arXiv:2611.31182v1 [math.CA] 23 Nov 2026

径向树上的加权 Bergman 投影

NIKOLAOS CHALMOUKIS 和 MATTEO MONTI

Abstract. 我们研究径向树上关于加权调和伯格曼空间 A^p_ω的 Bergman 投影 P_ω，其中 ω 是一个正径向权。我们证明，对于所有此类权以及 $1 < p < \infty$，Bergman 投影P_ω 从 $L^p(\omega)$ 到 A^p_ω 和 $L^\infty \to \mathcal{B}$有界，其中 $\mathcal{B}$ 是树上的布洛赫空间。我们还给出了权 ω 的一个刻画，使得正 Bergman 投影 P^+_ω 从 $L^p(\omega)$ 到 $L^p(\omega)$有界。最后，在附录中，我们给出权 $\Omega \in L^1(\mathbb{D})$的一个初等证明，这些权使得从 $L^p(\Omega)$ 到全纯伯格曼空间 $A^p\ \omega(\mathbb{D})$ 的 Bergman 投影有界。

1. 引言 Introduction

近年来，人们对组合树上的函数空间和调和分析相关问题的研究兴趣日益浓厚。有时，这种兴趣源于试图构造双曲空间中问题的简化版本，以便将所得结果推广回连续统。函数空间领域中这一原则的经典应用见文章[1], ，而较近的例子则有 [2]和 [14]。此外，人们也希望发展一套树上的函数空间理论，使之与双曲空间上的理论相平行，从而观察这两种理论在何处趋同、又在何处分歧。这样的研究有助于更深入地理解支配这两个领域的现象，以及某些对象表现不同的原因。本文的研究属于第二类。我们将尝试补充文献中尚缺失的径向对称树上加权 Bergman 空间理论的一部分，并将其与单位圆盘上的理论进行比较。

我们将 X 称为有根树，即一种局部有限且无环的连通图。根顶点是 X 中的一个特殊顶点，记作 o。为简便起见，我们将图 X 与其顶点集合等同。若存在一条边连接 u 和 v，我们记作 $u \sim v$ $u, v \in X$。在这种情况下，我们称 u 和 v 为邻接顶点。树 X 自然带有边计数距离 d。任意顶点 v 到原点的距离称为其层级，记作 v $|v|$。形式化地， $|v| := d(v, o)$。对于 $v \neq o$，我们称由$q(v) := \#\{u \in X : \ u \sim v\} - 1$ 定义的函数，以及 $q(o) := \#\{u \in X : \ o \sim u\}$ 为 X 的分支函数，其中 # 表示集合的基数。在本文中

我们假设

$$2 \leq q(v) < +\infty, \tag{A_0}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 39A12, 30H20.*Key words and phrases.* 树上的分析、加权 Bergman 空间、Bergman 投影、Dostanić 条件、倍增权、稀疏控制。

对每个 $v \in X$，并且 q 是径向的，也就是说，存在 $q\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$，使得

$$q(v) = \overline{q}(|v|) \tag{A_1}$$

对于 $v \in X$。稍微滥用一下记号，我们将用 q 代替 q。注意，我们不要求 q 是树上的有界函数。给定 $\alpha > 1$ ，我们可以在树上定义如下自然的有限测度

$$\mu_\alpha(x) = \Big(\prod_{\ell=0}^{|x|-1} \frac{1}{q(\ell)} \Big)^\alpha.$$

此处及下文中，我们约定空乘积等于 1，空和等于 0。

现在我们将在径向对称树上介绍我们主要关注的函数空间。函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 称为调和函数，当且仅当

$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{q(v)+1} \displaystyle\sum_{u \sim v} f(u), & v \neq o \\ \dfrac{1}{q(o)} \displaystyle\sum_{u \sim o} f(u), & v = o \end{cases}.$$

设 $1 \le p < \infty$ 和 $\omega \in L^1(X)$为正函数。空间

$$A^p_\omega = \{f \in L^p(\omega) : f \text{ is harmonic on } X\}$$

称为关于 $\omega.$、指数为 p 的调和 Bergman 空间。显然， A^p_ω 是一个巴拿赫空间；特别地，当 $p = 2$时，它是希尔伯特空间 $L^2(\omega)$的闭子空间，因此存在一个正交投影$P_\omega\colon L^2(\omega) \to A^2_\omega.$。从现在起，我们假设 ω 是径向权，即存在函数 $\omega : \mathbb{N}_0 \to (0, +\infty)$，使得

$$\omega(v) = \overline{\omega}(|v|), \quad v \in X. \tag{A_3}$$

加权 Bergman 空间最早于 [3] 引入，而对算子 $P_\omega\colon L^p(\omega) \to A^p_\omega$ 有界性的研究始于 [7]。在该工作中，作者证明，对于齐次树（对应于常值函数q），算子 $P_{\mu_\alpha}\colon L^p(\mu_\alpha) \to A^p_{\mu_\alpha}$ 对所有 $1 < p < \infty$ 都是有界的。对于同一类测度，该结果在 [5] 中推广到了非齐次径向树。

这些发展反映了单位圆盘中加权 Bergman 空间的研究。事实上，若记 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ 为单位圆盘，记$dA(z) = \frac{dxdy}{\pi}$ 为归一化面积测度，则对于正连续函数$\overline{\Omega} \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ 和 $1 \le p < +\infty$ ，可以将加权 Bergman 空间 $A^p\ \omega(\mathbb{D})$ 定义为满足以下条件的全纯函数空间 $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \Omega(z) dA(z) < +\infty.$$

与树的情形一样，空间 $A^p\ \omega(\mathbb{D})$ 是希尔伯特空间$L^2(\Omega dA)$ 的闭子空间，因此存在一个正交投影 $\Pi_\Omega\colon L^2(\Omega dA) \to A^2_\Omega(\mathbb{D})$。对于形如 $\Omega_\alpha(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ with $\alpha > -1$ 的标准权情形，已知算子 $\Pi_{\Omega_\alpha}\colon L^p(\Omega_\alpha dA) \to A^p\ \omega_\alpha(\mathbb{D})$ 对所有 $1 < p < \infty$ 都是有界的，正如文献 [10] 中所证明的那样。

更一般的径向对称权类已经相当有趣。若权 Ω 满足 $\Omega(z) = \Omega(|z|)$for $z \in \mathbb{D}.$，则称其为径向对称权。Dostani´c [8, 9]观察到

对于固定的 p,$1 < p < \infty$，有界性 Π_Ω：$L^p(\Omega dA) \to A^p_\Omega$ 的必要条件是所谓的 Dostani´c 条件，即存在 $C > 0$ 使得

$$(D_p) \quad \Big(\int_0^1 \Omega(t)t^{np+1}dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^1 \Omega(t)t^{np'+1}\Big)^{\frac{1}{p'}} \le C\int_0^1 \Omega(t)t^{2n+1}dt, \text{ for all } n \in \mathbb{N}$$

其中 p' 是 p.的 H¨older 共轭指数

此外，指数衰减权重

$$\Omega(z) = \exp\Big(-\frac{1}{(1-|z|^2)^\alpha}\Big), \qquad |z| < 1, \alpha > 0$$

对任何 $p \neq 2$ 都不满足条件 (D_p)。

Pel´áez 和 R¨atty¨a [18] 对径向权的 Bergman 投影有界性进行了系统研究。他们考虑了上倍增权重类 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\mathcal{D}$。若存在 $C > 1$ 使得下式成立，则径向权 Ω 属于 $\mathcal{D}$

$$\text{(UD)} \qquad \int_r^1 \Omega(t)dt \le C\int_{\frac{1+r}{2}}^1 \Omega(t)dt, \text{ for all } r \in (0,1).$$

根据 [18, 定理 7] 可知，若 $\Omega \in \widehat{\mathcal{D}}$，则 Π_Ω： $L^p(\Omega dA) \to A^p_\Omega$ 对所有 $p \in (1, \infty)$. 均有界。最近，Li 和 Wang [13] 通过证明：若$\widehat{\ }\Omega$ 对任意 $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$ 满足 Dostani´c 条件，则 $\Omega \in \mathcal{D}.$，从而完成了这一论证。因此得到以下定理

定理 1.1。设 Ω 是 $L^1(dA)$中的一个正径向权，则以下命题等价。

(a) Π_Ω: $L^p(\Omega dA) \to A^p_\Omega$ 对某个 $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$有界。(b) Π_Ω: $L^p(\Omega dA) \to A^p_\Omega$ 对所有 $p \in (1,\infty)$ 都有界。$\widehat{\ }$(c) $\Omega \in \mathcal{D}$。

他们在 [13] 中的证明相当复杂，因此我们认为有必要在附录中给出一个简短的初等证明（见第 6 节）。

此外，若考虑积分算子 Π^+_Ω，其核为 Bergman 投影的核的绝对值 Π_Ω, Pel´aez 和 R¨atty¨a [18,定理 9]指出，该算子相对于 Bergman 投影具有不同的有界性性质；这与标准权 Ω_α 的情形相反，因为众所周知，这两个算子对所有 $p \in (1,\infty)$ 都有界。更确切地说，ˇ 作者引入了下倍增测度类 $\mathcal{D}$，该类包含满足以下条件的径向权 Ω：存在 $K > 1$ 和 $C > 1$，使得

$$\text{(LD)} \qquad \int_r^1 \Omega(t)dt \ge C\int_{1-\frac{1-r}{K}}^1 \Omega(t)dt, \text{ for all } r \in (0,1).$$

最后，我们定义类 $\mathcal{D} = \widehat{\mathcal{D}} \cap \check{\mathcal{D}}$。那么，[18, 定理 9] 表明，若 $\Omega \in \widehat{\mathcal{D}}$且 $p \in (1,\infty)$ 正 Bergman 投影 Π^+_Ω 在 $L^p(\Omega dA)$ 上有界，当且仅当 $\Omega \in \mathcal{D}.$。结合观察可知，Π^+_Ω的有界性意味着 Π_Ω 的有界性，因此我们得到 Π^+_Ω: $L^p(\Omega dA) \to L^p(\Omega dA)$ 对某个 $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$ 有界，当且仅当 $\Omega \in \mathcal{D}.$。据我们所知，Π^+_Ω 在 $L^2(\Omega dA)$ 上的有界性是否意味着 $\Omega \in \mathcal{D}$，这一问题仍未解决。

鉴于上述关于单位圆盘的结果，下面的定理令人惊讶。

定理 1.2. 设 ω *a* 是径向树 X 上的正径向权。那么，对于 $p \in (1,\infty)$ *Bergman* 投影 $P_\omega: L^p(\omega) \to L^p(\omega)$ 是有界的，且为弱型$(1,1)$。

还应指出的是，单位圆盘上的理论与树上的理论之间产生这种差异的根源尚未被完全理解。人们已经充分认识到，在离散情形中，源于核的局部行为的障碍并不存在。然而，在这一特定情形下，(D_p) 条件似乎并非局部现象，而是一个全局现象。事实上，该条件的必要性是通过考察算子作用于形如 $z^p z^q$ 的函数时的有界性而得到的。因此，我们希望能够更好地理解这一现象；但目前它仍然难以捉摸。

关于正 Bergman 投影 P_ω^+，在这种情形下，其定义并不那么显然。事实上，我们的定义与树相关文献中所采用的定义 [6, 7, 5, 4] 是一致的。精确定义见定义 2.4。

对于径向树，我们完全刻画了使积分算子 P_ω^+bounded on $L^p(\omega)$ 的权。为此，我们还需要引入树几何中的一些概念。给定 $x \in X$，我们用 T_x 表示以 x 为基点的帐篷，即满足连接 o 与 y 的测地线经过 x 的顶点 $y \in X$ 的集合。我们用 U_x 表示修剪帐篷，即 $U_x = T_x \setminus \{x\}$。我们用 $s(v)$ 表示 v 的子节点集合，即 T_v 中满足 $|u| = |v| + 1$ 的顶点 u 的集合。如果 $v = o$，那么 $s(o)$ 就是所有邻点的集合。当 $v \neq o$ 时，存在唯一一个不属于 $s(v)$ 的邻点，我们称其为 v 的前驱，并将其记为 $p(v)$。我们可以将前驱视为一个函数 $p\colon X \setminus \{o\} \to X$，并以此将其迭代为函数 $p^k\colon X \setminus B(o, k-1) \to X$，其定义为 $p^k(v) = p(p^{k-1}(v))$。所有帐篷组成的族记为 $\mathcal{T}$，所有修剪帐篷组成的集合记为 $\mathcal{U}$。此外，如果 $Q = T_x \in \mathcal{T}$ 且 $n \in \mathbb{N}_0$，我们将以 x 的第 n 个前驱为基点的帐篷记为 $Q^{(n)}$。对于 $U \in \mathcal{U}$，集合 $U^{(n)}$ 以类似方式定义。我们还将 $B(x, N)$ 表示为关于距离 d、以 x 为中心且半径为 N 的开球。

我们称权 ω 满足下倍增条件，并记作 $\omega \in \mathcal{D}_{\text{tree}}$，如果存在 $\eta > 0$ 和 $N > 0$ 使得

$$\eta\omega(T_x) \leq \omega(T_x \cap B(x, N)), \text{ for all } x \in X. \tag{1}$$

这里，对于 $E \subseteq X$，我们定义 $\omega(E) = \sum_{x \in E} \omega(x)$。

定理 1.3. 设 ω 是径向树 X上的一个正径向权。那么，如果 ω满足条件$\check{}$ $\mathcal{D}_{tree}$，则算子 $P_\omega^+: L^p(\omega) \to L^p(\omega)$ 对所有$p \in (1,\infty)$都有界。反之，如果 $P_\omega^+: L^p(\omega) \to L^p(\omega)$ 对某个 $p \in (1,\infty)\check{}$ 有界，那么 ω 满足条件 $\mathcal{D}_{tree}$.

证明定理 1.2 和定理 1.3 所用的技巧截然不同。对于定理 1.2，我们证明算子的核满足文献 [7]中引入的树上的 Calderon-Zygmund 型条件。一旦验证了 P_ω 的核满足这些条件，其有界性便可由 [7,定理 C]推出。

另一方面，为了确立算子 P_ω^+ 对下倍增权重 ω 的有界性，我们按照 [5, 4] 的思路建立了一个稀疏支配界。

本文结构安排如下。第 2 节将介绍我们在离散情形下需要的主要对象，并推导 Bergman空间的

再生核的显式公式。在第 3 节中，这一公式将用于推导核估计，进而得到投影算子P_ω的有界性结果。研究 P_ω^+ 的有界性需要采用不同的技巧，并在第 4 节中作了全面阐述。第 5 节讨论端点情形$p=\infty$，并在其中引入一个适当的布洛赫空间。最后，在附录中，我们简要证明 Dostanić 条件蕴含 $\mathcal{D}$。

此外，在本文余下部分中，我们将使用以下记号。若 f,g 是某个集合 A 上的非负函数，我们记作 $f\lesssim g$，如果存在常数 $C>0$，使得对所有 $a\in A$ 都有 $f(a)\le Cg(a)$。当 $f\lesssim g$ 且 $g\lesssim f$ 时，我们记作 $f\asymp g$。最后，若 ω 是空间 X 上的正测度，Q 是 X 的子集，且 $f\colon X\to\mathbb{R}$，我们定义

$$\langle f\rangle_Q=\frac{1}{\omega(Q)}\sum_{x\in Q}f(x)\omega(x),$$

为 f 在 Q 上的平均值。

2. 径向树上的 Bergman 投影

本节将推导径向树 X 上 Bergman 投影 P_ω 的核的显式表达式。我们还考虑有限维空间

$$W_v=\left\{\psi\in L^2(s(v))\colon\sum_{u\in s(v)}\psi(u)=0\right\},$$

其中，勒贝格空间是相对于计数测度定义的。W_v 的维数为 $q(v)$，并且它是一个再生核希尔伯特空间。因此，正交投影 $p_v\colon L^2(s(v))\to W_v$ 可以写成一个积分算子，其核由 W_v 的 k_v 的再生核给出。直接验证可得

$$k_v(u,w)=\delta_{uw}-\frac{1}{q(v)},\quad u,w\in s(v). \tag{2}$$

事实上，对于 $w\in s(v)$，我们有 $k_v(\cdot,\ w)$ 的均值为零，并且对于 $\psi\in W_v$，

$$\langle\psi,k_w\rangle_{W_v}=\sum_{u\in s(v)}\psi(u)k_v(u,w)=\psi(w)-\frac{1}{q(v)}\sum_{u\in s(v)}\psi(w)=\psi(w).$$

对于每个 $m,\ k\in\mathbb{N}_0$，我们考虑函数

$$\varphi_k(m)=\sum_{j=0}^{m-k}\prod_{\ell=k}^{m-j-1}q(\ell)^{-1},$$

约定：若 $k>m$，则 $\varphi_k(m)=0$。由假设（A_0）可知，只要 $k\le m$，就有 $1\le\varphi_k(m)<2$。稍微滥用一下记号，对于 $v\in X$，我们有时用 $\varphi_k(v)$ 代替 $\varphi_k(|v|)$。

现在我们可以定义延拓算子 $E_v\colon W_v\to L^2(\omega)$

$$E_v\psi(x)=\varphi_{|v|+1}(x)\sum_{u\in s(v)}\psi(u)\mathbb{1}_{T_u}(x),\quad x\in X.$$

该算子将给定函数 $\psi\in W_v$ 扩展为定义在整棵树上、支撑于 U_v.的函数

为计算 E_v 的伴随算子，令 $\psi \in W_v$ 和 $f \in L^2(\omega)$，于是有

$$\begin{aligned}\langle E_v\psi, f\rangle_{L^2(\omega)} &= \sum_{u\in s(v)} \psi(u) \sum_{x\in T_u} \varphi_{|v|+1}(x) f(x)\omega(x) \\ &= \langle \psi, E_v^\times f\rangle_{L^2(s(v))} = \langle \psi, p_v E_v^\times f\rangle_{W_v},\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$E_v^\times f(u) = \sum_{x\in T_u} \varphi_{|v|+1}(x) f(x)\omega(x).$$

因此 $E_v^* = p_v E_v^\times$.

命题 2.1。 算子 E_v 的像是 A^2_ω的有限维子空间。此外，如果 u 是 $s(v)$中的任意一点，则有

$$P_v = \|\varphi_{|v|+1}\mathbb{1}_{T_u}\|^{-2}_{L^2(\omega)} E_v E_v^*$$

是将 $L^2(\omega)$正交投影到子空间 $E_v(W_v)$上的正交投影。

证明。 我们首先证明算子 P_v 映射到 A^2_ω中。由于 $E_v f$ 在 $X\setminus U_v$上为零，因此它在 $X\setminus T_v$中是调和的。 U_v中的调和性由以下事实保证：对于 $m > 0$,

$$\begin{aligned}q(m)\varphi_k(m+1) + \varphi_k(m-1) &= q(m) \sum_{j=0}^{m+1-k} \prod_{\ell=k}^{m-j} q(\ell)^{-1} + \sum_{j=0}^{m-1-k} \prod_{\ell=k}^{m-j-2} q(\ell)^{-1} \\ &= (q(m)+1) \sum_{j=0}^{m-1-k} \prod_{\ell=k}^{m-j-2} q(\ell)^{-1} + q(m) \prod_{\ell=k}^{m-1} q(\ell)^{-1} + q(m) \prod_{\ell=k}^{m} q(\ell)^{-1} \\ &= (q(m)+1) \sum_{j=0}^{m-1-k} \prod_{\ell=k}^{m-j-2} q(\ell)^{-1} + (q(m)+1) \prod_{\ell=k}^{m-1} q(\ell)^{-1} \\ &= (q(m)+1)\varphi_k(m).\end{aligned}$$

显然，对于 $m = k$，同样成立。最后，由于 $\varphi_k(k) = 1$，且 ψ 在 $s(v)$ 上的平均值为零，我们有 $E_v\psi$ 在 v 处是调和的。此外，由于 φ_k 有界且 $\omega \in L^1(X)$，我们还得到 $E_v\psi \in A^2_\omega$.

现在我们证明， P_v 是从 $L^2(\omega)$ 到 $E_v(W_v)$ 的正交投影。对于 $u \in s(v)$，我们有

$$E_v^\times E_v\psi(u) = \sum_{x\in T_u} \psi(u)\varphi_{|v|+1}(x)^2\omega(x) = \|\varphi_{|v|+1}\mathbb{1}_{T_u}\|^2_{L^2(\omega)}\psi(u),$$

因此，如果 $f = E_v\psi \in E_v(W_v)$，则

$$P_v f = \|\varphi_{|v|+1}\mathbb{1}_{T_u}\|^{-2}_{L^2(\omega)} E_v p_v E_v^\times E_v\psi = E_v p_v\psi = f.$$

由于 P_v 是自伴的，且其像包含于 $E_v(W_v)$ 中，结论得证。

□

以下命题说明了子空间族 $\{E_v(W_v)\}_{v\in X}$ 的重要性。

命题 2.2。 设 X 为一棵径向树， ω 为 X上的径向权。则我们有正交分解

$$A^2_\omega = \mathbb{C}\mathbb{1}_X \oplus \bigoplus_{v\in X} E_v(W_v).$$

证明。我们首先注意到，这些子空间两两正交。显然，根据以下事实，$\mathbb{1}_X$ 与 $E_v(W_v)$ 正交：对于满足 $f(o) = 0$ 的 $f \in A^2_\omega$，以及 ω 为径向的事实（更多细节请参见 [7]和 [4] ）。此外，当 $v \wedge w \notin \{v, w\}$. 时，$E_v(W_v)$ 与$E_w(W_w)$ 由于具有不相交支撑而正交。不妨设，只需考虑 v，$w \in X$，使得 $w \in U_v$。于是令 $\psi \in W_v$，$\eta \in W_w$。我们有

$$\langle E_v\psi, E_w\eta\rangle_{L^2(\omega)} = \psi(p^{|w|-|v|-1}(w)) \sum_{u\in s(w)} \eta(u) \sum_{x\in T_u} \varphi_{|v|+1}(x)\varphi_{|w|+1}(x)\omega(x) = 0,$$

根据 η 的零均值以及 φ_k的径向性。

现在考虑 $f \in A^2_\omega$，定义

$$\psi_{f,o}(u) = f(u) - f(o)$$
$$\psi_{f,v}(u) = f(u) - \frac{q(v)+1}{q(v)} f(v) + \frac{1}{q(v)} f(p(v)).$$

由于 f 是调和的，我们有$\psi_{f,\ v} \in W_v$ 对每个 $v \in X$ 均成立。令

$$g = f(o) + \sum_{v\in X} E_v\psi_{f,v}$$

并且我们证明 $f = g.$。事实是，$f(o) = g(o)$，这再次源于函数 $E_v(\psi)$的支集；而对于 $x \in X \setminus \{o\}$，我们有

$$\begin{aligned} g(x) &= f(o) + \sum_{\ell=1}^{|x|} E_{p^\ell(x)}\psi_{f,p^\ell(x)}(x) \\ &= f(o)(1-\varphi_1(x)) + f(p^{|x|-1}(x))\varphi_1(x) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{|x|-1} \Big[f(p^{\ell-1}(x)) - \frac{q(p^\ell(x))+1}{q(p^\ell(x))} f(p^\ell(x)) + \frac{1}{q(p^\ell(x))} f(p^{\ell+1}(x))\Big]\varphi_{|x|-\ell+1}(x) \end{aligned} \tag{4}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{|x|} a_\ell(x) f(p^\ell(x)) + f(x),$$

with

$$a_1(x) = \varphi_{|x|-1}(x) - \frac{q(p(x))+1}{q(p(x))},$$
$$a_\ell(x) = \varphi_{|x|-\ell}(x) - \frac{q(p^\ell(x))+1}{q(p^\ell(x))}\varphi_{|x|-\ell+1}(x) + \frac{1}{q(p^{\ell-1}(x))}\varphi_{|x|-\ell+2}(x),$$
$$a_{|x|}(x) = 1 - \varphi_1(x) + \frac{1}{q(p^{|x|-1}(x))}\varphi_2(x).$$

现在注意，根据 φ_k 的定义，我们有

$$\varphi_k = q(k-1)(\varphi_{k-1} - 1).$$

因此，对于每个 $\ell = 1, \dots, |x|$，我们有 $a_\ell(x) = 0$。结合恒等式 (4)，可得 $f(x) = g(x)$。□

下面的推论明确描述了 Bergman 投影 P_ω 的核。

推论 2.3. 我们有，正交投影 P_ω 可以写为

$$P_\omega f = \langle f \rangle_X + \sum_{v \in X} P_v f.$$

注意，算子 P_v 是积分算子，其核为

(5)

$$K_v(x,y) = \sum_{u \in s(v)} \sum_{w \in s(v)} k_v(u,w) \frac{\varphi_{|v|+1}(y)\varphi_{|v|+1}(x)}{\|\varphi_{|v|+1}\mathbb{1}_{T_u}\|^2_{L^2(\omega)}} \mathbb{1}_{T_w}(y)\mathbb{1}_{T_u}(x), \qquad x,\ y \in X.$$

因此，由推论 2.3 可知， P_ω 的核 K_ω 为

$$K_\omega(x,y) = \frac{1}{\omega(X)} + \sum_{\ell=0}^{|x\wedge y|} K_{p^\ell(x\wedge y)}(x,y).$$

最后，我们通过定义正 Bergman 投影来结束本节。

定义 2.4. 设 $\omega \in L^1(X)$ 是一个正径向权。对于紧支撑的 f，我们将正 Bergman 投影定义为算子

$$P^+_\omega f(x) = \langle f \rangle_X + \sum_{v \in X} \sum_{y \in X} |K_v(x,y)| f(y)\omega(y).$$

我们还将正 Bergman 核定义为

$$K^+_\omega(x,y) = \frac{1}{\omega(X)} + \sum_{v \in X} |K_v(x,y)|.$$

3. Kernel estimates and the proof of Theorem 1.2

本节包含对核 k_v, K_v 和 K_ω 的估计。在获得所需的估计后，定理 1.2 将直接应用以下定理 [7, 定理 C]。

定理 3.1。 设 ω 是树 X上的有限正权。设 T 是一个在 $L^2(\omega)$ 上有界且具有对称核 K的积分算子。假设 K 满足以下条件

(Hör) $$\sup_{Q \in \mathcal{T}} \sup_{x,y \in Q} \sum_{z \in X \setminus Q} |K_\omega(z,x) - K_\omega(z,y)|\omega(z) < +\infty$$

and

(S) $$\sup_{Q \in \mathcal{T}} \sup_{x \in Q} \sum_{x \in Q^{(1)} \setminus Q} |K_\omega(z,x)|\omega(z) < +\infty.$$

则 T 是弱型$(1,\ 1)$，从而对于每个 $p \in (1,\ \infty)$ 都是强型$(p,\ p)$。

第一个引理是对核大小的估计。

引理 3.2. 下面给出了相关核的估计。设 $v \in X$，则有

(6) $$|k_v(u,w)| \asymp \begin{cases} 1 & u = w, \\ q(v)^{-1} & u \neq w, \end{cases} \qquad u,\ \ w \in s(v);$$

(7) $$|K_v(x,y)| \asymp \begin{cases} \omega(U_{x\wedge y})^{-1}, & x \wedge y = v, \\ \omega(T_u)^{-1}, & x \wedge y \neq v,\ u \in s(v), \end{cases} \qquad x, y \in U_v;$$

$$|K_\omega(x,y)| \lesssim \begin{cases} \omega(T_{x\wedge y})^{-1}, & x\wedge y \in \{x,y\}, \\ \omega(U_{x\wedge y})^{-1}, & x\wedge y \notin \{x,y\}, \end{cases} \qquad x,y\in X. \tag{8}$$

证明。设 $v\in X$。核 k_v 的估计直接来自显式公式 (2)。注意，每当 $x\wedge y = v$ 时，都存在 $u,w\in s(v)$，满足 $u\neq w$，使得 $x\in T_u$ 且 $y\in T_w$。在这种情况下，我们有 $k_v(u,w) = -q(v)^{-1}$，因此由 (5) 得

$$|K_v(x,y)| = \frac{1}{q(v)\|\varphi_{|v|+1}\mathbb{1}_{T_v}\|^2_{L^2(\omega)}} \asymp \frac{1}{q(v)\omega(T_u)} = \frac{1}{\omega(U_v)}.$$

另一方面，如果 $x\wedge y\neq v$，那么对于某个 $u\in s(v)$，有 $x,\ y\in T_u$，因此$k_v(u,\ u)\asymp 1$ 且 $K_v(x,\ y)\asymp \omega(T_u)^{-1}$。最后，我们回顾一下

$$K_\omega(x,y) = \frac{1}{\omega(X)} + \sum_{\ell=0}^{|x\wedge y|} K_{p^\ell(x\wedge y)}(x,y).$$

如果 $x\wedge y\in\{x,y\}$，那么关于 $\ell=0$ 的项为零，因为 $(x,\ y)\notin \operatorname{supp} K_{x\wedge y} = U_{x\wedge y}\times U_{x\wedge y}$。利用前面的估计，我们得到

$$\begin{aligned} |K_\omega(x,y)| &\lesssim \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{|x\wedge y|} |K_{p^\ell(x\wedge y)}(x,y)|, & x\wedge y\in\{x,y\}, \\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{|x\wedge y|} |K_{p^\ell(x\wedge y)}(x,y)|, & x\wedge y\notin\{x,y\} \end{cases} \\ &\asymp \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{|x\wedge y|} \frac{1}{\omega(T_{p^{\ell-1}(x\wedge y)})}, & x\wedge y\in\{x,y\}, \\ \displaystyle\frac{1}{\omega(U_{x\wedge y})} + \sum_{\ell=1}^{|x\wedge y|} \frac{1}{\omega(T_{p^{\ell-1}(x\wedge y)})}, & x\wedge y\notin\{x,y\}. \end{cases} \end{aligned}$$

最后，注意到给定一个扇形 $T_x\in\mathcal{T}$，我们有

$$\omega(T_{p(x)}) = \omega(x) + q(x)\omega(T_x) \geq 2\omega(T_x).$$

因此我们有

$$\frac{1}{\omega(U_{x\wedge y})} + \sum_{\ell=0}^{|x\wedge y|-1} \frac{1}{\omega(T_{p^\ell(x\wedge y)})} \leq \frac{1}{\omega(U_{x\wedge y})} + \frac{1}{\omega(T_{x\wedge y})} \sum_{\ell=0}^{|x\wedge y|-1} 2^{-\ell} \lesssim \frac{1}{\omega(U_{x\wedge y})},$$

另一种情况也类似。 □

引理 3.3. 令 $\ell\in\mathbb{N}_0$ 和 $x,z,v\in X$ 满足 $x\in U_v$ 和 $z\notin T_v$。则有

$$|K_{p^\ell(v\wedge z)}(z,x) - K_{p^\ell(v\wedge z)}(z,v)| \lesssim \begin{cases} \dfrac{1}{\omega\big(T^{(\ell-1)}_{v\wedge z}\big)} \displaystyle\prod_{i=|v\wedge z|-\ell+1}^{|v|} q(i)^{-1}, & \text{if } 1\leq \ell\leq |v\wedge z|, \\ \dfrac{1}{\omega(U_{v\wedge z})} \displaystyle\prod_{i=|v\wedge z|+1}^{|v|} q(i)^{-1}, & \text{if } \ell = 0,\ z\neq z\wedge v. \end{cases}$$

注意，在 $\ell=0$ 的情况下，我们需要排除 $z=z\wedge v$ 的情形；否则，不等式左端将消失，因为（$z,\ v$）$\notin \operatorname{supp} K_{p^{\ell(v\wedge z)}} = \operatorname{supp} K_z$。

证明。令 $x \in U_v$ 和 $z \notin T_v$。由于对于某个 $n \in \{1, \dots, |v|\}$，有 $x \wedge z = v \wedge z = p^n(v)$，因此对于 $\ell \geq 1$，我们有

$$
\begin{aligned}
&|K_{p^\ell(v\wedge z)}(z,x) - K_{p^\ell(v\wedge z)}(z,v)| = |K_{p^{\ell+n}(v)}(z,x) - K_{p^{\ell+n}(v)}(z,v)| \\
&= k_{p^{\ell+n}(v)}(p^{\ell+n-1}(v), p^{\ell+n-1}(v))\varphi_{|v|-n-\ell+1}(z)\frac{|\varphi_{|v|-n-\ell+1}(x) - \varphi_{|v|-n-\ell+1}(v)|}{\|\varphi_{|v|-n-\ell+1}\mathbb{1}_{T_v^{(n+\ell-1)}}\|^2_{L^2(\omega)}} \\
&\lesssim \frac{1}{\omega\big(T_v^{(n+\ell-1)}\big)}|\varphi_{|v|-n-\ell+1}(x) - \varphi_{|v|-n-\ell+1}(v)|.
\end{aligned}
$$

此外，对于 $m \geq k$，我们有

$$
\begin{aligned}
\varphi_k(m+n) - \varphi_k(m) &= \sum_{j=0}^{m+n-k}\prod_{i=k}^{m+n-j-1} q(i)^{-1} - \sum_{j=0}^{m-k}\prod_{i=k}^{m-j-1} q(i)^{-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\prod_{i=k}^{m+n-j-1} q(i)^{-1} \\
&= \prod_{i=k}^{m} q(i)^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{i=m+1}^{m+n-j-1} q(i)^{-1} \lesssim \prod_{i=k}^{m} q(i)^{-1}.
\end{aligned}
$$

当 $\ell = 0$ 和 $z \neq z \wedge v$ 时，存在 u，$w \in s(z \wedge v)$，使得 $z \in T_u$ 和 $v \in T_w$。因此，在这种情况下

$$
\begin{aligned}
|K_{v\wedge z}(z,x) - K_{v\wedge z}(z,v)| &= |k_{p^n(v)}(u,w)|\varphi_{|v|-n+1}(z)\frac{|\varphi_{|v|-n+1}(x) - \varphi_{|v|-n+1}(v)|}{\|\varphi_{|v|-n+1}\mathbb{1}_{T_u}\|^2_{L^2(\omega)}} \\
&\lesssim \frac{1}{\omega\big(U_v^{(n)}\big)}\prod_{i=|v|-n+1}^{|v|} q(i)^{-1},
\end{aligned}
$$

利用 $|k_{p^n(v)}(u,\ w)| = q(p^n(v))^{-1}$，可得。 □

定理 1.2 可由以下命题直接推出。

命题 3.4。设 ω 是径向树 X 上的一个正径向权。那么，核 K_ω 满足 (H¨or) 和 (S)。

证明。首先注意到，根据三角不等式，只需证明条件 (H¨or)，其中 $Q = T_v$、$x \neq v$ 和 $y = v.$。令 $x \in U_v$ 和 $z \notin T_v$。再令 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $x \wedge z = v \wedge z = p^n(v)$。于是我们有

$$
\begin{aligned}
|K_\omega(z,x) - K_\omega(z,v)| &\leq |K_{v\wedge z}(z,x) - K_{v\wedge z}(z,v)| + \sum_{\ell=1}^{|v|-n}|K_{p^\ell(v\wedge z)}(z,x) - K_{p^\ell(v\wedge z)}(z,v)| \\
&= \mathrm{I} + \mathrm{II}.
\end{aligned}
$$

当 $z = z \wedge v$ 时，项 I 为零；否则，它由引理 3.3 控制。注意，由引理 3.3 可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &\lesssim \sum_{\ell=1}^{|v|-n}\frac{1}{\omega\big(T_v^{(n+\ell-1)}\big)}\prod_{i=|v|-n-\ell+1}^{|v|}\frac{1}{q(i)} \\
&= \frac{1}{\omega\big(T_v^{(n)}\big)}\prod_{i=|v|-n}^{|v|}\frac{1}{q(i)}\sum_{\ell=1}^{|v|-n}\frac{\omega\big(T_v^{(n)}\big)}{\omega\big(T_v^{(n+\ell-1)}\big)}\prod_{t=1}^{\ell-1}\frac{1}{q(|v|-n-\ell+t)}
\end{aligned}
$$

$$\lesssim \frac{1}{\omega\big(T_v^{(n)}\big)} \prod_{i=|v|-n}^{|v|} \frac{1}{q(i)} \lesssim \frac{1}{\omega\big(U_v^{(n)}\big)} \prod_{i=|v|-n+1}^{|v|} \frac{1}{q(i)},$$

其中我们采用与控制 I 相同的估计。综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{z\in X\setminus T_v} |K_\omega(z,x)-K_\omega(z,v)|\,\omega(z)\\
&=\sum_{n=1}^{|v|}\left[|K_\omega(p^n(v),x)-K_\omega(p^n(v),v)|\,\omega(p^n(v))+\sum_{z\in U_v^{(n)}\setminus T_v^{(n-1)}}|K_\omega(z,x)-K_\omega(z,v)|\,\omega(z)\right]\\
&\lesssim\sum_{n=1}^{|v|}\left[\frac{\omega(p^n(v))}{\omega\big(T_v^{(n)}\big)}\prod_{i=|v|-n}^{|v|}\frac{1}{q(i)}+\frac{\omega\big(U_v^{(n)}\setminus T_v^{(n-1)}\big)}{\omega\big(U_v^{(n)}\big)}\prod_{i=|v|-n+1}^{|v|}\frac{1}{q(i)}\right]\\
&\lesssim\sum_{n=1}^{|v|}\prod_{i=|v|-n+1}^{|v|}\frac{1}{q(i)}\lesssim 1.
\end{aligned}$$

类似地，我们证明 $Q=T_v$ 和 $x=v$满足大小条件 (S)，因为其他情形可通过对核应用 H¨ormander 条件 (H¨or) 得到。由命题 3.2，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in T_v^{(1)}\setminus T_v}|K_\omega(z,v)|\,\omega(z)&=|K(p(v),v)|\,\omega(p(v))+\sum_{z\in U_v^{(1)}\setminus T_v}|K_\omega(z,v)|\,\omega(z)\\
&\lesssim\frac{\omega(p(v))}{\omega\big(T_v^{(1)}\big)}+\frac{\omega\big(U_v^{(1)}\setminus T_v\big)}{\omega\big(U_v^{(1)}\big)}\lesssim 1.
\end{aligned}$$

□

4. 稀疏控制与 P +ω 的有界性

算子 P_ω^+有界性的证明通过对该算子进行稀疏控制来完成。设 ω 是树上的一个正权，且 $\Lambda>1$。如果对于每个 $\Omega\subseteq X$，都有下式成立，则称子集族 $\mathcal{S}$ 在 $(X,\ \omega)$ 中是 Λ-Carleson：

$$\sum_{Q\in\mathcal{S},Q\subseteq\Omega}\omega(Q)\le\Lambda\omega(\Omega).$$

如果族 $\mathcal{S}$是嵌套的，也就是说，对于某个 $Q,\ R\in\mathcal{S}$，若 $Q\cap R\neq\emptyset$，则必有 $Q\subseteq R$或 $R\subseteq Q$，那么只需检验 $\Omega\in\mathcal{S}$上的条件。

在无原子的度量测度空间中，$\Lambda-$ Carleson 的概念与稀疏性 [19]的概念等价。这里我们针对情形 $\mathcal{S}=\mathcal{T}$. 给出论证的一种修改。尽管这个主要观察很简单，但它指出，权 ω 使集合族 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{U}$ Λ-Carleson（对某个 $\Lambda>1$˘）当且仅当 ω 是 $\mathcal{D}_{\rm tree}$。

命题 4.1. 设 $\omega\in L^1(X)$ 为正。

(a) 如果 $\omega\in$˘$\mathcal{D}_{\rm tree}$，那么 $\mathcal{T}$ 是 $(X,\ \omega)$ 中的 Λ-Carleson 集族。(b) 如果对于某个 $\Lambda>1$，$\mathcal{T}$ 是 $(X,\ \omega)$ 中的 Λ-Carleson 集，那么对于每个 $\eta\in(0,\ 1)$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\eta\omega(T_x)\le\omega(T_x\cap B(x,N)),\quad x\in X. \tag{9}$$

ˇ因此 $\omega \in \mathcal{D}_{\text{tree}}$。

证明。 条件 ˇ $\mathcal{D}_{\text{tree}}$ 显然足以保证 $\mathcal{T}$ 在 (X,ω) 中是 Carleson 的，因为对每个 $Q \in \mathcal{T}$，我们都有

$$\sum_{x\in Q}\omega(T_x) \le \frac{1}{\eta}\sum_{x\in Q}\omega(T_x\cap B(x,N)) = \frac{1}{\eta}\sum_{x\in Q}\sum_{y\in T_x\cap B(x,N)}\omega(y) \le \frac{N}{\eta}\omega(Q).$$

另一方面，假设 $\mathcal{T}$ 是 Λ-Carleson 的。令 $x \in X$ 和 $\eta \in (0,1)$。我们设 $N = \left\lfloor \frac{\Lambda}{1-\eta} \right\rfloor$

$$\begin{aligned}\Lambda\omega(T_x) &\ge \sum_{y\in T_x}\omega(T_y) = \sum_{y\in T_x}\sum_{z\in T_y}\omega(z)\\ &= \sum_{z\in T_x}(d(x,z)+1)\omega(z) \ge \frac{\Lambda}{1-\eta}\omega(T_x\setminus B(x,N)).\end{aligned}$$

因此我们有

$$\omega(T_x\cap B(x,N)) = \omega(T_x) - \omega(T_x\setminus B(x,N)) \ge \eta\omega(T_x).$$

□

注意， $\mathcal{T}$ 在 (X,ω) 中是 Carleson 的，当且仅当 $\mathcal{U}$ 是。事实上，假设 $\mathcal{T}$ 在 (X,ω) 中是 Carleson 的，给定 $x \in X$，我们有

$$\sum_{\substack{S\in\mathcal{U}\\ S\subseteq U_x}}\omega(S) = \sum_{\substack{Q\in\mathcal{T}\\ Q\subseteq U_x}}\omega(Q) = \sum_{\substack{P\in\mathcal{T}\\ P^{(1)}=T_x}}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{T}\\ Q\subseteq P}}\omega(Q) \le \Lambda\sum_{\substack{P\in\mathcal{T}\\ P^{(1)}=T_x}}\omega(P) = \Lambda\omega(U_x).$$

另一方面，如果 $\omega \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ 和 $x \in X$，那么

$$\sum_{\substack{S\in\mathcal{T}\\ S\subseteq T_x}}\omega(S) = \omega(T_x) + \sum_{\substack{S\in\mathcal{T}\\ S\subsetneq T_x}}\omega(S) = \omega(T_x) + \sum_{\substack{P\in\mathcal{U}\\ P\subseteq U_x}}\omega(P) \le \omega(T_x)+\Lambda\omega(U_x) \le (\Lambda+1)\omega(T_x).$$

因此，可以通过将（9）替换为以下条件，重复上述刻画来刻画测度 $\omega \in$ ˇ$\mathcal{D}_{\text{tree}}$：

$$\eta\omega(U_x) \le \omega(U_x\cap B(x,N-1)), \qquad x\in X. \tag{10}$$

我们对使 P_ω^+ 在 $L^p(\omega)$ 上有界的测度有如下刻画。近期的预印本 [5] 中也给出了相同的论证。不过，我们仍给出一个直接证明，因为在我们的情形下，该论证尤其简单，并突出了树的几何结构以及测度衰减所起的作用。

定理 4.2。 给定 $\omega \in L^1(X)$ 为正。以下条件等价。

(a) $\omega \in$ ˇ$\mathcal{D}_{tree}$; (b) P_ω^+在 $L^p(\omega)$ 上对某个（因而对所有）$1<p<\infty$有界。

证明。 假设 (i) 成立。我们证明 P_ω^+ 的一个稀疏控制结果。事实上，由核的估计可直接推出，对于 $x \in X$ 和 $f \in L^p(\omega), f(o) = 0$，我们有

$$P_\omega^+ f(x) = \sum_{n=1}^{|x|}\left[K_\omega^+(x,p^n(x))f(p^n(x))\omega(p^n(x)) + \sum_{y\in U_x^{(n)}\setminus T_x^{(n-1)}}K_\omega^+(x,y)f(y)\omega(y)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{y\in T_x} K_\omega^+(x,y)f(y)\omega(y)\\
&\le \sum_{n=0}^{|x|}\frac{1}{\omega(T_x^{(n)})}\sum_{y\in T_x^{(n)}}|f(y)|\omega(y)+\sum_{n=1}^{|x|}\frac{1}{\omega(U_x^{(n)})}\sum_{y\in U_x^{(n)}}|f(y)|\omega(y)\\
&=: \mathcal{A}_{\mathcal{T}}f(x)+\mathcal{A}_{\mathcal{U}}f(x).
\end{aligned}
$$

然后，我们可以照常论证，证明 $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ 在 $L^p(\omega)$ 上有界，并且对 $\mathcal{S}=\mathcal{T}$，$\mathcal{U}$ 满足弱型 (1,1) 估计。为完整起见，我们回顾 $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ 的弱型 (1,1) 证明（ $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ 的证明类似）。取 $f\in L^1(\omega)$。由经典论证 [11,Exercise 1.4.14]，只需证明

$$
\sup_{\substack{F\subseteq X\\ 0<\omega(F)<\infty}}\ \inf_{\substack{F'\subseteq F\\ \omega(F')\ge\frac12\omega(F)}}\ \sum_{x\in F'}\mathcal{A}_{\mathcal{T}}f(x)\omega(x)\lesssim\|f\|_1,
$$

由于左端等价于$\|\mathcal{A}_{\mathcal{T}}f\|_{1,\infty}$。取 $F\subseteq X$，使得 $0<\omega(F)<\infty$。取$\eta\in(0,1)$。根据命题 4.1，存在一个仅依赖于 ω 和 η 的 $N\in\mathbb{N}$，使得 (9)（以及 (10)）成立。令

$$
F'=\left\{x\in F\colon \mathcal{A}_{\mathcal{T}}1_F(x)\le\frac{8N}{\eta}\right\}.
$$

对于每个 $v\in X$，我们定义 $E_{T_v}=T_v\cap B(v,\ N)$（在 $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ 的情形下定义 $E_{U_v}=U_v\cap B(v,\ N-1)$）。我们首先注意到

$$
\begin{aligned}
\omega(F\setminus F')&<\frac{\eta}{8N}\sum_{x\in F}\mathcal{A}_{\mathcal{T}}1_F(x)\omega(x)=\frac{\eta}{8N}\sum_{Q\in\mathcal{T}}\langle 1_F\rangle_Q^2\omega(Q)\\
&\le\frac{1}{8N}\sum_{Q\in\mathcal{T}}\sum_{x\in E_Q}|(\mathcal{M}_{\mathcal{T}}1_F)(x)|^2\omega(x)\le\frac18\|\mathcal{M}_{\mathcal{T}}1_F\|_2^2\le\frac12\omega(F),
\end{aligned}
$$

利用与扇形相关的极大函数 $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ 满足 $\|\mathcal{M}_{\mathcal{T}}f\|_2\le 2\|f\|_2$（见 Doob 极大不等式 [20, §14.6]）。这意味着 $\omega(F')\ge\omega(F)/2$。令 $x\in X$。如果 $Q_0\in\mathcal{T}$ 是包含 x 且满足$\omega(Q_0\cap F')>0$ 的最小扇形，那么对于每个 $y\in Q_0\cap F'$，我们有

$$
\mathcal{A}_{\mathcal{T}}1_{F'}(x)\le\mathcal{A}_{\mathcal{T}}1_{F'}(y)\le\frac{8N}{\eta}.
$$

我们得出

$$
\sum_{x\in F'}\mathcal{A}_{\mathcal{T}}f(x)\omega(x)=\sum_{Q\in\mathcal{T}}\langle|f|\rangle_Q\omega(Q\cap F')=\sum_{x\in X}|f(x)|\mathcal{A}_{\mathcal{T}}1_{F'}(x)\omega(x)\lesssim\|f\|_1.
$$

我们已经证明，$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}\colon\ L^1(\omega)\to L^{1,\infty}(\omega)$是有界的，$P_\omega^+$也同样如此。另一方面，假设(ii)对 $1<p<\infty$成立。令 $Q\in\mathcal{T}$和 $f=g=\mathbb{1}_Q$。由于对每个 $1<r<\infty$，都有 $f,\ g\in L^r(\omega)$，因此我们有

$$
\left\langle P_\omega^+f,g\right\rangle\lesssim\|f\|_p\|g\|_{p'}=\omega(Q).
$$

注意到

$$
\left\langle P_\omega^+f,g\right\rangle=\sum_{x\in Q}\sum_{y\in Q}K_\omega^+(x,y)\omega(y)\omega(x)
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{x\in Q}\Bigg[\sum_{y\in T_x} K_\omega^+(x,y)\omega(y) + \sum_{k=1}^{|x|-|Q|}\sum_{y\in U_x^{(k)}\setminus T_x^{(k-1)}} K_\omega^+(x,y)\omega(y)\Bigg]\omega(x)\\
&\gtrsim \sum_{x\in Q}\Bigg[1+\sum_{k=1}^{|x|-|Q|}\frac{\omega\big(U_x^{(k)}\setminus T_x^{(k-1)}\big)}{\omega\big(U_x^{(k)}\big)}\Bigg]\omega(x)\\
&= \sum_{x\in Q}\Bigg[1+\sum_{k=1}^{|x|-|Q|}\Big(1-\frac{1}{q(p^k(x))}\Big)\Bigg]\omega(x)\\
&\gtrsim \sum_{x\in Q}\#\{R\in\mathcal{T}\colon x\in R\subseteq Q\}\,\omega(x) = \sum_{\substack{R\in\mathcal{T}\\ R\subseteq Q}}\omega(R).
\end{aligned}
$$

综上，我们得到 $\mathcal{T}$ 是 Carleson。 □

5. Endpoint estimates for the Bergman projection

本节中，我们证明 P_ω 端点估计 $P_\omega\colon\ L^\infty(X)\to\mathcal{B}$。为了在离散情形下定义合适的布洛赫空间，我们采用离散梯度 $\nabla g(x) = g(p(x)) - g(x)$ for $x\in U_o$ 的经典概念。因此，我们将布洛赫空间定义为

$$\mathcal{B} = \{f\colon X\to\mathbb{R}\colon \|f\|_{\mathcal{B}} := |f(o)| + \|\nabla f\mathbb{1}_{U_o}\|_\infty < +\infty\}.$$

作为定理 [6, 定理 C], 的直接推论，我们有：P_ω 从 $L^\infty(X)$ 到 $BMO(\omega)$ 是有界的，并且将 $H^1(\omega)$ 映射到 $L^1(\omega)$ 中，其中空间 $BMO(\omega)$ 和 $H^1(\omega)$ 定义如下。

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\omega)} = \langle|f|\rangle_X + \sup_{x\in X}|f(x)-\langle f\rangle_{T_x}| + \sup_{\substack{Q\in\mathcal{T}\\ Q\neq X}}\langle|f-\langle f\rangle_{Q^{(1)}}|\rangle_Q.$$

下文中，我们还将使用范数等价（见 [4]），其形式为

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\omega)} \asymp \langle|f|\rangle_X + \sup_{Q\in\mathcal{T}}\langle|f-\langle f\rangle_Q|\rangle_Q + \sup_{\substack{Q\in\mathcal{T}\\ Q\neq X}}|\langle f\rangle_Q - \langle f\rangle_{Q^{(1)}}|. \tag{11}$$

最后，BMO(ω) 的对偶空间是由平方函数定义的原子 Hardy 空间

$$H^1(\omega) = \Bigg\{f\in L^1(\omega)\colon \|f\|_{H^1} = \sum_{x\in X}\Bigg(|f(x)-\langle f\rangle_{T_x}|^2 + \sum_{\ell=1}^{|x|}|\langle f\rangle_{T_x^{(\ell-1)}} - \langle f\rangle_{T_x^{(\ell)}}|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg\}.$$

容易看出，BMO(ω) $\subseteq\mathcal{B}$。事实上，对于 $f\in$ BMO(ω)，我们写出

$$|f(x)-f(p(x))| \leq |f(x)-\langle f\rangle_{T_x}| + |\langle f\rangle_{T_x} - \langle f\rangle_{T_x^{(1)}}| + |\langle f\rangle_{T_x^{(1)}} - f(p(x))| \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}(\omega)},$$

对第一项和最后一项应用 BMO(ω) 的定义，并对中间项使用 (11)，即可得到。

事实证明，如果 ω 衰减得足够快，则这两个空间相同，且范数等价。然而，一般情况下等式并不成立。

命题 5.1。 设 $\omega\in L^1(X)$ 为正。则以下各项等价

(a) $\mathcal{B}$ =BMO(ω)，且范数等价。(b) $\omega\in$ $\check{}\mathcal{D}_{\mathrm{tree}}$。

证明。我们首先假设 $\omega \in \check{\mathcal{D}}_{\text{tree}}$。只需证明 $\mathcal{B} \subseteq \text{BMO}(\omega)$。取$f \in \mathcal{B}$。注意，对于满足 $y \in T_x$ 和 $d(x, y) = n$的情形，我们可以迭代$\|f\|_{\mathcal{B}}$ 的定义，从而得到

$$|f(x) - f(y)| \le \sum_{j=1}^{n} |f(p^j(y)) - f(p^{j-1}(y))| \le n\|f\|_{\mathcal{B}}.$$

因此，我们可以估计

$$\begin{aligned} |f(x) - \langle f\rangle_{T_x}| &\le \frac{1}{\omega(T_x)} \sum_{y\in T_x} |f(x) - f(y)|\omega(y) \le \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{\omega(T_x)} \sum_{y\in T_x} d(y, x)\omega(y) \\ &\le \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{\omega(T_x)} \sum_{R\in T, R\subseteq T_x} \omega(R) \le \Lambda\|f\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

利用 $\mathcal{T}$ 在 (X, ω) 中是 Λ-Carleson 这一事实。此外，通过类似的计算,

$$\begin{aligned} \langle |f - \langle f\rangle_{Q^1}|\rangle_Q &\le \frac{1}{\omega(Q)} \frac{1}{\omega(Q^{(1)})} \sum_{x\in Q} \sum_{y\in Q^{(1)}} |f(x) - f(y)|\omega(y)\omega(x) \\ &\le \|f\|_{\mathcal{B}} \frac{1}{\omega(Q)} \frac{1}{\omega(Q^{(1)})} \sum_{y\in Q^{(1)}} \sum_{x\in Q} d(x, y)\omega(x)\omega(y) \\ &\le \frac{1}{\omega(Q)} \frac{1}{\omega(Q^{(1)})} \sum_{R\in T, R\subseteq Q^{(1)}} \omega(R) \sum_{y\in Q^{(1)}} \omega(y) \le \Lambda\|f\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

最后，用同样的方法还可以得到

$$\left| \sum_{x\in X} f(x)\omega(x) \right| \le |f(o)|(\omega(X) - \omega(o)) + \sum_{y\neq o} |f(y) - f(o)|\omega(y) \lesssim \|f\|_{\mathcal{B}}.$$

因此， $f \in \text{BMO}(\omega)$。还需证明：若 ω 满足 $\mathcal{B} = \text{BMO}(\omega)$，则存在 $\Lambda > 1$，使得 $\mathcal{T}$ 在 (X, ω) 中是 Λ-Carleson。令 $f(x) = |x|$。显然， $\|f\|_{\mathcal{B}} = 1$ ，因此根据假设， $f \in \text{BMO}(\omega)$。由此，根据 BMO(ω)-范数的定义可得

$$\begin{aligned} \|f\|_{\text{BMO}(\omega)} &\ge |f(x) - \langle f\rangle_{T_x}| \\ &= \left| |x| - \frac{1}{\omega(T_x)} \sum_{y\in T_x} (|x| + d(x, y))\omega(y) \right| = \sum_{R\in\mathcal{T}, R\subseteq T_x} \omega(R), \end{aligned}$$

这证明了 $\mathcal{T}$ 在 (X, ω) 中是 Λ-Carleson，其中 $\Lambda = \|f\|_{\text{BMO}(\omega)}$。 □

推论 5.2。设 ω X 上的一个正径向权。则 $P_\omega : L^\infty(\omega) \to \mathcal{B}$ 有界。

6. Appendix

设 $\Omega \in L^1(0, 1)$ 为权函数。我们假设 Ω 在任意区间 $(r, 1)$ 上都不恒等于零，$0 < r < 1$。我们将 $\widehat{\Omega}(r) := \int_r^1 \Omega(t)dt$ 记为累积权函数。我们还将使用以下记号

$$M_\Omega(x) = \int_0^1 \Omega(t)t^{x+1}dx.$$

我们希望证明，如果某个权满足 Dostani´c 条件，那么对于某个$p \neq 2$，它就满足上倍增条件。不失一般性，我们假设 $p \in (1, 2)$。

对于单变量函数 f，我们使用以下记号

$$\Delta(f; x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

只要增量商有定义即可。我们首先给出以下关于凹函数的初等引理。

引理 6.1。设 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 是一个非负、非递减的凹函数，使得 $f(x) = o(x)$ 当 $x \to \infty$.时成立。进一步假设，存在 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ 和 $C > 0$，使得对所有 $x > 0$ 都有

$$\Delta(f; x, \alpha x) \leq \Delta\Big(f; \frac{\alpha}{2\alpha - 1} x, x\Big) + \frac{C}{x}.$$

那么对所有 $x > 0$ 都有

$$f(x) - f(\alpha x) \leq C.$$

证明。设 $x > 0$，我们有

$$\begin{aligned} \Delta(f; x, \alpha x) &\leq \Delta\Big(f; \frac{\alpha}{2\alpha - 1} x, x\Big) + \frac{C}{x} \\ &= \Delta\Big(f; \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} \frac{x}{\alpha}, x\Big) + \frac{C}{x} \leq \Delta\Big(f; \frac{x}{\alpha}, x\Big) + \frac{C}{x}. \end{aligned} \tag{12}$$

上述不等式链中唯一非平凡的步骤是最后一步，在这一步中我们使用了 f 的凹性以及 $\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} > 1$这一事实。将同一个不等式迭代 n 次，我们得到

$$\Delta(f; x, \alpha x) \leq \Delta\Big(f; \frac{x}{\alpha^n}, \frac{x}{\alpha^{n-1}}\Big) + \frac{C}{x} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i. \tag{13}$$

注意到

$$0 \leq \Delta\Big(f; \frac{x}{\alpha^n}, \frac{x}{\alpha^{n-1}}\Big) = \frac{f(\frac{x}{\alpha^n}) - f(\frac{x}{\alpha^{n-1}})}{\frac{x}{\alpha^n}(1 - \alpha)} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \frac{\alpha^n f(\frac{x}{\alpha^n})}{x} = o(1)$$

当 $n \to \infty$时。因此令不等式（13）中的 $n \to \infty$ 取极限，我们得到

$$\Delta(f; x, \alpha x) \leq \frac{C}{x(1 - \alpha)}$$

这等价于所需的不等式。 □

现在我们说明如何将前面的引理应用于函数 $f(x) = -\ln M_\Omega(x)$。不失一般性，我们可以假设 $\Omega(0) = 1$，从而 f 是非负的。根据 Hölder 不等式，f 具有凹性。由 Ω 在任意区间（r，1） $r \in (0, 1)$上都不恒等于零这一事实可知，当$x \to \infty$ 时，$f(x) = o(x)$。事实上，

$$\frac{f(x)}{x} = -\ln\Big(\Big(\int_0^1 t^x \Omega(t) t dt\Big)^{\frac{1}{x}}\Big).$$

对数中的量如 $x \to \infty$ 所示，趋于关于测度 $\Omega(t)tdt$ 的 t 本质上确界。由于 Ω 在任何区间

$(r,\ 1)$ 上几乎处处不为零，因此本质上确界等于 1。最后，$p \in (1,\ 2)$ 的 Dostani´c 条件等价于不等式

$$f(2n) - \frac{1}{p} f(pn) - \frac{1}{p'} f(p'n) \le C, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

注意，由于 f 的凹性，我们有，对于任意 $x > 0$

$$f(x+1) - f(x) = \Delta(f; x, x+1) \le \Delta(f; 0, 1).$$

最后一个量是一个与 x 无关的常数，因此 Dostani´c 条件意味着

$$f(x) - \frac{1}{p} f\Big(\frac{p}{2} x\Big) - \frac{1}{p'} f\Big(\frac{p'}{2} x\Big) \le C', \qquad x > 0.$$

重新排列各项后，我们得到

$$\frac{2-p}{2p} x \Big(\Delta\Big(f; x, \frac{p}{2} x\Big) - \Delta\Big(f; x, \frac{p'}{2} x\Big)\Big) \le C', \qquad x > 0$$

这等价于前一个引理的假设，其中 $\alpha = \frac{p}{2}$ 和 $C = \frac{p}{2-p} C'$。因此我们可以得出

$$f(x) - f\Big(\frac{p}{2} x\Big) \le C, \qquad x > 0.$$

这等价于上倍增条件 [17, 引理 7]。

7. Use of Artificial Intelligence

除附录外，本文的定理推导、文献检索和正文撰写均未使用任何人工智能工具。附录中的定理最初由 Chat GPT 5.5 以较为复杂的方式证明。附录中给出的证明是作者在未使用人工智能的情况下，对 Chat GPT 的证明进行阐释和简化后得到的。最后，我们借助 Claude AI 修正了拼写错误和一些小问题。

References

[1] Nicola Arcozzi、Richard Rochberg 和 Eric Sawyer。复球上的 Drury–Arveson Hardy 空间及其他 Besov–Sobolev 空间的 Carleson 测度。 *Adv. Math.*，218 4 1107( ): –1180，2008。[2] Nikolaos Chalmoukis、Stefano Meda 和 Federico Santagati。蜘蛛网与 Gromov 双曲空间上 Hardy–Littlewood 极大算子的尖锐 L^p 界。 *J. Funct.Anal.*，291(5)，2026年。文章编号 111553，共45页。[3] Joel M. Cohen、Flavia Colonna、Massimo A. Picardello 和 David Singman。齐次各向同性树上的 Bergman 空间与 Carleson 测度。 *Potential Anal.*，44(4):745–766，2016。[4] Jos´e M. Conde Alonso、Filippo De Mari、Matteo Monti、Elena Rizzo 和 Maria Val- larino。非齐次树上的端点估计与稀疏控制。预印本，arXiv:2410.23047 [math.CA], 2024。[5] Jos´e M. Conde Alonso、Matteo Monti 和 Elena Rizzo。树上的近乎稀疏算子与 Bergman 投影算子。预印本，arXiv:2610.08211 [math.CA], 2026。[6] Filippo De Mari、Matteo Monti 和 Elena Rizzo。齐次树上的地平线调和 Bergman 空间。 *Anal. Appl., Singap.*，23(3):447–474，2025年。[7] Filippo De Mari、Matteo Monti 和 Maria Vallarino。齐次树上的调和 Bergman 投影算子。 *Potential Anal.*，61(1):153–182，2024年。[8] Milutin R. Dostani´c。指数权空间上 Bergman 投影算子的不有界性。 *L^p , II. Ser.*，47(1):111–117，2004年。[9] Milutin R. Dostani´c。径向权空间上 Bergman 投影算子的有界性。 *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.*，86:5–20，2009年。

[10] Frank Forelli 和 Walter Rudin。球上全纯函数空间的投影。*Indiana Univ. Math. J.*，24:593–602，1974。[11] Loukas Grafakos。 *Classical Fourier Analysis*， *Graduate Texts in Mathematics* 第249卷。施普林格，纽约，第3版，2014年。[12] Matteo Levi、Stefano Meda、Federico Santagati 和 Maria Vallarino。有界几何树上的 Hardy–Littlewood 极大算子。 *Trans. Am. Math. Soc.*，378 3979，2025 6 3951( ): – 。[13] Yuerang Li 和 Zipeng Wang。径向加权 Bergman 投影的强型与弱型估计。预印本，arXiv:2607.10742 [math.CV], 2026。[14] Anna Mc Court、Federico Santagati 和 Maria Vallarino。双曲型空间上的 Poincar´é 不等式。预印本，arXiv:2608.02369 [math.CA], 2026。[15] Alessandro Ottazzi 和 Federico Santagati。局部有限树上的调和 Bergman 空间。*Ann. Mat. Pura Appl. (4)*，205(4):1705–1729，2026年。[16] Alessandro Ottazzi、Federico Santagati 和 Maria Vallarino。配备指数增长测度的非齐次树上的 A_p 权。 *Rev. Mat. Complut.*，38 530，2025 2 505( ): – 。[17] Jos´e ´Angel Pel´aez、Elena de la Rosa 和 Jouni R¨atty¨a。倍增权诱导的勒贝格空间上的 Bergman 投影。 *Result. Math.*，79(1)，2024 年。文章编号 27，共19页。[18] Jos ´ ´ ¨ ¨ *Adv.* e *Math.* 391 2021 107950, 70

Angel Pelaez 和 Jouni Rattya。径向权诱导的 Bergman 投影。，，。文章编号 页。[19] Igor E. Verbitsky。离散小波–佩利空间的嵌入与乘子定理。*Pacific J. Math.*，176(2):529–556，1996。[20] David Williams。 *Probability with Martingales*。剑桥大学出版社，1991年。

Department of Mathematics and Applications, University of Milano-Bicocca, Piazza dell'Ateneo Nuovo, 20126 Milano, Italy*Email address*: nikolaos.chalmoukis@unimib.it

Department of Mathematics and Applications, University of Milano-Bicocca, Piazzadell'Ateneo Nuovo, 20126 Milano, Italy*Email address*: matteo.monti@unimib.it