta = \max(\chi, \min(1, \frac{1}{2} + 0.1\bar{C}))$，其中 $C = c_{\mathrm{s}}\Delta t/\Delta x$ 是其声学库朗数，χ是激波开关，定义如下。于是，该步能够解析的声波几乎无阻尼地传播，就像采用克兰克-尼科尔森格式一样；而该步无法解析的声波（这涵盖了低马赫数下的所有流动）则像之前一样受到阻尼。开关$\chi = \min(1, \frac{1}{2} + \bar{4}\,\Delta t \max(0, -\nabla\cdot\mathrm{v}))$会对激波压缩的网格单元采用后向欧拉法，而在这些网格单元之后，克兰克-尼科尔森格式会产生振铃。气体按照步长开始和结束时的面速度平均值进行输运，压力和各场也在该平均值处发挥作用。仅使用修正后的速度时，即使在近似不可压缩流中，该步在时间上仍是一阶精度。在该步能够解析声波的区域，预测器的压力也会在半步内完成压缩过程。在 float64 副本中，运动气体中的平滑波随后会随步长以二阶精度收敛；在默认库朗数下，其误差仅为后向欧拉法的六分之一，在库朗数减半时则为十二分之一。声学库朗数为 0.5 的声波在一个周期内可保持其 98% 的振幅，而后向欧拉法只能保持 86%。在自适应网格上，液体对整个网格采用一个 θ，即其最细网格单元的 θ，因此多重网格的粗层级仍能求解叶单元的方程。两个层级之间的面会采用两个相邻网格单元中较大者的 θ来输运气体。在那里，步长开始时的速度由两个网格单元的中心值形成，而不是像面自身的速度那样形成；两者之差就是该步必须阻尼的声波。

因此，在两个层级上的 Sod 激波管中，密度的 L1 误差为 0.0061，而另一数值为0.0093。

引力作用于各个面。均匀场会使每个面的速度踢跃 $\Delta t\,g$，因此在满足方程（2）梯形法则的位置，面处于静止状态。自引力会根据面两侧的势差对每个面进行踢跃。第 7.4 节中的点质量会根据其软化势的差值对各个面进行踢跃，并接收施加于气体的踢跃总和，因此气体与点质量的总动量守恒。在 64^3 个网格单元上，一个稳态多方体在 27 步、跨越两个动力学时间的运行中将中心密度保持在 0.5% 以内；显式格式则用了 436 步。

在自适应网格上，方程沿树的各个层级求解。当细网格单元与较粗网格单元相邻时，细网格单元的虚压力位于两个中心的连线上。粗网格单元通过该面取细网格面通量的平均值，因此各层级之间的质量和动量守恒，误差仅为舍入误差。按照 A. Brandt（1977）的全近似格式，各层级对普通算子进行松弛，并将其与守恒算子的差值加到右端项中。液体中的密度和压力几乎均匀，因此第 6 节的细化指标也会考察速度的二阶导数。一次求解会在同一时刻耦合所有网格单元，因此所有块都采用相同的时间步长。在三个层级上、细化边界穿过涡旋的 Gresho 涡旋运行中，达到 $t = 1$ 马赫数0.1、0.01 和 0.001 时均用了 273 步；相比之下，显式格式在马赫数0.1 时用了 12,900 步。

气体的更新步还受到所求压力加速度的限制。其最大值为（$v + a\,\Delta t$）$\Delta t = C\,\Delta x$的解，其中 v和 a分别是网格上的最大速率和最大加速度。在 64^2 个网格单元上，液体 Gresho 涡旋在马赫数0.1、0.01 和 0.001 下均用 212 个步数运行完成，而显式格式在前两个马赫数下分别用了 3,411 和 32,198 个步数。这种分裂格式并非用于激波；遇到激波时，切换机制会将其改回后向欧拉法。Sod 激波管在 128 个网格单元上用了 38 个步数，而另一方法用了 111 个步数；密度的 L1 误差为 0.0097，显式格式则为 0.004。在 Apple M4 Pro 上，理想气体 Gresho 涡旋的一次更新步，在 512^2 个网格单元时相当于多达 6.6 个显式步（2.9 对 0.44 毫秒），在 128^3 个网格单元时相当于 4.2 个显式步（18 对 4.4 毫秒）。在马赫数为 $\mathcal{M}$时，一次更新步约可替代 $1 + 1/\mathcal{M}$ 个显式步，因此在二维中马赫数低于约 0.2、在三维中低于约 0.3 时，隐式更新步才具有优势。它适用于笛卡尔坐标系中的液体和理想气体。它运行时不支持吸积汇、冷却、加速参考系、剪切盒、镜像对称或燃烧。气体不支持旋转参考系和阻尼区，液体则不支持自引力和点质量。

4.8. 流体中的物体

障碍物是一组固体单元。气体单元与固体单元之间的每个面都是反射壁，并且在存在黏性时是无滑移壁。通过壁面网格面的通量就是气体在该处传给壁面的动量，因此物体所受的力，就是其各个壁面网格面上的通量之和；更新步本来就会计算这些通量。这正好等于气体损失的动量。在周期性盒子中，气体动量的变化与传递给 7×10^{-6}的合力平衡；在两种网格上以及采用显式和隐式压力时，情况都相同或更好。诊断信息会给出每个物体所受的力和扭矩，以及其阻力系数和升力系数。物体可以是设置中的某种形状，也可以是从 STL、OBJ、PLY 或 glTF 文件读取的三角形网格；该网格会在网格上转换为有符号距离场。设置中的一部分可以构成风洞：一个入口、一个带阻尼区的出口，以及盒子的对应面；其中液体和隐式压力适用于马赫数低于 0.3 的情况。转子可以在自身参考系中旋转（第 10.1节）。

物体也可以在均匀网格上运动：旋转、滑动、摆动或沿路径移动。每个时间步中，物体覆盖的网格单元会将其中的气体传给邻块，而物体离开的网格单元则从邻块获取气体。这两种操作都是汇集操作，因此质量精确守恒。壁面随物体一起移动。一个网格片以马赫数 0.085 穿过封闭箱体时，对气体做的功与气体能量的增加量相差仅 0.03%。然而，运动物体上的力主要由其阶梯状边界穿越网格单元时产生的跳变决定。圆柱体在静止液体中运动时，所受阻力比同一圆柱体静止于气流中时大 87%（表 12）。

由完整网格单元构成的阶梯状表面，不适合厚度仅有几个网格单元的物体。对于处于静止液体中的物体，采用隐式压力时，可以在均匀网格上用切割单元取代这种表面。每个网格单元中，气体占据一定比例的体积；每个面有一定比例的面积开放；而 M. Berger 和 A. Giuliani (2021) 提出的状态重分配方法可保持小网格单元的稳定。对于弦长方向有 16 个网格单元的 NACA 0012 翼型，在 5° 条件下，雷诺数为 1,000 时，使用切割单元得到的升力系数为 0.27，使用阶梯状网格得到的升力系数为 0.16；而当网格单元数为 64 时，两者分别为 0.25 和 0.23。

4.9. 湍流驱动

随机力可以在盒子中最大的尺度上搅动气体。我们采用 V. Eswaran 和 S. B. Pope （1988）提出的强迫驱动方法：在一段波数范围内，力的傅里叶模态振幅遵循奥恩斯坦-乌伦贝克过程；并采用 C. Federrath 等人 （2010b）提出的投影方法，以设定无散度力所占的比例。该功能及使用它的问题沿用了 A. Mallet 和 E. Abraham（2026）的 WebGPU 求解器。模态对应的波矢为 $2\pi\mathbf{n}/L$，其中 L 是盒子的边长，而$\mathbf{n}$ 是长度落在该范围内的整数向量，最多有 64 个。每个网格单元都会在自身位置对各模态求和，因此该力无需傅里叶变换，并且适用于自适应网格的每一层。每个振幅都会在一个相关时间内衰减，并接收随机踢，其大小足以使整个盒子上的均方加速度保持在问题所设定的值。GPU 上用于设定时间步长的计算通道（第 3 节）也会推进这些振幅，因此每个网格和每种步进方式使用的都是同一随机力。随机数由随机种子、步数和模态的哈希值生成，因此使用相同随机种子进行的运行结果相同。更新步将该力作为一次踢加到动量上，并将这次踢产生的动能加到总能量中。整个盒子上的加速度平均值为零，但在密度变化的地方，力 $\rho\mathbf{a}$ 并非如此，代码也不会将其移除。在马赫数 1 下经过四个穿越时间后，盒子的运动速率约为均方根速度的十分之一。

4.10. 物种

一个问题可以包含任意数量的物种，其质量分数 X_k 之和为一。它们与流体动力学状态分开存储，作为 ρX_k 四通道纹理，而流体力学计算遍次从不读取它们。更新步会记录每个面的质量通量，随后由一个单独的遍历用这些通量输运每种物种。某种物种通过一个面的通量，等于质量通量乘以半步时该物种在上风单元中的分数，再用其限制斜率外推至该面；被动标量的处理方式也是如此。

每种物种都有各自的单调中心斜率，因此一种物种的尖锐前沿不会使其他物种的前沿变平。这样一来，各斜率之和不必为零，但一个面上的分数之和必须为一。因此，我们从符号表明其总量过多的斜率中扣除超出量，并按各斜率的大小分摊。这只会缩小斜率，因此任何面的取值都不会超出相邻网格单元的范围，而且均匀分布的物种会保持均匀。像 T. Plewa &E. M¨uller (1999 年) 所述的一致多流体平流方法，通过缩放面上的分数使其总和为一，但这会改变此类物种。由于面上的分数之和为一，$\sum_k \rho X_k$ 的运动恰好与 ρ 相同，且每个分数始终介于零和一之间。舍入造成的偏差会通过将新值缩放至新密度来消除。在自适应网格上，粗网格单元会对细网格单元的物种通量取平均值，质量通量也是如此（第6.2节）。目前，物种计算尚不支持局部时间步。

当每种物种都是一种核素，或在实验室流动中将干空气视为一种物种时，状态方程取决于每个网格单元的组分，并且每种物种都可以有自己的绝热指数。

每个状态方程至多需要组分中的四个数值，且每个数值都是按质量分数加权后对各物种求和，因此它们可以线性混合。状态旁边的纹理保存着这些数值。对于理想气体，这些数值是平均分子量和热容的逆数，因此混合物的绝热指数可由各气体按质量加权求和的热容得出，这就是同一温度下理想气体的混合规则。

采用质量分数的守恒格式会导致两种绝热指数不同的气体相遇处压力发生振荡（R. Abgrall 1996年；S. Karni 1996年）。在 Shaderous 中，原因在于密度和质量分数是在不同遍历中重构的，因此在某个面上，它们对穿过该面的各种气体数量判断不一致。一个处于同一温度下的氦与空气接触面横穿盒子时，压力误差达 3.7%。当 $\gamma - 1$ 在邻块之间的差异超过 1% 时，预测器遍历和物种遍历会因此将面值向一阶格式混合；差异达到 5% 时则完全采用一阶格式。此时，同一接触面的误差降至 0.2%。这种混合是连续的，因为开关式切换会使舍入误差转变为激波气泡问题镜像网格单元之间 5% 的差异（第11.1节）。在自适应网格上，邻块之间任一质量分数的跳变若达到 0.1，也会触发块细化，因为若接口在几个粗网格单元上弥散，过于平滑，便无法使第6节的指标达到阈值。若没有这一判据，J. J. Quirk & S.Karni （1996 年）的氦气泡会漂移到粗网格块上，最终只有 24% 的氦处于最精细层级；采用该判据时则有 99%。

4.11. 核燃烧

问题可以通过两种方式之一燃烧其物种：在物种计算之后，单独进行一次计算；无论是在均匀网格上还是在自适应网格上，皆是如此。第一种是单步阿伦尼乌斯反应，这是爆轰理论中的标准模型（W. Fickett 和 W. C. Davis 1979）。燃料的比例 f 按 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t = -Kf\exp(-E_\mathrm{a}/T)$ 下降，其中 K 是速率常数，E_a 是活化温度，而 T 是温度；在密度固定时，每燃烧一个单位的质量，都会向气体释放能量 q。该计算过程将时间步长最多拆分为八个子步，并在每个子步的起始温度下精确求解，因此无论反应有多刚性，燃烧都不会过冲。前七个子步各自释放的能量最多为网格单元内能的五分之一，最后一个子步则消耗该时间步长的剩余部分，因此燃烧始终覆盖整个时间步长。燃烧不会导致时间步长缩短。在自适应网格上，若燃烧长度小于 80 个网格单元，则对相应块进行细化。燃烧长度是燃烧释放网格单元内能期间声波传播的距离。

问题还会选择是否允许激波检测器标记的网格单元发生燃烧。当前沿的厚度远小于一个网格单元时，不应允许燃烧，因为捕捉到的激波是由数值弥散造成的、跨越几个网格单元的结构，其中包含真实气体不会经过的状态；若在那里发生燃烧，前沿的速率就由数值格式而非反应机制决定（P. Colella 等，1986）。当反应区得到分辨时，则应允许燃烧。一个从精确稳态解启动的稳定爆轰，在每个半反应长度有 12.8 个网格单元的情况下，无论是在均匀网格还是自适应网格上运行，其速率都与 Chapman-Jouguet 速率相差不到 1%。若抑制激波中的燃烧，其速率则低 5%，而分辨率每提高一倍，误差就减半。

第二个是用于白矮星物质的 13 种同位素 α链，来自 F. X. Timmes 等人（2000），它不是通过隐式积分器推进，而是由一个小型神经网络推进。我们使用 pynucastro 构建了参考网络（A. I. Smith 等人 2023），采用 REACLIB 的速率（R. H. Cyburt 等人 2010），并使用 pynucastro 应用的屏蔽。我们在恒定密度下进行积分，并计入燃烧释放的热量；模拟器也会像这样通过第 4.5 节的第三个状态方程将热量转换为温度。神经网络以密度、温度和时间步长的对数、质量分数，以及参考网络中每个经屏蔽速率项的对数作为输入，并通过四个各含 128 个单元的隐藏层输出组分变化。将速率项作为输入，是因为它们随温度升高而增长的速度远快于这种规模的网络仅凭温度所能拟合的程度。网络的输出经过设计，无论权重如何，都能严格守恒质量，且不会有任何分数低于零：每种物种都会损失自身的一部分，而损失的部分则通过 softmax 分配给各物种。释放的能量等于核结合能的变化，并非由网络预测，因此能量与组分始终一致。我们用参考网络标记神经网络逐步应用时所到达的状态，并在 DAgger方法中分 30 轮将这些状态加入训练集；该方法由 S. Ross 等人（2011）提出。更改状态方程后，我们从每条已存储轨迹的起始状态重新进行燃烧计算，并继续进行后续轮次。其中两轮改善了网络表现，之后的三轮则没有带来改善。随后，我们直接编辑了训练好的权重。最严重的问题是在接近 K 时，硅硫灰烬中发生了失控燃烧。此时网络的燃烧速度约为参考网络的十倍，释放的热量将气体带到了 Ni。网络的每个阶段都通过一个输出设定其燃烧速率，因此可以单独修正速率。

。我们在最后一个隐藏层中增加了两个单元，并保留所有已训练权重不变。每个单元都是该层输入的门控单元 $g = \max(0,\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{a} + b)$，它会按 g 的比例降低两个阶段的速率对数。我们通过最小二乘法拟合 $\mathbf{w}$ 和 b，使速率对数的偏移量能够针对参考网络的精确燃烧结果，最佳地修正每个状态的步进结果。其中一个单元会略微减缓高温碳氧的燃烧；另一个则会减缓失控燃烧，并且在富含碳和氧、温度高于 4.4×10^{9} K、时间步长为 $10\ \mu$s 的气体中将其保持为零。我们在网络表现最差的四种区间中，分别对每种区间的 600次燃烧进行了逐条轨迹对比，评估编辑后的网络与未编辑网络的表现：高密度氧氖、硅硫灰烬、高温碳氧，以及接近平衡的铁族元素混合物。这些燃烧算例均未用于拟合门控单元。某一时刻的燃烧误差，是各同位素质量分数与参考网络对应质量分数之差的绝对值之和；我们取 3 ms、30 ms、0.1 s 和 1 s 时误差中的最大值。当时间步长为 1 ms 时，各区间误差第 90 百分位数之和下降了 0.69，即 29%（下降幅度的 90% 自助法置信区间为 0.46–0.89）。改善出现在硅硫区间，其百分位数从 1.58 降至 0.87，其他区间则没有变化。我们也根据同一比较结果选择了门控单元的强度和第二个门控单元的温度上限，因此这一改善幅度偏乐观。在留作测试集的硅硫区间 200 次燃烧中，百分位数从 1.53 降至 1.16。当时间步长为 0.3 ms 和 3 ms 时，总和分别下降了 0.56 和 0.52。在图形处理器上，以单精度和半精度权重运行时，对留出燃烧算例中的 48 个状态进行一步计算，其组分变化与该网络的 float64 副本相差不超过 2%。只有温度高于 10^{8} K、密度高于 10^{4} g cm^{-3} 的气体（训练集涵盖的范围），以及长于 10 ms 的流体力学步，才会拆分为多个网络步。

根据 D. Kushnir 等人 （2013），运行时可将网格单元通过燃烧吸收能量的速率限制为 $f_{\mathrm{b}}\,e/t_{\mathrm{s}}$，其中 e 是内能密度，$t_{\mathrm{s}} = \Delta x / c_{\mathrm{s}}$ 是声波穿过网格单元所需的时间，f_{b} 是选定的因子。随后，整个网络步骤会按比例缩小，从而保持质量守恒，并确保所有组分的比例均为正。限制器默认关闭。在管道中进行的爆轰模拟中，网格单元尺寸为 0.5 至 4 km 时，f_{b} 低于约 0.2 时，即使已解析的爆轰也会停止；而$f_{\mathrm{b}} \geq 0.3$ 则与未加限制的前沿吻合，并消除了 4 km 网格单元原本会导致的提前点火。采用第 4.5 节中的第一个状态方程时，两个白矮星以 $0.64\,M_{\odot}$ 迎头相撞，在 940 km 的网格单元上发生爆轰，并产生了 $0.45\,M_{\odot}$ 的 ^{56}Ni，产量介于 0.41 与 $0.51\,M_{\odot}$ 之间；这是 D. Kushnir 等人 （2013）和 C. Raskin 等人 （2010）对这对白矮星得到的结果。将限制器设为 $f_{\mathrm{b}} = 0.1$ 和 0.4 时，产量分别只有 0.008 和 $0.056\,M_{\odot}$。该状态方程给出的受激波冲击的简并燃料温度低了两到五倍。现在，涉及燃烧的运行均采用第三个状态方程。采用该方程，并使用经重新训练、能够在燃烧时按实际情况加热气体的网络后，同一碰撞产生了 $0.52\,M_{\odot}$ 的 ^{56}Ni，分别对应权重编辑前后。

5. 无存储通量的守恒

大多数运行在图形处理器上的有限体积代码会对每个面通量求值一次，将其存储起来，再对存储的通量求差。Shaderous 的流体动力学求解器则采用汇集方式：每个网格单元都需要自身六个面上的通量，而两个网格单元共用的面，无论哪一方需要，都会在相应位置进行求值。因此，守恒要求求值结果逐位一致。只要读取相同的输入，并以相同顺序执行相同的算术运算，结果便会一致。无论由哪个网格单元计算面通量，其中涉及的所有量（包括平衡良好重构中的势差）都由相同的数值构成。图3 展示了共用面的三种情形：同一层级内、跨越细化边界（第 6.2 节），以及不同时间步长的块之间（第 6.3 节）。

源代码相同还不够。WGSL 允许编译器融合并重新结合浮点运算，而 Chrome 的 Metal 后端会以宽松模式编译着色器，从而进行这类处理。在 Apple M4 Pro 上，某个网格单元的下侧面与其相邻网格单元的上侧面，即使由同一函数调用两次计算，在数千个面上仍出现了末位差异。因此，两个网格单元共用的每个面都必须在代码中的同一位置、同一编译流水线中计算。出于同样的原因，补偿求和会将中间值与一个编译时未知的零进行异或，以防编译器将补偿运算优化掉。

在一个工作组内，更新步骤会将工作组网格单元盒子的每个面计算一次，并存入工作组内存；每个网格单元再从中读取自己的六个面。相邻工作组会重新计算盒子边缘上的面，因此通量不会离开这一遍计算。这使最大的均匀网格在 Apple M4 Pro 上快了 1.3 至 1.5 倍（256^{3} 和 2048^{2} 个网格单元）。汇集仍会对盒子边缘上的面计算两次。作为交换，无需存储通量，无需再进行一遍计算来对通量求差，也不会发生多个调用同时写入同一个面的竞争。验证套件会直接检查这一性质：对于三种流动，共享每个面的两个网格单元在每个面上计算出的质量通量都逐位相同。一个均匀状态经过十次平流穿过

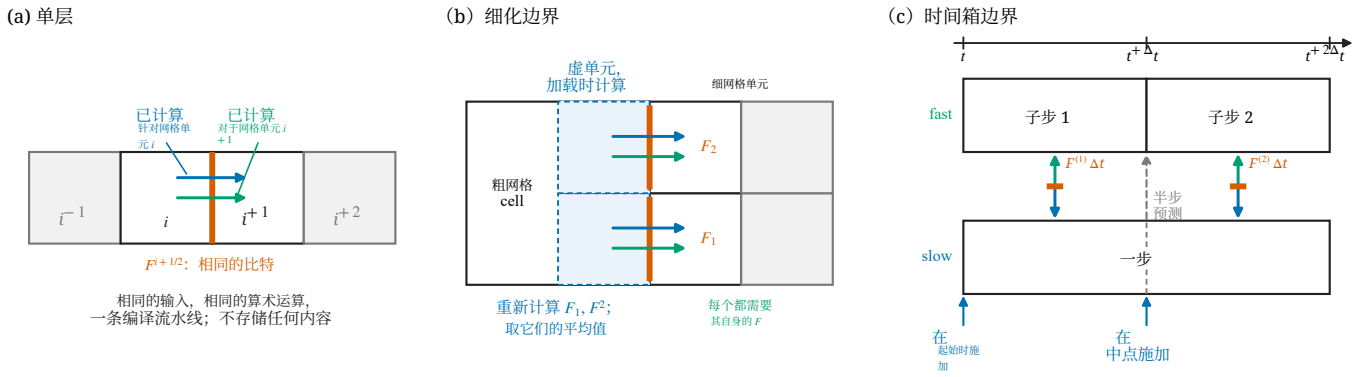


图 3. 流体动力学求解器如何在不存储面通量的情况下实现守恒。共享面为橙色，穿过该面的每个箭头代表一次通量计算，颜色表示进行计算的一侧。(a) 同一层级的两个网格单元分别计算它们之间的面的通量，使用相同的输入和相同的算术运算，因此得到相同的比特。(b) 在二维细化边界处，每个细网格单元都会计算自身面的通量，并与一个在加载时即时计算的虚单元相邻。粗网格单元会再次计算相同的细网格磁通量，并取其平均值。(c) 在不同时间箱之间，时间从左向右流逝，较慢的块采用较快块两个子步的通量：第一个子步发生在自身步开始时，第二个发生在其中点。较快的块读取较慢块的半步预测值（虚线）。

盒子，质量和每个动量分量的守恒误差均不超过单精度的舍入误差。

其他模板遍历由同一源代码编译两次。距离每个边界至少两个网格单元的网格单元使用一个已将边界映射编译掉的版本。壳层使用通用版本，并按厚度为两个网格单元的网格片进行分派，因此启动的调用次数不会超过网格单元数。更新步没有采用这种拆分方式，因此每个面都来自同一条流水线，代价约为 10%。边界按面选择（周期性边界、流出边界、流出且禁止流入边界，或反射边界），并在将网格单元索引映射到纹素的函数中应用，因此均匀网格没有虚单元。

6. 自适应网格细化

自适应网格是一棵由 16^3 个网格单元组成的块树（16^2在二维中）。一个块会分裂为八个子块，每个子块的网格单元尺寸为原来的一半，面邻块之间最多相差一层。每个场都存放在一个三维纹理图集中，其中包含所有块，并在每个块周围留出两层幽灵层。树本身很小，存放在 CPU 上；每当网格发生变化时，CPU 都会将其作为扁平表上传到图形处理器。每隔几步，就会有一次处理过程计算每个块的细化指标；CPU 在不阻塞的情况下读取结果，调整树结构，然后通过一次处理过程，从旧状态复制、延拓或限制数据来填充新叶节点。限制操作对各子块的守恒变量取平均值。延拓操作将经过限制的守恒变量线性斜率加到父块的数值上；这些斜率在其子块间相互抵消，因此两种操作都能守恒质量、动量和能量。总能量不单独设置斜率。若总能量的斜率独立于密度和动量的斜率，则每个子块都会产生差异

总能量与动能之间与热量毫无关系的差值：在寒冷的快速气体中，该差值比内能高出八个数量级，而双能量格式将其视为热量。相反，每个子块取自身的动能加上其延拓的内能，并由子块共享的一个偏移量使它们的平均总能量保持为父块的总能量。当密度或压力的归一化二阶导数超过 0.8 时，就会细化块。当所有同级块中的该值都低于 0.2 时，则合并这些同级块。这就是R.L¨ohner(1987) 形式的误差指标，FLASH 使用的正是这种形式（B. Fryxell 等人 2000），其中还包括一个滤波器，用于忽略约为局部值 1% 的波纹。对于网格单元 q 中的一个量 i，它是

$$\chi^2 = \frac{\sum (q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1})^2}{\sum (D_i + \epsilon A_i)^2},,$$

其中 $D_i = |q_{i+1} - q_i| + |q_i - q_{i-1}|$，$A_i = |q_{i+1}| + 2|q_i| + |q_{i-1}|$，邻块依次沿各个轴选取，各项求和遍历这些轴，而 $\epsilon = 0.01$ 是滤波器。指示器在间断处接近 1，在光滑剖面上则随着网格单元尺寸按比例下降。基于一阶差分的指示器会像细化激波一样轻易地细化光滑梯度；在我们的测试中，它使双星问题的大部分盘保持在最精细层级。对于自引力，当金斯长度小于 16 个网格单元时，也会对块进行细化。问题还可以要求将点质量附近的每个块保持在最精细层级（第 7.4 节），或将气体密度高于给定值的每个块保持在该层级。白矮星问题采用后一种方式，因为恒星的光滑内部不会使指示器升高。图集包含固定数量的块，该数量由第 3 节的内存预算确定。

当重新网格化需要的块数超过图集所能容纳的数量时，首先细化标记最强的块。通过合并指示器最低的同级块为这些块腾出空间；只要它们的指示器低于需要腾出空间的块的 0.8 倍即可，因为这些块本来就最接近被合并。没有这一裕量时，标记程度大致相同的块会来回交换其槽位。以这种方式合并的块不会在同一次重新网格化中再次被拆分，因为其新子块将从父块的槽位中填充，而父块不包含数据。在激波所需块数超过预算允许数量的三维 Sedov 爆炸中，总能量的变化为 2×10^{-7}。图 4展示了指示器在二维和三维中构建的网格。

6.1. 加载时计算虚单元

由于一个通道无法同时读写同一个 rgba32float 纹理，因此不能通过从邻块复制数据来就地填充虚单元。Shaderous 不会填充虚单元。将守恒状态转换为原始变量的通道会直接根据每个纹素所在的位置计算块中的所有纹素，无论它们属于虚单元还是内部区域：数据可能来自同一个块、相邻块、物理边界另一侧的网格单元映像、覆盖该网格单元的细网格单元的平均值，或从较粗块插值得到的值。无需单独进行交换步骤，也不会有任何虚单元过时。

6.2. 跨细化边界匹配通量

M. J. Berger 和 P. Colella 的自适应求解器（1989年）会存储细网格侧在粗网格面上计算出的通量，随后修正粗网格单元；后续的图形处理器代码 GAMER 也采用了这种做法（H.-Y. Schive 等，2010）。Shaderous 则将第5节中的汇集操作扩展到了不同层级。在细化边界处，粗网格单元会使用相同的细网格状态和与细网格单元相同的算术运算，重新计算覆盖其网格面的细网格面通量（图3b）。因此，质量、动量和能量在舍入误差范围内守恒，且无需存储任何通量。验证套件会检查同一层级不同块之间的通量是否逐位一致。对于细化边界，套件会检查粗网格单元的通量是否与细网格单元通量的平均值相差不超过 10^{-6}，这为平均值的舍入误差留出了余地。

6.3. 局部时间步

.....的子循环M. J. Berger 与 J. Oliger (1984)使细网格层级的步数多于粗网格层级。Shaderous 按块而非按层级分配时间步长，并以粒子代码的方式使用二次幂时间箱，例如 GADGET-2（V.Springel2005）。时间以周期推进，每个周期最多包含八个最小步长的子步。周期开始时，图形处理器根据每个块自身的信号速度，将其分配到一个时间箱中：处于时间箱 k 的块每次推进 2^k个子步。随后进行一次参数扫描，将每个块的时间箱调低至其最快面邻块所在的时间箱，因为周期结束前，邻近块的快速气体可能会抵达该块。此扫描只运行一次，因此每个快速区域只会向外扩展一个块。之后的参数扫描会强制执行两条规则：面邻块的时间箱最多相差一档；块的速率绝不会低于较粗邻块。

在另一侧步进频率是本侧两倍的面上，块会采用另一侧的通量，并根据存储的状态重新计算：在自身时间步开始时计算一半，在时间步中点计算另一半（图 3c）。考虑一个缓慢块，其步长为 $2\Delta t$，旁边是一个快速块，其步长为 Δt。每个子步都执行相同的三次遍历：一次组装每个块的原始变量和虚单元，一次预测每个开始时间步的块的半步状态，一次更新这些块。

在第一个子步中，两个块都开始步进。每个块都根据时间步开始时的状态进行预测：快速块预测到$\Delta t/2$，缓慢块预测到 Δt。快速块中位于缓慢块一侧的虚单元保存着缓慢块的起始状态，而快速块使用自身的时间步长对这些虚单元进行预测。随后，快速块更新到 Δt，缓慢块更新到 $2\Delta t$，因此从此以后，缓慢块存储的状态就是其时间步结束时的状态。在共享面上，缓慢块不使用自身的通量，而是利用快速块的网格单元、虚单元和半步状态，采用快速块自身网格单元所用的函数来计算快速块的通量，并将该通量应用于缓慢块时间步的一半。

在第二个子步中，只有快速块开始一个步长。它在缓慢块中的虚单元现在取自缓慢块的半步预测，即缓慢块对其在 Δt 时状态的估计；自该步开始以来，这一预测一直被保留。快速块进行预测并更新至 $2\Delta t$。在同一更新遍中，缓慢块位于共享面上的网格单元也以相同方式计算快速块的新通量，并将其计入自身步长的另一半。缓慢块中的其他部分均不改变，因为其自身的通量、脉冲和源项已在该步开始时应用。此时，两个块都已累计了穿过该面的相同两次通量。与细化边界处一样，没有任何内容被存储，守恒精确到舍入误差。对于自引力，在每个周期结束时都会在每个块上求解势。在此期间，只在完成一个步长的块上求解势，并在其他位置按照势上次变化的速率向前推算。块在半步计算引力功时使用的势，采用势的时间曲率进行外推；该曲率根据块最近两个步长内的变化率确定，因为在坍缩过程中，一个步长两端势的平均值会超前于线性外推。

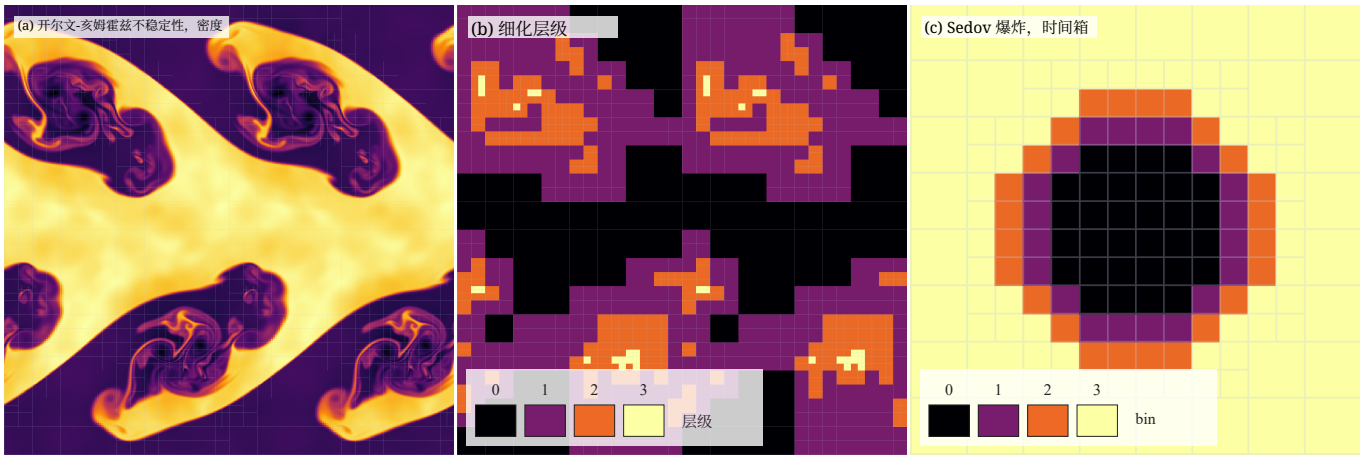


图 4. 由代码自带的渲染器绘制的自适应网格。(a) $t = 1.5$时二维开尔文-亥姆霍兹不稳定性的密度，有效分辨率为 2048^2，包含三个细化层级。浅色线条勾勒出由 16^2 个网格单元组成的块。(b) 同一状态的细化层级。(c) 三维 Sedov 爆炸的切片（最高分辨率为 256个单元，三个层级），采用局部时间步；每个块按其时间箱着色；处于时间箱 k 的块所用步长是最小步长的 2^k 倍。激波后方的热气体采用最小步长，外侧的冷气体采用最大步长。

根据块最近两个步长内的变化率，因为在坍缩过程中，一个步长两端势的平均值会超前于线性外推。 A. E. Evrard (1988) 的 $t = 0.8$ 采用局部时间步时损失的能量与采用一个时间步时相同， 5.7×10^{-4}相较于 5.8×10^{-4} 总量。采用线性外推时，能量损失是其两倍。

额外的遍历并非没有代价。在三维情况下，不考虑引力时，每次块更新的成本约增加 10%；考虑引力时则增加 50% 至 70%，因为每个子步还会松弛势。Shaderous 因此每隔几个周期就会读取一个周期实际执行的块更新占比；当该占比高于 80%（考虑引力时为 65%）时，便退回到单一时间步。最高分辨率为 256个单元、包含三个层级的三维 Sedov 爆炸，采用局部时间步时，块更新次数减少至原来的 1/2.2，运行速度提高 1.9 倍。同等分辨率下的等温坍缩，块更新次数减少至原来的 1/2.3，运行速度提高 1.6 倍。图 4c 展示了时间箱如何随爆炸波分布。

7. 引力、点质量与吸积汇

7.1. 泊松求解器

每一步都通过几何多重网格求解势（A. Brandt, 1977），使用红黑高斯-赛德尔平滑，以八个网格单元的平均值进行限制，并进行三线性延拓；初始猜测取自上一步的势，并按时间线性外推。每个 V循环在每次限制前进行两次平滑扫描，每次延拓后进行两次，并在最粗层级上进行八次，那里有 2^3个网格单元。在均匀网格上，每一步运行一个 V循环：从外推猜测开始进行一次循环，比从上一步的势开始进行两次循环更接近收敛，这在等温坍缩中，让总动量漂移的距离增至十倍。在自适应网格上，最多运行三次，后续循环仅在仍能降低残差时才运行。周期边界会从源项中减去平均密度。对于孤立边界，一次归约会计算质量相对于盒子中心的四阶以内的矩，接着一次扫描将这些矩移至质心，而势的边界值则由多极展开计算至 $l = 4$,

$$\Phi_{\mathrm{b}} = -G \sum_{l=0}^{4} \frac{1}{r^{l+1}} \sum m\, |\mathbf{y}|^{l}\, P_l(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{y}}),$$

其中，内层求和遍历各个网格单元， m是一个网格单元的质量，$\mathbf{y}$ 是其相对于质心的位置，$r\hat{}\mathbf{n}$是边界点相对于质心的位置， P_l 是勒让德多项式。每一项都是$\mathbf{y}$各分量的多项式，因此可以由各阶矩得到该求和。偶极项在质心处消失。展开的各项按$(|\mathbf{y}|/r)^l$衰减，因此截断求和仅在质量充分位于边界内部时才准确；对于具有孤立边界的问题，应使质量远离盒子的各个面。

在自适应网格中，每个块（包括父块）上都定义了势。密度会被平均到父块中，某一层级的虚单元来自其邻块，或由上一级插值得到；多重网格周期在块内部运行，横向网格单元数依次为 16、8、4、2 和 1。各层级之间采用单向耦合：细网格层级绝不会修正其下方粗网格上的势。某一层级的边界值在更粗网格的势上进行三线性插值；如果所需的粗网格单元位于盒子之外，或

位于更粗层级的边界之外，则通过最近的粗网格单元进行线性延拓。在均匀球体上，当最细分辨率为 128 个网格单元且包含两个层级时，误差为 0.03%；当分辨率为 256 且包含三个层级时，误差为 0.05%；相比之下，未细化区块上的误差为 0.15%。新网格按层级从最粗到最细逐层求解。在一次运行期间，所有层级都会在相同的调度中进行松弛，每个层级都以其粗网格层级在周期开始时的边界值为基准，因此计算成本不会随树的深度增加。

7.2. 与气体耦合

引力以踢-漂移-踢的方式参与更新：在更新遍中，先用旧势进行半步踢；求得新势后，再进行另一半步踢。若在通量更新后才施加整个踢，流体静力平衡中的气体会损失内能，恒星也会缓慢冷却。引力能源项默认采用通量形式，其中网格单元所受的功等于穿过各个面的质量通量乘以该面两侧的势差，如V. Springel (2010所述。沿一个轴，网格单元 i的能量变化为

$$\Delta E_i = -\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[F_{i+1/2}\left(\Phi_{i+1}-\Phi_i\right) + F_{i-1/2}\left(\Phi_i-\Phi_{i-1}\right)\right],$$

其中，F 是穿过一个面的质量通量，而 Φ 是步进开始时的势（见下文），并对各轴求和。对所有网格单元求和后，这些功等于同一质量通量所造成的 $\sum \rho\Phi$ 变化的负值。因此，在固定势中，气体能量与引力能之和在舍入误差范围内守恒。对于自引力，势会在步进过程中变化；要实现精确守恒，就需要取新旧势的平均值。在均匀网格上，更新步使用旧势计算功。已知新势后，第二次踢的更新遍会从每个网格单元中减去其密度变化与势变化乘积的一半，从而使总功对应于该平均势。由此，总量可在泊松方程求解的精度范围内守恒。在自适应网格上，势由最近两次求解结果外推至半步。另一种方式会精确加上每次踢所带来的动能，因此引力不会影响内能，但在流动分辨率不足的区域会牺牲总能量守恒。图 5a 比较了两种形式在A. E.Evrard (1988）坍缩过程中的表现。点质量的引力作用（第7.4节）和加速参考系的作用始终采用踢形式。从恒星上撕裂下来的碎屑温度低、速度快，潮汐场每个步进造成的动能变化可达其内能的数百倍。采用通量形式时，该功与

kick 进入了内能。这种不匹配的程度为

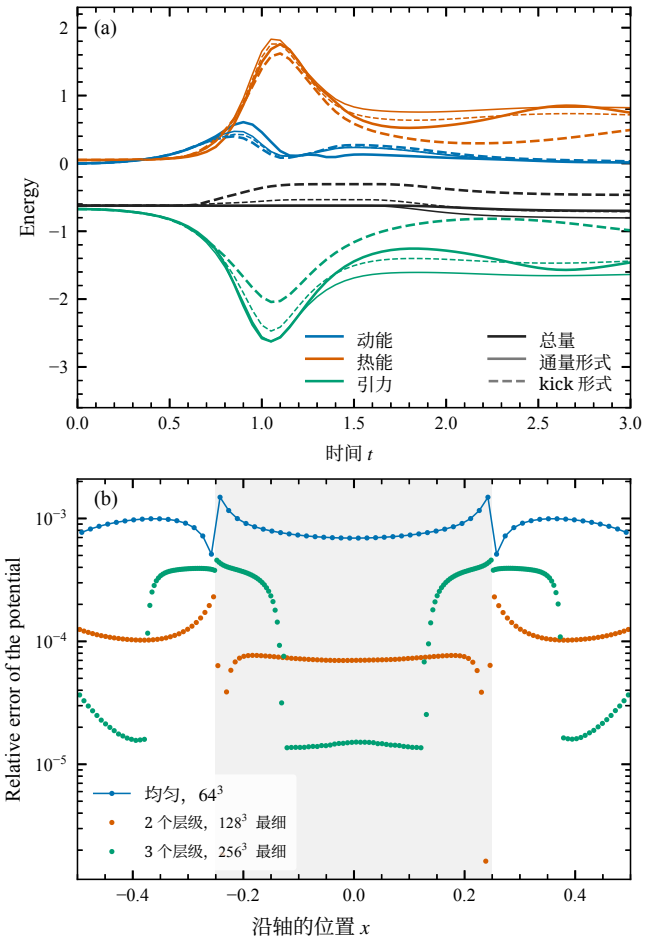


图5。 引力。(a) 在 A.E.Evrard (1988) 的坍缩过程中，采用通量形式（实线）和 kick 形式（虚线）的引力能源项时的动能、热能、引力能和总能量；计算分别使用含有 64^3 个网格单元的均匀网格（粗线），以及最细分辨率为 128 个网格单元、包含两个层级的自适应网格（细线）。在 $t \approx 1.5$ 向外传播的激波到达盒子边缘、气体从中流出之后。(b) 均匀球体的势的相对误差。球体采用孤立边界条件，误差沿穿过球心的 x 轴计算，分别使用均匀网格以及具有两个和三个层级的细化网格。球体占据阴影区间。

截断误差的量级。它使多方指数为 3 的受扰多方体前半部分的熵减少了百倍。在 kick 形式下，恒星的熵保持在约 0.1 数量级。还可以选择设置压力下限，使金斯长度至少由选定数量的网格单元（至少四个）解析J. K. Truelove 等人 (1997)。

7.3. 离散平衡中的初始状态

根据解析剖面构建的恒星与解析势处于平衡状态，而不是与泊松求解器在网格上求得的势平衡，因此会因这种不匹配而振荡。M. Zingale 等人（2002）在将恒星模型映射到网格时也遇到了同样的问题，于是让

映射后的模型达到离散的流体静力平衡。Shaderous 则会在问题的第一步之前，使其中的每颗恒星都达到平衡。设定密度，使其满足 $h\left(\rho\right)+\Phi=C$，其中采用网格的势和恒星的质量，而 h 是恒星冷气体的比焓，C 是一个常数。随后再次求解势，并重复这两个步骤，直到密度变化小于10^{-5}；对于多方体，这需要六到八轮。多颗恒星会在相同的轮次中一起达到平衡。每颗恒星都在自身的势中达到平衡：即网格的势减去其他恒星的引力；在球形恒星之外，这种引力等同于其质量集中于一点所产生的引力。移动中的恒星会保持其速度。每轮只改变密度，而 C 则通过假位法，根据上一轮的取值求得。对于白矮星，每轮的变化都会乘以 1.6 进行超松弛，迭代在变化量达到 10^{-3}时停止。它们经过 7 到 12 轮达到平衡，在最细分辨率为 256 和 512 个网格单元时，耗时 1.6 到 5.5 秒。若不先达到平衡，将一颗太阳质量的白矮星映射到网格后，它会以基频模态振荡；在最细分辨率为 256 个网格单元时，其中心密度会摆动 30%（图2b）。它的核心接近相对论性状态，且 Γ_1 仅略高于 4/3，因此这种微小的不匹配几乎得不到恢复力。达到平衡后，经过六个动力学时间，中心密度的变化仍在 0.5% 以内。平衡过程会使恒星保持低温，因此，若问题中要点燃恒星，就需在达到平衡的状态上加入其热点的热量。对于多方指数为 1 的多方体，这一关系恰好就是方程（2）中的梯形法则。在自适应网格上，当最细分辨率为 128 个网格单元且有两个层级时，达到平衡的多方体在三个动力学时间内的中心密度偏差为 0.14%，而普通格式为 0.26%；其能量偏差为 0.33%，而普通格式为 0.77%。

由ANEOS材料构成的行星（第4.5节）不会自行达到平衡，因为由不同材料构成的核心和地幔不遵循同一种压力与密度关系。行星由其质量、地幔材料、可选的核心材料及其质量占比，以及表面温度来确定；对于吸积后仍然炽热的物体，表面温度默认为2000 K。每一层都位于各自的绝热线上，$\mathrm{d}e=p\mathrm{d}\rho/\rho^2$，因此整层移动时仍保持在该绝热线上，且层与层交界处的压力和温度连续。Shaderous使用四阶龙格－库塔步从表面向内积分行星结构，并调整半径，直到质量恰好在中心耗尽。一个质量为 $1\,M_\oplus$ 的行星，其质量的30%位于Fe85Si15核心中，核心上方为橄榄岩地幔，其半径为 $1.024\,R_\oplus$，中心压力为351 GPa，中心密度为12.6 g cm^{-3}；相比之下，地球中心的压力和密度分别为364 GPa和13.1 g cm^{-3} （A.M. Dziewonski & D. L. Anderson 1981）。以该结构为初始条件、沿半径方向采用16个网格单元进行运行时，其中心密度的振荡幅度为3.6%。

恒星也可以有一个点质量核心，就像巨星一样。此时，它的一部分质量是点质量 $M_{\rm c}$，位于恒星中心，其软化势为$-GM_{\rm c}/\sqrt{r^2+\epsilon^2}$ 第7.4节中点质量的软化势，其中 ϵ是软化长度。其余部分是质量为 $M_{\rm env}$、多方指数为 n 、半径为 R的多方包层，它与自身引力及核心的吸引力保持平衡。我们将包层的比焓写作 $h=h_{\rm c}\vartheta$，其中 $h_{\rm c}$ 是其在中心处的值，而半径 $r=xR$ 以内的质量为$M_{\rm env}\,\psi/A$。于是

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x^2}\left[\psi+\frac{AM_{\rm c}}{M_{\rm env}}\frac{x^3}{(x^2+\epsilon^2/R^2)^{3/2}}\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=Bx^2\vartheta^n,$$

其中 $\vartheta(0)=1$，$A=GM_{\rm env}/(h_{\rm c}R)$且 $B=4\pi GR^2\rho_{\rm c}/h_{\rm c}$，这里 $\rho_{\rm c}$ 是气体的中心密度。包层在 R 处结束，包含 $M_{\rm env}$，因此 $\vartheta(1)=0$且 $\psi(1)=A$，通过两次嵌套二分法求出 A和B。没有核心时，只有它们的乘积起作用，方程便化为莱恩-埃姆登方程。核心并入本次运行中的点质量，并随恒星移动。弛豫过程会将核心的势加入网格的势中，而带核心的恒星则在CPU上完成弛豫。我们构建了一个质量为 $1\,M_\odot$ 的巨星，其核心质量为 $0.4\,M_\odot$，并以其半径的十分之一作为软化长度；用最精细层级的32个网格单元分辨其半径。在六个动力学时间内，其中心密度保持在6%的变化范围内，动能低于其内能的 2×10^{-3} 。

圆轨道上的恒星不会自由下落，因此圆轨道双星中的恒星在以 Ω 随轨道转动的参考系中静止平衡。每颗恒星都处于洛希势平衡状态：该势由网格和点质量产生，此外还包括 $-\frac{1}{2}\Omega^2\varpi^2$，其中 ϖ是到旋转轴的距离。因此，恒星初始时处于潮汐锁定状态，并被拉伸向伴星，最远可延伸至内拉格朗日点。潮汐力沿连心线拉动恒星，因此每次迭代还会在其势中加入均匀的拉力，使其质心保持不动。设置时可以用第一颗恒星所填充的洛希瓣比例来指定间距，洛希瓣半径则采用 P. P.Eggleton (1983) 的近似值。旋转参考系中的单颗恒星处于平衡状态，并随参考系刚性自转。在 $\Omega=0.4$ 条件下，一个由 128^3 个网格单元组成的多方指数为 1 的多方体，其中心密度在四个动力学时间内保持在 0.2% 以内，轴比保持在 10^{-3} 以内。

7.4. 点质量和吸积汇

最多有 32 个点质量通过普卢默软化引力作用于气体（H. C. Plummer1911）。

引力场的纹理仅包含自引力。每个需要质量体牵引力的过程（踢跃、预测器、时间步长、平衡良好重构）都会在运行过程中根据它们的位置加入该牵引力。质量体在相邻网格单元之间的势差表示为 $GM\left(q_1 - q_0\right)/[r_0 r_1\left(r_0 + r_1\right)]$，而不是用两个大数千倍的势之差来表示。在这里，$q = r^2 + \epsilon^2$、$r_0$ 和 r_1 分别是两个网格单元到该质量体的软化距离，而 ϵ 是其软化长度。每个时间步长中，质量体会发生漂移。随后，对更新后的气体进行归约，得到每个质量体对气体的牵引力；气体的反作用会移动该质量体，同时吸积汇还会吸收质量体的质量。每四个质量体执行一次归约。第二个半步踢跃过程会从网格单元中精确移除相应的动量。在吸积汇半径内，气体以一定速率被移除，该速率从中心处的$\sqrt{GM/r^3}$下降到半径处的零；被移除的气体会将其动量传递给质量体。在验证测试中，气体与质量体之间的质量和动量守恒达到 10^{-7}。吸积汇粒子最早由 M. R. Bate 等人 （1995年）引入平滑粒子流体动力学，随后由 M. R. Krumholz 等人 （2004）和 C. Federrath 等人 （2010a）引入网格代码。我们按局部轨道速率移除气体，这更接近环双星盘研究中的吸积汇，例如 B. D. Farris 等人 （2014年），后者会在局部黏滞时间尺度上移除气体。两个质量体之间的牵引力采用二者软化长度中较大的一个进行软化。默认情况下，一个质量体的软化长度和吸积汇半径均为两个网格单元。在自适应网格上，当问题使质量体附近的块保持在最精细层级时（如双星问题），这里的网格单元就是最精细层级的网格单元。否则，它们就是最粗层级的网格单元，这是质量体周围唯一可以确定存在的尺寸。

气体的时间步长不会追踪彼此近距离掠过的两个质量体。因此，每一对质量体都会将步长限制为 CFL 数乘以 r/v 和 $\sqrt{r^3/GM}$中较小者的十六分之一，其中 r是这对质量体经软化处理后的间距，v 是它们的相对速率，M 是它们的总质量。采用默认的 CFL 数 0.8 时，圆轨道运行一周约需 125 步。在近乎空旷的气体中，两个质量体沿偏心率为 0.9 的轨道运行时，采用这一限制，两个轨道周期后轨道能量的变化不超过 0.7%；若不采用这一限制，能量则会损失 94%。

除非问题另有说明，参考系均为惯性系。潮汐瓦解问题采用气体的静止参考系：与J. Guillochon 等人 (2009)和J. Guillochon 和 E. Ramirez-Ruiz (2013)的数值模拟一样，该参考系随气体质心加速，因此恒星始终处于盒子中心。扰动体的轨道与气体同时积分。双星问题则采用质量体的静止参考系。该参考系随气体对质量体的平均引力加速，而气体受到方向相反的加速度。每一步之后，我们还会将质量体质心的速度重新设为零，以消除其相互引力中的舍入误差以及吸积气体的动量所导致的缓慢漂移。随后，盒子、盒子边界和盘的阻尼区（第11节）随双星一起运动。

8. 磁场

存在磁场时，Shaderous 会求解磁流体力学方程，可以采用理想形式，也可以采用恒定电阻率形式（第 8.2 节），并使用这样的单位：磁压为$B^2/2$，因此等离子体β（气体压力与磁压之比）为 $\beta_{\mathrm{M}} = 2p/B^2$，总能量还包括 $B^2/2$。引力、点质量、吸积汇、冷却、黏性、热传导、物种和燃烧对磁化气体的作用方式与无磁场时相同。吸积汇会移除其吸收气体的质量、动量、动能和内能，但会保留磁场，因为移除磁场会破坏约束输运。黏性和热传导仍为各向同性：代码不支持沿磁场方向进行输运。图 6 展示了第 11.1 节中两个磁化问题的磁力线，这些磁力线由代码绘制（第 11 节）。障碍物和流入不能与磁场同时使用，因为磁流体力学求解器的通量处理不支持固体网格单元或固定网格单元。

8.1. 约束输运

与 C. R. Evans &J. F. Hawley （1988）的约束输运方法一样，磁场定义在网格单元的各个面上。每个面都根据其四条边上的电场进行更新，而每条边对周围各个面的贡献符号相反，因此不会改变任何网格单元的散度。初始磁场是对边上采样的矢势求离散旋度得到的，因此在舍入误差范围内散度为零。积分器采用 J. M.Stone &T. Gardiner （2009）提出的 van Leer 预测校正法，与 Athena 中的方法相同++（J. M. Stone et al. 2020年）。第一阶段以一阶通量推进半步。第二阶段则使用基于半步状态的受限线性重构所得通量，推进完整一步。每个阶段都会将每个面的通量计算一次并写入存储缓冲区，两个相邻网格单元都从中读取该通量；随后计算每条边上的电场，再更新网格单元和各个面。这些遍历沿一个轴分成若干网格片执行，因此缓冲区每次只需存储网格的几层。

网格单元边上的电场采用T. A. Gardiner &J. M. Stone (2005提出的构造方法。根据质量通量的方向对其梯度进行迎风处理，从而使均匀流携带的磁环保持完整。我们还实现了D. Lee & A. E.Deane (2009)提出的边缘估算方法，以及D. Lee (2013)提出的迎风选择方法。

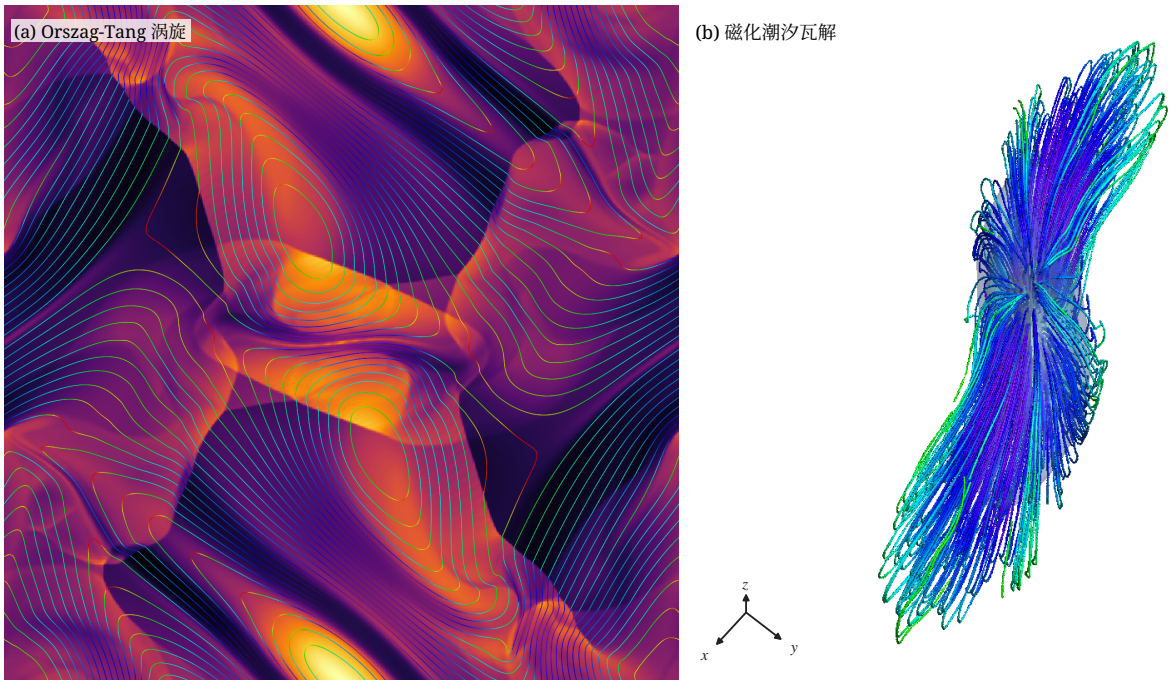


图 6。 磁力线由代码自带的渲染器绘制，并按照对数刻度下的磁压着色。(a) S. A. Orszag & C.-M. Tang (1979) 的 512^2 个网格单元，位于 $t = 0.5$。背景表示密度，磁力线是磁通函数的 28 条等值线，因此任意两个邻块之间通过的磁通量相同，而磁场较强处的磁力线更为密集。(b) 一颗由偶极场贯穿的恒星，位于 $t = 6$，大约在其以 $10^6\,M_\odot$ 的冲击参数 $\beta = 0.7$ (256^3 处经过一颗黑洞后两个动力学时间。磁力线从 256 个种子点出发，在三维空间中进行追踪，并绘制成管道。剥离物质流将其磁力线拉直，而幸存核心则将其磁力线缠绕起来。箭头表示坐标轴的方向。

在磁环测试中，这些方法多保留了约 1% 的磁能，但在 128^2 个网格单元时，它们使峰值磁场的过冲从 8% 升至 17% 至 21%，并导致磁环外出现更多杂散场，因此默认仍采用T. A. Gardiner& J. M.Stone (2005)的方法。通量由T. Miyoshi &K. Kusano (2005)提出的 HLLD求解器计算，该求解器能够解析接触间断和 Alfv´én 波；也可以采用 HLL 求解器，并使用S. F. Davis (1988)提出的快速磁声波速度估算方法。与 HLLC 一样，当流动汇聚且总压 $p+B^2/2$的跳变超过激波检测器的阈值时，HLLD 会在相邻网格单元处退回使用 HLL。时间步长的信号速度为 $|v_x| + |v_y| + |v_z| + d\,c_{\rm f}$，其中$d$ 是维度数，而 $c_{\rm f} = (c_{\rm s}^2 + B^2/\rho)^{1/2}$是最快的磁声波速度。

约束输运仅在精确算术运算中才能保持散度不变。使用单精度时，每个面都会分别对来自其各边的脉冲求和并进行舍入，舍入会使散度偏离零：在 S.A. Orszag & C.-M. Tang(1979) 的涡旋中，最大 $|\nabla\cdot\mathbf{B}|\,\Delta x/\max|B|$ 在 3.5×10^{-6}750 步后达到。因而，每个面都保存一对数值：场，以及存放在第二个纹理中的补偿值，用以保留场在舍入时丢失的部分；脉冲则通过无误差求和相加。

这对数值保留了面上各脉冲的精确总和，散度仅有几个舍入误差： 7×10^{-8}经过 751 步后，以及 9×10^{-8} 经过 3483 步后。面场及其补偿值在两种奇偶相位和半步时均需存储；对于气体而言，这会在均匀网格每个网格单元原有的 112 字节基础上增加 80 字节。

在近真空中恒星边缘附近，第一阶段可能会将一个几乎空的网格单元填充到其原有密度的数百倍。随后，第二阶段会通过半步网格单元的其他各面推出更多气体，推出的量甚至超过该网格单元起始时所含的气体，导致更新后该单元变空。因此，对于密度在第一阶段变化超过四倍（无论增大还是减小）的网格单元，其所有面都采用起始状态的一阶HLL通量；这一步可确保密度为正。四倍的变化幅度超过强激波对气体的压缩程度。每个面根据它两侧的网格单元自行作出这一判断，因此，共享该面的网格单元、网格片或块会计算出相同的通量，而由这些通量生成的边缘场也能保持散度不变。这项测试无法发现这样一种网格单元：第二阶段将其清空，但第一阶段几乎没有改变其密度；磁化盘上方的稀薄气体中就会出现这种情况。因此，第二阶段还会像 Athena++ 那样，在更新后检查每个网格单元。若某个网格单元剩余的密度不足其原密度的八分之一，或不再具有内能，就会被列出。随后，其各面将采用

起始状态的质量、动量和能量一阶HLL通量，并重新更新该网格单元及其邻块。磁场的通量保持原样，因此磁场及其散度均不变。在修正过的面旁重新更新的网格单元，如果总能量会将其加热到远高于实际内能的水平，就会改用单独演化的内能来计算压力。若此操作使邻块几乎变空，则会在第二轮中进行修正。在均匀网格上，列表会遍历一个更新步中的所有网格片，因此无论网格片大小如何，结果都完全相同。在自适应网格上，更新步会在输出的一个未使用通道中标记网格单元；扫描过程会列出已标记的块及其邻块，随后第二阶段的通量和更新遍会再次针对该列表运行。块表面上经过修正的面会写入通量寄存器，供更粗且更新较慢的邻块读取。若没有任何标记，额外遍历便会立即结束。在 RTX 3080 上，均匀网格的三维磁流体力学更新步开销增加 3%，而二维更新步开销降低 8%，这是因为更新步代码采用新形式后编译效果更好。在自适应网格上，两轮处理会为每个更新步增加七个小型遍历；无论这些遍历实际执行多少工作，在 RTX 3080 上耗时约为 0.13 毫秒。这不到三维更新步开销的 1%，而对于耗时 1.1 毫秒的二维更新步，则占 11.5%。在启用此功能的磁化问题中，阿尔芬速度上限会向速度 $\prime$超过该上限的网格单元中加入静止状态的质量。 $|B|/\rho^{1/2}$ 此做法不守恒，而且只有磁化盘会使用它（第11.1节）。

8.2. 电阻率与壁面

当磁扩散率 η为常数时，每条边上的电场会增加 $\eta\mathbf{J}$，其中 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ 为电流。此时感应方程会增加 $\eta\nabla^2\mathbf{B}$，而约束输运会保持散度不变。电流由单元中心处的场计算得出；对于一条边，取其周围四个网格单元中的场。穿过每个面的能量通量会增加相应的坡印廷通量$\eta(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$，因此总能量守恒到舍入误差范围内；单独演化的内能则会增加欧姆热 ηJ^2。与黏性类似，磁扩散率会限制时间步长（第 4.6 节）。一列静止的场波在气体压力的平衡作用下，其磁能以 $2\eta k^2$ 的速率损失，误差在 0.6% 以内；这一结果适用于二维和三维，以及均匀网格和块。

盒子的各个面可以设置为周期性边界、开放边界、仅允许流出的开放边界，或反射壁。在反射壁处，垂直于壁面的场会改变符号，因此场沿着壁面分布。像坍缩X点那样，其磁力线穿过壁面的场，需要能将磁力线固定在原处的壁面，例如J. O.的封闭边界 Thurgood 等人(2018)采用的这类边界可守恒穿过边界的通量。在这种线锚定壁处，虚单元会反转整个速度，并保持本单元内部的场不变，因此气体不会滑移。沿壁面的电场为零，所以穿过壁面各个面的场永远不会改变。运动壁面沿自身方向滑动。其虚单元的速度为 $2\mathbf{v}_\mathrm{w} - \mathbf{v}$，其中$\mathbf{v}_\mathrm{w}$ 是壁面的速度，沿壁面的电场为 $-\mathbf{v}_\mathrm{w} \times \mathbf{B}_n$，因此磁力线的脚点会随之移动。在没有场的情况下，这两种类型分别是静止的无滑移壁和移动顶盖。在一个方腔中，顶盖以单位速率运动，雷诺数为 100；沿穿过中心的竖直线测得的速度，在所有高度上都与U. Ghia 等人(1982)表中的数值相差不超过 0.0065。每种面的虚单元规则只需编写一次，即可供所有网格共用。

8.3. 自适应网格上的磁场

在自适应网格上，每个叶块的每个面都会被存储。对于场，树会在同一层级及其相邻层级之间，沿边和沿面维护邻块。在细化边界处，粗网格单元取细网格块写入通量寄存器的细网格磁通量的平均值；每条边则取其周围最细网格块的电场。同一层级的块会根据完全相同的输入计算它们共享的边，而较粗的块则取较细块沿该边两个值的平均值。这样，每个粗网格面始终等于其上细网格面的平均值，且场在不同层级之间保持无散度。在细化网格上，能量守恒误差为 2×10^{-7}；转子和爆炸波的磁能与最细分辨率下的均匀网格结果相差不超过 0.3% 和 0.1%。

网格发生变化时，复制块会保留其面及相应的补偿值，而合并块的面则取旧子块上与之重合的面的平均值。新子块在粗网格单元边界上的每个细网格面，若在其层级上存在旧叶单元，就取自该叶单元；否则取自粗网格面，并采用能保持其平均值的限制斜率。粗网格单元内部的面初始值取与之对齐的外侧面的平均值。随后，通过施加最小改变量进行修正，使每个细网格单元均无散度， $-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}^{+}\mathbf{r}$，其中 $\mathbf{r}$是细网格单元的散度，$\mathbf{A}$ 是单元与内部面之间的关联矩阵，而 $\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 是细网格单元的图拉普拉斯算子。沃尔什函数可将 2^d 细网格单元对角化，因此，对其应用伪逆$\mathbf{L}$只需进行一次变换和一次除法。这种延拓旨在实现 G.T´oth&P. L. Roe(2002) 所提出的目标：完全无散度、守恒，并保留已有的细网格面，但它并未采用他们的公式。沿盒子绕行一周，并重建网格 144 次后，一个

致密场循环保留了 $|\nabla\cdot\mathbf{B}|\,\Delta x/\max|B|$ 在 1.5×10^{-7}，并保留了 96% 的磁能，这一比例与最细分辨率下的均匀网格相同。

每块时间步长也适用于场。跨越面、边以及二维情况下的顶点相邻的块，其时间箱彼此最多相差一个。较慢的块在自己的时间步中，采用较快邻块第一个子步的通量和边上的冲量，并在自身时间步的中点采用第二个子步的通量和边上的冲量，因此共享面的两份副本会收到相同的冲量。节省的计算量取决于信号速度的差异。$t=0.05$ 处的二维磁流体力学爆炸波只需进行单一时间步长方案中 85% 的块更新；而时间箱之间的信号速度差异小于两倍的问题，则可达到 98% 至 100%。

9. 辐射输运

Shaderous 可以将灰辐射作为自身的两个场来处理，即辐射能量密度 E_r 和通量 $\mathbf{F}_\mathrm{r}$，并在笛卡尔坐标下的均匀网格和自适应网格上，使用 M1闭合对其进行演化。该方法遵循 Athena（M. A. Skinner &E. C.Ostriker 2013）、Fornax（M. A.Skinneretal.2019）和 QUOKKA（B.D.Wibking &M. R. Krumholz 2022）的双矩模块，但会逐个网格单元选择约化光速（第9.1节）。关闭辐射后，运行过程不会构建任何遍历，并且计算结果与之前相同。矩在气体参考系中以一阶精度演化 v/c，且通量方程不包含速度项，这与 Fornax 中的做法相同：

$$\begin{aligned}\partial_t E_\mathrm{r}+\xi\left[\nabla\cdot(\mathbf{v}E_\mathrm{r})+\nabla\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathsf{P}_\mathrm{r})+\nabla\cdot\mathbf{F}_\mathrm{r}\right]\\ =\xi\left[c\kappa_\mathrm{P}\rho\,(a_\mathrm{r}T^4-E_\mathrm{r})-\kappa_\mathrm{R}\rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}_\mathrm{r}/c\right],\\ \partial_t\mathbf{F}_\mathrm{r}+\xi\left[\nabla\cdot(\mathbf{v}\mathbf{F}_\mathrm{r})+c^2\,\nabla\cdot\mathsf{P}_\mathrm{r}\right]=-\xi c\kappa_\mathrm{R}\rho\,\mathbf{F}_\mathrm{r},\end{aligned}\tag{6}$$

其中，c 为光速，a_r 为辐射常数，T 为气体的温度，κ_P 为吸收不透明度，κ_R 为吸收和散射的总不透明度，P_r 为辐射压力张量。因子 $\xi\le1$会降低光速（第9.1节）。气体获得动量的速率为每单位体积 $\kappa_\mathrm{R}\rho\mathbf{F}_\mathrm{r}/c$，获得内能的速率为 $c\kappa_\mathrm{P}\rho(E_\mathrm{r}-a_\mathrm{r}T^4)$。能量方程中含有$\mathsf{P}_\mathrm{r}$和$\mathbf{v}\cdot\mathsf{F}_\mathrm{r}$的两项合起来构成压缩功$\mathsf{P}_\mathrm{r}:\nabla\mathbf{v}$。将它们分开，是为了使辐射因其压力所做的功而损失的能量，等于气体获得的动能。开启辐射后，气体和辐射的状态方程以及简并电子的状态方程（第4.5节）不再包含各自的辐射项，因为 E_r 携带了这些辐射。输运采用理想气体、气体和辐射、简并电子以及电离氢，而不采用列表状态方程或液体。C. D. Levermore（1984）的闭合关系根据约化通量 $\mathbf{f}=\mathbf{F}_\mathrm{r}/(cE_\mathrm{r})$，

$$\mathsf{P}_\mathrm{r}=\left[\tfrac{1}{2}(1-\chi_\mathrm{E})\,\mathsf{I}+\tfrac{1}{2}(3\chi_\mathrm{E}-1)\,\hat{\mathbf{f}}\hat{\mathbf{f}}\right]E_\mathrm{r},$$

$$\chi_\mathrm{E}=\frac{3+4|\mathbf{f}|^2}{5+2\sqrt{4-3|\mathbf{f}|^2}},$$

$\hat{}$其中 $\mathbf{f}$ 表示通量的方向。埃丁顿因子 χ_E 的范围是：各向同性辐射时为 1/3，光束时为 1。因此，同一组方程既可描述不透明气体中的扩散，也可描述透明气体中的自由流；光束还会在不透明障碍物后方投下阴影。代码附带的六个问题都用到了输运：一个通过表面冷却的热球、一个由辐射主导的爆炸波、一道带有阴影的光束、一个亚临界辐射激波和一个超临界辐射激波，以及一个辐射压力占总压力十分之一的多方体。

9.1. 约化光速

以真实光速进行显式输运，会使每一步的时间步长都受限于 $\Delta x/c$。通常的补救方法是将 c处处替换为约化光速$\hat{c}$（M. A. Skinner &E. C.Ostriker 2013；B.D. Wibking &M. R. Krumholz 2022）。这会使与气体处于平衡状态的辐射权重乘以 $c/\hat{c}$：在$\hat{c}=c/10$的封闭箱体中，气体和辐射达到平衡时的温度偏低了 26%。Shaderous 只会在透明度过高、无法使用真实光速的网格单元中降低光速：

$$\xi=\min\left[1,\ \frac{\hat{c}}{c}\max\left(1,\ \frac{\tau_\mathrm{c}}{\tau_0}\right)\right],$$

其中 $\tau_\mathrm{c}=\kappa_\mathrm{R}\rho\Delta x$ 是网格单元的光学深度，而 $\tau_0=2.5/3$。在不透明网格单元中，步长受扩散限制，为 $D=\xi c/(3\kappa_\mathrm{R}\rho)$，而在 τ_0 其信号速度下，$2.5\,dD/\Delta x$ 与热传导（第 4.6节）中的情况一样，等于流动速度 $d\hat{c}$。当 $c/\hat{c}=100$时，光学深度大于约 80 的每个网格单元都具有真实的光速，因此恒星内部具有正确的热容。对$\hat{c}$的唯一条件是$\hat{c}\gg|v|+c_\mathrm{s}$，诊断会统计不满足该条件的网格单元。

其中 $\xi<1$ 守恒总量为 $E+E_\mathrm{r}/\xi$。方程（6）中除时间导数外的每一项都带有 ξ，包括计入气体运动的平流，因此 ξ 在稳态下会消失，即使气体处于运动状态也是如此。约化光速仍无法让辐射结构以 $\xi<1$穿过网格单元并在网格上移动。以速率 u_s 移动的激波前驱区，其前沿因此会提前$\hat{c}/u_\mathrm{s}$，而不是 c/u_s。第 9.4 节超临界激波后方的温度，在$\hat{c}=c/5$ 处偏低 3.2%，在 $c/2.5$ 处偏低 1.1%，在 c 处偏低 0.1%。C.-C. He 等人 (2026) 提出了一种同样逐网格单元选取的约化因子。该因子源自隐式显式更新的稳定性，并取决于时间步长：它

在与气体的交换能够阻尼那些原本需要通过降低速率来处理的模态时，会恢复为真实光速。我们的方案则源自显式扫描的扩散极限，且仅取决于网格单元的光学深度。通过设置一个参数，可在所有位置恢复通常的 $\xi = \hat{c}/c$ 。

9.2. 输运与交换

气体的一个更新步会携带辐射一起移动，随后进行 N_{r} 次扫描（默认八次），使辐射在网格单元之间移动，并与气体交换能量和动量。平流会根据更新步在每个面记录的质量通量移动 E_{r}/ρ 和 $\mathbf{F}_{\mathrm{r}}/\rho$ ，与物种的处理方式相同（第 4.10 节），因此俘获辐射会与气体完全同步移动。在扫描过程中，每个网格单元会自行计算其所有面的通量，因此同一面的两个网格单元计算出的比特完全相同（第 5 节）。 E_{r} 和 f 采用线性重构；f 使用单调中心限制器，而 E_{r}的限制幅度为任一单侧差分的 1.2 倍。若E_{r} 也使用单调中心限制器，不透明物体的表面就会以脉冲形式发出光。通量采用局部 Lax–Friedrichs 通量，其波速取 M1 系统在面法线方向上的最大值。其耗散项按 $\min(1, 1/\tau_{\mathrm{f}})$ 缩放，其中 τ_{f}是面处网格单元的光学深度（M. A. Skinner 等，2019），因此在不透明气体中，无论网格单元能否分辨平均自由程，该方案都会以$c/(3\kappa_{\mathrm{R}}\rho)$进行扩散。每个网格单元都用自身的 ξ乘以其通量散度。一次扫描就是一个前向欧拉阶段，其库朗数稳定上限为 0.5，因此步长为 $\Delta t_{\mathrm{s}} = 0.5\,\Delta x/(d\hat{c})$。

输运之后，每个网格单元会独立地与其中的气体进行隐式能量和动量交换。通量首先弛豫至$\mathbf{F}'_{\mathrm{r}} = \mathbf{F}^{*}_{\mathrm{r}}/(1+\vartheta_{\mathrm{R}})$，其中 $\vartheta_{\mathrm{R}} = \xi c\kappa_{\mathrm{R}}\rho\Delta t_{\mathrm{s}}$，气体则获得通量损失的动量。对内能密度 e 和 E_{r} 使用后向欧拉法后，便得到一个关于新温度 T'的方程，

$$e(T') + \zeta\, a_{\mathrm{r}} T'^{4} = e + \zeta\, E^{*}_{\mathrm{r}}, \qquad \zeta = \frac{\vartheta_{\mathrm{P}}}{\xi(1+\vartheta_{\mathrm{P}})},$$

其中 $\vartheta_{\mathrm{P}} = \xi c\kappa_{\mathrm{P}}\rho\Delta t_{\mathrm{s}}$，牛顿法从一个大于根的初始值出发求解。方程两边都是正项之和，且没有任何项从 E_{r} 中减去 $a_{\mathrm{r}}T^4$ ，因此在任意光学深度下，单精度都足够：在 $\tau_{\mathrm{c}} = 10^{10}$时，经过 10^4 次扫描， E_{r} 与 $a_{\mathrm{r}}T^4$ 的差始终不超过 8×10^{-7}。e' 和 E'_{r}/ξ 中较大的那个会补足根的舍入误差，因此交换严格守恒 $e + E_{\mathrm{r}}/\xi$ 。辐射对气体做功所消耗的能量取自 E'_{r}；对各次扫描求和后，这部分能量恰好等于气体获得的动能。

不透明度为常数（将吸收和散射分开处理），电子散射为小量真吸收，或克拉默斯自由-自由不透明度加电子散射。使用物理单位时， c、 a_{r} 以及这些不透明度均由单位和组分决定。光度是能量在每一步之后通过一次小型遍历从盒子的开放边界面逸出的总和，因此其历史记录就是全波段光变曲线。快照包含 E_{r} 和$\mathbf{F}_{\mathrm{r}}$，运行可从辐射中比特相同的快照重启。

9.3. 自适应网格上的辐射

启用辐射后，自适应网格的所有块都采用一个时间步长，第 6.3 节中的局部时间步将关闭。平流和参数扫描会像物种的遍历一样，使所有块同步推进。在平流之前以及每次参数扫描之前，都会进行一次遍历，为每个叶单元及其周围两层虚单元组装 E_{r}， $\mathbf{F}_{\mathrm{r}}$ 和 $\kappa_{\mathrm{R}}\rho$ ；这些虚单元的填充方式与气体的相同（第 6.1 节）。在较粗块旁边，虚单元取面另一侧的粗网格单元值，并采用 minmod 斜率，以保持 E_{r}为正。对于与细网格单元共享的面，粗网格单元取这些细网格单元通量的平均值，因此从一个层级流出的量会进入另一个层级。每个网格单元都保留自己的 ξ，因此，粗网格单元可能具有真实光速，而其旁边的细网格单元则具有降低后的光速。网格改变时，合并块取其子块的平均值，新子块则以父块的网格单元值为基础并采用 minmod 斜率，因此 E_{r} 和$\mathbf{F}_{\mathrm{r}}$ 守恒。辐射会使块图集中每个网格单元增加 84 字节，而气体占用 152 字节。

9.4. 验证与计算成本

一维方案的双精度浮点数版本作为图形处理器的参考实现，表 11 列出了输运的 17 项测试。这些测试涵盖流动与扩散、阴影、运动气体中的俘获辐射、B. Su 和 G. L. Olson(1996年) 提出的非平衡马尔沙克波、亚临界和超临界辐射激波，以及一颗部分由辐射支撑的恒星；恒星处于静止状态，或以十倍声速运动，测试均在均匀网格和三个层级上进行。在 RTX 3080 上，处理 128^3 个网格单元的一步在不考虑辐射时耗时 2.1 毫秒，进行八次扫描时耗时 6.6 毫秒，因此一次扫描的成本约为气体计算一步的四分之一。当 $\hat{c}$ 约为气体信号速度的 15 倍时，单位模拟时间的成本是仅计算气体的 4.2 倍。

10. 参考系与坐标系

除静止状态下的笛卡尔盒外，Shaderous 还可在旋转参考系中运行，支持镜像对称、共动坐标、剪切盒，以及作为旋转体的二维圆柱坐标（R, z）或球坐标（r, θ）。每种模式都会通过一小段

仅在使用时才会编译的 WGSL 代码进入遍历，因此其他所有运行仍会计算出与之前相同的比特序列。每种模式在验证套件中都有自己的测试。

10.1. 旋转参考系

在以恒定$\mathbf{\Omega}$旋转的参考系中，点质量的外势会加入离心力，而良平衡重构会像平衡引力一样平衡它。科里奥利力会使动量在$\mathbf{\Omega}$的法平面内转向，但不改变其大小。我们在更新步之前和之后各施加一次半步的精确旋转，因此它不做功。在仅有科里奥利力的周期性盒子中，均匀流会在 π/Ω内旋转一周，相位误差为2.7×10^{-7}，动能变化为 5.6×10^{-7}。与参考系共转的双星系统，其间距可保持至 7×10^{-11}。

发生质量传递的双星系统会改变轨道，并在以固定速率旋转的参考系中缓慢漂移。参考系也可以改为跟随双星系统。每个更新步之后，图形处理器都会测量轨道平面内质量分布的四极矩轴，以及该轴的旋转速率。随后，它会调整Ω，使该轴在约三分之一个轨道周期内以临界阻尼回到起始位置。气体还受到欧拉力 $-\mathbf{\Omega}\times\mathbf{x}$。在洛希瓣溢出问题（第11.1节）中，供体失去气体的同时，轨道在两个周期内减慢了12%。在跟随双星系统的参考系中，连心线与其起始位置的偏差始终小于 4.5°；而在以初始速率旋转的参考系中，它则转过了 32°。采用隐式压力的液体也在旋转参考系中运行（第4.7节），因此可以用于模拟转子。

10.2. 镜像对称

关于一个、两个或三个坐标平面反射对称的问题，可以只在盒子的半区、象限或八分体上运行。镜像轴的下侧面会成为反射壁。第 7.1 节的多重网格求解器将其视为梯度为零的面，而多极边界会将计算区域的矩展开为整个构型的矩。磁场穿过镜像面时表现为赝矢量：法向分量保持不变，其余分量反向。当盒子的某个轴未设置为镜像时，镜像轴保持完整盒子的网格单元尺寸，而网格单元数量减半，因此网格呈矩形。诊断结果和显示均呈现整个构型。在八分体上模拟的 Sedov–泰勒爆炸波，其密度与完整盒子上的结果相差 2.6×10^{-6}。八分体上的埃夫拉尔坍缩，其能量与完整盒子上的结果相差 10^{-7}，而计算成本仅为八分之一。

10.3. 共动坐标

对于宇宙学问题，状态中保存的是共动密度和本动速度，所在的盒子随尺度因子 a膨胀。图形处理器随时钟推进 a，每个时间步执行一次弗里德曼方程的龙格－库塔步，因此时间步长始终不会跨越 CPU。每个梯度都带有因子 $1/a$，而各次遍历使用适当的网格单元尺寸 $a\,\Delta x$。膨胀对本动速度和内能造成的阻尼，会在一个时间步内精确求解，并在更新步前后各施加一半，作用方式如同在非惯性参考系中。泊松方程源项是共动过密度除以 a。在共动坐标中，引力对气体做功以 kick 形式施加：采用第 7节的通量形式时，冷泽尔多维奇薄饼的第一步使气体升温 10^5倍。状态方程关联的是本征量，因此除表格形式的状态方程外，其余状态方程均通过包装器运行，以转换共动值和本征值。物质主导宇宙中的线性密度模增长至线性理论预测值的 0.992，而膨胀气体中的声波相位误差为 7×10^{-4}。在均匀网格上，薄饼在焦散形成前与解析解吻合，密度误差为 0.6%，速度误差为 0.25%。在块网格上，密度误差为 6.5%，对此我们尚未找到解释。

10.4. 剪切盒

剪切盒是差分旋转盘的局部模型：一个以 Ω 旋转的参考系，沿径向轴具有潮汐加速度 $2q\Omega^2x$，背景流为 $v_y=-q\Omega x$，其中 $q=-\mathrm{d}\ln\Omega/\mathrm{d}\ln r$ 是剪切参数。沿 y 方向，盒子采用周期性边界。沿x 方向也采用周期性边界，但会随背景流产生位移，因此虚单元会在其重叠的两个网格单元之间进行插值。共用一个剪切面的两个网格单元，会根据不同的邻域计算该面的通量。因此，我们对剪切边界两侧的面通量（若存在磁场，还包括边缘电场）取平均，从而使质量、沿 x 和 z方向的动量以及磁通量在跨越该边界时守恒至舍入误差范围内。气体中的剪切波从领先态转变为滞后态时，其振幅与线性解的偏差不超过 0.2%。由噪声播种的垂直磁场通过磁旋不稳定性，以剪切率的 0.762 倍增长，而线性理论预测值为 0.75。

10.5. 轴对称坐标与球坐标

在二维情况下，运行可以是旋转体，采用柱坐标（R,z）或球坐标（r,θ）。存储方式和黎曼求解器均保持不变。几何因素以权重的形式作用于面通量，并以一个动量源项的形式体现；这些权重是每个面面积与网格单元体积之比，因而几何项——

——均可由网格单元索引以闭式表达，因此不会直接计算面积和体积，因为它们在单精度浮点数中是大数之差。轴附近的网格单元还需要额外采取两项措施。总能量和角动量穿过各面时采用不同的权重，因此在快速涡流的冷气体中，通过差值求得的内能主要来自这种不匹配。为此，在涡流占主导时，双能量切换会从内能自身的方程中获取内能。时间步长取每个网格单元宽度与其体积除以外侧面面积所得值中的较大者；在轴或极点附近，这个值是网格单元宽度的一半。此外，时间步长还受到离心加速度的约束，以免涡流抵达轴线时在一步内将轴附近网格单元中的气体排空。

在（R，z）中，径向重构保持良好平衡。二维情况下的自引力由第 7.1 节的多重网格求解器求解，网格单元的径向邻块按 $R_{\pm}/R_{\rm c}$ 加权，该值为共享面的半径与网格单元中心半径之比，适用于均匀网格和块。磁场在均匀网格上运行，并在（R，z）中采用基于面积和边长的约束输运。恒星位于轴上，并按照第 7.3 节所述方式，以环的体积进行处理。轴上的 Sedov–Taylor 爆炸波沿两个坐标轴达到相似半径，误差为 1.5%；诺问题达到冲击后密度 64，误差为 3%。均匀球体的势与解析解的差异小于 7×10^{-4}。埃夫拉尔坍缩在反弹过程中将能量守恒至 0.11%，热能峰值为 $t=1.125$，与三维情形相同。点质量吸积的 Bondi 解析率误差为 3.5%；围绕点质量处于平衡状态的环面在运行 62,700 步后，仍将峰值密度保持在 2.4×10^{-4}。

在（r，θ）中，网格从内球延伸到外球，并在 r方向上均匀分布或按对数分布，且网格包含两个极点。引力采用气体的单极项，原点处设有点质量。运行还可以采用第6 节所述的自适应网格，并使用局部时间步。每个块根据其所在层级的全局索引确定几何形状，限制和延拓按体积加权，粗网格面的通量则为细网格磁通量的面积加权平均值。切片视图将（r，θ）网格映射到子午面半平面。Sedov–泰勒爆炸波到达相似半径的误差为 0.74%，其在极点与赤道之间的半径差异为1.3×10^{-7}。稳态多方体的中心密度保持在 2×10^{-4}以内，邦迪吸积的结果与解析吸积率相差 1.9%。在块网格上，爆炸波的误差为 0.74%，而多方体的中心密度保持在 5×10^{-4} 以内，使用一个时间步时为 5.6×10^{-4}，使用局部时间步时为 5.6×10^{-4}。

11. 接口、输入与输出

Shaderous 运行于一个网址上。用户选择一个问题，并在包含所有设置的对话框中更改其网格和物理过程（第 11.2 节），然后通过光线步进体渲染或轴对齐切片查看气体；两者都使用模拟纹理，并在同一设备上绘制（图 7）。视图可以显示密度、温度、压力、被动标量、速率和各个速度分量、马赫数、熵函数 p/ρ^{γ}、净加热率、涡量、速度散度、归一化密度梯度 $|\nabla\rho|/\rho$、引力势、动能密度、以网格单元数表示的金斯长度，以及在自适应网格上显示细化层级。颜色范围会随场的演化而变化；对于导出场，则忽略最极端的 0.5% 网格单元。画笔工具可以添加质量、速度或热量；在磁化模拟中，还可以增强、削弱或拖曳磁场。用户可以绘制障碍物和源，汇工具则用于放置点质量。查询工具会显示指针下方网格单元的状态；在自适应网格上，还会显示包含该网格单元的块、其层级及细化指标。运行过程中可以更改细化阈值。地址栏会记录问题、网格，以及所有不同于问题默认设置的配置，因此通过链接即可复现相应设置。

有了磁场，视图还可以显示场强、等离子体β $\beta_{\rm M}$ 和场散度，并绘制磁力线。在二维中，磁力线是磁通函数的等值线 A_z，由面场本身积分得到。由于面场在舍入误差范围内无散度，积分到某个角点的结果与路径无关，并且相邻任意两条磁力线之间通过的磁通量相同。在三维中，从随气体运动的种子点出发，沿两个方向遍历磁力线，因此图像不会闪烁。离开盒子或磁场的种子点会被随机重新放置，其概率与磁能密度成正比。磁力线在体渲染内部绘制为发光管道，并按磁压着色，如 J.Guillochon &M. McCourt(2017年)在此处所采用的着色方式一样，但这里使用的是对数刻度。运行还可以录制为 MP4视频，在浏览器中逐帧编码，并在每一帧上绘制色标、坐标轴和模拟时间。帧取自最接近其时间点的步进结束时刻，且不会缩短任何步进，因此，录制的运行结果与未录制的运行结果逐位相同。

状态可以导出为符合 Athena 布局的 HDF5文件++（J. M. Stone 等，2020年），yt 可

直接读取（M. J. Turk 等，2011年），支持二维和三维，以及均匀网格和自适应网格。Shaderous 写入的文件还会保存运行设置、时间和点质量，因此导入文件后，可在同一网格上继续运行。每种物种都会写入为一个以其名称命名的变量。每当模拟时间达到设定间隔的整数倍时，检查点功能都会写入同一个文件。

同一页面也可以在没有人操作的情况下运行。页面中的编程接口会加载由链接参数或设置文档（第11.2节）描述的设置，将运行推进指定步数或推进至给定时间，并以纯数据形式返回诊断信息、气体样本、视图图像和导出的文件。推进至给定时间时，最后一步会缩短，以确保运行恰好在该时间结束。只要在地址中添加一个参数，页面就不会自行绘图或播放，因此图形处理器只执行脚本请求的步数。代码仓库中的两个工具基于此接口构建，它们都会在无窗口的浏览器中打开页面。命令行程序可以运行一组设置，也可以扫描其参数值。它会按固定的模拟时间间隔写入诊断信息、图像、切片、影片和 HDF5 文件，同时保存设置、代码版本以及生成这些文件的图形处理器信息。它也可以在租用的 Linux 服务器上运行，这些服务器配备数据中心 GPU，浏览器通过 Vulkan 访问图形处理器，并可在命令行中设置内存预算。运行会从检查点恢复；运行器会自行写入和读取任意大小的检查点，因此长时间运行可以作为一系列作业，在集群的批处理队列中依次执行。模型上下文协议[3] 服务器会将相同的操作作为工具提供给人工智能代理。在同一次对话中，代理可以加载问题、推进运行、读取数值并查看流动图像。

这两种工具都作为一个软件包发布在 JavaScript 软件包的公共注册表 npm 上。[4] 该软件包将构建好的页面与这两种工具一同打包，因此运行命令 npx shaderous 即可使用其中任意一种，无需复制代码仓库。机器只需安装 Node.js 和 Google Chrome，并配备图形处理器。服务器列在模型上下文协议的官方注册表中，支持该协议的客户端可以从中安装它。该代码仓库也是 Claude Code 的插件目录。它的插件会安装服务器，并附带供智能体使用的书面说明：如何检查运行是否正常，以及如何将文字描述转换为设置文档。对于通过浏览器工作的智能体，网站则提供一个简短的文本文件（llms.txt），介绍编程接口并指向相关文档。发布新版本时，只需将一个标签推送到代码仓库。该标签会运行测试、发布软件包并附上构建该软件包的提交记录签名，同时更新注册表中的条目。

在当前图形处理器上无法继续运行的大型检查点，仍然可以打开查看。页面会分块读取文件，不会一次性将整个文件载入内存，因此也能打开大于 WebAssembly 可寻址的 4 GB 的文件。它会将网格最精细层级合并到较粗的层级，直到网格符合图形处理器的内存预算。合并过程会保持质量和动量守恒，并确保磁场无散度。此类查看不会推进计算，且只保留显示所需的内容。如果这样能让它保留更多层级，它也只会保留正在显示的场，并在显示的场发生变化时重新从文件读取。图 8 展示了一个 3.5 GB 的检查点，该检查点在数据中心 GPU 上写入，并在桌面 GPU 上打开。

11.1. 问题

代码随附的问题包括：沿各轴方向的 G. A. Sod（1978）激波管、对角方向的激波管，以及 E. F. Toro（2009）提出的强激波管；G. Taylor（1950a）和 L. I. Sedov（1959）的爆炸波；开尔文-亥姆霍兹和瑞利-泰勒不稳定性；A. F. Emery（1968）以及 P. Woodward & P. Colella（1984）提出的带阶梯的 Mach 3 风洞；平滑平流；Jeans 不稳定性（J. H. Jeans 1902）；处于平衡状态、多方指数为 1 的多方体；处于平衡状态的冷白矮星；在近抛物线轨道上相撞的两颗白矮星（S. Rosswog et al. 2009；C. Raskin et al. 2009）；A. E. Evrard（1988）的坍缩；均匀球体；等温湍流坍缩；采用 H. Koyama & S.-i. Inutsuka（2002）冷却函数的热不稳定性（G. B. Field 1965）；点质量对多方体恒星的潮汐瓦解；以及从黏性环双星盘中吸积物质的双星系统（P. Artymowicz & S. H. Lubow 1994；A. I. MacFadyen & M. Milosavljević 2008）。在 ANEOS材料中，具有铁合金核心和岩石地幔的行星处于静止状态，而忒伊亚撞击原始地球，形成月球（R. M. Canup 2004）。空气中的激波撞击一个氦气泡（J.-F. Haas & B. Sturtevant 1987；J. J. Quirk & S. Karni 1996）。单步阿伦尼乌斯反应的爆轰从精确稳态解开始。当稳态解不稳定时，前沿会发生脉冲（W. Fickett & W. W. Wood 1966），其后的未燃气体团块会将前沿分裂成多个网格单元。第 4.11 节的网络会燃烧碳和氧的爆轰

[3] https://modelcontextprotocol.io[4] https://www.npmjs.com/package/shaderous

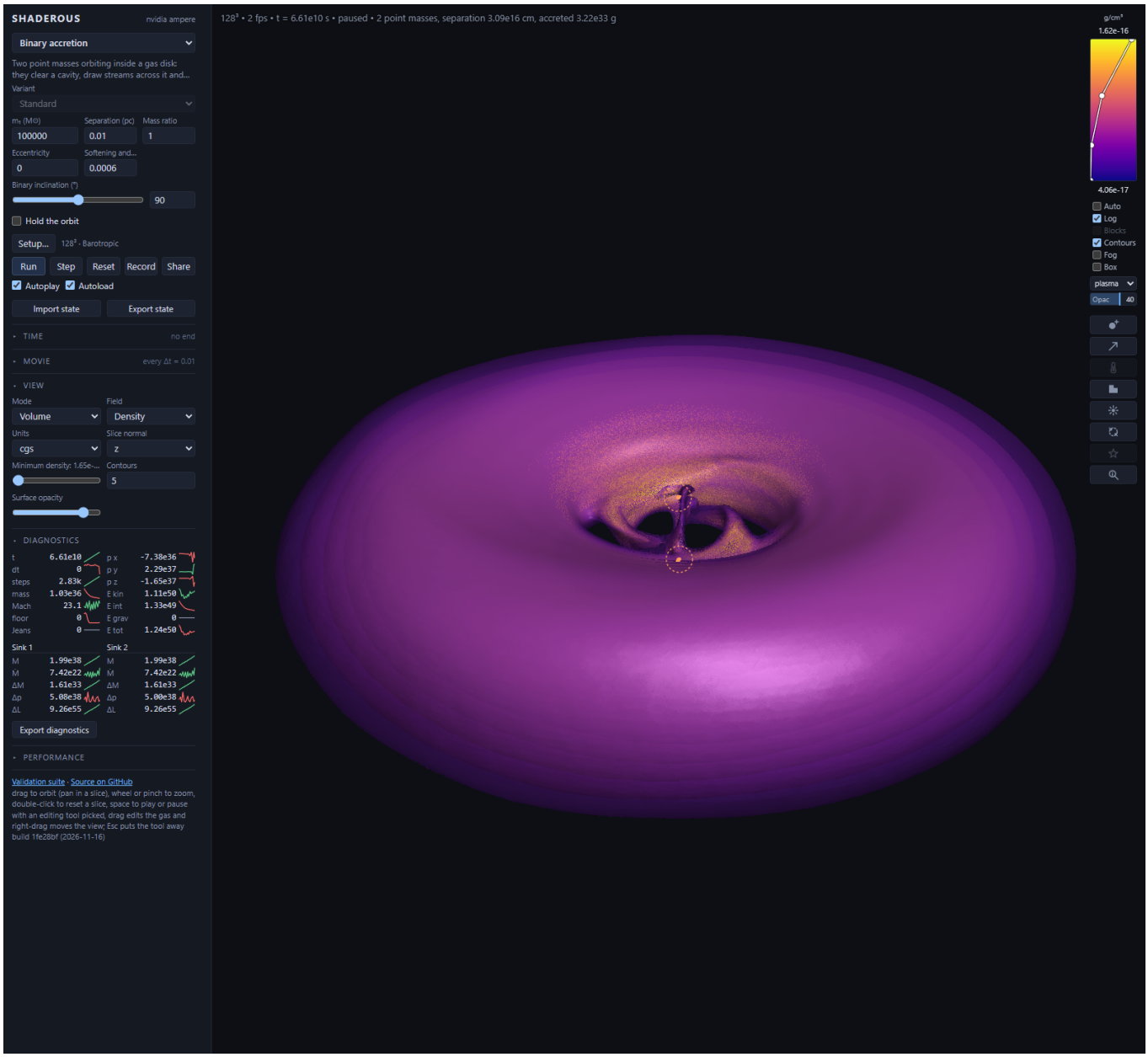


图7。 在浏览器中运行三维双星问题时 Shaderous 的完整界面，其中双星的轨道相对于盘倾斜了 90° 。体积视图显示了密度的等值面。旁边是问题菜单（含双星的主要参数）、运行和视图控件，以及诊断信息。

在 10^7 g cm^{-3}处点燃，管道闭端长 1000 km，并模拟两颗白矮星的碰撞。它还会燃烧质量为 $1\,M_\odot$ 、薄氦壳层下方的白矮星的双重爆轰（E.Livne 1990；M. Fink et al.2010）。壳层底部的热点点燃氦。氦爆轰环绕恒星传播，并在远端极点处激波汇聚的位置点燃碳。在 98 km 的网格单元上，核心在 2.2 s 内燃烧完毕，且 $0.51\,M_\odot$ 的 ^{56}Ni 留在盒子中。同质量裸碳氧白矮星的爆轰产生 $0.58\,M_\odot$ （K. J. Shen et al. 2018）。使用磁-

磁场相关测试包括M. Brio &C. C.Wu (1988的激波管、S. A. Orszag & C.-M. Tang(1979的涡旋、D. S. Balsara & D. S. Spicer (1999的磁场环、T. A.Gardiner & J. M.Stone (2005的圆偏振阿尔芬波 (G.T´oth 2000)、磁化介质中的爆炸波 (J. M. Stone etal. 2008)、由偶极场或随机场贯穿的多方体、磁化潮汐瓦解，以及磁化吸积盘。继 A. Mallet & E.Abraham (2026的 WebGPU 求解器之后，还可以研究在盒子中驱动湍流（第4.9节），其中气体为等温状态，且有无

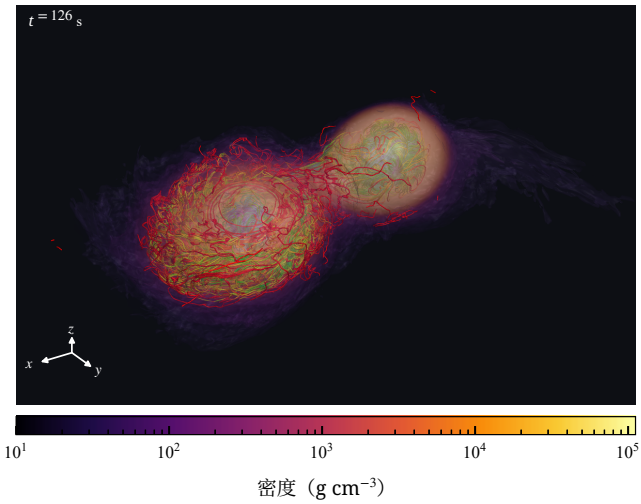


图 8. 两颗磁化白矮星在进行质量转移；图像来自一个仅供查看而打开的检查点。一个碳氧供体，质量为 $0.6\,M_\odot$，填充了其洛希瓣的 97%，绕着质量为 $0.9\,M_\odot$ 的吸积星运行，所处参考系随轨道转动。每颗恒星都被各自的缠结磁场贯穿，其中心的 $\beta_{\rm M} = 10^5$，气体遵循白矮星物质的状态方程（第 4.5节）。这次运行使用了 1024^3 个网格单元，在一个横跨 80,000 k m 的盒子中达到最精细层级，并经过五层细化；计算在 NVIDIA H100 上运行。其检查点记录了经过 24,183 步、时间为 $t = 126$ s 时的状态，包含 19,419 个块。在桌面图形处理器上打开该检查点时，为显示磁力线而保留了面场，网格合并后最精细层级包含 512^3 个网格单元。密度以雾状效果和八个等值面绘出，300 条磁力线则按对数刻度以磁压着色。较大的恒星是供体。箭头表示坐标轴的方向。

导引磁场的情况；用磁场贯穿开尔文–亥姆霍兹层；以及让沿导引磁场反向传播的阿尔芬波相撞，既可采用波包形式 (J. L. Vernieroet al. 2018)，也可采用周期波形式 (G. G. Howes& K.D. Nielson 2013)。加入电阻率后，哈里斯电流片会撕裂成磁岛 (H.P. Furth et al. 1963)，两个磁岛会合并 (J. M.Finn & P. K. Kaw1977)，受应力的X点会在线固定壁面之间坍缩 (J. O. Thurgood etal.2018)。U. Ghia 等人(1982) 的方腔用于将黏性通量与标准基准进行比较。近乎不可压缩的液体会流过圆柱体、同一方腔、Gresho涡以及泰勒-格林涡，并形成双剪切层（第4.7节）。剪切盒会发展出磁旋不稳定性，并使剪切波摆动；泽尔多维奇薄饼在共动坐标中坍缩；爆炸波则在 (R, z) 和 (r, θ) 中运行（第10节）。在洛希瓣溢出过程中，一颗充满洛希瓣的类太阳恒星会将气体经由内拉格朗日点倾泻到质量为 $3\,M_\odot$的黑洞上，形成一股气流并逐渐卷成盘。另一种设置则以一颗已解析的、质量为 $0.6\,M_\odot$ 的恒星取代黑洞。一个多方体自转在旋转参考系中刚性运动。风洞中放置着一个汽车形状的钝体，三叶风力涡轮机在自身参考系中旋转，并报告其功率系数（第4.8节）。图9展示了其中四个问题。

四个问题使用氢和氦的状态方程，但不包含其辐射项。在共同包层问题中（N. Ivanova 等，2013年），一颗质量为 $0.5\,M_\odot$ 的恒星作为点质量，从一颗质量为 $1\,M_\odot$、半径为 $50\,R_\odot$ 的红巨星外侧开始沿圆轨道运行，随后螺旋式进入巨星的包层。巨星是一个围绕质量为 $0.4\,M_\odot$ 的点质量核心、指数为 3/2 的多方体（第 7.3 节）。其包层位于 10^4 与数个 10^5 K 之间，其中氢和氦部分电离；随着包层膨胀，它们复合释放的能量是包层束缚能的重要组成部分。一个变体使用理想气体运行相同的问题。部分潮汐瓦解在冲击参数为 $\beta \equiv r_{\rm t}/r_{\rm p} = 0.6$ 时（即潮汐半径与近心点距离之比）也使用这种气体运行，恒星损失的碎屑在膨胀和冷却过程中发生复合。热不稳定性以物理单位运行，置于一个边长为 31 pc 的盒子中。气体在接近 1500 K 时开始处于原子态，冷云在低于 1000 K 时变为分子态，而暖介质在高于 4000 K 时发生电离，因此两个相位的单位质量粒子数相差四倍。解离和电离吸收的热量使这些相位的分离时间比理想气体晚约三倍。其化学过程采用表中最低密度 10^{-20} g cm^{-3} 处的平衡状态，而真实的星际气体并不处于平衡状态。最后一个问题是原恒星第一核心的第二次坍缩（R. B. Larson，1969年；H. Masunaga 与 S.-i. Inutsuka，2000年），在 (r, θ) 中使用 128×128 个网格单元，这些单元在 $\ln r$ 中从 0.008 到 6 au 均匀间隔。第一核心由处于一条绝热线上的分子气体构成，该绝热线对应于在 10^{-13} g cm^{-3} 和 10 K 时变得不透明的气体；其流体静力平衡根据该运行所用的状态方程计算。沿此绝热线的核心最高达到 $0.040\,M_\odot$，中心密度为 3×10^{-9} g cm^{-3}、温度为 1800 K。更致密的中心温度高于 2000 K，此时 H_2 发生解离，且 Γ_1 降至 4/3 以下，这样的核心是不稳定的。该问题的核心包含 $0.036\,M_\odot$，直径为 2.6 au。其中心初始温度为 2100 K，密度为 1.8×10^{-8} g cm^{-3}；核心初始压力比平衡所需压力低 5%。其中心沿绝热线坍缩，直到氢变为原子态；随后第二核心，即原恒星，在激波后方形成。表 8 的验证测试将中心温度与绝热线进行比较，同时密度上升 10^4 倍，并检查第二核心的密度和温度。

这两个问题中的一个默认使用第4.6 节的扩散通量。双星系统的盘，其 $\nu = 10^{-3}$单位为双星间距的平方乘以

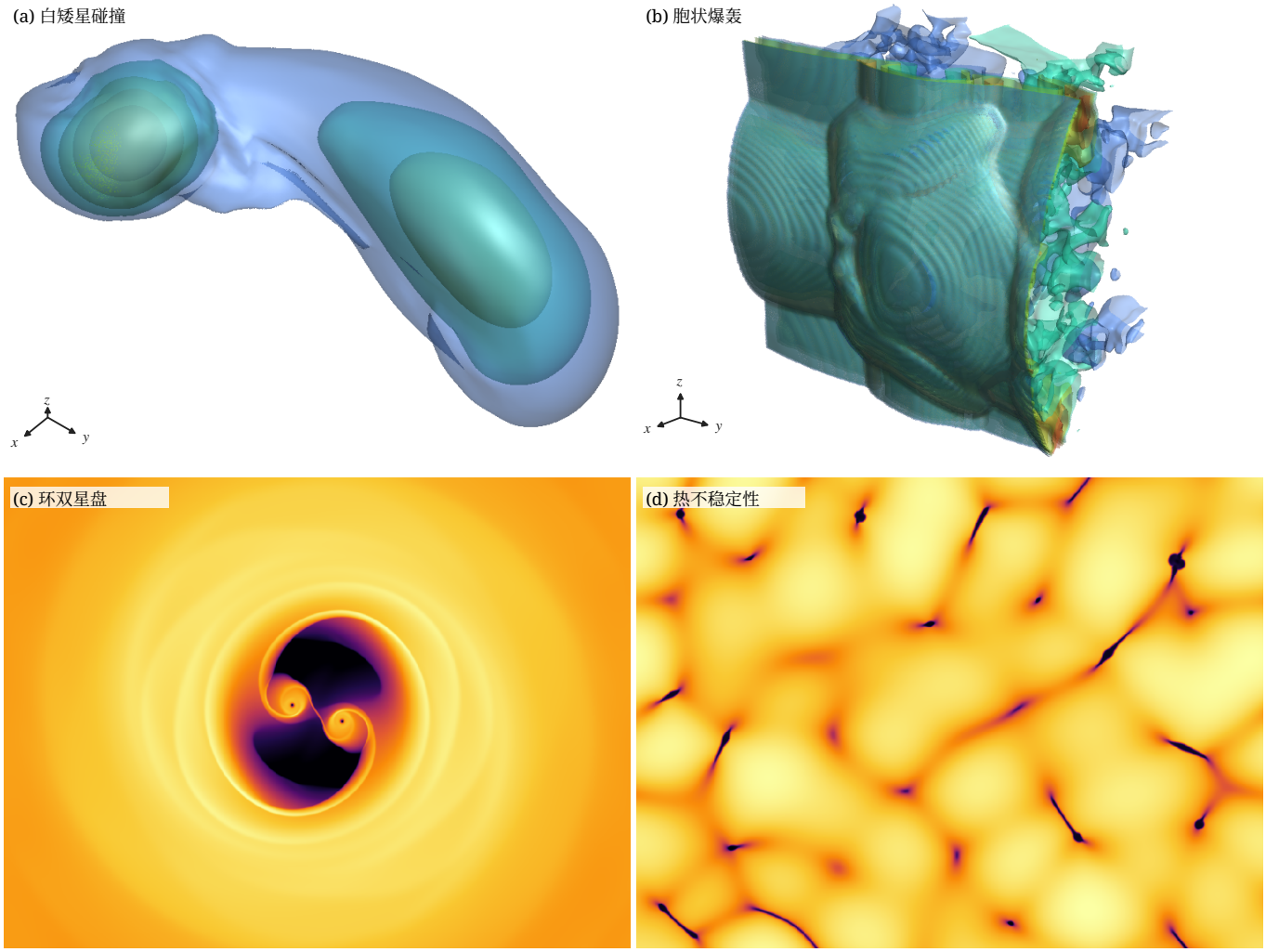


图 9. Shaderous 随附的问题，由代码自带的渲染器绘制。(a) 两颗质量分别为 1.0 和 $0.8\,M_\odot$ 的白矮星偏心碰撞后（近心点为它们半径之和的 0.6 倍）的密度等值面：较轻的白矮星被撕裂成一条碎屑尾迹。(b) 三维空间中单步阿伦尼乌斯反应爆轰的密度等值面（128^3 个网格单元，$t = 30$）。前沿后方一团未燃气体将其分裂成胞状结构，而其后的燃烧气体则呈湍流状态。(c) 等质量吸积双星经过 20 个轨道周期后周围气体的密度，其中显示了方腔及穿过方腔的流束。(d) $t = 0.6$时热不稳定性中的温度，暖介质中有冷云和丝状结构（深色）。(a) 和 (b) 中的箭头表示坐标轴的方向。生成该图的脚本将每种设置记录为可复现该设置的链接。

其轨道频率。在双星间距处，这相当于 α 黏性，其 $\alpha = 0.1$值正是B. D. Farris 等人(2014年)所选取的值。热不稳定性的$\kappa = 3 \times 10^{-4}$ 单位为盒子尺寸和问题时间单位，因此云的尺度由热传导而非网格单元尺寸决定。H. Koyama & S.-i. Inut-suka (2004)指出，只有加入热传导，并以至少三个网格单元解析 Field长度，热不稳定性的模拟结果才能随分辨率提高而收敛。加入热传导后，结构尺度在 $t = 0.6$时会在 512^2 个 1024^2 网格单元之间变化 7.5%。不加入热传导时，尺度会下降 20%。

双星系统的盘在其外缘也有一个阻尼区，其类型与 M.de Val-Borro 等人（2006）用于比较盘-行星相互作用的代码。在距离质心超过 4.5 个双星间距处，气体的密度、速度和比内能会逐渐恢复到初始盘状态。恢复速率从该处的零值增至盒子边缘（距离质心 6 个间距处）的每局部轨道周期三倍，并且这两个数值都可以在运行过程中更改。如果没有该区域，气体会从盒子角落的流出边界流入，盘不断增大，直到其不均匀的引力将双星推出盒子。固定在盒子上的区域会带来第二个问题。这样一来，外盘完全不会吸收双星的反冲，而固定的盘会将偏心双星进一步拉向其较近的一

侧。跟随质量体的质心（第 7.4 节）可以消除这种不稳定性。

磁化吸积盘是一个围绕单个软化点质量、带有吸积汇的全局等温盘；它与软化势处于精确的垂直和径向平衡。四个极向磁场环穿过该盘，且净磁通为零；而 J. F. Hawley（2000）将磁场环沿等密度面布置。我们将它们沿半径方向布置，$\beta_{\rm M} = 50$ 位于中平面上两个磁场环相交处。阻尼区只作用于气体，磁场则由感应方程演化；将 Alfv´én 速率上限设为 3，可避免近乎空无一物的日冕决定时间步长。剪切会缠绕磁场环，磁旋不稳定性（S. A. Balbus 和 J. F. Hawley，1991）随之增长。代码将盘体范围内的麦克斯韦应力和雷诺应力报告为 α 参数，并计算 J. F. Hawley 等人（2011）定义的质量因子 Q_z 和 Q_ϕ，即不稳定性最快增长波长横跨的网格单元数。在默认网格上（最精细层级为 256^3，另有两个细化层级），经过单位半径处的三个轨道后，$\alpha_{\rm M} = 0.026$、$\alpha_{\rm R} = 0.003$、$Q_z = 4.2$ 和 $Q_\phi = 15$均低于 $Q_z \gtrsim 10$，其 $Q_\phi \gtrsim 20$ 也低于 J. F. Hawley 等人（2011）发现的、使湍流达到与更高分辨率下相同饱和状态所必需的数值。该盘在桌面 GPU 上的最大规模运行采用 512^3，在 NVIDIA RTX 4090 上使用三个层级。可容纳 5832 个块（约 2400 万个网格单元）的配置占用了 16.8 GB GPU 内存；在单位半径处运行一个轨道（6359 步）耗时 14 分钟。在这一个轨道期间，磁能增长了 5.4 倍，麦克斯韦应力达到 $\alpha = 0.009$。

对于潮汐瓦解，该代码还会按照碎屑相对于黑洞的比轨道能对其进行排序，由此可以得到束缚碎片返回近心点的速率。离开盒子的气体会在黑洞的势中近似沿弹道运动，因此其能量不再发生变化。因此，更新步会将气体穿过盒子每个开放面的质量，按其穿过时的能量计入能量直方图。清查会将仍在盒子中的气体计入其中。代码会单独划分出一个幸存核心，我们通过迭代找到它：如果气体在其自身势作用下受束缚于核心的平均速度，则该气体属于核心；随后再根据这些气体重新计算核心的平均速度。这些直方图使用64位整数求和，因此结果精确，且不依赖图形处理器执行加法的顺序。在验证运行中，盒子中的质量、已经离开的质量以及吸积汇已经

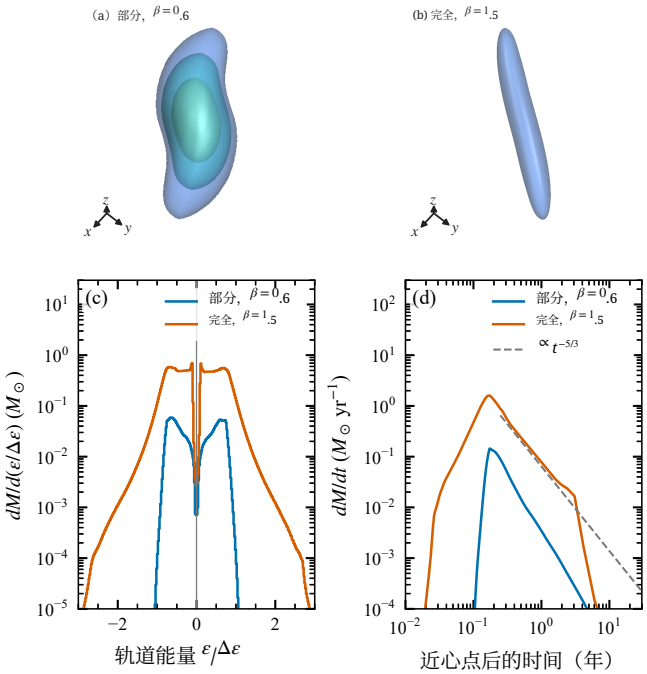


图10. 一个多方指数为 3/2、质量和半径与太阳相同的多方体恒星被黑洞$10^6\ M_\odot$潮汐瓦解的模拟；该模拟使用命令行运行器，在盒子 $16\ R_\odot$ 宽的自适应网格上运行（最精细层级为256^3，共三个细化层级）。(a, b) 代码的渲染器在 $t = 6$绘制的密度等值面；此时距离近心点约两个动力学时间，等值面在 $\log\rho$ 上从 0.01 到 $10\ M_\odot\ R_\odot^{-3}$ 均匀分布，共五个层级；对应的冲击参数分别为 $\beta = 0.6$（恒星保留了大部分质量）和 $\beta = 1.5$（恒星被撕裂）。(c) 距离模拟开始 40 个动力学时间时，黑洞周围单位比轨道能对应的质量，以能量展宽 $\Delta\epsilon = GM_{\rm bh}R_\star/r_{\rm t}^2$为单位；其中 $M_{\rm bh}$ 是黑洞质量，$R_\star$ 是恒星半径，$r_{\rm t}$ 是潮汐半径。图中显示了已经离开盒子的气体和盒子内的气体，不包括幸存核心。(d) 束缚碎屑返回近心点的速率随近心点经过后的时间变化。虚线按 $t^{-5/3}$衰减。部分瓦解产生的碎屑会在一个狭窄的峰值处返回，随后衰减得更快。

相加后与初始质量的差异仅在总量的舍入误差范围内。开普勒第三定律可将束缚碎片的直方图转换为回归率（图10）。当多方指数为 3/2 的恒星以 $10^6\ M_\odot$的速度 $\beta = 1.5$掠过黑洞时，回归率在 $1.6\ M_\odot$ 年$^{-1}$ 61 日后达到峰值，距近日点中心，随后逼近 $t^{-5/3}$。在此分辨率下，团块仍保持束缚，并且在运行 40 个动力学时间后仍在不断散失质量，此时它还保有 $0.12\ M_\odot$。只有当气体离开团块时，回归率曲线的后期部分才会逐渐显现。在$\beta = 0.6$ 时，恒星仍保有 $0.95\ M_\odot$，且回归率下降得比 $t^{-5/3}$更快；这与J. Guillochon 和 E. Ramirez-Ruiz (2013) 对产生核心的相遇事件所得结论一致。

采用指数为 3 的多方体进行演化，其气体具有 $\Gamma = 5/3$，与 J. Guillochon 和 E. Ramirez-Ruiz (2013年) 的做法相同。在我们的运行中，当 β 介于 1.8 和 2 之间时，它会被摧毁：在 1.8 时，其峰值密度再次坍缩；在 2 时，峰值密度持续下降。相比之下，他们得到的数值为 1.85。磁化瓦解所采用的磁场几何构型来自 J. Guillo- chon 和 M. McCourt (2017年)，包括偶极场或具有科尔莫哥洛夫谱的随机场

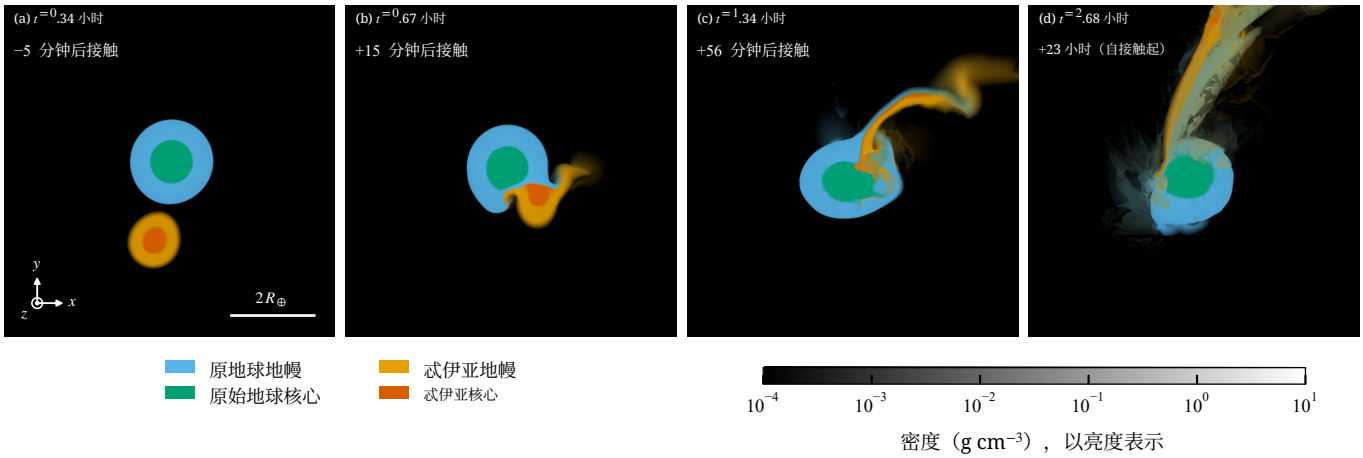


图11. 成月撞击：沿轨道平面的切片，展示盒子 $10\,R_\oplus$ 宽度方向中间 $8\,R_\oplus$ 的区域，地球半径方向上每个半径有102个网格单元。每个面板标示了自运行开始以及自接触以来经过的时间。颜色表示气体的组成：原始地球和忒伊亚的橄榄岩地幔与 Fe85Si15 核心；气体混合处，各组分按比例混合，铁的质量分数和标记忒伊亚气体的被动标量用于表示混合比例。亮度表示密度的对数。(a) 忒伊亚正在靠近。(b) 忒伊亚的地幔掠过原始地球的地幔。(c) 忒伊亚的核心沿着其地幔的一条臂内侧被拉长，并向原始地球的核心下沉。(d) 这条臂环绕行星缠绕，行星则被忒伊亚的地幔包裹，并与自身地幔混合。进入轨道的气体主要是忒伊亚的地幔，而忒伊亚的大部分铁则并入行星。

。其强度设定为$\beta_{\rm M}$ 恒星中心处的强度。我们的模型则遵循恒星的压力分布，因此其中的 $\beta_{\rm M}$ 大致处处相同。

成月撞击模拟遵循R. M. Canup(2004) 的研究。忒伊亚以 $0.12\,M_\oplus$的质量从无穷远处静止落向质量为 $0.9\,M_\oplus$ 的原始地球，两者在45°处相接。两个天体的质量中均有 30% 是 Fe85Si15 核心，外覆橄榄岩地幔。与R. M. Canup(2004的做法相同，代码在撞击后根据每个网格单元的位置和速度，按其绕行星的开普勒轨道对气体进行分类。处于非束缚轨道上的气体会逃逸，近心点位于行星半径以内的气体归入行星，其余气体则构成盘。代码根据落入行星的气体重新计算行星的质量和半径，直至两者不再变化。随后，根据盘的质量和角动量，计算其最终可聚集形成的月球质量（S.Ida etal. 1997；E. Kokuboet al. 2000）。我们在一台 NVIDIA A100 上运行了这次撞击模拟，盒子横向有 $10\,R_\oplus$ 个网格单元，设置了四个细化层级，最精细层级的分辨率为每个地球半径 102 个网格单元（图11）。运行 25 分钟后，两个天体相接。忒伊亚的地幔横向剪切原始地球，并被拉伸成一条臂。忒伊亚的核心沿着臂的内侧被拉长，其中大部分沉入原始地球的核心。接触后 1.8 至 2.3 小时，盘的质量为 0.031 至$0.035\,M_\oplus$，其中 65% 来自忒伊亚，最终可聚集形成 1.1 至 1.3 个月球质量。对于总质量占比为 0.11 至 0.13、以相互逃逸速度撞击且角度接近 45°的撞击体，R. M.Canup(2004) 得到的盘为 1.0 至 1.6 个月球质量（0.013 至 $0.020\,M_\oplus$），其中 75% 至 89% 来自撞击体，并预测形成的月球为 1.0 至 1.6 个月球质量。我们的月球处于这一范围内，忒伊亚在我们盘中的贡献低于该研究结果，而我们的盘质量更大。盘中有十分之一是铁，处于 R. M. Canup (2004) 所研究盘中铁含量 2% 至 10% 的上限。在一个横向有 $24\,R_\oplus$ 个网格单元、每个地球半径有 10.7 个网格单元的盒子中，忒伊亚的核心横向只有六个网格单元；由于网格将铁混入忒伊亚地幔后，铁会随地幔移动，因此盘中有四分之一是铁。接触后至 2.3 小时，总能量变化最多为 1×10^{-3}，且有 0.15% 的质量从盒子的各个面流出。不久之后，忒伊亚剩余的团块虽然仍受引力束缚、会回落，却穿过盒子的一个面而逸失，因此我们在那里停止了运行。在验证测试的分辨率下，即每个地球半径 8 个网格单元，盘最终可聚集形成 1.5 个月球质量。

11.2. 设置

84 个问题各对应一个文件，用户也可以编写其他文件。一个设置是一个 JSON 文档，其中包含一次运行的所有设置：网格、物理过程、边界以及部件列表。这些部件包括点质量、恒星、盘、具有自身状态的气体区域、固体障碍物、流入和均匀磁场；轨道部件则会将两个天体置于开普勒轨道上。带参数的命名初始条件可以描述设置无法表达的形状，例如带有预设模态的剪切层或稳态爆轰的剖面。代码会将文档编译为求解器一直以来所接收的相同内部描述，因此用户组装的设置会通过与随附问题相同的着色器运行。我们将转换结果与文件所替代的

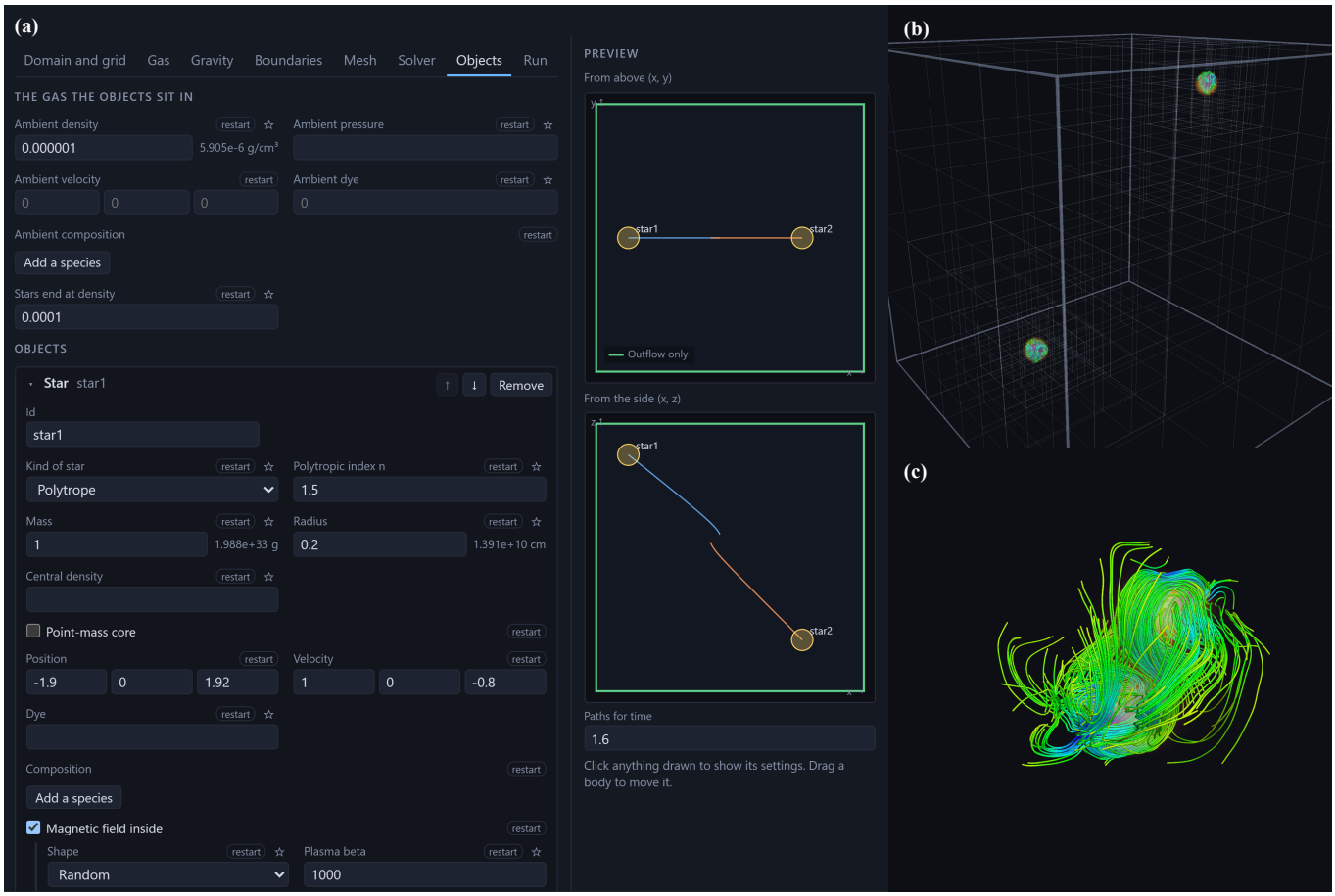


图12. 在页面中创建的设置及其产生的运行结果。(a) 对象页面上的设置对话框：环境气体、两个多方体中的第一个及其质量、半径、位置、速度和磁场，以及预览图。预览图以两个投影按比例绘出两颗恒星，并显示它们作为点质量时将遵循的路径。(b) 两颗恒星稳定下来后的体积视图，以及自适应网格的叶块。网格在每颗恒星周围都经过细化。(c) 46分钟后，两颗恒星合并时的磁力线，按磁压着色。生成该图的脚本会将设置保存为文件。

手写定义进行了核对。每个文件都能复现其问题的配置，并且在二维和三维中采样的点上，初始状态、点质量和磁势都在最后一位上完全相同。

页面中的对话框可编辑文档的副本（图 12a）。表单根据一张表生成，其中逐一列出了所有选项，以及每项的取值范围、默认值和所需或排斥的选项。例如，恒星要求采用三维或轴对称（R，z）运行，并启用孤立自引力，同时不能使用周期性边界。无法与其余设置组合的选项会显示为灰色，工具提示则会说明原因。仅根据文档绘制的预览会显示盒子、按比例呈现的物体，以及它们作为点质量时将遵循的路径；还可以拖动这些物体来更改位置。表中还记录了更改对正在运行的模拟所需的操作：写入均匀块、重建着色器，或重新启动。用户应用更改时，页面只会执行该更改所需的最少操作，因此可以在运行过程中更改黏性或黎曼求解器。

设置文件只包含数字和名称，不包含代码，因此打开陌生人提供的文件是安全的。纯数字之外唯一的例外是盘的密度，它可以表示为半径和相对于中平面的高度的公式。代码会将公式解析为基于固定函数列表的算术运算，但从不执行该公式；它还会根据解析后的公式生成盘阻尼区的着色器文本。设置可以保存为文件，也可以保留在浏览器中。链接会将一个不属于内置问题的设置作为其文档的压缩副本携带起来；导出的状态文件也包含该文档，因此即使内置问题发生变化，文件重启后仍会使用相同的设置。编程接口和命令行运行器接受文档，而不是问题名称。

图 12展示了一个不包含在任何内置问题中的设置。两个多方指数为 3/2、质量均为1 $M_\odot$、半径为 $0.2\,R_\odot$的多方体，在一个宽度为 $5\,R_\odot$ 的盒子中相互接近；每个多方体的中心都有 $\beta_{\rm M} = 1000$缠结磁场穿过。网格在最精细层级有 256^3 个网格单元，并具有三个层级的细化。在第一步之前，两颗恒星都已调整到与网格平衡的状态（第 7.3节）。经过 1304 步、模拟时间 46 分钟后，它们发生碰撞；两颗恒星的磁力线在恒星合并时相互缠绕。

11.3. 根据描述创建设置

由于设置是由数字和名称组成的文档，因此人工智能代理可以编写设置。用户用文字说明自己的需求，例如一颗 $0.5\,M_\odot$与一颗 $1\,M_\odot$相撞的主序星。连接到第 11节服务器的智能体会将请求转换为设置文档，运行该文档并报告发现。插件安装的指令会说明具体步骤。智能体会从最接近请求的内置问题着手；该问题的下限值、边界和细化已预先调整好。智能体还会根据网站发布的参考值和 JSON模式，理解每个键的含义。运行前，服务器会使用与对话框相同的选项表检查文档，并返回对话框会列出的误差和警告：违反规则及其原因、低于两个网格单元的软化长度、彼此重叠或离开盒子的物体，或超出图形处理器内存容量的网格。随后，智能体会在粗网格上加载设置，检查质量是否等于所有物体质量之和，以及恒星在相遇前是否保持静止，然后以完全分辨率运行。最后，它会告知用户请求中未明确的每项建模选择，例如多方指数、恒星半径，或哪些物体被转换为点质量。代码仓库中提供了示例。在上述碰撞示例中，白矮星远小于一个网格单元，因此会变成一个软化点质量，穿过多方指数为 3 的多方体。最终得到的是一个普通设置，用户可以通过链接打开，在对话框中修改并再次运行。由于有这项检查，对于内置问题都无法预料的请求，系统会说明原因并拒绝运行，而不会运行代码不支持的选项组合。

12. 教育用途

这款代码具备多项特性，适合在课堂上使用。它无需安装、无需账号，也不需要分配计算时间。它可以在学生现有的笔记本电脑上运行，二维问题还可以在手机上运行。一个链接即可记录完整的设置，因此教师只需发布链接，就能将预先设置好的运行方案提供给全班。画笔工具、查询工具以及显示场的选择功能，让学生能够在流动运行时对其进行更改，并读取任意网格单元的状态。在设置对话框中，他们可以利用恒星、轨道、障碍物和气体区域创建自己的运行方案，并通过链接分享。命令行运行器会写出可供 NumPy 读取的切片，导出的文件也能在 yt 中打开，因此熟悉 Python 的学生可以用自己的脚本分析运行结果。录制的影片可以在课堂上播放。代码仓库中的指南介绍了下文列出的各项活动，并附有可打开相应设置的链接。[5] 这款代码问世时间尚短，还未在课程中使用过。这些活动目前只是提案，我们欢迎尝试这些活动的教师告知我们哪些做法有效。

面向中小学，本指南提供了七个演示项目，教师可通过投影仪展示，每个项目只需几分钟，并按照预测、观察和解释的流程进行。学生会看到空气和水如何流动、形成涡流，热气体如何上升和扩散，以及恒星如何由引力聚拢成一个热气体球。每个演示项目都配有学生可以亲眼观察或亲自动手的活动，例如在一杯水中滴入食用色素，观察它卷曲扩散。年长的学生两人一组，使用查询工具读取数值，并讨论模拟结果在多大程度上可信。

对于非物理学或天文学专业的本科生，这套代码可用作一系列无需方程的演示工具。开尔文-亥姆霍兹不稳定性卷曲成云层和木星条带中可见的涡旋。瑞利-泰勒不稳定性则会生长出类似蟹状星云丝状结构的指状物。Sedov–泰勒爆炸波展示了热而稀薄的内部周围环绕着一层薄而致密的壳层，形态与超新星遗迹相似；它还引出了这样一个讨论：G. Taylor（1950b）如何根据火球的照片估算爆炸的能量。静止状态下的多方体展示了恒星内部压力与引力之间的平衡。在潮汐瓦解演示中，学生可以改变轨道深度，观察恒星被黑洞撕裂。风洞演示则展示了汽车形状物体后方的尾流，并报告其阻力；学生还可以将自己制作的三维模型放入其中。在每个演示中，学生都要先预测将会发生什么，再运行模拟。

对于物理学和天文学专业的学生，这些问题则变得可以进行定量分析。在激波管中，学生辨认稀疏波、接触间断和激波，使用查询工具检查跃迁条件，并通过编辑链接比较不同限制器。通过量纲分析，他们推导出谢多夫-泰勒半径随时间的增长规律为 $(Et^2/\rho)^{1/5}$，并将其拟合到一次运行结果中。他们测量瑞利-泰勒不稳定性和 Jeans 不稳定性的增长率，并与线性理论进行比较。他们还比较

[5] https://github.com/guillochon/shaderous/blob/main/docs/教学.md

多方体的密度分布与 Lane-Emden 解，并关闭良平衡重构，观察其影响。热不稳定性展示了冷却曲线如何决定星际介质的各个相态，以及热传导如何决定最小云的大小。学生还会测量圆柱体后方涡街的斯特劳哈尔数，追踪辐射从不透明气体中的扩散到自由流动的过程，并估算巨撞击会形成多大质量的月球。在一项较长的实验练习中，学生使用命令行运行器，在一次参数扫描中以四种分辨率运行一个答案已知的问题，根据其写出的切片计算相对于精确解的误差，测量收敛阶，并解释为什么激波以一阶收敛。验证页面以相同方式测量光滑平流的收敛阶，因此学生可以据此检验自己的方法。

对于研究生而言，这段代码是一个易于阅读的现代 Godunov 方法示例。它包含约 23,000 行 WGSL 代码和 61,000 行 TypeScript 代码，其中 11,000 行属于验证套件，而且每个物理模块都是一个小文件。练习包括：比较黎曼求解器在接触间断和 Gresho 涡旋上的表现；在网格对齐激波处关闭 HLL 混合，以找出碳化物问题；比较埃夫拉尔坍缩中引力能量源项的通量形式与 kick 形式；测量局部时间步何时能带来实际收益；以及比较第8.1节磁场环测试中的边电场。课程项目包括添加一个黎曼求解器或一个带有自身验证测试的测试问题、实现一个扩散隐式求解器、使用第13节的 CPU 参考实现研究单精度与双精度的差异，以及根据各流水线的计时结果开展性能研究。我们还会配合介绍 H. Trac 与 U.-L. Pen (2003)，并结合R.J. LeVeque (2002）和E. F.Toro(2009）的著作进行教学。

13. 验证

在浏览器中，读者可在自己的图形处理器上进行验证运行；也可在模拟器旁的页面上运行，或通过 Playwright 驱动的浏览器从命令行运行。参考对象是采用双精度的相同格式 CPU 实现，以及一个精确黎曼求解器（E. F. Toro 2009）。附录 A列出了 206 项测试、各自的通过判据以及测量值。磁流体力学测试以该格式的双精度浮点数版本作为参考。图1将流体动力学结果与精确解进行比较，并展示误差如何随分辨率提高而降低。图 5 展示了引力坍缩过程中的能量收支，以及自适应网格上势的精度。

每项测试都会检查一个我们预期可能出问题的地方。为了找出意料之外的故障，我们还运行了随机选取设置来运行代码：第11.1 节中的问题，包括使用随机网格、细化和求解器的设置，由随机部分组合而成的设置，以及从第11.2节的选项表中抽取的完整设置文档。脚本会标记出数值变为非有限值、页面报告误差或封闭箱体内质量发生变化的运行。在 Apple M4 Pro 和 NVIDIA RTX 3080 上测试了约 4,650 种此类设置，发现了验证套件遗漏的 20 个故障，其中大多数出现在测试从未组合过的功能或状态组合中。下面展示三个例子。白矮星物质的列表状态方程在热气体中返回了 NaN，但只发生在 Apple GPU 上，这是因为 Metal 编译器对四个温度相乘的运算重新排序，导致结果超出单精度范围。在均匀引力场中，冷气体穿过封闭箱体的壁面落出，因为仅有引力场并不能限制时间步长。采用局部时间步时，从静止状态释放的气体，其步长在两步之内缩短了 30 倍，变化速度快到一个周期无法跟上，因此现在每次运行都会以 16 个单步开始。该脚本位于代码仓库中，因此每次更改后都可以重复进行同样的搜索。

14. 性能

默认情况下，均匀网格不存储原始变量：每个网格单元加载时，都会根据守恒变量计算这些变量；如果转换开销很低，这样做比专门遍历一次并将它们写出更省成本。对于需要求解温度或读取表的状态方程，计算时间步长的遍历会将每个网格单元转换一次，并为预测器和更新步保留结果。在 A100 上，采用 Helmholtz 状态方程模拟白矮星时，每一步的速度提高了 3.0 至 3.1 倍；采用 ANEOS 模拟行星时，每一步的速度提高了 2.7 至 3.9 倍，而结果的差异仅在舍入误差范围内。在二维情况下，一次运行使用 $16\times16\times1$个工作组；与使用 $8\times8\times4$个工作组且有三层闲置层相比，通量更新的开销降低了一半以上。每帧的步数会根据图形处理器进行调整，不同浏览器中的结果在舍入误差范围内一致。在自适应网格上，覆盖一个块及其幽灵层的遍历（横向有 18 或 20 个网格单元）按每块 64 个线程的行来运行，因为$8\times8\times4$ 瓦片中约有一半线程在这种情况下处于闲置状态。在二维情况下，一个工作组的四层需要四个块。这两项改动使二维开尔文-亥姆霍兹问题的每一步速度提高了 2.8 倍，并使三维 Sedov 爆炸的每一步速度提高了 19%。脚本接口还可以通过时间戳查询报告每条流水线所需的图形处理器时间。图 13展示了独立 GPU（配备 12 GB 显存的 NVIDIA RTX 3080）在 Chrome 156 和 Firefox 160 中的吞吐量、Chrome 在集成 GPU（Apple M4

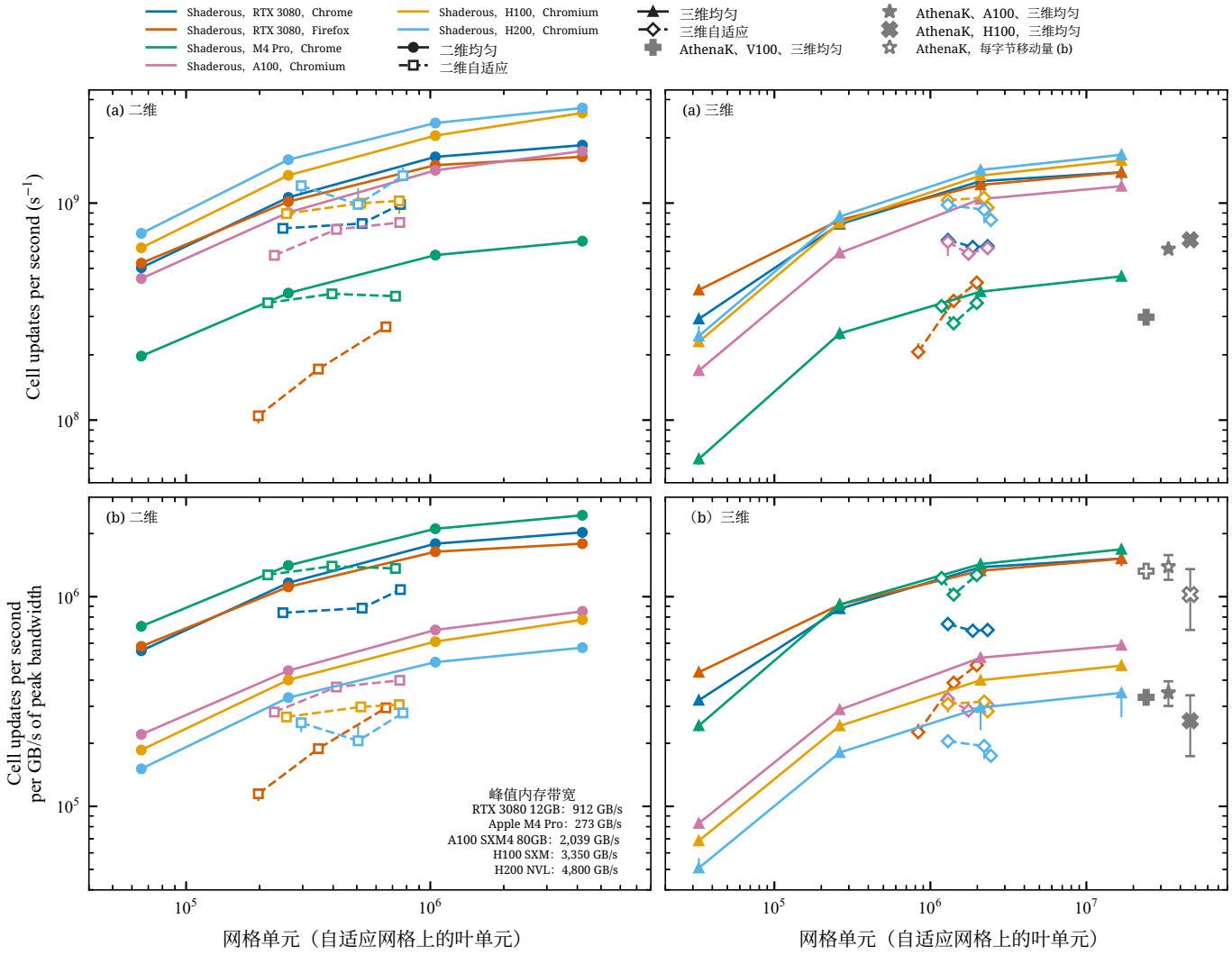


图 13. 在 Chrome 和 Firefox 中使用独立 GPU（NVIDIA RTX 3080，12 GB）的吞吐量、在 Chrome 中使用集成 GPU（Apple M4 Pro）的吞吐量，以及在 Playwright 的无头 Chromium 中使用三款数据中心 GPU（配备 80 GB 内存的 NVIDIA A100、H100 和 H200）的吞吐量。(a) 对于二维开尔文-亥姆霍兹不稳定性（左）和三维 Sedov 爆炸（右），网格单元更新次数与网格单元数量的关系；两种情况分别使用均匀网格和自适应网格（两到四个层级，关闭局部时间步）。在自适应网格上，每个叶单元在每个时间步都计为一次更新。每个数据点是三次运行的中位数，误差线涵盖全部三次结果。灰色数据点表示 AthenaK 在一块 V100、一块 A100 和一块 H100 上的流体动力学吞吐量（J. M. Stone 等，2026），网格为 3.4×10^7 网格单元（为便于辨读而将数据点错开绘制）。(b) 将相同吞吐量除以各设备数据手册所列的峰值内存带宽。由于未说明所用设备，AthenaK 的误差线涵盖 A100（40 GB 和 80 GB）及 H100（PCIe 至 NVL）的不同版本。Shaderous 以单精度运行，每个时间步执行一个阶段。未说明 AthenaK 在此基准测试中的精度和积分器。空心灰色标记表示其数值的四倍；若以双精度运行且每个时间步执行两个阶段，这一数值即为其每字节移动量吞吐量。

Pro，其与 CPU 共用 273 GB/s 的内存带宽），以及三种数据中心 GPU 上的吞吐量。我们通过脚本接口以正常优先级进行测量，测量期间 GPU 未执行其他任务；每个数据点均为三次运行的中位数。在 Chrome 中使用 RTX 3080 时，包含 2048^2 个网格单元的均匀网格每秒可完成 1.9×10^9 次网格单元更新，而包含 256^3 个网格单元的网格每秒可完成 1.4×10^9 次。在自适应网格上，叶单元的开销高于均匀网格中的网格单元，因为其虚单元是在加载时计算的，而且细化边界会被重新计算

计算细网格磁通量。在二维情况下，网格仍能达到每秒 7.7 到 9.9×10^8 次更新；在三维情况下，使用两到四个层级时为 6.3 到 6.8×10^8 次。M4 Pro 在 2048^2 个网格单元上每秒可更新 6.7×10^8 次，在 256^3，上为 4.6×10^8 次，在自适应网格上则为 2.8 到 3.8×10^8 次。对于最大的均匀网格，RTX 3080 上的 Firefox 与 Chrome 的性能差距在 12% 以内：在 2048^2 个网格单元上每秒更新 1.6×10^9 次，在 256^3 上为 1.4×10^9 次。在自适应网格上，Firefox 的速度慢 1.5 到 7 倍：二维下为 1.1 到 2.7×10^8，三维下为 2.1 到 4.3×10^8。一个计算步

在 Firefox 中，二维约需 2 毫秒，三维约需 4 毫秒，几乎不受网格大小影响；而在 Chrome 中分别为 0.3 到 0.8 毫秒和 1.9 到 3.7 毫秒。这表明 Firefox 的每个计算步都存在固定开销，其原因尚未查明。

数据中心 GPU 包括一台配备 80 GB 内存的 NVIDIA A100，以及计算集群中的一台 H100 和一台 H200，其内存带宽分别为 2039、3350 和 4800 GB s^{-1}，分别是 RTX 3080 的 2.2、3.7 和 5.3 倍。网页在 Playwright 提供的无头 Chromium 158 中运行，环境为 Linux 和 Vulkan，每个任务使用一块 GPU。在包含 2048^2 个网格单元的均匀网格上，三者的每秒更新次数分别为 1.7、2.6 和 2.7×10^9；在包含 256^3个网格单元的网格上，则分别为 1.2、1.6 和 1.7×10^9。其吞吐量为 RTX 3080 的 0.86 至 1.5 倍，而在这两种网格上，A100 的更新次数都少于 RTX 3080。在自适应网格上，A100 的每秒更新次数为 5。7 至 8.1×10^8，H100 和 H200 则为 8.4×10^8 至1.3×10^9。这些图形处理器的性能提升之所以如此有限，是因为这里的更新并非受内存流量限制。根据我们对读写字节数的估算，A100 每个更新步的数据传输量约为峰值带宽的八分之一。将通量更新中的纹理加载次数加倍，只会使更新步变慢 4%；而用 B. van Leer（1974）的限制器替代默认的重构，则会使其快 17%。因此，更新受算术运算限制，其中重构耗时最多。其成本主要源于设计：该设计会分别对网格单元的每个面进行限制，而斜率限制器对两者使用同一个斜率。完成这些测量后，我们修改了重构过程，使其在所有物理量都平滑时跳过限制器。这样一来，A100 上的更新步快了 7% 至 9%，结果仅在舍入误差范围内发生变化。

作为比较，AthenaK 是 Athena 的图形处理器版本 ++，采用 Kokkos 编写。J. M. Stone 等人(2026) 报告称，在一块 NVIDIA V100 上，每秒可完成 3.0×10^8 次流体动力学单元更新，6.1×10^8在一块 A100 上可完成 6.8×10^8 次，在一块 H100 上则可完成 $512 \times 256 \times 256$ 次。三项测量均使用均匀 256^3 网格。在同类型的图形处理器上，使用 256^3 个网格单元时，Shaderous 在 A100 上的更新次数是 AthenaK 的 2.0 倍，在 H100 上则为 2.3 倍。这主要归因于两点差异：Shaderous 使用单精度计算，每个网格单元的数据量减半；此外，每次更新只执行一个 MUSCL-Hancock 步，而两阶段龙格–库塔积分器的计算量是其两倍。J. M. Stone 等人 (2026) 未说明其基准测试所用的精度或积分器。AthenaK 默认以双精度构建，其代码仓库中的线性波输入每步执行两个阶段。[6] 如果基准测试是按这种方式运行的，那么 AthenaK 每次更新移动的数据量就是 Shaderous 的四倍，其每字节移动量的吞吐量对应图 13(b) 中的空心标记；图中每种吞吐量都除以数据手册所列设备的峰值内存带宽：V100 为 900 GB s^{-1}，40 GB 和 80 GB A100 分别为 1555 或 2039 GBs^{-1}，H100 则为 2000 至 3900 GB s^{-1}。在带宽与 V100 接近的 RTX 3080 上，使用 256^3网格时，Shaderous 每字节移动量的更新次数是 AthenaK 的 1.0 至 1.3 倍。在 A100 上，这一数值为 0.4 至 0.5 倍，因为它没有充分利用该图形处理器的带宽（见上文）。因此，这项比较表明，与原生 GPU 代码相比，使用浏览器给 Shaderous 带来的吞吐量损失很小，甚至没有损失。但这并不意味着其方案更快；采用单精度、每步执行一个阶段的原生代码很可能可以达到或超过它。

运行规模受图形处理器的内存限制，而非代码限制。在服务器上，内存预算通过命令行设定，三维自适应网格最多可容纳 35^3 块，每块包含 16^3 个带磁场的网格单元，以及 41^3 个带物种的网格单元。磁场的限制来自单个绑定可容纳的最大存储缓冲区，即 2 GiB，这也限定了其通量寄存器的大小。物种穿过各面的质量通量会占满一个最大为 4 GiB 的缓冲区，并以两个 2 GiB 的窗口进行绑定。没有磁场或物种时，网格规模仅受显卡内存限制，因为每次遍历这些块时，都会分成网格片进行调度，以确保工作组数量不超过单次调度可启动的上限。具有四个层级的磁化盘在 NVIDIA H200 上以 35^3 块运行，约有 1.75 亿个网格单元，使用 117 GB 内存，并在 10 秒内完成了 10 步。

15. 讨论

Shaderous 并不能完全替代生产级代码。它在单个图形处理器上运行，受浏览器分配的内存限制，因此决定一次运行规模的是单个设备，而非集群。它采用单精度运行。对于随代码提供的问题，这已经足够；但当均匀背景恰好处于二的幂时，舍入误差会产生偏差，而长时间积分会累积双精度本可避免的误差。其电阻率、黏性和热传导采用显式、各向同性且系数恒定的处理方式。其隐式压力步适用于缓慢流动。在较小网格上，以及二维情况下马赫数约高于 0.1 时，它的成本高于显式格式。

本节所述限制是当前代码已知的缺点，但列表并不完整。这些缺点不会妨碍获得准确且有用的结果。代码通过了第 13 节的验证套件，其潮汐瓦解（第 11.1 节）则展示了早期模拟的发现：

[6] https://github.com/IAS-Astrophysics/athenak

碎屑返回的速率在完全瓦解后接近 $t^{-5/3}$，而在核心存留下来时则更快，正如 J. Guillochon 和 E. Ramirez-Ruiz (2013) 所示。

辐射输运（第9节）本身也有局限。它采用灰体近似，并且自适应网格中的所有块共用一个时间步长。辐射输运仅适用于笛卡尔坐标系，不支持磁场、共动坐标或剪切盒，且除气体外不包含其他辐射源。参数扫描在时间上是一阶的，与流体力学步的分裂也同样是一阶的，但这两点都不影响我们的测试。对于光速五分之一处的超临界激波，将流体力学步长减半或加倍，或将参数扫描的步长减半，所得结果的差异都不超过 0.05%。因此，我们没有采用C.-C. He 等人（2024）提出的两阶段隐式-显式格式，因为这会使参数扫描的成本增加一倍。当光速被减小时，横跨网格移动的辐射结构（例如超临界激波的前驱区）会出现位置偏差（第9.1节）。辐射压力是一项源项，而良平衡重构（第4.4节）未将其纳入考虑，因此，主要由辐射支撑的恒星尚未达到离散平衡。

第 5 节至 第 6 节的设计选择源于 WebGPU 的限制，但并不依赖于它。在细化边界和时间分箱边界上汇集并重新计算通量，以额外的算术运算换取更少的存储空间和更低的内存流量，这适用于任何吞吐量受内存而非算术运算限制的处理器。在加载时计算虚单元，可以从每个自适应网格细化循环中移除一个同步步骤。磁流体力学求解器不进行汇集：它存储面通量和边缘电场，并在细化边界处保留通量寄存器。

燃烧网络是对参考网络的拟合。它涵盖 α-链中的 13 种同位素，以及其训练集中的密度和温度；在留出燃烧算例上，它与其双精度浮点数副本逐步匹配，误差达到 2%。对于整个爆轰过程，相对于参考网络的准确性仍有待测量。

由 ANEOS材料构成的物体是没有强度的流体，这种近似只有在数百千米以上才算合理。2024 年的水模型包含一种固体，其密度为 1.25 g cm^{-3}，而非冰 Ih 的密度，因此寒冷的冰质物体在表面附近的密度约高出三分之一。在物体表面，表中的压力从蒸气压力升至吉帕级，这一变化发生在表中容纳凝聚相边界的单个网格单元内；该网格单元的密度范围宽达 6%，因此物体最外层的网格单元比 ANEOS 模拟的更软。

15.1. 未来新增内容

我们希望增加几项功能。其一是根据恒星演化代码 MESA 的恒星剖面来初始化恒星（ B. Paxton 等人, 2011 年），将其密度、温度和组分映射到网格上，并使其达到代码自身的平衡状态。其二是在相同的 MUSCL-Hancock 格式中实现狭义相对论流体动力学，并通过与具有精确解的相对论激波管和爆炸波进行对比来测试。其三是在网格上与点质量并存的粒子：数量从数千到数百万不等，它们感受所在位置的场产生的引力，并通过泊松方程求解对气体产生引力作用，数量足以模拟旋涡星系中动态演化的恒星盘。我们还希望模拟恒星日冕中的磁通量绳喷发形成日冕物质抛射，并通过辐射输运计算激波突破和潮汐瓦解的光变曲线。我们还希望在共动坐标中，针对 T.Berlok(2022) 的精确解测试线性波，同时考虑压力和自引力。最后，我们计划将切割单元扩展到运动物体、自适应网格和气体。

16. 结论

Shaderous 是一款用于可压缩流体力学和磁流体力学（MHD）的代码，支持自引力、自适应网格细化、局部时间步、点质量、吸积汇、灰辐射输运、适用于近不可压缩流动的隐式压力、从简并电子到岩石和铁的表格式状态方程、冷却、黏性、热传导、电阻率、湍流驱动、气体混合物、核燃烧，以及固定或移动的固体及其所受的力。它完全以 WebGPU 计算着色器编写，可在网页中运行。其流体动力学求解器通过让每个网格单元基于相同状态、采用相同算术运算，重新计算所需通量（包括跨越细化边界和时间分箱边界的通量），在自适应网格上实现质量、动量和能量守恒，精度达到舍入误差范围内，且无需存储任何面通量。它将每一步都保留在图形处理器上，并在加载虚单元时进行计算。该代码以单精度运行，通过良平衡重构和稳定的初始状态，使静水平衡的恒星和大气保持平衡；同时通过补偿求和，使磁场的散度保持在舍入误差范围内。代码及其验证套件可在读者自己的图形处理器上运行，并可通过链接复现任何设置。脚本和人工智能智能体可以在桌面或 GPU 服务器上自动操控同一个网页；智能体还能将用文字描述的模拟转化为经过检查的设置并运行。凭借这些特性，它也可用于教学，从面向中小学生的演示到面向研究生的学期项目，

不一而足。

我们邀请教育工作者在课堂中试用 Shaderous。课堂只需要一个浏览器和一个链接，第12节的活动即可直接使用，课程还可以通过地址分享。我们希望通过代码仓库的问题跟踪器或电子邮件，了解哪些内容有效、哪些内容让学生感到困惑，以及哪些内容有所缺失，从而让代码的下一版本更好地服务于教学。

致谢

感谢 Robert Fisher、Anna Rosen 和 Dan D'Orazio 提供了有益的讨论，也感谢 J. Xavier Prochaska 提供通过 Claude团队使用下文所提及的所有 Claude模型的权限。本研究所需的高性能计算资源，以及用于运行最大规模数值模拟和数据中心硬件基准测试的数据中心 GPU，均由马萨诸塞大学达特茅斯分校与 Unity Research Computing Platform 的合作提供。该平台是一个由马萨诸塞大学和罗德岛大学牵头的多机构集群。

代码、验证套件、论文稿件源文件、参考文献目录，以及文中每个数字背后的注释均可在线获取。[7] 作者对本文及代码的内容承担全部责任。在作者监督下，我们使用了大语言模型（Claude Opus 5.5 和 Claude Fable 5.2）来编写和测试代码、检索文献、起草和编辑正文及在线文档，并测量文中引用的数据。文中的每个数字都可追溯至代码、代码仓库中记录的测量结果或引用的论文。每条参考文献均已通过 NASA天体物理学数据系统、Crossref 或 arXiv 核实，所有参考文献和 AI 编辑内容也都由作者人工检查。我们力求遵守 AAS指南中关于在稿件准备中使用生成式人工智能的规定。[8]这些指南并未将此类工具视为作者。准确性仍由署名作者负责。

软件： Shaderous（https://github.com/guillochon/shaderous）、TypeScript、Vite、Vitest、Playwright、h5wasm、Mediabunny、yt（M. J. Turk 等, 2011）、pynucastro（A. I. Smith 等, 2023）、PyTorch

附录

A. 验证测试

表1、2、3、4 和 5 列出了验证套件（第 13节）的测试，包括每项测试的通过标准，以及在 Chrome 156 中使用 NVIDIA RTX 3080 运行一次套件时测量的数值。该次运行的报告位于代码仓库中。其后添加的测试行（驱动、多个点质量、轨道预览、运动壁面、替换后的运行、近真空修正、场刷、电阻率、线固定壁面、状态方程和 ANEOS 测试）是在 Apple M4 Pro 上测量的，所依据的运行报告也位于仓库中。后续代码变更移动的测试行也是如此：第 7节的自引力、泽尔多维奇薄饼和隐式压力。表 6、7 和 8列出了第 10节参考系与坐标系的测试，数值是在 Apple M4 Pro 上于 Chrome 中运行一次套件时测量的。表 9、10 和 11 列出了弱可压缩液体和隐式压力（第 4.7节）以及辐射输运（第 9节）的测试，测量方式相同。表 12 列出了流体中的物体（第 4.8节）的测试，其他表中标记为 † 的行则是后来添加的测试。所有这些测试均是在之后的一次运行中、使用相同的构建版本，在 RTX 3080 上测量的。三个使用切割单元的快速风力涡轮机转子测试被省略了：它们测量的是在这些网格上尚不能自行驱动的转子，而且每项测试最长需要数小时。

[7] https://github.com/guillochon/shaderous[8] https://journals.aas.org/作者大语言模型指南

表1。 验证套件：均匀网格上的流体动力学、物种和燃烧。判据采用套件中编码的判据。L1误差是相对于平均密度、在各网格单元上的平均值。测量值的顺序与判据一致。

Test	通过标准	测量值
沿 x、 y、 z 的 Sod 激波管	L1 密度误差 < 0.01；各运行结果在坐标轴置换为 10^{-6} 时一致	0.0079；0
沿对角线的 Sod 激波管	L1 密度误差 < 0.015	0.011
强激波管（压力比 10^5）	没有设有下限的网格单元；相对L1密度误差 < 0.1 at 128 个网格单元	无；0.075
Sedov–泰勒爆炸波	平均激波半径与相似解答	1.6%
开尔文-亥姆霍兹	横向动能增长超过五倍 作者： $t = 1$	11 倍
低马赫数 HLLC	Gresho 涡旋损失的能量不到普通 HLLC 所损失能量的一半，且没有获得任何能量	损失 6%，相比之下为 15%
平衡柱	声波穿越后最大的马赫数 $< 10^{-3}$	3.7×10^{-5} 和 8.6×10^{-5}；普通格式 0.35
	均匀网格和块网格；至少比普通格式低 100 倍普通格式	
均匀平流，10 次穿越	质量和动量漂移 $< 2 \times 10^{-6}$	质量 2.4×10^{-7}，动量 3.2×10^{-7}
物种	分数在 $[0, 1]$ 内总和为 1，误差在 10^{-5} 以内；每个物种质量为 10^{-5}；光滑物种的精度与……相同作为被动标量	总和 2×10^{-7}；质量 5×10^{-7}；误差 2.5×10^{-4} 对照 3.5×10^{-4}
状态方程中的物种	静止状态下，氢中的氦保持静止状态，直到 10^{-5} 在四种状态方程下；传递过程中，压力平衡至 10^{-5} (理想气体) 或 0.05；空气中的氦， γ 取 5/3 和 1.4，至 0.01（氦含量加倍时为 0.05 hot)	静止状态 6×10^{-7}；携带 1.4×10^{-6} 或 0.013；空气中的氦 0.002
激波与氦气泡	氦质量至 10^{-5}；逐位相同的面；在自适应网格，超过95%的氦位于最精细层级	1.1×10^{-6}；没有面存在差异；99.3%
阿伦尼乌斯爆轰	前沿速率与Chapman-Jouguet速度相差不超过1%；燃料留下 $< 10^{-3}$	0.12% 缓慢； 6×10^{-6}
光滑平流	平均误差 $< 2 \times 10^{-4}$ 位于 256^2；二阶或更高	1.5×10^{-4}；二阶
通量确定性	三个流动中每个面上的质量通量均逐位相同	291,840 个面中有 0 个不同
反射箱中的爆炸	质量为 10^{-5}，总能量为 10^{-3}	质量 2.4×10^{-7}，能量 1.4×10^{-6}
二维网格	Sod L1 误差 < 0.003 在 256^2；逐位相同的通量	0.0021；没有面存在差异
瑞利-泰勒	静止状态下，马赫数 $< 10^{-3}$ 在 $t = 2$；扰动后，能量达到 10^{-3}	马赫数 1.2×10^{-6}；能量 1.4×10^{-7}

Tab第 2 部分。验证套件续篇：自适应网格、冷却、扩散、驱动和壁面 s.

Test	通过标准	测量值
未经细化的块网格	每个网格单元中的密度与均匀网格相差不超过 10^{-5}；相同的步数	0；相同
自适应 Sod 管	L1 误差 < 0.003 在不足 60% 的网格单元上；质量和能量为 10^{-6}	34% 时为 0.0022；质量 1.1×10^{-7}，能量 3×10^{-8}
自适应组分	对于物种，在重建网格后；一个光滑的物种位于 1.3×10^{-3} 被动标量之内	总和 4×10^{-8}；质量 1.3×10^{-6}；1.0×10^{-3}
状态方程中的自适应组分	静止状态至 10^{-5}；传输过程中，压力在 0.05 以内；各层级的面相匹配	0；0.007；面至 6×10^{-8}
自适应爆轰	随着爆轰的反应区整体处于最精细层级	0.12% 缓慢；在其中没有粗网格单元 zone
自适应 Sedov 爆炸	半径误差在 2% 以内；质量和能量达到 10^{-6}	1.6%；质量为 0，能量为 9×10^{-8}
自适应不稳定性	质量达到 10^{-6}，能量达到 10^{-5}，同时网格跟随流动	质量 1.6×10^{-7}、能量 2.4×10^{-7}
自适应泊松求解	无细化时球体势误差在 0.3% 以内，使用 2 层和 3 层时误差在 0.1% 以内；Jeans 速率误差在 5% 以内	0.15%、0.027% 和 0.053%；0.02%
自适应 Evrard 和多方体	反弹过程中能量误差在 2% 以内；中心密度在 10%	0.19%；0.8%
自适应潮汐瓦解	近心点在内侧 2% 至外侧 3% 之间；参考系中心位于恒星半径的 0.005 以内	0.4%；0.0007
局部时间步	Sod 和 Sedov 与使用单个时间步长时相同；质量和能量为 10^{-6}	Sod 为 0.0023，Sedov 为 1.6%；质量 1.1×10^{-7}，能量 7×10^{-8}
HDF5 导出和导入	重启状态等于 10^{-5}；继续运行的结果一致至 10^{-4}	0；6×10^{-7}
冷却	幂律衰减至 0.1%；热平衡至 1% 无过冲	0.001%；无过冲的平衡过冲
黏性	剪切波的能量按 $\exp(-2\nu k^2 t)$ 衰减至 1%，而在无滑移壁之间衰减至 3%；能量至 10^{-5}，在自适应网格上	0.3%；0.05%；3×10^{-8}
热传导	温度波以线性速率衰减至 1%；热不稳定性的云尺度变化了 $< 12\%$（分辨率加倍时）	0.27%；7.5%
湍流驱动	等温盒：均方根速度介于 0.7 和 1.6 之间，位于 $t = 3$，在 $t = 4$ 处与其相差不超过 30%；相同的随机种子会产生相同的运行结果，误差不超过 10^{-5}；另一个随机种子则会产生更大的误差，相差超过 1%；力保持不变时，未加密区块会跟随均匀网格达到 10^{-4}；场存在时二维，场增长	1.04 和 1.00；0 和 20%；1.0×10^{-7}；12%
运动壁面	雷诺数为 100 时的顶盖驱动方腔：中心线速度与 U. Ghia 等人（1982）的结果相差不超过 0.015；一个场由运动壁面沿其移动至其振幅的 1% 振幅，静止壁面与之逐位相同，通过运动壁面的通量为 10^{-6}；未加密区块沿均匀网格延伸至 10^{-4}	0.0065；0.25%，没有任何面不同，5×10^{-9}；1.0×10^{-5}

表3. 验证套件（续）：点质量、参考检验、状态方程和引力。标记为 † 的测试是在稍后使用同一图形处理器运行时测量的。

Test	通过标准	测量值
点质量与汇	气体加吸积质量保持恒定至 10^{-5}	1.6×10^{-7}
多个点质量	环上六个质量体及彼此重叠的吸积汇：气体加上吸积质量至 10^{-5}，每个质量体都进行吸积，对向质量体吸收相同的量，达到 1%，并保持相对 10^{-3} 盒子的范围内，二维和三维，均匀、自适应并采用每块时间步长	1.6×10^{-7}；全部进行吸积；0.04%；2.5×10^{-6}
轨道预览	读回为团块的气体使质量保持在 10^{-4}，并使质心保持在盒子的 10^{-3}；轻质量物体在四分之一个轨道内，其轨道位于盒子自身的 0.5% 范围内预览	9×10^{-6} 和 4×10^{-7}；0.23%
双星轨道	一个轨道周期内，间距变化在 0.5% 以内；两个质量体吸积	0.016%；两者均吸积
两个质量体的近距离遭遇	偏心率为 0.9 的轨道，历经两个轨道周期：平均步长在库朗数十六分之一的 10% 以内取 r/v 和 $\sqrt{r^3/GM}$ 中较小者的倍数；能量误差为 1%	为极限值的 0.79；0.67%
图形处理器与 CPU 参考实现对比	密度和能量与平均值相差 $< 10^{-4}$ 经过 20 步	密度 8×10^{-8}、能量 2×10^{-7}
燃烧网络	在 48 个与该双精度浮点数网络的 L1 距离在 2% 以内的留出状态上执行一步双精度浮点数网络	0.10%
状态方程†	往返至 10^{-5}；WGSL 与双精度浮点数镜像匹配至 10^{-4}，简并电子和氢包含电离；表格化电子和表格化氢和氦：往返至 5×10^{-5}，能量和声速至 5×10^{-4}。高温稀薄气体中也有表格化电子，2×10^{4} 至 10^{10} K 和 6×10^{-6} 至 2 g cm^{-3}。氢和氦从 10^{-18} 至 10^{-2} g cm^{-3}，温度为 20 至 10^{7} K，有辐射和无辐射条件下的太阳物质，以及纯氢	往返 5.4×10^{-6}；镜像 1.1×10^{-6}；列表中的电子 1.3×10^{-5} 和 4.6×10^{-4}；氢和氦 5.7×10^{-6} 和 3.3×10^{-5}
ANEOS材料	四种材料，以及质量分数为 0.1 至 0.9，从 10^{-4} 到 30 g cm^{-3} 以及 200 至 10^{5} K：WGSL 与双精度浮点数镜像相匹配，往返转换从压力转换为能量，再转换回 10^{-3}，能量以及声速转换为 10^{-2}（第 99 百分位数）	往返转换 1.1×10^{-4}，能量 8.7×10^{-5}，声速 6×10^{-5}（最差的材料或混合物）
均匀球体势	最大误差 $< 1\%$（孤立边界）	0.15%
Jeans 不稳定性	增长率与线性理论的偏差在 5% 以内	0.016%
多方体	10 个动力学时间内中心密度的变化不超过 10%	2.5%
冷白矮星	已稳定的 $0.6\,M_\odot$ 矮星：中心密度在以下时间内的变化不超过 5% 三个动力学时间；能量为 10^{-3}	3.3%；1.2×10^{-5}
埃夫拉尔坍缩	总能量达到 0.6%；热能峰值为 $0.9 < t < 1.3$	0.23%；峰值为 $t = 1.12$
潮汐瓦解	近心点误差在 2% 以内；恒星瓦解	0.14%；峰值密度降至 4%
静止行星	$1\,M_\oplus$ 行星具有 30% 的 Fe85Si15核，在橄榄岩下，尚未达到稳态；其半径方向有 16 个网格单元：中心密度在四个动力学时间内变化不超过 8%；质量在 $M_\oplus$ 以内，且守恒至 10^{-4}；能量达到 10^{-3}	中心密度 3.4%；质量 $0.996\,M_\oplus$，保持不变；能量 2.2×10^{-6}
成月撞击	两层级，最细网格为 8 个网格单元至 $R_\oplus$，接触后两小时接触：质量至 10^{-3}，能量至 1%；行星为 0.93 至 $1.01\,M_\oplus$，含 28% 至 32% 的铁；盘为 0.005 至 $0.08\,M_\oplus$，其中一半以上来自忒伊亚；低于 $0.02\,M_\oplus$ 逃逸	质量精确，能量 8.7×10^{-5}；行星 $0.98\,M_\oplus$，含铁 30%；盘 $0.035\,M_\oplus$（1.5 个月球质量），80% 来自忒伊亚；$1.2 \times 10^{-4}\,M_\oplus$ 转义

表4. 磁流体力学的验证测试。除测试对象为场或比较要求逐位相同的情况外，每项测试还要求 $\max|\nabla\cdot\mathbf{B}|\,\Delta x/\max|B|<10^{-6}$，且两个块共用的面上的值一致；测得的最大值为 2.8×10^{-7}。标记为 † 的测试是在 NVIDIA RTX 3080 上测得的。

Test	通过标准	测量值
Brio-Wu 激波管	复合波、慢激波和最小 v_y 范围 围绕 M. Brio &C. C. Wu (1988)；质量和能量至 10^{-6}；HLLD 和 HLLE 一致到 0.01	$x=-0.029$ 处的复合波， 0.146 处的慢激波，$v_y=-1.6$； 能量 1.8×10^{-7}；0.0017
Orszag-Tang 涡旋	质量和能量至 10^{-6}；磁能和峰值 压力在回归范围内	质量 2×10^{-7}，能量 9×10^{-8}； 0.0617 和 0.511
磁场环	经过一次交叉后，至少 90% 的磁能 能量保持不变，峰值在 10% 以内	93.3%；峰值偏高 8%
Alfv´en 波	$v_z<3\times10^{-5}$ 处的平均误差；二阶或 更好	2.0×10^{-5}；阶数 2.0
磁场中的爆炸，三维	质量为 10^{-6}，能量为 3×10^{-6}；沿.....方向拉长 沿场方向至少拉长 1.3 倍	质量为 2.4×10^{-7}，能量为 9×10^{-7}；2.0
以板为步进单位	状态和面与单个网格片逐位相同	没有任何值不同
图形处理器与 CPU 参考实现	密度、能量和面场与以下内容相差不超过 10^{-5} 20 步（Orszag-Tang）和 6 步（爆炸波）后的平均值	1.0×10^{-7}
场刷	每次笔刷操作后，散度低于 10^{-6} 。 Orszag-Tang：强度恰好为 1.5 倍的笔刷核心 倍，达到 10^{-4}；一次拉动使最大值 $\|B\|$ 增加 不到 30%，磁能偏差在 5% 以内。 跨越细化边界的拉动：不到 50%。一个 长距离参数扫描：最多为其扫过场的 3 倍。 总能量变化量由磁 能量变化至 1%	低于 2.7×10^{-7}。1.5 至 4×10^{-6}；10%、0.7%。无。2.6 倍。 6×10^{-5}
HDF5 重启	面场逐位恢复；继续运行结果一致，直至 10^{-5}	没有任何面不同； 3.6×10^{-6}
读取时运行被替换	读取期间释放运行时没有 WebGPU 错误 其诊断信息	两个网格上均无误差
近真空修正†	气体中的薄磁化盘 10^{-5} 步数为 128^3, 100， 均匀网格和区块：有限，低于 100， 散度低于 10^{-6}；网格片和数据块不改变 bit	最快为 5.4（块为 5.9，局部 时间步为 8.1）； 1.1×10^{-7}；无

表5。 磁流体力学的验证测试（续）：场中的自适应网格和其他物理过程。散度和共享面的要求与表4中的要求相同。标记为 † 的测试是在稍后使用同一图形处理器运行时测量的。

Test	通过标准	测量值
在较慢区块旁边	团块穿过 10^{-6} 气体，具有局部时间步的区块：在保存更新时进行校正；质量至 10^{-6}；数据块更改，无位变化	1887 个块，节省 30%；质量精确；无
未细化区块	能量等于均匀网格的能量，经过 40 合乐步数	0
细化网格	质量达到 3×10^{-6}，能量达到 10^{-4}；粗网格面的细网格平均值达到 10^{-6}；磁能在 1% 以内（转子）和均匀网格的 0.5%（爆炸波）	质量 9×10^{-8}，能量 2.5×10^{-5}； 1.0×10^{-7}；0.02%
分块叶节点	与一个数据块逐位相同	没有任何值不同
动网格	经过至少 20 次重建，质量达到 10^{-6}；磁场环保留其 94% 的能量	144 次重建，质量 4×10^{-7}；96.2%
每块时间步长	磁能与一个时间步长内的结果相差不超过 0.5%；从不更多块更新	0.013%；85% 到 100% 的更新
引力、点质量和冷却	磁化多方体和柱与无场一样静止；冷却衰减至 10^{-3}；吸积汇预算至 10^{-5}	恒星的中心密度为 0.1%；冷却 9×10^{-6}；吸积汇 7×10^{-8}
块上相同	同上，另采用每块时间步长	0.11%； 3×10^{-5}； 3×10^{-8}
恒星内部的场	偶极星：中心密度和磁能在两个动力学时间内误差不超过 5%	0.5% 和 2.3%
场中的物种	至于物种，在 $\beta_{\rm M} = 4$ 处的场中	总和 2×10^{-7}；质量 6×10^{-7}
设定气体的物种，位于块上†	氦中的碳团旁发生的磁化爆炸波：能量在 10^{-3} 范围内，且最大马赫数与均匀网格相差不超过 2%；马赫数则相差更多与使用示踪物种的同一次运行相比，差异超过 10%，因此读取每个网格单元的组分	$\leq 1.0 \times 10^{-4}$；0.088%；40%
场中的黏性与热传导	剪切波降至 1%；黏性阻尼的阿尔芬´波降至 2%；横跨场的温度波降至 1%	0.31%；0.03%；0.10%
电阻率	静止状态下的场波按 $\exp(-2\eta k^2 t)$ 衰减至 1%，能量至 10^{-6}，内能承受损失至 2%，在二维和三维中，均匀分布和按块分布；细化采用每块时间步长的网格可将质量守恒至 10^{-6} 并将能量守恒至 10^{-5}	0.08 至 0.61%； 4×10^{-7}；0.26%；质量 8×10^{-8}，能量 4×10^{-7}
线固定壁面	受应力的X点：每个壁面均逐位相同，质量和能量达到 10^{-6}，发生坍缩；无电流零点处于静止状态达到其磁能的 10^{-4} ；壁面之间的剪切流在无滑移壁之间以黏性速率衰减至 2%	没有任何面存在差异，能量 7×10^{-8}，峰值密度 3.5； 8×10^{-6}；0.002%
磁化潮汐瓦解	3%以内的场能积分误差；瓦解与流体力学模拟的结果相差不超过5%	0.26%；0.56%
磁化盘	质量误差在 3% 以内，动能误差在 5% 以内；Alfv´én 天花板保持不变；麦克斯韦应力从零开始增大	质量误差 0.6%，动能误差 0.6%；$\alpha_{\rm M}$ 从 3×10^{-13} 到 1.6×10^{-3}

表6. 旋转参考系和镜像对称的验证测试（第 10节），在 Apple M4 Pro 上测量，标记 † 的测试则在 NVIDIA RTX 3080 上进行。

Test	通过标准	测量值
零旋转	不旋转的参考系所产生的开尔文-亥姆霍兹运行结果与无参考系时的比特相同	没有数值不同
科里奥利力	均匀流转过 $-2\Omega t$，达到 10^{-4} rad；动能能量达到 10^{-5}；均匀网格和区块	2.7×10^{-7} rad； 5.6×10^{-7}
离心力平衡	受离心力约束的等温气体：马赫数 $<10^{-4}$，比普通格式低 100 倍	8.3×10^{-6}，与 0.023 相比
惯性参考系中的团块	四分之一转后，以其惯性轨迹为中心，移动半个网格单元	0.085 个网格单元
共转双星	经过两个轨道周期，间距达到 10^{-3}，且每个质量与其初始值的差异在 0.01 以内	6.9×10^{-11}； 5.9×10^{-6}
带有场的旋转参考系	与科里奥利测试相同，磁场沿$\mathbf{\Omega}$方向；磁能量为 10^{-6}	4.1×10^{-7} 弧度； 1.9×10^{-6}；0
随双星系统运动的参考系†	参考系的初始转速比轨道慢 10%：连心线在第二个轨道周期内位于 2°，并在 0.3° 处结束；参考系速率设为 0.5%；间距设为 2×10^{-3}；均匀网格和区块	1.6°, 0.20°；0.065%； 9.0×10^{-4}；区块相同
旋转多方体†	$n=1$ 在 $\Omega=0.4$ 下，四个动力学时间：中心密度在 2% 以内，轴比在 0.005 以内，致密气体慢于 0.01；不考虑自旋时达到稳定，十倍变化；均匀网格和区块	0.18%， 9.5×10^{-4}，0.0035；不考虑自旋时 0.15；块 0.20%， 1.1×10^{-3}
镜面通量	没有质量穿过对称平面；每个面的两个网格单元都一致	0；95,200 个面中有 0 个
八分体上的 Sedov 爆炸	八分体和二维象限与整个盒子在以下方面相符密度到 10^{-5}	2.6×10^{-6}； 1.7×10^{-6}
半网格和四分之一网格	矩形网格与整个盒子相匹配：密度到 10^{-5}，势到 10^{-4}，块的质量和能量	2.5×10^{-6}； 1.8×10^{-6}；0和 6×10^{-8}
八分体上的球体势	与解析势的差异在 1% 以内，且与 10^{-4} 的整个盒子	0.15%； 1.7×10^{-6}
八分体上的椭球	三轴椭球的势与整个盒子的差异在 10^{-4} 以内 box	2.0×10^{-6}
八分体上的多方体	中心密度在 3 个动力学时间内保持在 5% 以内，如整个盒子达到 1%	2.47%，相比之下为 2.46%
八分体上的埃夫拉尔坍缩	能量达到 0.6%，热峰位于 $0.9<t<1.3$；此外采用局部时间步的块	0.13%；块为 0.08%
八分体上的场	密度为 10^{-4}，磁能为 10^{-5}，占整个盒子的；磁场散度达到舍入误差	3.6×10^{-7}； 1.1×10^{-7}； 1.3×10^{-7}
八分体上的吸积汇	吸积质量等于整个盒子的质量，达到 10^{-5}	5.5×10^{-8}
镜像上的两颗恒星†	两个稳态多方体位于 $z=0$ 上方，紧贴整个盒子：质量达到 10^{-5}，峰值密度达到 10^{-4} 达到稳态时；密度达到 $t=0.05$，并且能量至 10^{-4}；块至 10^{-4} 和 10^{-3}	1.9×10^{-7}， 8.8×10^{-8}；7.4×10^{-6}， 3.6×10^{-7}；块 $\leq 9.0\times10^{-6}$

表7。 参考系和坐标的验证测试，续：共动坐标和剪切盒。测量值如表 6所示。稳态剪切流在 M4 Pro 上未通过其质量判据，在其他情况下均通过。

Test	通过标准	测量值
尺度因子	a 从 0.01 到 1，在单精度浮点数中与双精度浮点数的差异在 10^{-5} 以内	3.4×10^{-7}； 2.9×10^{-7}
膨胀阻力	仅物质以及使用 Λ 速度为 $1/a$ ，压力为 $a^{3-3\gamma}$ ，至 10^{-5}；均匀网格和区块	3.0×10^{-7}； 1.1×10^{-8}
展开时冷却	float64 积分的内能在 10^{-3} 以内	8.5×10^{-6}
气体和辐射膨胀	float64 积分的温度在 10^{-4} 以内	2.2×10^{-7}
膨胀时的声波	相位在 $\int kc_s/a\,dt$ 的 1% 以内，超过 25 rad；一种模式	0.07%；99.97%
线性增长	振幅增长， a 与 $a = 0.01$ 至 0.1 之间的差异在 1% 以内	0.8%
泽尔多维奇薄饼	在 $a = 0.05$ 时，密度和速度的差异在 2% 以内；在均匀网格上、运行时会细化的网格上，以及在由两个层级组成的固定网格上	0.59%，0.25%；0.66%，0.18%；0.67%，0.29%
膨胀时的金斯长度†	适当长度下的金斯下限、细化和诊断：盒子长度的波从 $a = 0.1$ 和 0.5 一同增长至 10^{-3}，且不低于下限；一个在要求每个金斯长度包含 16 个网格单元的位置，盒子会进行细化对于要求 4 个网格单元的位置则不会	两者的增长率均为 2.435，无一例外低于下限；按要求进行细化；每个未解析的网格单元均计入统计。
稳态剪切流	经过 10 个轨道后， 2×10^{-3} 内的速度、密度 10^{-3}，质量 10^{-6}	8.8×10^{-4}； 2.4×10^{-4}； 8.5×10^{-8}
团块穿过剪切边界	两个轨道内的质量和 x 动量至 10^{-6} ；$[0.9, 2.1]$ 中的密度	2.2×10^{-7}； 3.1×10^{-7}；0.97 至 2.07
剪切波	振幅与线性解的偏差在 3% 以内，持续八个时间单位至 $t = 4$；相位偏差为 0.05 弧度	0.33%； 2×10^{-5} 弧度
磁化剪切盒	两个轨道内场的净 b_z 和 b_x 至 10^{-6} ；磁场散度 $< 10^{-5}$	1.6×10^{-9}, 8×10^{-10}； 8.8×10^{-8}
磁旋不稳定性	通道模在 5% 以内以 0.75Ω 增长； Q_z 以内 2%；麦克斯韦应力为正	1.6%；0%； 3.8×10^{-6}
本轮运动	经过一个本轮运动后，踢回到 10^{-3}；本轮能量至 10^{-4}	5.4×10^{-5}； 5.2×10^{-5}

表 8。 轴对称（R、 z）和球形（r、 θ）运行的验证测试（第 10.5 节），在 Apple M4 Pro 上测得；标记为 † 的数据是在 NVIDIA RTX 3080 上测得。

Test	通过标准	测量值
（R、 z）中的静止气体	声波穿越后马赫数 $< 10^{-5}$	5.9×10^{-7}
旋转环	质量、能量、 z 动量和角动量在一次穿越过程中 10^{-5}	1.0×10^{-7} 至 1.1×10^{-7}
轴上的 Sedov 爆炸	沿 R 和 z 的半径与相似解的差异在 2% 以内	两者均为 1.5%
轴上的吸积汇	三维中同一吸积汇 5% 范围内的吸积解答	0.31%
块上的环和爆炸波	随着环和爆炸波经过重新网格化	$\leq 8.7 \times 10^{-7}$；1.5%
（R， z）中的球体势	与解析势相差不超过1%	0.073%
（R， z）中的埃夫拉尔坍缩	能量误差为0.1%，热峰位于 $0.9 < t < 1.3$	0.037%； $t = 1.125$
块上的球体势	在三个层级中，每个叶单元的误差均在 1% 以内	0.026%
块上的埃夫拉尔坍缩	与（R， z）中一样，块上启用了自引力	0.12%； $t = 1.125$
沿 $z = 0$† 镜像	上半部分与完整运行对比：爆炸密度至 10^{-5}；埃夫拉德势至 10^{-3}，密度 2×10^{-3} 以及能量 10^{-4} 在 $t = 0.75$；吸积汇至 10^{-4}；爆炸波位于块至 10^{-4}	3.8×10^{-6}； 7.0×10^{-6}， 8.7×10^{-4}， 4.6×10^{-5}； 3.1×10^{-10}； 6.0×10^{-8}
物种（R， z）†	由三种核素构成气体的点爆炸：每种物种质量为 10^{-5}，均匀碳为 10^{-4}，分数之和在 10^{-5}内；均匀网格和区块	6.3×10^{-8}； 4.6×10^{-7}； 2.0×10^{-7}；区块 $\leq 2.1 \times 10^{-7}$
Noh 内爆	冲击后密度与 64 相差不超过 5%；冲击前密度在 9 的 5%	62.2；9.01
轴上的邦迪吸积	吸积率与邦迪吸积率相差不超过 5%	3.5%
点质量周围的环面†	经过五个轨道后，峰值密度、质量和中心误差在 1% 以内	2.9×10^{-3}； 1.5×10^{-4}； 1.9×10^{-5}
位于（R， z）的场	磁场环：磁场散度 $< 10^{-5}$，质量和能量为 10^{-5}，能量保持在笛卡尔坐标系值的 1% 以内；场处于静止状态，马赫数 $< 10^{-5}$	2.9×10^{-7}； $\leq 2.3 \times 10^{-7}$；0.25%； 2.9×10^{-7}
引力作用下的柱	声波穿越后的马赫数 $< 10^{-4}$	8.6×10^{-5}
轴上的恒星	稳态多方体：中心密度在 3% 以内，质量 10^{-4}，至 $t = 2$；均匀网格和区块	1.3%； 1.7×10^{-5}；块相同
涡流到达轴	300 步数有限，均未设下限，质量至 10^{-5}；均匀和块	有限；0； 7.5×10^{-8}
静止气体位于（r， θ）中	$< 10^{-5}$中的马赫数、均匀和对数分布，位于 r	3.6×10^{-6}； 5.7×10^{-6}
跨越极点的团块	质量、能量和角动量在 10^{-5} 上交叉	$\leq 4.7 \times 10^{-7}$
原点处的 Sedov 爆炸	每条射线上的半径误差均在 1% 以内；下方的偏差为 θ 0.5%	0.74%； 1.3×10^{-7}
单极项中的多方体	经过 10 个动力学时间后，最内层密度的误差在 1% 以内	0.020%
穿过内球的邦迪吸积	每个壳层的流率与 Bondi 值相差不超过 2%	1.9%
块上的爆炸波和团块	64 条射线上的半径相差不超过 2%；团块至 10^{-5}；一个和两个时间箱	0.74%； $\leq 1.2 \times 10^{-6}$
块上的多方体	最内层密度在 1% 以内；一个和两个时间箱	0.053%；0.056%
物种（r， θ）†	作为（R， z）中的物种	4.6×10^{-6}； 6.5×10^{-6}； 1.9×10^{-7}；块 $\leq 1.9 \times 10^{-6}$
原点周围的旋涡	当涡流位于（R， z）时，延伸至两个极点	有限；0；0
第一核心的第二次坍缩	氢和氦， 128×128，中心起始于 2000 至 2200 K：中心温度与其相差不超过 1% 从初始密度的 2 倍到 10^4 倍的绝热线；第二核心的密度高于 5×10^{-4} g cm^{-3}，温度更高高于 1.5×10^4 K，位于 0.3 au 内部的激波后方；质量至 0.5%	绝热线 5.9×10^{-4}；核心 7.5×10^{-3} g cm^{-3}，温度最高 2.9×10^4 K，激波位于 0.089 au；质量 6.9×10^{-4}

表9。 弱可压缩液体和隐式压力的验证测试（第 4.7节），在 Apple M4 Pro 上测量。 $\mathcal{M}$ 表示马赫数。标记为隐式的测试使用隐式压力步。其他测试使用显式压力。标记为 † 的测试在 NVIDIA RTX 3080 上测量。

Test	通过标准	测量值
液体状态方程	相对于双精度浮点数，对于偏离 ρ_0 10^{-6} 至 0.1：压力为偏离量的 10^{-6} $\rho_0 c_0^2$ 倍，声速精确为 c_0，弹性能为 10^{-5}	压力 4.8×10^{-8}；声速精确；能量 2.6×10^{-7}
液体 Gresho 涡旋	马赫数0.1、0.03和0.01至 $t = 2$：动能保持不变如理想气体所示至0.002，未有增加；密度在 $2\mathcal{M}^2$ 内；将块作为均匀网格，以便 10^{-4}	保持在 0.990、0.975 和 0.940，因为理想气体；密度 $0.83\mathcal{M}^2$；块 2.7×10^{-7}
液体泰勒-格林涡旋	衰减率与 $4\nu k^2$ 相差不超过 1%，均匀网格和区块；密度在 $2\mathcal{M}^2$内	误差在 0.05% 以内，均匀网格和区块；密度误差为 0.0023
液体顶盖驱动方腔	雷诺数 $100, 128^2$：中心线速度误差在 0.015 以内 U. Ghia 等人 (1982); 密度误差在 5%	0.0045；密度 3.6%
块上的液体涡旋	穿过 Gresho 涡旋的三个层级，达到 $t = 0.5$：质量达到 2×10^{-6}，动量达到 10^{-6}，动能保持在 99% 以上，未增加	质量 1.2×10^{-7}，动量 5.9×10^{-8}；保留 99.9%
压力多重网格	带有障碍物的制造解，系数按 3 变化，并且每种盒面：在 10^{-4}以内且残差在八个迭代周期内低于 10^{-4}；二维和三维	误差 1.9×10^{-5}，残差 3.1×10^{-5}
Gresho 涡旋，隐式	马赫数0.1、0.01 和 0.001 时，步数相差不超过 2%，对应 $t = 2$：不足显式格式的十分之一；动能至少达到显式格式的水平，相差不超过 0.002；密度在 $2\mathcal{M}^2$ 以内；质量为 2×10^{-6}，动量为 10^{-6}；超过容差的求解次数不足 2%	每个马赫数下进行 212 步对比 3410；保持 0.993 的对比 0.990；密度 $0.83\mathcal{M}^2$；质量 1.2×10^{-7}；动量 4.7×10^{-8}；没有任何值超过容差
二维和三维	二维中的涡旋和三维中的柱：动能相似，10^{-4} 步数相同；沿 z运动低于流动的 10^{-6}	相似，26 步后为 0.986；2.8×10^{-7}
泰勒-格林涡旋，隐式	衰减率与 $4\nu k^2$相差不超过 1%，最多只需其五分之一的显式格式的步数	误差在 0.05% 以内，与 237 步相比 1840
顶盖驱动方腔，隐式	如同液体方腔；质量为 2×10^{-6}	0.0047；质量 3.6×10^{-7}
圆柱尾流	雷诺数 $100, 256^2$, 入口和开放边界面，至 $t = 20$：有限，密度误差在 5% 以内，未设下限；脱落周期与显式格式的 1.43 相差不超过 10%	密度误差 0.8%，未设下限；周期 1.43
场中的液柱	梯形平衡中：马赫数 $< 10^{-5}$ 在经历 60 次声波穿越后；初始状态均匀：马赫数 $< 10^{-3}$ 至 $t = 20$，对比度与平衡状态相差不超过 2%；质量至 2×10^{-6}	1.0×10^{-6}； 6.5×10^{-5}，对比度与平衡状态相同；质量 6.2×10^{-8}
声波，隐式	声学库朗数 0.5：经过一个周期后回到波长的 0.5%，振幅介于 97% 和 100% 之间；库朗数 10：振幅低于 20%，绝不会高于起始值	偏移 0.18%，振幅 98.4%（后向欧拉法 86%）；12.5%
未细化区块	均匀网格的动能为 10^{-3}，步数与一个相同；质量为 2×10^{-6}	与 10^{-3}相同，每个有 107 步；质量 1.2×10^{-7}
块上的 Gresho 涡旋	三个层级、马赫数0.1、0.01和0.001至 $t = 1$：步数相差不超过2%，不到显式格式的十分之一；动能保持在99.8%以上，未增加；密度、质量和动量与均匀网格上的一致；残差低于 3×10^{-3}	273或274步；保留99.9%；密度 $0.83\mathcal{M}^2$，质量 2.4×10^{-7}，动量 4.4×10^{-8}；残差 1.1×10^{-3}
重新网格化	运行期间合并的细网格块：密度在 $2\mathcal{M}^2$；质量至 2×10^{-6}；动能高于 99%，没有获得任何结果	三个层级合为一个；密度 $0.78\mathcal{M}^2$；质量 2.4×10^{-7}；99.9% kept
三维中具有黏性的块	Gresho 柱至 $t = 0.25$：质量至 2×10^{-6}，运动沿 z 低于 10^{-5}，动能高于 98%；块上的泰勒-格林衰减率在 1% 以内	质量精确， 5.1×10^{-7}，99.2% 保持不变；衰减率在 0.05% 以内
速度细化	双剪切层通过速度细化为三个层级，起始时由速度单独细化至 $t = 0.3$；质量细化至 2×10^{-6}；密度在 5% 以内	始终采用三个层级；质量精确；密度为 0.5%
决定气体的物种，隐式†	马赫数为 0.05 的氦中碳团：压力均匀至 0.03；分数之和在 10^{-5}以内为 1；质量体至 10^{-6}；均匀网格和区块	0.014（显式 0.017）； 1.9×10^{-7}；1.1×10^{-8}；块 0.0079

表10. 隐式压力的验证测试（续）：理想气体、沿场的细化边界、物种、恒星和点质量。测量值与表9中的一致，且测试标记为 † 在 NVIDIA RTX 3080 上运行。

Test	通过标准	测量值
气体 Gresho 涡旋，隐式	马赫数0.1和0.01：步数相差不超过2%，且不到显式格式的十分之一；动能至少达到显式格式小于 0.002；密度在 2×10^{-3} 以内；质量和能量达到 2×10^{-6}。马赫数 0.001：动能能量高于 95%，密度在 5% 以内	219 步，相比 3420；0.992 相比 0.990；密度 3.2×10^{-4}；质量 6×10^{-8}，能量 8×10^{-8}。马赫数0.001：98.5%，密度 1.4%
块上的气体 Gresho 涡旋	三个层级，马赫数0.1 和 0.01，至 $t = 1$：动能能量高于 99.5%；密度在 5×10^{-3} 以内；质量且能量达到 2×10^{-6}；运行初期残差低于 10^{-4} 运行	保留了 99.9%；密度 3.3×10^{-3}；质量 6×10^{-8}，能量 4.6×10^{-8}；残差 2.8×10^{-5}
Sod 激波管，隐式	激波位于一个网格单元内；质量和能量至 10^{-6}；步数不到显式格式的 0.4 倍；L1 密度误差低于 0.012，Courant 数减半时为 0.009 数	0.59 个网格单元；质量和能量低于 10^{-7}；0.34 步；0.0097 且为 0.0078（显式为 0.004）
块上的 Sod 激波管	跟随波的两个层级：质量和能量达到 10^{-6}；步数在均匀网格的 10% 范围内；L1 密度误差低于 0.008；每次求解均在容差范围内	质量精确，能量为 7×10^{-8}；73 步，相比 75；0.0061；全部在容差范围内
运动气体中的热点	均匀网格和区块至 $t = 0.1$：无网格单元设下限；密度在 30 的 6 倍范围内；第一步中气体移动的距离较小于 0.6 个网格单元；质量至 10^{-6}	无网格单元设下限；8.6 至 58；0.50 个网格单元；质量精确
跨层级的液柱	贯穿场的细化边界：马赫数 $< 10^{-3}$ 位于 $t = 2$；质量为 2×10^{-6}	2.5×10^{-6}；质量精确
沿场分布的边界	液体的马赫数低于 10^{-4}，并带有一个细化区域；对于等温气体，低于 10^{-4}、5×10^{-4}，以及 2×10^{-3}，场中有一条边界、一条条带以及一个区域；能量达到 10^{-6}	8.3×10^{-6}；3.1×10^{-6}，4.8×10^{-5} 和 7.5×10^{-4}；能量 1.0×10^{-7}
物种，隐式	液体涡旋和气体凸起，以及液体开启块：分数之和在 10^{-5} 内为 1；均匀物种至 10^{-4}；每个物种的质量至 10^{-6}	总和 1.9×10^{-7}；均匀 5.8×10^{-7}；质量 9.6×10^{-8}，开启块 3.3×10^{-7}
带隐式压力的辐射†	表 11；马赫数 0.08 处的受困脉冲沿着路径到达盒子宽度的 0.005 处，宽度为 7%；块 0.004, 5%	1.9×10^{-7}；7.4×10^{-4}，5.5%；块 5.5×10^{-4}，1.2%
场中的气体柱	密度每隔 e 个网格单元递减，分别为每 16 个和每 4 个网格单元：马赫数 $< 10^{-3}$ 经过一次声波穿越后；能量变为 10^{-5}	1.6×10^{-6} 和 3.0×10^{-6}；能量 9.4×10^{-8}
多方体，隐式	64^3,两个动力学时间：中心密度误差在 2% 以内，质量误差 0.5%，能量误差 2%，所用步数不到显式格式步数的五分之一	中心密度误差 0.3%（显式误差 2%）；质量误差 0.24%，能量误差 0.80%；29 步，对比 436 步
近真空中的恒星	周围环境为中心密度的 10^{-7}，一动力学时间：没有网格单元超过最热点的 1.5 倍开始时没有设下限，中心密度在 5% 以内	最热点保持不变；没有设下限；中心密度 0.5%
运动恒星	以其中心声速的 0.3 倍运行：中心密度 2%，动量 1%，能量 1%；在两个层级上，中心密度 2%，动量 4%	中心密度 0.5%，动量 0.2%，能量 0.34%；分为两个层级 0.5% 和 1%
块上的多方体	恒星的层级比周围环境细一层：与上面的多方体一样，所有区域均为两个层级	中心密度 0.5%；质量 0.23%，能量 0.56%；62 步与 737 相比
点质量，隐式	质量周围的大气：马赫数 $< 2 \times 10^{-3}$ and at 最多为显式格式的加一成，不到其五分之一的步数，能量至 10^{-5}；在块上马赫数 $< 10^{-2}$。两个运动质量：气体动量和交换中质量至 10^{-4}；速度误差在 4% 以内显式格式在默认库朗数下的误差，以及在其八分之一时的 1% 误差；在均匀网格和块上	马赫数 1.2×10^{-3} 对比 1.3×10^{-3}，40 步与 380 步相比，能量 3.3×10^{-6}；块 4.7×10^{-3}。移动：3.6×10^{-7}；2.8% 和 0.47%，块为 0.37%（后向欧拉法为 7.9%、1.0% 和 1.3%）
块上的圆柱尾流	三个层级，圆柱体横向网格单元数为 32，达到 $t = 16$：有限，密度误差在 5% 以内；周期偏差在 1.43 的 10% 以内	密度误差 0.8%；周期 1.40

表 11。 辐射输运的验证测试（第 9节），在 Apple M4 Pro 上测量。前 12 项在均匀网格上运行，最后 5 项在自适应网格上运行。Marshak 波中的时间以吸收时间 $1/(c\kappa_{\mathrm{P}}\rho)$ 为单位。标记为 † 的测试是在 NVIDIA RTX 3080 上测量的。

Test	通过标准	测量值
关闭辐射	关闭时，不进行辐射遍历，状态方程保留其辐射；打开时，E_{r} 携带辐射，将其从压力至 10^{-5}	无遍历；拆分 2.8×10^{-8}
封闭箱体中的平衡	使用 $\xi=1$，温度至根的 10^{-4} $e(T)+a_{\mathrm{r}}T^4=e_0+E_{\mathrm{r},\,0}$ 以及能量至 10^{-5}；$\hat{c}=c/10$ 各处的误差均超过 5%；每网格单元 ξ 中不透明气体至 10^{-4}	1.9×10^{-7}，能量 5.2×10^{-8}；相差 26%； 5.0×10^{-8}
单精度下的平衡	在 $\tau_{\mathrm{c}}=10^{10}$ 上进行 10^4 次扫描， $E_{\mathrm{r}}/a_{\mathrm{r}}T^4$ 在 10^{-5}内为 1；静止状态下能量为 10^{-6}，运动气体中能量为 10^{-4}	7.7×10^{-7}；能量 3×10^{-14} at 静止状态， 4.0×10^{-5} 移动
流动脉冲	一个脉冲以$\hat{c}$的速度移动至 $\lvert\mathbf{f}\rvert=1$，并在 c 时达到$\hat{c}=c$，降至 2%；能量降至 10^{-5}； $\lvert\mathbf{f}\rvert>0.95$ 达到峰值	两者均降至 0.5%；能量 7.5×10^{-8}；$\lvert\mathbf{f}\rvert=1.00$
扩散脉冲	方差增长至 $2Dt$、 $D=c/(3\kappa_{\mathrm{R}}\rho)$，达到 10%，位于 $\tau_{\mathrm{c}}=1$、100 和 10^4	$2Dt$ 的 1.01、1.00 和 1.00
不透明圆盘的阴影†	在光学深度约为 1000 的散射圆盘后方，E_{r} 在其旁边的 10% 以下，光束保持 $E_{\mathrm{r}}>0.85$ 和 $\lvert\mathbf{f}\rvert>0.9$	3.4%；其旁边为 0.92 和 0.93
俘获辐射随流输运	$10^{-2}c$ 处的气体，光学深度为 $10^6,\hat{c}=c/100$ 的盒子：质心位于气体路径盒子 1% 以内，宽度达到 10%	质心位于路径上；宽度为 3.4%
Marshak 波	E_{r} 和 $a_{\mathrm{r}}T^4$ 与双精度浮点数参考值的匹配度达到 2×10^{-3} 在时间 1、3.16 和 10 时的入射能量，并且非平衡扩散解降至 0.03，位于此处 最后两个	1.6×10^{-3}；0.0064 和 0.023
部分由辐射支撑的恒星	64^3 八分体。静止状态持续一个动力学时间：中心密度达到 10%，均方根速率和最大速率低于两倍恒星在其状态方程中包含辐射时的状态下，能量相差 3%。马赫数10时：中心密度与该恒星的相差在 2% 以内，均方根速度不到其 1.5 倍，能量相差 1%	静止状态下：8%；分别为 1.4 倍和 1.3 倍；相差 1.4%。马赫数10时：1.1%、1.0 时间，0.1%
辐射激波	与辐射作用下的跃变相比。亚临界时 $\hat{c}=c/5$：密度、温度和激波位置至 1%，出现温度尖峰，预热低于5%。超临界：在 c至1%时，前方气体受热超过三倍；在 $c/5$ 和 $c/2.5$ 处，误差降至 5% 和 2% 随着$\hat{c}$增大而下降	亚临界时为 0.4%；超临界时为 c 0.4%，前方气体为 6.3 倍 温度更高；为 4.3% 和 1.4%
不透明壳层中的热核心	光度在 30 步数内稳定在 2% 以内，并达到由计出的能量确定为 0.1%；在 $\hat{c}=c/20$ 和 $c/10$	稳定至 3×10^{-4}；计数光度相等于 0.1%；约化速率在 0.3% 以内
重启	辐射逐位从快照中恢复；十步后 E_{r} 以及气体能量变为 10^{-5}	逐位一致； 9.5×10^{-7} 以及 3.7×10^{-7}
跨层级扩散	粗网格块与细网格块之间的面上的脉冲：能量从 10^{-4} 变为 10^{-5} 以内的均匀网格的变化；质心为盒子的 2×10^{-3}，宽度为精细均匀网格的 2%	1.3×10^{-5}, 在 7×10^{-7} 以内均匀网格的；质心也一样，宽度为 0.4%
块上的俘获辐射	如上所述进行平流，至少经过两次重新网格化：质心到盒子的 2×10^{-3}，宽度为 5%，$E+E_{\mathrm{r}}/\xi$ 到 10^{-5}	路径上的质心，宽度 2.1%， 1.7×10^{-6}；重新网格化四次
块上的热核心	仅细化壳层：光度与细网格均匀网格的光度相差不超过 1%，经过 20 步数后稳定在 1% 以内，按已统计的能量计算，精度达到 0.1%	相差不超过 0.2%；稳定在 3×10^{-5}；等于 0.1%
块上的恒星	三个层级。静止状态下：中心密度误差为 5%，均方根速度误差低于 3%，最大值低于中心值的 10% 声速，能量误差为 2%。马赫数10时，如均匀网格上所示均匀网格	静止状态下：2%；1.1% 和 2.9%；0.6%。在马赫数10下：0.1%，0.94 次，0.1%
对块进行重启	完全相同的网格和辐射；十步稍后 E_{r} 至 10^{-5}	逐位一致； 2.4×10^{-7}

表12。 流体中的物体的验证测试（第 4.8节），在 NVIDIA RTX 3080 上测量。 C_d 和 C_l 分别为阻力系数和升力系数，Re 为雷诺数。液体以马赫数0.1运行。正如正文所述，将运动物体与静止状态下的物体进行比较未通过。标记为 † 的测试是在之后的一次运行中测量的。

Test	通过标准	测量值
力平衡	周期性盒子中的圆柱体：气体动量变化为其所受力的冲量的负值 10^{-4} ；液体和气体，显式和隐式，均匀网格和区块	2.4×10^{-7} 到 7.1×10^{-6} 在八次运行
运动物体上的力	静止液体中滑动的圆柱体：相同，动量在其网格单元所在处传递更改类型，设为 10^{-3}；显式和隐式压力	1.5×10^{-7}； 1.9×10^{-7}
活塞	网格片以 0.085 马赫数在封闭箱体中的气体中滑动：质量达到 10^{-6}；前方压力与绝热线的偏差在 5% 以内；获得的能量与所做的功相差不超过 5%	精确；1.443 对比 1.456；0.18745 对比 0.18751
运动物体迎着气流†	一个横向16个网格单元的圆柱体在静止液体中运动，相当于液体在物体静止时流过它，雷诺数100：平均阻力相差不超过5%	失败：静止状态下为 C_d 1.32、2.46 运动状态下为 1.32，隐式计算为 2.12
由网格生成的球体	由 5120 个三角形构成的二十面体球，与内置球体相比固体单元和阻力均相差 3%，横向网格单元数为 8 和 16 横向网格单元数	相同的网格单元，以及相同的对钻头的阻力
桨在其自身参考系中	显式和隐式压力产生的绕轴扭矩均达到 5%，且不为零	-4.09和 -4.01 (2.0%)
块上的薄板	比最粗网格单元还薄的板：从其形状和整体质量，在 10^{-6} 的每一侧，之前以及之后网格再次合并和细化	整体； 1.3×10^{-8}；再次整体（未细化，3.4% 穿过）
块上的涡轮机	风力涡轮机预设中最精细层级的每片叶片逐网格单元呈现形状，在开始时和 100 步	三片叶片完全一致
隧道中的圆柱体	雷诺数100，3%的阻塞率： C_d 根据16和32个横向网格单元数外推得出，范围为1.30至1.45；在32个网格单元时，斯特劳哈尔数范围为0.160至0.178，且升力振幅范围为0.25至0.50	1.528和1.453，外推得出 1.378；0.170；0.43
隧道中的球体	雷诺数100，两个块层级上横向网格单元数为16： C_d 介于0.95至1.35之间	1.253
静止状态下的切割单元	截断圆柱和球体周围的液体：经过50步后，速率低于 10^{-5}，质量为 10^{-6}，力低于 10^{-6}	3.5×10^{-8}；精确； 3.2×10^{-11}
使用切割单元的力平衡	由于力平衡，物体被切割成网格单元，至 10^{-4}；二维和三维	2.8×10^{-7}； 4.0×10^{-6}
截断圆柱与双精度浮点数	雷诺数100，横向网格单元数16： C_d 与双精度浮点数结果相差不超过5%	1.204（阶梯状网格为1.300）
翼型	原型的1.220 5°处的NACA 0012，雷诺数1000，弦长方向网格单元数为16、32和64 弦长方向：64个网格单元时， C_l 与0.24相差不超过0.05， C_d 0.02	C_l 0.273、0.319、0.246（阶梯状 0.164、0.183、0.234）； C_d 0.125、0.118、0.130
雷诺数为 40 的圆柱体	为 0.133（双精度浮点数原型） 稳态尾流，横向网格单元数为 8、16 和 32： C_d 带有切口 横向网格单元数为16时与32时的结果相差在3%以内	1.689、1.768、1.757（阶梯状 1.835、1.772、1.753）
雷诺数100下的球体	均匀网格，横向网格单元数为8和16： C_d 含切割单元 横向网格单元数为16时介于0.95和1.25之间	0.985, 1.073（阶梯状 1.210, 1.139）

参考文献

Abgrall, R. 1996,《计算物理学杂志》, 125, 150, doi: 10.1006/jcph.1996.0085 Artymowicz, P., & Lubow, S. H. 1994,《天体物理学杂志》, 421, 651, doi: 10.1086/173679 Baggaley, A. W. 2026, arXiv 预印本, arXiv:2611.04060, doi: 10.48550/arXiv.2611.04060 Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1991,《天体物理学杂志》, 376, 214, doi: 10.1086/170270 Balsara, D. S., & Spicer, D. S. 1999,《计算物理学杂志》, 149, 270, doi: 10.1006/jcph.1998.6153 Bate, M. R., Bonnell, I. A., & Price, N. M. 1995,《皇家天文学会月刊》, 277, 362, doi: 10.1093/mnras/277.2.362 Bell, J. B., Colella, P., & Glaz, H. M. 1989,《计算物理学杂志》, 85, 257, doi: 10.1016/0021-9991(89)90151-4 Benˊ ıtez-Llambay, P., & Masset, F. S. 2016,《天体物理学杂志增刊》, 223, 11, doi: 10.3847/0067-0049/223/1/11 Berger, M., & Giuliani, A. 2021,《计算物理学杂志》, 428, 109820, doi: 10.1016/j.jcp.2020.109820 Berger, M. J., & Colella, P. 1989,《计算物理学杂志》, 82, 64, doi: 10.1016/0021-9991(89)90035-1 Berger, M. J., & Oliger, J. 1984,《计算物理学杂志》, 53, 484, doi: 10.1016/0021-9991(84)90073-1 Berlok, T. 2022,《皇家天文学会月刊》, 515, 3492, doi: 10.1093/mnras/stac1882 Bolz, J., Farmer, I., Grinspun, E., & Schr¨oder, P. 2003, ACM 图形学汇刊, 22, 917, doi: 10.1145/882262.882364 Brandt, A. 1977,计算数学, 31, 333, doi: 10.1090/S0025-5718-1977-0431719-X Brio, M., & Wu, C. C. 1988,《计算物理学杂志》, 75, 400, doi: 10.1016/0021-9991(88)90120-9 Bryan, G. L., Norman, M. L., Stone, J. M., Cen, R., & Ostriker, J. P. 1995,《计算物理学通讯》, 89, 149, doi: 10.1016/0010-4655(94)00191-4 Canup, R. M. 2004,《伊卡洛斯》, 168, 433, doi: 10.1016/j.icarus.2003.09.028 Chandrasekhar, S. 1935,《皇家天文学会月刊》, 95, 207, doi: 10.1093/mnras/95.3.207 Colella, P., Majda, A., & Roytburd, V. 1986,SIAM 科学与统计计算杂志, 7, 1059, doi: 10.1137/0907073 Cyburt, R. H., Amthor, A. M., Ferguson, R., et al. 2010,《天体物理学杂志增刊》, 189, 240, doi: 10.1088/0067-0049/189/1/240 Davis, S. F. 1988,SIAM 科学与统计计算杂志, 9, 445, doi: 10.1137/0909030 de Val-Borro, M., Edgar, R. G., Artymowicz,P.,et al. 2006,《皇家天文学会月刊》, 370, 529, doi: 10.1111/j.1365-2966.2006.10488.x Dziewonski, A. M., & Anderson, D. L. 1981, 《地球与行星内部物理学》, 25, 297, doi: 10.1016/0031-9201(81)90046-7 Eggleton, P. P. 1983, 《天体物理学杂志》, 268, 368, doi: 10.1086/160960 Emery, A. F. 1968, 《计算物理学杂志》, 2, 306, doi: 10.1016/0021-9991(68)90060-0 Eswaran, V., & Pope, S.B. 1988, 《计算机与流体》, 16, 257, doi: 10.1016/0045-7930(88)90013-8 Evans, C. R., & Hawley,J. F. 1988, 《天体物理学杂志》, 332, 659, doi: 10.1086/166684 Evrard, A. E. 1988, 《皇家天文学会月刊》, 235, 911, doi: 10.1093/mnras/235.3.911 Farris, B. D., Duffell, P., MacFadyen, A.I., & Haiman, Z. 2014, 《天体物理学杂志》, 783, 134, doi: 10.1088/0004-637X/783/2/134 Federrath, C., Banerjee, R., Clark, P. C., & Klessen, R. S. 2010a, 《天体物理学杂志》, 713, 269, doi: 10.1088/0004-637X/713/1/269 Federrath, C., Roman-Duval, J.,Klessen, R.S., Schmidt, W., & Mac Low, M.M. 2010b, 《天文学与天体物理学》, 512, A81, doi: 10.1051/0004-6361/200912437 Fickett, W., & Davis, W. C. 1979, 爆轰（伯克利：加利福尼亚大学出版社） Fickett, W., & Wood, W. W. 1966, 《流体物理学》, 9, 903, doi: 10.1063/1.1761791 Field, G. B. 1965, 《天体物理学杂志》, 142, 531, doi: 10.1086/148317 Fink, M., R¨opke, F. K., Hillebrandt, W., et al. 2010, 《天文学与天体物理学》, 514, A53, doi: 10.1051/0004-6361/200913892 Finn, J. M., & Kaw,P. K. 1977, 《流体物理学》, 20, 72, doi: 10.1063/1.861709 Fleischmann, N.,Adami, S., Hu, X. Y., & Adams, N. A. 2020, 《计算物理学杂志》, 401, 109004, doi: 10.1016/j.jcp.2019.109004 Fritsch, F. N., & Carlson, R. E. 1980, 《SIAM科学计算杂志》, 17, 238, doi: 10.1137/0717021 Fryxell, B., Olson, K., Ricker, P., et al. 2000, 《天体物理学杂志增刊》, 131, 273, doi: 10.1086/317361 Furth, H. P.,Killeen, J., & Rosenbluth, M. N. 1963, 《流体物理学》, 6, 459, doi: 10.1063/1.1706761 Gardiner, T. A., & Stone, J. M. 2005, 《计算物理学杂志》, 205, 509, doi: 10.1016/j.jcp.2004.11.016 Ghia, U., Ghia, K.N., &Shin, C. T. 1982, 《计算物理学杂志》, 48, 387, doi: 10.1016/0021-9991(82)90058-4 Goodnight, N., Woolley, C., Lewin, G., Luebke,D.,& Humphreys, G. 2003, 见 ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS 图形硬件会议论文集, 102–111, doi: 10.2312/eggh03/102-111

Gresho, P. M., & Chan, S. T. 1990, 《国际流体数值方法杂志》, 11, 621, doi: 10.1002/fld.1650110510 Grete, P., Glines, F. W., & O'Shea, B. W. 2021, 《IEEE 并行与分布式系统汇刊》, 32, 85, doi: 10.1109/TPDS.2020.3010016 Guillochon, J., & McCourt, M. 2017, 《天体物理学杂志快报》, 834, L19, doi: 10.3847/2041-8213/834/2/L19 Guillochon, J., & Ramirez-Ruiz, E. 2013, 《天体物理学杂志》, 767, 25, doi: 10.1088/0004-637X/767/1/25 Guillochon, J., Ramirez-Ruiz, E., Rosswog, S., & Kasen, D. 2009, 《天体物理学杂志》, 705, 844, doi: 10.1088/0004-637X/705/1/844 Haas, J.-F., & Sturtevant, B. 1987, 《流体力学杂志》, 181, 41, doi: 10.1017/S0022112087002003 Hagen, T. R., Lie, K.-A., & Natvig, J. R. 2006, 见《计算机科学讲义》, 第3994卷, 220–227, doi: 10.1007/11758549 34 Harris, M. J., Baxter, William V., I., Scheuermann, T., & Lastra, A. 2003, 见 ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS 图形硬件会议论文集, 92–101, doi: 10.2312/eggh03/092-101 Harten, A., Lax, P. D., & van Leer, B. 1983, 《SIAM评论》, 25, 35, doi: 10.1137/1025002 Hawley, J. F. 2000, 《天体物理学杂志》, 528, 462, doi: 10.1086/308180 Hawley, J. F., Guan, X., & Krolik, J. H. 2011, 《天体物理学杂志》, 738, 84, doi: 10.1088/0004-637X/738/1/84 He, C.-C., Krumholz, M. R., & Wibking, B. D. 2026, arXiv 预印本, arXiv:2611.21353。https://arxiv.org/abs/2611.21353 He, C.-C., Wibking, B. D., & Krumholz, M. R. 2024, 《皇家天文学会月刊》, 531, 1228, doi: 10.1093/mnras/stae1244 Howes, G. G., & Nielson, K. D. 2013, 《等离子体物理》, 20, 072302, doi: 10.1063/1.4812805 Ida, S., Canup, R. M., & Stewart, G. R. 1997, 《自然》, 389, 353, doi: 10.1038/38669 Ivanova, N., Justham, S., Chen, X., et al. 2013, 《天文学与天体物理学评论》, 21, 59, doi: 10.1007/s00159-013-0059-2 Jeans, J. H. 1902, 《伦敦皇家学会哲学汇刊A辑》, 199, 1, doi: 10.1098/rsta.1902.0012 Kaboudian, A., Cherry, E. M., & Fenton, F. H. 2019, 《混沌、孤子与分形》, 121, 6, doi: 10.1016/j.chaos.2019.01.005 K¨appeli, R., & Mishra, S. 2014, 《计算物理学杂志》, 259, 199, doi: 10.1016/j.jcp.2013.11.028 K¨appeli, R., & Mishra, S. 2016, 《天文学与天体物理学》, 587, A94, doi: 10.1051/0004-6361/201527815 Karni, S. 1996, 《SIAM科学计算杂志》, 17, 1019, doi: 10.1137/S106482759528003X Kestener, P., Chˆateau, F., & Teyssier, R. 2010, 载于《计算机科学讲义》第6082卷, 281–288, doi: 10.1007/978-3-642-13136-3 29 Kokubo, E., Ida, S., & Makino, J. 2000, 《伊卡洛斯》, 148, 419, doi: 10.1006/icar.2000.6496 Koren, B. 1993, 载于《数值流体力学札记》第45卷《对流扩散问题的数值方法》, C. B. Vreugdenhil & B. Koren 编（布伦瑞克：Vieweg）, 117–138。https://ir.cwi.nl/pub/2269 Koyama, H., & I nutsuka, S.-i. 2002, 《天体物理学杂志快报》, 564, L97, doi: 10.1086/338978 Koyama, H., & Inutsuka, S.-i. 2004, 《天体物理学杂志快报》, 602, L25, doi: 10.1086/382478 Kr¨uger, J., & Westermann, R. 2003, ACM 图形学汇刊, 22, 908, doi: 10.1145/882262.882363 Krumholz, M. R., McKee, C. F., & Klein, R. I. 2004, 《天体物理学杂志》, 611, 399, doi: 10.1086/421935 Kushnir, D., Katz, B., Dong, S., Livne, E., & Fern´andez, R. 2013, 《天体物理学杂志快报》, 778, L37, doi: 10.1088/2041-8205/778/2/L37 Kwatra, N., Su, J., Gr´etarsson, J. T., & Fedkiw, R. 2009, 《计算物理学杂志》, 228, 4146, doi: 10.1016/j.jcp.2009.02.027 Larson, R. B. 1969, 《皇家天文学会月刊》, 145, 271, doi: 10.1093/mnras/145.3.271 Lee, D. 2013, 《计算物理学杂志》, 243, 269, doi: 10.1016/j.jcp.2013.02.049 Lee, D., & Deane, A. E. 2009, 《计算物理学杂志》, 228, 952, doi: 10.1016/j.jcp.2008.08.026 Lefohn, A. E., Sengupta, S., Kniss, J., Strzodka, R., & Owens, J. D. 2006, ACM 图形学汇刊, 25, 60, doi: 10.1145/1122501.1122505 Lesur, G. R. J., Baghdadi, S., Wafflard-Fernandez, G.,et al. 2023, 《天文学与天体物理学》, 677, A9, doi: 10.1051/0004-6361/202346005 LeVeque, R. J. 2002, 《双曲问题的有限体积方法》（剑桥：剑桥大学出版社）, doi: 10.1017/CBO9780511791253 Levermore, C. D. 1984, 《定量光谱学与辐射传输杂志》, 31, 149, doi: 10.1016/0022-4073(84)90112-2 Livne, E. 1990, 《天体物理学杂志快报》, 354, L53, doi: 10.1086/185721 L¨ohner, R. 1987, 《计算机在应用力学与工程中的方法》, 61, 323, doi: 10.1016/0045-7825(87)90098-3 MacFadyen, A. I., & Milosavljevi´c, M. 2008, 《天体物理学杂志》, 672, 83, doi: 10.1086/523869 Mallet, A., & Abraham, E. 2026, taranis：用于 JAX 中非线性等离子体模型的谱求解器, 0.1.0, Zenodo doi: 10.5281/zenodo.21987739 Masunaga, H., & Inutsuka, S.-i. 2000, 《天体物理学杂志》, 531, 350, doi: 10.1086/308439

Melosh, H. J. 2007,《陨石学与行星科学》，42, 2079, doi: 10.1111/j.1945-5100.2007.tb01009.x Miyoshi, T., & Kusano, K. 2005,《计算物理学杂志》，208, 315，doi: 10.1016/j.jcp.2005.02.017 Monaghan, J. J. 1994,《计算物理学杂志》，110, 399，doi: 10.1006/jcph.1994.1034 Orszag, S. A., & Tang, C.-M. 1979,《流体力学杂志》，90, 129，doi: 10.1017/S002211207900210X Owens, J. D., Luebke, D., Govindaraju, N., et al. 2007,《计算机图形学论坛》，26, 80，doi: 10.1111/j.1467-8659.2007.01012.x Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011,《天体物理学杂志增刊》，192, 3，doi: 10.1088/0067-0049/192/1/3 Pekkil¨a, J., V¨ais¨al¨a, M. S., K¨apyl¨a, M. J., K¨apyl¨a, P. J., & Anjum, O. 2017,《计算物理学通讯》，217, 11，doi: 10.1016/j.cpc.2017.03.011 Plewa, T., & M¨uller, E. 1999,《天文学与天体物理学》，342, 179。 https://arxiv.org/abs/astro-ph/9807241 Plummer, H. C. 1911,《皇家天文学会月刊》，71, 460，doi: 10.1093/mnras/71.5.460 Porth, O., Kelly, A., Willocx, O., etal. 2026, arXiv 预印本，arXiv:2607.19277，doi: 10.48550/arXiv.2607.19277 Quirk, J. J. 1994,《国际流体数值方法杂志》，18, 555，doi: 10.1002/fld.1650180603 Quirk, J. J., & Karni, S. 1996,《流体力学杂志》，318, 129, doi: 10.1017/S0022112096007069 Raskin, C., Scannapieco, E., Rockefeller, G., et al. 2010,《天体物理学杂志》，724, 111，doi: 10.1088/0004-637X/724/1/111 Raskin, C., Timmes, F. X., Scannapieco, E., Diehl, S., & Fryer, C. 2009,《皇家天文学会月刊》，399, L156，doi: 10.1111/j.1745-3933.2009.00743.x Roe, P. L. 1986,《流体力学年度评论》，18, 337，doi: 10.1146/annurev.fl.18.010186.002005 Ross, S., Gordon, G. J., & Bagnell, J. A. 2011, 载于第十四届人工智能与统计学国际会议论文集（AISTATS）。 https://arxiv.org/abs/1011.0686 Rosswog, S., Kasen, D., Guillochon, J., & Ramirez-Ruiz, E. 2009,《天体物理学杂志快报》，705, L128，doi: 10.1088/0004-637X/705/2/L128 Saha, M. N. 1920,《哲学杂志》，40, 472，doi: 10.1080/14786441008636148 Schive, H.-Y., Tsai, Y.-C., & Chiueh, T. 2010,《天体物理学杂志增刊》，186, 457，doi: 10.1088/0067-0049/186/2/457 Schive, H.-Y., ZuHone, J. A., Goldbaum, N. J., et al. 2018,《皇家天文学会月刊》，481, 4815，doi: 10.1093/mnras/sty2586 Schneider, E. E., & Robertson, B. E. 2015,《天体物理学杂志增刊》，217, 24，doi: 10.1088/0067-0049/217/2/24 Sedov, L. I. 1959,《力学中的相似性与量纲方法》（纽约：学术出版社） Shen, K. J., Kasen, D., Miles, B. J.,& Townsley,D. M. 2018,《天体物理学杂志》, 854, 52, doi: 10.3847/1538-4357/aaa8de Skinner, M. A., Dolence, J. C.,Burrows,A., Radice, D., & Vartanyan, D. 2019,《天体物理学杂志增刊》, 241, 7, doi: 10.3847/1538-4365/ab007f Skinner, M. A., & Ostriker, E. C.2013,《天体物理学杂志增刊》, 206, 21, doi: 10.1088/0067-0049/206/2/21 Smith, A. I., Johnson, E. T.,Chen, Z.,et al.2023,《天体物理学杂志》, 947, 65, doi: 10.3847/1538-4357/acbaff Sod, G. A. 1978,《计算物理学杂志》, 27, 1, doi: 10.1016/0021-9991(78)90023-2 Springel, V. 2005,《皇家天文学会月刊》, 364, 1105, doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.09655.x Springel, V. 2010,《皇家天文学会月刊》, 401, 791, doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15715.x Stewart, S. T. 2020, 状态方程模型 Fe85Si15-ANEOS：开发与文档（版本 SLVTv0.2G1），，Zenodo doi: 10.5281/zenodo.3866550 Stewart, S. T. 2022, ANEOS-PYROLITE, 0.2.0, Zenodo doi: 10.5281/zenodo.6968539 Stewart, S. T. 2024, 水的 ANEOS 状态方程模型，0.3, Zenodo doi: 10.5281/zenodo.14226694 Stewart, S. T. 2026, pyaneos v1.0 — 经 oracle 验证的 M-ANEOS Python 移植版，1.0, Zenodo doi: 10.5281/zenodo.20736272 Stewart, S. T., Davies, E. J., Duncan, M. S., et al. 2019, 状态方程模型 Forsterite-ANEOS-SLVTv1.0G1：文档与比较，1.0.0, Zenodo doi: 10.5281/zenodo.3478631 Stewart, S. T., Davies, E. J., Duncan, M. S., et al. 2020, 收录于美国物理学会会议系列，第 2272 卷，《凝聚态物质的冲击压缩 – 2019》, 080003, doi: 10.1063/12.0000946 Stone, J. M., & Gardiner, T. 2009,《新天文学》, 14, 139, doi: 10.1016/j.newast.2008.06.003 Stone, J. M., Gardiner,T. A.,Teuben, P., Hawley, J. F., & Simon, J. B. 2008,《天体物理学杂志增刊》, 178, 137, doi: 10.1086/588755 Stone, J. M., Tomida, K., White, C. J., & Felker, K.G. 2020,《天体物理学杂志增刊》, 249, 4, doi: 10.3847/1538-4365/ab929b Stone, J. M., Mullen, P. D., Fielding,D., et al. 2026,《天体物理学杂志增刊》, 283, 27, doi: 10.3847/1538-4365/ae3717 Su, B., & Olson,G. L. 1996,《定量光谱学与辐射传输杂志》, 56, 337, doi: 10.1016/0022-4073(96)84524-9 Taylor, G. 1950a,《伦敦皇家学会会刊 A 辑》, 201, 159, doi:10.1098/rspa.1950.0049 Taylor, G. 1950b,《伦敦皇家学会会刊 A 辑》, 201, 175, doi:10.1098/rspa.1950.0050 Teyssier, R. 2002,《天文学与天体物理学》, 385, 337, doi: 10.1051/0004-6361:20011817

Teyssier, R., Moseley, E., Caddy, R. V., et al. 2026, arXiv 预印本, arXiv:2607.20704, doi: 10.48550/arXiv.2607.20704Thompson, S. L., &Lauson, H. S. 1972, Chart D 辐射流体力学代码 III 的改进：修订版解析状态方程，技术报告 SC-RR-71-0714，桑迪亚国家实验室，阿尔伯克基，新墨西哥州。 https://www.osti.gov/biblio/4208328Thompson,S. L., Lauson, H. S., Melosh, H.J., Collins,G. S., & Stewart, S.T. 2019,M-ANEOS, 1.0,Zenododoi: 10.5281/zenodo.3525030Thornber, B., Mosedale, A., Drikakis, D., Youngs, D., & Williams, R. J. R. 2008, 《计算物理学杂志》, 227, 4873, doi: 10.1016/j.jcp.2008.01.036Thurgood, J. O., Pontin, D. I., & McLaughlin, J. A. 2018, 《等离子体物理》, 25, 072105, doi: 10.1063/1.5035489Timmes, F. X., Hoffman,R. D., & Woosley, S. E. 2000, 《天体物理学杂志增刊》, 129, 377, doi: 10.1086/313407Timmes, F. X., &Swesty, F.D. 2000, 《天体物理学杂志增刊》, 126, 501, doi: 10.1086/313304Tomida, K., Tomisaka,K., Matsumoto, T., et al. 2013, 《天体物理学杂志》, 763, 6, doi:10.1088/0004-637X/763/1/6Toro, E. F. 2009,《黎曼求解器与流体动力学数值方法：实用导论》，第 3 版（柏林、海德堡：施普林格），doi: 10.1007/b79761Toro, E. F., Spruce, M.,& Speares, W. 1994, 冲击波, 4, 25, doi:10.1007/BF01414629T´oth, G. 2000,《计算物理学杂志》, 161, 605, doi: 10.1006/jcph.2000.6519T´oth, G., & Roe, P. L.2002, 《计算物理学杂志》, 180, 736, doi: 10.1006/jcph.2002.7120Trac, H., & Pen, U.-L.2003, 太平洋天文学会出版物, 115, 303, doi: 10.1086/367747 Truelove, J. K., Klein, R. I., McKee, C. F., 等. 1997, 《天体物理学杂志快报》, 489, L179, doi: 10.1086/310975Turk, M. J., Smith, B. D., Oishi, J. S., 等. 2011, 《天体物理学杂志增刊》, 192, 9, doi: 10.1088/0067-0049/192/1/9van Leer, B. 1974, 《计算物理学杂志》, 14, 361, doi: 10.1016/0021-9991(74)90019-9van Leer, B. 1977, 《计算物理学杂志》, 23, 276, doi: 10.1016/0021-9991(77)90095-Xvan Leer, B. 1979, 《计算物理学杂志》, 32, 101, doi: 10.1016/0021-9991(79)90145-1van Leer, B. 1984, SIAM 科学与统计计算杂志, 5, 1, doi: 10.1137/0905001V´ azquez-Semadeni, E., G´omez,G. C., Jappsen,A. K.,等. 2007, 《天体物理学杂志》, 657, 870, doi: 10.1086/510771ˇ Cada, M., & Torrilhon, M. 2009, 《计算物理学杂志》, 228, 4118, doi: 10.1016/j.jcp.2009.02.020Verniero, J. L., Howes, G. G., & Klein, K. G. 2018, 《等离子体物理学杂志》, 84, 905840103, doi: 10.1017/S0022377817001003Wang, L. 2025, 《天体物理学杂志增刊》, 277, 63, doi: 10.3847/1538-4365/adbdb6Wang, P., Abel, T., & Kaehler, R. 2010, 《新天文学》, 15, 581, doi: 10.1016/j.newast.2009.10.002Wibking, B. D., & Krumholz, M. R. 2022, 《皇家天文学会月刊》, 512, 1430, doi: 10.1093/mnras/stac439Woodward, P., & Colella, P. 1984, 《计算物理学杂志》, 54, 115, doi: 10.1016/0021-9991(84)90142-6Yakovlev, D. G., & Shalybkov, D. A. 1989年, 《天体物理与空间物理研究》, 7, 311 Zingale, M., Dursi, L. J., ZuHone, J., 等. 2002, 《天体物理学杂志增刊》, 143, 539, doi: 10.1086/342754