arXiv:2611.31189v1 [hep-th] 23 Nov 2026

光锥规范下的无张力 M5 膜。需要采用旋量移动标架方法

Igor Bandos

物理学系与 *EHU* 量子中心，巴斯克地区大学*EHU*，邮政信箱 *644*，*48080* 毕尔巴鄂，西班牙，

and

IKERBASQUE，巴斯克科学基金会，*48011*，毕尔巴鄂，西班牙

2026年11月23日

摘要

我们对 M 理论 5膜无张力极限进行了完整的光锥规范固定，其作用量最近已在 [1] 中给出。局部费米子κ对称性的规范固定问题颇为棘手，因为其投影算符由规范场强构造而成，而在此极限下，规范场强又必须非零且非平凡。为解决这一问题，我们采用了旋量移动标架方法。相应的移动标架由一个关于规范场强的二次矢量以及 PST（Pasti-Sorokin-Tonin）标量的导数构造而成；在无张力极限下，这个二次矢量必须非零且非退化。我们还简要讨论了规范固定后的作用量和运动方程的对称性。

为了与通常的无张力 p 膜（零 p 膜）进行比较，即与那些不携带世界体规范场的无张力 p 膜进行比较，我们也详细阐述了它们的旋量移动标架表述。

目录

1 引言 **2**

2 无张力 M5 膜作用量 3

3 κ 对称性与世界体微分同胚的规范固定 6

3.1 κ 对称性投影算符的因式分解.6 3.2 移动标架与 κ 对称性.6 3.3 旋量移动标架.7 3.4 κ 对称性的规范固定.8 3.5 部分规范固定后的超对称性.10 3.6 世界体微分同胚对称性的规范固定.11 3.6.1 规范固定后的运动方程.12 3.7 无张力 M5 膜规范固定描述中的剩余对称性.14

4 关于"通常的"无张力超-p-膜及其规范固定 **15**

4.1 运动方程与诱导度规的退化.16 4.2 对称性.17 4.2.1 刚性对称性.17 4.2.2 规范对称性与规范固定.18

5 结论与讨论 **19**

D 的一些性质=11伽马矩阵 21 B 关于旋量移动标架的更多细节 21B.1 旋量移动标架变量上的完整约束集.21 B.2 两个移动标架与两个旋量移动标架之间的关系.22**C 方程的推导 (3.88) 23 D 关于规范固定的无张力 M5 膜的壳外描述 23**

1 引言

近三十年来，M5 膜的无张力极限一直受到关注， [2]其研究起点是 M5 膜的超嵌入描述 [3, 4]。在该研究中，这一极限是在冻结 M5 膜的标量和费米子涨落这一最简单的情形下取的，也就是说，此时理论约化为手征六维共形电动力学。在一项较新的研究 [5] 中，研究者在哈密顿方法的框架下考察了平面静态五膜这一情形的无张力极限 [6]。

在最近的 [1]中，我们通过将原始超M5膜作用量 [7, 8]取零张力极限，得到了一个完整的超对称无张力 M5 膜作用量。该过程的一致性要求二形式世界体规范场的规范场强非零，并且在某种意义上是非退化的。这意味着，无张力极限也可以视为 M5 膜的强场极限。无张力作用量具有时空超对称性和 κ–对称性，这保证了无张力 M5 膜的基态是一个稳定的半BPS态，并保留

一半的超对称性。我们还在 [1] 中证明， [2]和 [5], 中观察到的手征六维电动力学的共形不变性，在无张力 M5 膜的玻色涨落（但非费米子涨落）存在时依然成立，不过其形式有所变形，因为 $6d$世界体坐标的共形变换变得依赖于场。为此，我们必须对玻色无张力 M5 膜的微分同胚对称性进行规范固定。

要在完整的无张力 M5 膜模型中进行类似研究，并纳入世界体费米场的涨落，需要对局部费米 κ 对称性进行规范固定。这是一个相当具有挑战性的问题， [1] 中并未涉及。本文的主要目标是解决这一问题，并建立对无张力 M5 膜进行完整规范固定的描述。

光锥规范在膜物理中得到了广泛而有效的应用。然而，对于无张力 M5 膜， [1]由于我们已经指出，此时 κ 对称性投影算符的结构本质上涉及世界体规范场强 [1]，因此规范固定并非易事。这意味着，对于不同取值范围的规范场强，必须采用不同的方式对费米坐标实施光锥规范固定。

这一特殊性尤其使得无法直接采用 [9] 中建立的 M5 膜光锥规范描述；事实上，可以合理地预期，无张力极限与光锥规范固定这两个过程并不对易。

为了解决这一问题，并对无张力 M5 膜的 κ 对称性进行光锥规范固定，我们开发了一种适用于该系统的 [10–12] 旋量移动标架方法。该方法基于由两个单位向量构成的移动标架：其中一个由 PST（Pasti-Sorokin-Tonin）标量 $v^a = v^m E^a_m$ 的导数构造而成；在 [1] 和本文中，我们选择它为类时向量。另一个向量为 $\hat{s}^a = s^m E^a_m/\sqrt{-s^n s_n}$，其中 $\bar{s}_m$ 由世界体规范场的场强双线性项构造而成（见下文 (2.8)）。M5 膜的无张力极限要保持一致，要求该向量非零，即 $s_m \neq 0$，因此规范场强也必须非零且非退化，即 [1]。

我们还使用上述移动标架，针对世界体微分同胚对称性固定了适当的规范。文中还讨论了光锥规范固定后的运动方程形式，以及保持规范固定条件不变的剩余对称性。

为了将无张力 M5 膜与通常不携带世界体规范场的无张力 p 膜（零 p 膜）进行比较，我们详细阐述它们的旋量移动标架表述，分析其对称性并讨论规范固定。特别是，我们表明，在这种表述中，零 p 膜的诱导度规是退化的，这与 ILST（Isberg-Lindstr¨om-Sundborg-Theodoridis）描述 [13, 14], 相同；而无张力 M5 膜的情形 [1] 则不同，其诱导度规保持非退化。我们还表明，零 p 膜坐标函数的光锥规范固定条件及其上的剩余对称性，本质上与无张力 M5 膜的情形相同。

2 无张力 M5 膜作用量

文献 [1]中给出了 M5 膜无张力极限下的完整超对称作用量：

$$\begin{aligned} S_{M5}|_{T\mapsto 0} &= -\int_{W^6} d^6\xi\sqrt{-g}\sqrt{-s^m s_m} - \frac{1}{2}\int_{W^6} v\wedge H_3\wedge i_v H_3 \\ &= -\int_{W^6} d^6\xi\sqrt{-g}\sqrt{-s^m s_m} - \frac{1}{4}\int_{W^6} d^6\xi\sqrt{-g}\tilde{H}^{mn}H_{mnp}v^p\ . \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中， ξ^m ($m = 0$， 1， 2， 3， 4， 5) 是 $6d$ 世界体 W^6 的世界体坐标，其作为 11 维超空间中一个曲面的参数描述由坐标 $Z^M = (X^m,\ \Theta^\alpha)$ 给出，

用坐标函数表示

$$Z^M(\xi) = (X^{\underline{m}}(\xi), \Theta^{\underline{\check{\alpha}}}(\xi)) \,, \qquad \underline{m} = 0, 1, ..., 9, 10 \qquad \underline{\check{\alpha}} = 1, ..., 32 \,. \tag{2.2}$$

这些坐标函数通过诱导度规的行列式 $g = \det(g_{mn})$ 进入作用量 (2.1)

$$g_{mn}(\xi) = E^{\underline{a}}_m \eta_{\underline{ab}} E^{\underline{b}}_n = E^{\underline{a}}_m E_{n\underline{a}}. \tag{2.3}$$

该诱导度规由 11 维超引力的玻色超标架一形式 $E^a(Z(\xi)) = d\xi^m E^a_m$ 的拉回 $E^a(Z) = dZ^M E^a_M(Z)$ 构造而成，$a = 0$，1，.....，9。注意，11 维超引力的 3-形式和 6-形式规范场的拉回 A_3 和 A_6 在 M5 膜作用量 [7]的 Wess-Zumino项中存在，但在无张力极限下会消失。

本文关注平直 11 维超空间中的无张力 M5 膜情形。在这种情况下，E^a 及其费米对应物 E^α 分别可视为 Volkov-Akulov 一形式的11 维版本，以及费米坐标的导数，

$$E^{\underline{a}} = dX^{\underline{m}} \delta_{\underline{m}}{}^{\underline{a}} - id\Theta^{\underline{\alpha}} \Gamma^{\underline{a}}_{\underline{\alpha\beta}} \Theta^{\underline{\beta}} \,, \qquad E^{\underline{\alpha}} = d\theta^{\underline{\alpha}} \,, \qquad \underline{\alpha} = 1, \ldots, 32 \,. \tag{2.4}$$

这里我们使用实对称的 $\Gamma^a_{\alpha\beta}$，它们由 $11D$ 伽马矩阵在马约拉纳表示下构造而成，并结合电荷共轭矩阵得到，具体如附录 A 所述。

H_3 在 (2.1) 中 是世界体2形式规范势 $b_2 = \frac{1}{2} d\xi^n \wedge d\xi^m b_{mn}$ 的场强 ，

$$H_3 = db_2 = \frac{1}{3!} d\xi^p \wedge d\xi^n \wedge d\xi^m H_{mnp} \tag{2.5}$$

以及世界体1形式

$$v = d\xi^m v_m = \frac{da(\xi)}{\sqrt{\partial_n a \, g^{nl} \, \partial_l a}} \,, \qquad v_m v^m = 1 \tag{2.6}$$

由 PST 标量 $a(\xi)$ 的导数构造而成； $a(\xi)$ 是一个受“拓扑”限制 $\partial_m a(\xi) \partial^m a(\xi) \neq 0$ [1] 约束的辅助标量场。诱导度规 (2.3) 的逆记作 $g^{mn}(\xi)$，并用于升高世界体矢量指标，例如 $v^m = g^{mn} v_m$。

(2.1) 的第二行中

$$\tilde{H}^{mn} = *H^{mnr} v_r = \frac{1}{3! \sqrt{-g}} \epsilon^{mnrlpq} H_{lpq} v_r \,, \tag{2.7}$$

它也参与六维向量的定义

$$s_m \equiv \frac{\sqrt{-g}}{8} \epsilon_{mnklpq} \tilde{H}^{nk} \tilde{H}^{lp} v^q \tag{2.8}$$

它 进入作用量（2.1）的第一项。按照构造，该向量与 v_m，

$$s_m v^m = 0 \,, \tag{2.9}$$

因此，对于我们选取的类时 v，它是类空的。

按照构造，无张力M5膜作用量在时空超庞加莱变换下也保持不变。它在尺度对称性 [1] 下保持不变也不足为奇，因此，使（2.1）保持不变的显式刚性对称变换为

$$\delta X^{\underline{a}} = a^{\underline{a}} + X^{\underline{b}} L_{\underline{b}}{}^{\underline{a}} + \lambda X^{\underline{a}} + i\Theta\Gamma^{\underline{a}}\epsilon \,, \tag{2.10}$$

$$\delta\Theta^{\underline{\alpha}} = \epsilon^{\underline{\alpha}} + \frac{1}{2}\lambda\Theta^{\underline{\alpha}} - \frac{1}{4} L^{\underline{ab}} \, \Theta^{\underline{\beta}} \Gamma_{\underline{ab}\underline{\beta}}{}^{\underline{\alpha}} \,, \tag{2.11}$$

[1]将单位向量 v_m 选为类时向量并非必需：在拓扑上允许的情形下，类空选择同样可行 [15, 16, 7, 8] [17]。

其中 $L^{\underline{ab}} = -L^{\underline{ba}}$对洛伦兹群进行参数化，而 a^a 和 λ 分别是平移和缩放参数。

就世界体规范 对称变换而言，除了显然在世界体微分同胚下保持不变之外，作用量（2.1）还具有局域费米子κ–对称性，其变换由坐标函数的费米子变分给出，

$$
\begin{aligned}
i_\kappa E^a &:= \delta_k Z^M E^a_M = 0 \,, \\
i_\kappa E^\alpha &:= \delta_k Z^M E^\alpha =: \kappa^\alpha \,,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

其费米子参数满足

$$
\kappa^\alpha = -\tilde{\mathbf{\Gamma}}^\alpha{}_\beta \kappa^\beta \tag{2.13}
$$

with

$$
\tilde{\mathbf{\Gamma}} = -\frac{1}{\sqrt{-s^l s_l}} s_m \tilde{\Gamma}^{mn} v_n \equiv -\frac{1}{\sqrt{-s^l s_l}} (s\tilde{\Gamma})(v\Gamma) \,, \qquad \tilde{\mathbf{\Gamma}}^2 = \mathbb{I}_{32\times 32} \,, \tag{2.14}
$$

其中 $\mathbb{I}_{32\times 32}$ 表示单位矩阵 $\delta^\alpha{}_\beta$。无张力 M5 膜的世界体规范场 b_2 在此 κ–对称性下保持不变，

$$
\delta_\kappa b_2 = 0 \,. \tag{2.15}
$$

注意，$\sqrt{-s^l s_l}$ 出现在 κ–对称性投影算符的分母中，也出现在拉格朗日运动方程的分母中。这表明一般而言

$$
\sqrt{-s^l s_l} \neq 0 \tag{2.16}
$$

这意味着，按构造满足 $H^{mn} v_n = 0$ 的 6×6 反对称矩阵 H^{mn}（2.7）应具有最大秩 4。由作用量（2.1）描述的无张力 M5 膜理论是自洽的，当且仅当规范场强非零，而且如（2.16）所述不退化。下文构造和结果的自洽条件也将如此。

作用量 (2.1) 还在两种 PST规范对称性 [18, 19] 下保持不变。第一种 PST对称性通过标量参数 $\varphi(\xi)$ 作用于各场

$$
\delta_\varphi b_2 = \varphi(\xi) \, \frac{(i_v H_3 + \mathcal{V}_2)}{\sqrt{\partial a \partial a}} \,, \qquad \delta_\varphi a(\xi) = \varphi(\xi) \,, \qquad \delta_\varphi Z^M(\xi) = 0 \,, \tag{2.17}
$$

其中 $i_v H_3 = \frac{1}{2} d\xi^p \wedge d\xi^n \, v^m H_{mnp}$和 $\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2} d\xi^{\underline{n}} \wedge d\xi^m \mathcal{V}_{mn}$满足

$$
\mathcal{V}_{mn} = -\frac{\partial \sqrt{-s^l s_l}}{\partial \tilde{H}^{mn}} = \frac{\sqrt{-g}}{2\sqrt{-s^s s_s}} \epsilon_{mnrlpq} s^r v^l \tilde{H}^{pq} \,. \tag{2.18}
$$

它使 PST 标量 $a(\xi)$ 成为纯规范或斯图克尔伯格场（可以规范固定为 $a(\xi) = \xi^0$，但不能固定为常数或光锥方向上的坐标）。第二种 PST 对称性具有一形式参数 $\phi_1 = d\xi^m \phi_m(\xi)$，且仅作用于二形式规范场，

$$
\delta_{\phi_1} b_2 = da \wedge \phi_1 \,, \qquad \delta_{\phi_1} a(\xi) = 0 \,, \qquad \delta_{\phi_1} Z^M(\xi) = 0 \,. \tag{2.19}
$$

玻色和费米坐标函数 $X^m(\xi)$, $\Theta^\alpha(\xi)$ 的运动方程为

$$
\partial_m (T^{mn} E_{n\underline{a}}) = 0 \,, \tag{2.20}
$$

$$
(E_m \Gamma^{\underline{a}})_{\underline{\alpha}} T^{mn} E_{n\underline{a}} = 0 \,, \tag{2.21}
$$

whe无张力 M5 膜的能量动量张量 T^{mn} 具有以下形式

$$
T^{mn} = -\sqrt{-g} \sqrt{-s^l s_l} \, (v^m - \hat{s}^m)(v^n - \hat{s}^n) \,, \tag{2.22}
$$

$$
\hat{s}^m = s^m / \sqrt{-s^l s_l} \,. \tag{2.23}
$$

b_2 的拉格朗日运动方程为

$$da \wedge d\left(\frac{i_v H_3 + \mathcal{V}_2}{\sqrt{\partial a \partial a}}\right) = 0. \tag{2.24}$$

形式上对其积分，并利用规范对称性（2.19），可将其化为自对偶条件的非线性推广（参见 [1]及其中的参考文献）：

$$i_v H_3 + \mathcal{V}_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad H_{mnk} v^k = -\mathcal{V}_{mn}\ , \tag{2.25}$$

其中 $\mathcal{V}_{mn}$ 由式（2.18）给出。

3 κ 对称性与世界体微分同胚的规范固定

3.1 κ 对称性投影算符的因式分解

费米坐标函数在超对称性和 κ–对称性（2.12）下的变换如下

$$\delta\Theta^{\underline{\alpha}}(\xi) = \epsilon^{\underline{\alpha}} + \kappa^{\underline{\alpha}}(\xi)\ , \tag{3.1}$$

局域费米 κ–对称性的参数满足式（2.13）。我们将此条件写为

$$\kappa^{\underline{\alpha}} = -\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\kappa^{\underline{\beta}} = \frac{1}{2}(1-\tilde{\mathbf{\Gamma}})^{\underline{\alpha}}{}_{\underline{\beta}}\kappa^{\underline{\beta}} = \frac{1}{4}\Big[(\tilde{\not{v}} + \widehat{\not{s}})\,(\not{v} - \not{s})\kappa\Big]^{\underline{\alpha}} \tag{3.2}$$

其中我们引入了记号

$$\not{s} = s^m\Gamma_m = s^m E_{\underline{m}}^{\underline{a}}\Gamma_{\underline{a}}\ , \qquad \tilde{\not{v}} = v^m\tilde{\Gamma}_m = v^m E_{\underline{m}}^{\underline{a}}\tilde{\Gamma}_{\underline{a}}\ , \tag{3.3}$$

并使用了式（2.23）中的归一化类空 s_m 矢量，

$$\hat{s}^m = \frac{s^m}{\sqrt{-s^l s_l}} = g^{mn}\hat{s}_n\ , \qquad \hat{s}^m\hat{s}_m = -1\ . \tag{3.4}$$

式（3.2）右侧表明，κ–对称性投影算符可分解为两个幂零矩阵的乘积

$$(\not{v} \pm \not{s}) := (v \pm \hat{s})^{\underline{a}}\Gamma_{\underline{a}} = (v^m \pm \hat{s}^m)E_{\underline{m}}^{\underline{a}}\Gamma_{\underline{a}}\ , \qquad (\tilde{\not{v}} \pm \hat{\not{s}})(\not{v} \pm \not{s}) = 0\,. \tag{3.5}$$

它们按不同顺序相乘，可得到正交投影算符

$$\mathcal{P}_{+-} = \frac{1}{4}(\tilde{\not{v}} + \hat{\not{s}})(\not{v} - \not{s})\ , \qquad \mathcal{P}_{-+} = \frac{1}{4}(\tilde{\not{v}} - \hat{\not{s}})(\not{v} + \not{s}) \tag{3.6}$$

其中第一个正是式（3.2）中的 κ–对称性投影算符，

$$\mathcal{P}_{+-} = \frac{1}{2}(1-\tilde{\mathbf{\Gamma}})\ . \tag{3.7}$$

3.2 移动标架与 κ–对称性

此外，需要注意的是，矩阵 (3.5) 也可以进行因式分解。为找到这样的因式分解，我们首先注意到，按构造，向量 v_m 和 $\hat{}s_m$ 均已归一化，因此都不为零。于是，以下十一个向量场

$$v^{\underline{a}} = v^m E_{\underline{m}}^{\underline{a}} \qquad and \qquad \hat{s}^{\underline{a}} = \hat{s}^m E_{\underline{m}}^{\underline{a}}\ , \tag{3.8}$$

通过与这些向量（$v^a = i_v E^a$、$\hat{}s^a = i_{\hat{s}} E^a$）收缩玻色超标架的拉回而得到，它们也已归一化，且彼此正交 –

$$v^{\underline{a}} v_{\underline{a}} = 1 \,, \qquad \hat{s}^{\underline{a}} \hat{s}_{\underline{a}} = -1 \,, \qquad \hat{s}^{\underline{a}} v_{\underline{a}} = 0 \,. \tag{3.9}$$

这组元素可以补全为一个取值于洛伦兹群的 $D = 11$ 矩阵

$$\left(v_{\underline{a}}, u^I_{\underline{a}}, \hat{s}_{\underline{a}}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(u^{\#}_{\underline{a}} + u^{=}_{\underline{a}}\right), u^I_{\underline{a}}, \frac{1}{2}\left(u^{\#}_{\underline{a}} - u^{=}_{\underline{a}}\right)\right) \quad \in \quad SO(1,10) \,. \tag{3.10}$$

除（3.8）中的 11 个向量 v 和 $\hat{}s$，或它们的类光线性组合之外

$$u^{=}_{\underline{a}} := (v - \hat{s})_{\underline{a}} \,, \qquad u^{\#}_{\underline{a}} \equiv (v + \hat{s})_{\underline{a}} \,, \tag{3.11}$$

这个动标架矩阵 还包含九个类空单位向量 u^I_a，它们与前两者以及彼此之间均正交。

综上，以上定义的移动标架矢量 [2] 满足以下关系

$$u^{=}_{\underline{a}} u^{\underline{a}=} = 0 \,, \qquad u^{\#}_{\underline{a}} u^{\underline{a}\#} = 0 \,, \qquad u^{=}_{\underline{a}} u^{\underline{a}\#} = 2 \,, \tag{3.12}$$

$$u^{=}_{\underline{a}} u^{\underline{a}I} = 0 \,, \qquad u^{\#}_{\underline{a}} u^{\underline{a}I} = 0 \,, \qquad u^I_{\underline{a}} u^{\underline{a}J} = -\delta^{IJ} \tag{3.13}$$

若再补上

$$\epsilon^{\underline{a}\underline{b}_1 \ldots \underline{b}_9 \underline{c}} v_{\underline{a}} u_{\underline{b}_1}{}^{J_1} \ldots u_{\underline{b}_9}{}^{J_9} \hat{s}_{\underline{c}} = \epsilon^{J_1 \ldots J_9} \tag{3.14}$$

则等价于（3.10）。

这个矢量移动标架进而可用于定义旋量移动标架，详见 [10,11]及其中的参考文献。下面我们将对此作简要介绍。

3.3 旋量移动标架

旋量移动标架可由一个取值于 $Spin(1,10)$ 的矩阵描述

$$V^{(\beta)}_{\underline{\alpha}} = \left(v^{+q}_{\underline{\alpha}} \,,\, v_{\underline{\alpha}}{}^{-q}\right) \;\in\; Spin(1,10) \tag{3.15}$$

该矩阵由两组 16 维的 $11D$ 玻色旋量组成。除十一维马约拉纳旋量指标$\alpha = 1, ...,32$ 外，旋量移动标架变量 v^{+q}_{α}和 v^{-q}_{α}（也称为旋量洛伦兹谐波，或简称洛伦兹谐波）还带有 SO(9)旋量指标（即 Spin(9) 指标）$q = 1, ...,16$。

这些旋量移动标架变量可视为类光向量 (3.11) 的一种平方根，因为它们满足以下卡当–彭罗斯型关系

$$(\not{v} - \not{\hat{s}})_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = 2 v^{-q}_{\underline{\alpha}} v^{-q}_{\underline{\beta}} \,, \qquad (\tilde{\not{v}} - \tilde{\not{\hat{s}}})^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = 2 v^{-\underline{\alpha}}_q v^{-\underline{\beta}}_q \,, \tag{3.16}$$

$$v^{-q} \tilde{\Gamma}^{\underline{a}} v^{-p} = (v - \hat{s})^{\underline{a}} \delta_{qp} = v^-_q \Gamma^{\underline{a}} v^-_p \tag{3.17}$$

and

$$(\not{v} + \not{\hat{s}})_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = 2 v^{+q}_{\underline{\alpha}} v^{+q}_{\underline{\beta}} \,, \qquad (\tilde{\not{v}} + \tilde{\not{\hat{s}}})^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = 2 v^{+\underline{\alpha}}_q v_q{}^{+\underline{\beta}} \,, \tag{3.18}$$

$$v^{+q} \tilde{\Gamma}^{\underline{a}} v^{+p} = (v - \hat{s})^{\underline{a}} \delta_{qp} = v^+_q \Gamma^{\underline{a}} v^+_p \tag{3.19}$$

[2]它们也称为光锥谐变量 [20,21] 和矢量洛伦兹谐变量（矢量谐变量）[22,23]。请注意，对于无张力扩展物体，相关变量是超粒子和超弦情形中使用的变量 [24,25,10,26,27,11]，而非用于描述具有张力的超 p 膜（其 p> 2采用旋量移动标架表述 [28,29]，并处于超嵌入方法的框架下 [30–32]）的变量。

带有上标马约拉纳自旋量指标的玻色自旋量变量 $v_q^{\mp\alpha}$（前文也已使用）定义为

$$v_q^{+\underline{\alpha}} = iC^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} v_{\underline{\beta}q}^{+}, \qquad v_q^{-\underline{\alpha}} = -iC^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} v_{\underline{\beta}q}^{-}. \tag{3.20}$$

这种非标准定义使它们成为旋量移动标架矩阵（3.15）之逆矩阵的分块；也就是说，它们满足

$$v_q^{+\underline{\alpha}} v_{\underline{\alpha}}^{+p} = 0\,, \qquad v_q^{+\underline{\alpha}} v_{\underline{\alpha}}^{-p} = \delta_{qp}\,, \qquad v_q^{-\underline{\alpha}} v_{\underline{\alpha}}^{-p} = 0\,, \tag{3.21}$$

$$\text{and, hence,} \qquad \delta_{\underline{\beta}}^{\ \underline{\alpha}} = v_{\underline{\beta}}^{+q} v_q^{-\underline{\alpha}} + v_{\underline{\beta}}^{-q} v_q^{+\underline{\alpha}}\,. \tag{3.22}$$

正交移动标架向量 u_a^I 由两类调和变量 $v_q^{+\alpha}$、$v_q^{-\alpha}$共同构成，因为除满足（3.16）–（3.19）外，它们还满足以下约束

$$v_q^{-}\tilde{\Gamma}_{\underline{a}} v_p^{+} = u_{\underline{a}}^I \gamma_{qp}^I\,, \qquad u_{\underline{a}}^I \Gamma^{\underline{a}}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = 2 v_{(\underline{\alpha}|q}{}^{-} \gamma_{qp}^I v_{|\underline{\beta})p}{}^{+}\,, \tag{3.23}$$

$$v_q^{-}\Gamma_{\underline{a}} v_p^{+} = -u_{\underline{a}}^I \gamma_{qp}^I\,, \qquad u_{\underline{a}}^I \tilde{\Gamma}^{\underline{a}\underline{\alpha}\underline{\beta}} = -2 v_q^{-(\underline{\alpha}} \gamma_{qp}^I v_p^{+\underline{\beta})}\,. \tag{3.24}$$

这里，γ_{qp}^I 是满足以下关系的 SO(9) 狄拉克矩阵

$$\gamma_{qr}^I \gamma_{rp}^J + \gamma_{qr}^J \gamma_{rp}^I = 2\delta^{IJ}\delta_{qp}\,, \qquad \gamma_{qp}^I = \gamma_{pq}^I, \qquad \gamma_{qq}^I = 0\,. \tag{3.25}$$

约束（3.17）–（3.19）和（3.23）可以从 11维伽马矩阵的洛伦兹不变性条件推导出来。这里讨论的是 Spin(1,10) 值旋量移动标架矩阵（3.15），并指出它是 SO(1,10) 值移动标架矩阵（3.10）的双覆盖。关于旋量移动标架变量的更多细节，可参见附录B以及例如 [11, 33]和其中的参考文献。

作为将旋量移动标架形式应用于由作用量（2.1）描述的无张力 M5 膜的一个示例，我们考虑坐标函数的方程，即方程（2.21）和（2.20）。利用方程（3.8）、（3.11）中移动标架向量的定义以及约束（3.16），我们可以将费米子方程（2.21）写成如下不可约的 16 分量形式

$$(v^m - \hat{s}^m)\partial_m \Theta^{\underline{\alpha}} v_{\underline{\alpha}q}^{-} = 0 \tag{3.26}$$

并将玻色子方程（2.20）写成

$$\partial_m(\sqrt{-g}\,\sqrt{-s^l s_l}\,(v^m - \hat{s}^m) u_{\underline{a}}^{-}) = 0\,. \tag{3.27}$$

正如我们将在下文看到的，该方程可以分解为九个和一个独立的洛伦兹不变方程。不过首先，让我们讨论局部费米子 κ–对称性的规范固定，这可以利用旋量移动标架形式来实现。

3.4 κ–对称性规范固定

利用（3.16）和（3.18），我们可以如下解出约束（2.13）对 κ–对称性参数的限制

$$\kappa^{\underline{\alpha}} = v_q^{-\underline{\alpha}} \kappa^{+q}\,, \tag{3.28}$$

这意味着，我们已将受约束的 32 分量马约拉纳–外尔自旋量 κ^α 表示为 $SO(9)$ 群的独立 16 分量自旋量 $\kappa^{+q} = \kappa^\alpha v_{\alpha q}^{+}$。于是，方程 (3.1) 可写为

$$\delta\Theta^{\underline{\alpha}} = \epsilon^{\underline{\alpha}} + v_q^{-\underline{\alpha}} \kappa^{+q}\,. \tag{3.29}$$

因此，参数为 $\kappa^{+q}(\xi)$ 的费米规范变换的自然规范固定条件为

$$\Theta^{+\underline{q}(\mathfrak{v})} := \Theta^{\underline{\alpha}}\mathfrak{v}_{\underline{\alpha}\underline{q}}^{\ +} = 0 \tag{3.30}$$

其中 $\mathfrak{v}_{\underline{\alpha}\underline{q}}^{\ +}$ 是常旋量标架中的一个元素，

$$d\mathfrak{v}_{\underline{\alpha}\underline{q}}^{\ +} = 0\ , \tag{3.31}$$

它与基于 v_a 和 s_a 向量构造的旋量移动标架“足够接近”，具体来说，我们要求矩阵 $v_q^{-\alpha}\mathfrak{v}_{\alpha q}^{\ +}$ 可逆，即

$$\det(v_{\underline{p}}^{-\underline{\alpha}}\mathfrak{v}_{\underline{\alpha}\underline{q}}^{\ +}) \neq 0\ . \tag{3.32}$$

显然，这意味着我们将场构型限制在足够接近某个固定“常数背景”（即其邻域内）的范围内。该背景由一个固定的类时单位向量 $\hat{s}^{(0)a} = \frac{s^{(0)m}E_m^{(0)a}}{\sqrt{-s_n^{(0)}g^{(0)mn}s_n^{(0)}}}$ 和一个固定的类时 $v^{(0)a} = v^{(0)m}E_m^{(0)a}$ 描述，并由此产生常矢量标架

$$\mathfrak{u}_{\underline{a}}^{=} = \hat{s}_{\underline{a}}^{(0)} - v_{\underline{a}}^{(0)}, \qquad \mathfrak{u}_{\underline{a}}^{\#} = \hat{s}_{\underline{a}}^{(0)} + v_{\underline{a}}^{(0)}, \qquad \mathfrak{u}_{\underline{a}}^{J} \tag{3.33}$$

该标架满足约束 (3.12)、(3.13) 的对应形式。

相应常矢量标架矩阵 (3.33) 的平方根由一个常旋量标架矩阵给出，该矩阵由常数 32×16 块 $\mathfrak{v}_{\alpha}^{\pm q}$ 组成，满足约束 (3.15) 的对应形式，因而也满足 (3.16)–(3.19) 和 (3.23) 的对应形式，其中还涉及常标架向量 (3.33)。

在一般情形下，任意移动标架都可以通过局域洛伦兹变换与其他移动标架或固定标架联系起来。这些变换的一般形式见 [34] 和本文附录 B.2（特别是公式 (B.9)–(B.18)）。目前我们只需要其中两种关系

$$v_q^{-\underline{\alpha}} \ = \ e^{-\beta}\mathcal{O}_{qp}\left(\mathfrak{v}_p^{-\underline{\alpha}} - \frac{1}{2}K^{=I}\gamma^I_{pp'}\mathfrak{v}_{p'}^{+\underline{\alpha}}\right)\ , \tag{3.34}$$

$$u_{\underline{a}}^{=} := (v_{\underline{a}} - \hat{s}_{\underline{a}}) = e^{-2\beta}\left(\mathfrak{u}_{\underline{a}}^{=} + \frac{1}{4}(\vec{K}^{=})^2\mathfrak{u}_{\underline{a}}^{\#} + K^{=I}\mathfrak{u}_{\underline{a}}^{I}\right)\ . \tag{3.35}$$

这里，β 参数化 $SO(1,1)$ 子群 $SO(1,10)$，$K^{=J}$ 参数化时空洛伦兹群的陪集，该陪集与天球同构 $\mathbb{S}^9$，[3]，而 $\mathcal{O}_{pq} = \mathcal{O}_{qp}^{-1}$ 是取值于 Spin(9) 的矩阵（注意，Spin(9)$\subset$ SO(16)）。当我们考虑（旋量）移动标架场与常参考（旋量）标架之间的关系时，所有这些参数都成为依赖于 ξ^m 的函数，

$$\beta = \beta(\xi)\ , \qquad K^{=J} = K^{=J}(\xi)\ , \qquad \mathcal{O}_{pq} = \mathcal{O}_{pq}(\xi)\ \in\ Spin(9)\ \subset SO(16)\ . \tag{3.36}$$

利用公式 (3.34) 和 (3.35)，我们发现，保持规范 (3.30) 的剩余 κ–对称变换，其参数可通过常旋量标架上常时空超对称参数的某个投影表示，

$$\epsilon^{\mp q(\mathfrak{v})} := \epsilon^{\underline{\alpha}}\mathfrak{v}_{\underline{\alpha}q}^{\ \mp}\ , \tag{3.37}$$

by

$$\kappa^{+q} = -e^{\beta(\xi)}\mathcal{O}_{qp}(\xi)\epsilon^{+p(\mathfrak{v})}\ . \tag{3.38}$$

费米坐标函数的非零投影由超对称变换的两个投影共同变换，

$$\delta\Theta^{-q(\mathfrak{v})} = \delta\Theta^{\underline{\alpha}}\mathfrak{v}_{\underline{\alpha}q}^{\ -} = \epsilon^{-q(\mathfrak{v})} + \frac{1}{2}K^{=I}\gamma^I_{qp}\epsilon^{+p(\mathfrak{v})}\ . \tag{3.39}$$

[3]这是 $SO(1,10)/H$，其中 H 是 11 维洛伦兹群的抛物子群，参见 [24,25] 中的讨论。

注意，在这一变换中完全没有 $Spin(9)$值矩阵场 $\mathcal{O}_{pq}$ 的贡献。

实际上， $Spin(9)$ 变换是我们构造中的一种规范对称性。事实上，这些变换与类空单位动标架矢量 u_a^I 的 SO(9) 旋转相关，具体为

$$\mathcal{O}_{qr}\mathcal{O}_{ps}\gamma^I_{rs} = \gamma^J_{qp}\mathcal{O}^{JI} \ . \tag{3.40}$$

这意味着我们可以选择一种规范，使得 $\mathcal{O}_{pq}$ 和 $\mathcal{O}^{IJ}$ 分别为 16×16 和9×9 单位矩阵。不过，我们倾向于以另一种方式利用这种对称性（见下文）。

现在，注意到

$$e^{-2\beta} = \frac{1}{2}\mathfrak{u}^{\#}_{\underline{a}}(v-\hat{s})^{\underline{a}} \ , \tag{3.41}$$

我们可以将方程（3.38）写成如下形式:

$$\kappa^{+p} = -\,e^{-\beta(\xi)}\mathcal{O}_{pq}\epsilon^{+q\mathfrak{v}} = -\,\mathcal{O}_{pq}\epsilon^{+q\mathfrak{v}}\,\frac{1}{\sqrt{(v-\hat{s})^{\underline{a}}\,\mathfrak{u}^{\#}_{\underline{a}}/2}} \ . \tag{3.42}$$

类似地，我们得到

$$K^{=I} = -e^{2\beta}\,(v-\hat{s})^{\underline{a}}\,\mathfrak{u}^I_{\underline{a}} = -2\frac{(v-\hat{s})^{\underline{a}}\,\mathfrak{u}^I_{\underline{a}}}{(v-\hat{s})^{\underline{b}}\,\mathfrak{u}^{\#}_{\underline{b}}} \tag{3.43}$$

并且对于 $K^{\#I}(\xi)$ 和 $\mathcal{O}^{IJ}(\xi)$，还可得到形式更复杂的表达式；其显式形式对于下面的讨论并非必要。

式 (3.41) 和 (3.43) 明确表明，无张力 M5 膜的戈德斯通费米子 (3.39) 的超对称变换在规范 (3.30) 下变为场依赖的。具体而言，式 (3.39) 右端依赖于用于构造类空矢量 $\hat{}s$ 的世界体规范场强（见式 (2.8)、(2.23) 和 (3.8)）。

下文我们将主要采用以复合场 $K^{=I}(\xi)$ 和 $\beta(\xi)$ 表示的更简洁描述，同时记住它们在式 (3.43) 和 (3.41) 中的显式形式。

规范下费坐标函数的运动方程，即式 (3.26)，具有如下形式 (3.30)

$$(v^m - \hat{s}^m)\partial_m\Theta^{-\mathfrak{q}\mathfrak{v}} = 0 \ . \tag{3.44}$$

至于玻色坐标函数的方程 (3.27)，将其与常数移动标架矢量 (3.33) 作缩并后，我们会发现该方程分解为一个加九个相互独立的方程

$$\partial_m(\sqrt{-g}\,\sqrt{-s^l s_l}\,(v^m - \hat{s}^m)e^{-2\beta}) = 0 \ , \tag{3.45}$$

$$(v^m - \hat{s}^m)\partial_m K^{=I} = 0 \ . \tag{3.46}$$

下面我们 将在固定微分同胚对称性的规范后回到这些方程。

3.5 部分规范固定后的超对称性

超 规范 (3.30) 下玻色坐标函数的对称变换为 s

$$\delta X^{\underline{a}} = i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\left(\epsilon^{+p\mathfrak{v}} + \frac{1}{2}K^{=I}\gamma^I_{qp}\,\epsilon^{+p\mathfrak{v}}\right)\mathfrak{u}^{\#\underline{a}} - 2i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^I_{qp}\epsilon^{+p\mathfrak{v}}\,\mathfrak{u}^{I\underline{a}} \ . \tag{3.47}$$

它们可以用到常值标架 (3.33) 的投影表示,

$$X^{=} = X^{\underline{a}}\mathfrak{u}^{=}_{\underline{a}} \ , \qquad X^{\#} = X^{\underline{a}}\mathfrak{u}^{\#}_{\underline{a}} \ , \qquad X^I = X^{\underline{a}}\mathfrak{u}^I_{\underline{a}} \tag{3.48}$$

如下:

$$\delta X^{\#} = 0 \,, \tag{3.49}$$

$$\delta X^{=} = 2i\Theta^{-q(\mathfrak{v})} \left(\epsilon^{-q\mathfrak{v}} - \frac{1}{2} K^{=I} \gamma^{I}_{qp} \, \epsilon^{+p\mathfrak{v}} \right) \,, \tag{3.50}$$

$$\delta X^{I} = 2i\Theta^{-q(\mathfrak{v})} \gamma^{I}_{qp} \epsilon^{+p\mathfrak{v}} \,. \tag{3.51}$$

请注意，(3.51) 的右端表现为两项之和：一项来自时空超对称变换的原始贡献，另一项来自 κ对称性。在规范 (3.30) 下，后一项的贡献与第一项相同，因为κ对称性的参数由 (3.38) 表示为超对称参数。

作为本节的总结，我们来讨论玻色超标架的拉回 E^a 在规范固定后的形式及其在超对称性下的性质。

在规范 (3.30) 下，玻色超标架形式的拉回在参考常值标架上的投影可简化为

$$E^{\# \, (\mathfrak{u})} = dX^{\# \, (\mathfrak{u})} \,, \tag{3.52}$$

$$E^{= \, (\mathfrak{u})} = dX^{= \, (\mathfrak{u})} - 2id\Theta^{-\underline{q}(\mathfrak{v})} \, \Theta^{-\underline{q}(\mathfrak{v})} \,, \tag{3.53}$$

$$E^{I \, (\mathfrak{u})} = dX^{I \, (\mathfrak{u})} \,. \tag{3.54}$$

请注意，在规范固定 (3.30) 后，这些一形式在时空超对称变换下并非不变，因为这些变换会诱导参数为 (3.38) 的剩余 κ对称性；此外，在 κ对称性下，玻色超标架并非不变，而是通过费米超标架发生变换。直接计算可得，规范固定后，

$$\delta_\epsilon E^{\underline{a}} = -2id\Theta^{-q(\mathfrak{v})} \gamma^{I}_{qp} \epsilon^{+p\mathfrak{v}} \mathfrak{u}^{I\underline{a}} - id\Theta^{-q(\mathfrak{v})} K^{=I} \gamma^{I}_{qp} \epsilon^{+p\mathfrak{v}} \mathfrak{u}^{\#\underline{a}} \tag{3.55}$$

因此

$$\delta_\epsilon E^{\# \, (\mathfrak{u})} = 0 \,, \tag{3.56}$$

$$\delta_\epsilon E^{= \, (\mathfrak{u})} = -2id\Theta^{-q(\mathfrak{v})} K^{=I} \gamma^{I}_{qp} \epsilon^{+p\mathfrak{v}} \,, \tag{3.57}$$

$$\delta_\epsilon E^{I \, (\mathfrak{u})} = 2id\Theta^{-q(\mathfrak{v})} \gamma^{I}_{qp} \epsilon^{+p\mathfrak{v}} \,. \tag{3.58}$$

3.6 世界体微分同胚对称性的规范固定

利用基于 $(v \pm s)^a = (v \pm s)^n E^a_n$ 向量场的移动标架定义 (3.10)，以及它与常值标架之间的关系，特别是方程 (3.35)，我们可以发现，在规范 (3.30) 下（此时玻色超标架具有 (3.52)–(3.54) 的形式）

$$(v - \hat{s})^m \partial_m X^{\#} = 2e^{-2\beta} \,, \qquad (v - \hat{s})^m \partial_m X^{I} = -e^{-2\beta} K^{=I} \,, \tag{3.59}$$

$$(v - \hat{s})^m \partial_m X^{=} - 2i(v - \hat{s})^m \partial_m \Theta^{-\underline{q}} \, \Theta^{-\underline{q}} = \frac{1}{2} e^{-2\beta} \, (\vec{K}^{=})^2 \,. \tag{3.60}$$

此处及下文中，由于我们不会使用其他投影，故省略相对于常值标架和常旋量标架的投影上标 $(\mathfrak{u})$ 和 $(\mathfrak{v})$。

请注意，由于费米运动方程 (3.26)，式 (3.60) 中的费米贡献在壳上为零。我们保留了这一项，以确保上述方程组中的所有方程，即 (3.59) 和 (3.60)，在壳外仍然成立。

此时，一方面，将 6 个世界体坐标拆分如下是很方便的：

$$\xi^m = (\xi^{++}, \xi^{--}, \xi^{\check{m}}) , \qquad \xi^{++} = \xi^0 + \xi^5, \qquad \xi^{--} = \xi^0 - \xi^5 , \qquad \xi^{\check{m}} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \tag{3.61}$$

另一方面，利用旋量移动标架构造中的局部 SO(9) 对称性，将 9维向量场 $K^{=I}(\xi) = (K^{=i}(\xi)\ K^{=\check{I}}(\xi))$ 的九个分量中的四个规范掉：

$$K^{=\check{i}}(\xi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K^{=I}(\xi) = \delta_{\check{J}}{}^{I} K^{=\check{J}}(\xi)) , \qquad \check{i} = 1,2,3,4 , \qquad \check{I}, \check{J} = 5,6,7,8,9 . \tag{3.62}$$

对玻色坐标函数的九重态作相应的 SO(4)×SO(5) 分解，

$$X^I(\xi) = (X^{\check{i}}(\xi), X^{\check{I}}(\xi)) , \qquad \check{i} = 1,2,3,4 , \qquad \check{I} = 5,6,7,8,9 , \tag{3.63}$$

我们发现，(3.59) 中的第二个关系分解为一组四重态齐次方程，以及五个通过 $X^I(\xi)$ 的导数表示 $K^{=J}(\xi)$ 的关系，

$$(v-\hat{s})^m \partial_m X^{\check{i}} = 0 , \qquad \check{i} = 1,2,3,4 , \tag{3.64}$$

$$K^{=\check{I}} = -e^{2\beta} (v-\hat{s})^m \partial_m X^{\check{I}} , \qquad \check{I} = 5,6,7,8,9 . \tag{3.65}$$

现在，我们准备通过以下方式固定与全部六个世界体微分同胚对称性相关的规范：

$$X^{\#} := X^{\underline{a}}(\xi) \mathfrak{u}^{\#}_{\underline{a}} = \xi^{++} , \tag{3.66}$$

$$X^{=} := X^{\underline{a}}(\xi) \mathfrak{u}^{=}_{\underline{a}} = \xi^{--} , \tag{3.67}$$

$$X^{\check{i}} := X^{\underline{a}}(\xi) \mathfrak{u}^{I}_{\underline{a}} \delta^{\check{i}}_{I} = \xi^{\check{m}} \delta_{\check{m}}{}^{\check{i}} . \tag{3.68}$$

在此规范下，方程 (3.59) 和 (3.60) 具有如下形式

$$(v-\hat{s})^{++} = 2e^{-2\beta} , \qquad (v-\hat{s})^{\check{i}} = 0 , \tag{3.69}$$

$$(v-\hat{s})^{--} = \frac{1}{2}(v-\hat{s})^{++} (K^{=\check{I}})^2 + 2i(v-\hat{s})^m \partial_m \Theta^{-\underline{q}} \Theta^{-\underline{q}} , \tag{3.70}$$

$$(v-\hat{s})^m \partial_m X^{\check{I}} = -e^{-2\beta} K^{=\check{I}} = -\frac{1}{2}(v-\hat{s})^{++} K^{=\check{I}} . \tag{3.71}$$

3.6.1 规范固定后的运动方程

为进一步简化分析，至少在研究的第一阶段，采用费米运动方程（3.26）将方程（3.70）化简为

$$(v-\hat{s})^{--} = \frac{1}{4}(v-\hat{s})^{++} (K^{=\check{I}})^2 . \tag{3.72}$$

关于壳外规范固定的讨论可见附录 D。

显然，在纯玻色情形下，只要满足 $(v-\hat{s})^{++} > 0$，方程（3.69）中的第一个方程便成立；于是方程（3.70）意味着 $(v-\hat{s})^{--} > 0$ 也成立。这些关系定义了一种坐标图，在其中我们固定了规范。当然，若存在来自费米场的幂零贡献，上述不等式便没有意义。

重要的是，在规范（3.30）下，（3.66）–（3.68）

$$(v-\hat{s})^m \partial_m = \frac{1}{2}(v-\hat{s})^{++} \nabla_{++} , \tag{3.73}$$

$$\nabla_{++} = \partial_{++} + \frac{1}{4}(K^{=\check{I}})^2 \partial_{--} . \tag{3.74}$$

特别地，考虑到 $(v-\hat{s})^{++} \neq 0$，可以得到（3.71）意味着

$$\nabla_{++} X^{\check{I}} := \left(\partial_{++} + \frac{1}{4}(K^{=\check{J}})^2 \partial_{--} \right) X^{\check{I}} = -K^{=\check{I}} . \tag{3.75}$$

˙我们不打算尝试求解该方程以得到 $K^{=I}$，而将在下文中将其作为形式关系来分析运动方程。不过，在缓变场的近似下，这样的解至少以幂级数形式确实存在，

$$K^{=\check{I}} = -\partial_{++}X^{\check{I}} - \frac{1}{4}\,(\vec{K}^{=\check{J}})^2\partial_{--}X^{=\check{I}} = -\partial_{++}X^{\check{I}} - \frac{1}{4}\,\partial_{++}X^{\check{J}}\partial_{++}X^{\check{J}}\,\partial_{--}X^{\check{I}} + \dots\,. \tag{3.76}$$

规范（3.68）下的费米子方程和玻色子方程（3.44）与（3.46）为

$$\nabla_{++}\Theta^{-q\mathfrak{v}} = \left(\partial_{++} + \frac{1}{4}(K^{=\check{J}})^2\partial_{--}\right)\Theta^{-q\mathfrak{v}} = 0\,, \tag{3.77}$$

$$\nabla_{++}K^{=\check{I}} = \left(\partial_{++} + \frac{1}{4}(K^{=\check{J}})^2\partial_{--}\right)K^{=\check{I}} = 0 \tag{3.78}$$

采用（非完整）导数后，方程会简化

$$\begin{aligned}\nabla_{++} &= \partial_{++} + \frac{1}{4}(K^{=\check{J}})^2\partial_{--} = \partial_{++} + \frac{1}{4}(\nabla_{++}X^{\check{J}})^2\partial_{--} = \\ &= \partial_{++} + \frac{1}{4}\left((\partial_{++}X^{=\check{J}})^2 + \dots\right)\partial_{--}\,.\end{aligned} \tag{3.79}$$

利用这一点和（3.75），可立即得到（3.78）等价于

$$\nabla_{++}\nabla_{++}X^{\check{I}} = 0\,. \tag{3.80}$$

注意，由于（3.78），

$$\nabla_{++}\nabla_{++} = \partial_{++}\partial_{++} + \frac{1}{2}(K^{=\check{J}})^2\partial_{++}\partial_{--} + \frac{1}{16}((K^{=\check{J}})^2)^2\partial_{--}\partial_{--}\,. \tag{3.81}$$

方程（3.80）和（3.77）类似于光锥规范下或˙旋量移动标架方法中的超弦方程或零张力超弦方程，其中（$K^{=J}$）^{2} 起贝尔特拉米微分的作用。然而，与之不同的是，由于导数 ∇_{++} （3.79）中含有场依赖项，方程（3.80）和（3.77）具有高度非线性。

方程（3.45）的规范固定形式稍微复杂一些:

$$0 = \nabla_{++}(\sqrt{-g}\,\sqrt{-s^l s_l}\,((v-\hat{s})^{++})^2) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\sqrt{-s^l s_l}\,((v-\hat{s})^{++})^2\,K^{=\check{J}}\partial_{--}K^{=\check{J}}\,. \tag{3.82}$$

至于非线性自对偶方程 (2.25),

$$H_{mnk}v^k = -\frac{\sqrt{-g}}{2\sqrt{-s^s s_s}}\epsilon_{mnrlpq}s^r v^l\tilde{H}^{pq} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}\epsilon_{mnrlpq}\hat{s}^r v^l\tilde{H}^{pq}\,, \tag{3.83}$$

其规范固定形式看起来并不特别简单。只需注意，它意味着 es

$$H_{mnk}v^k s^n = 0\,. \tag{3.84}$$

对于直接由 PST 作用量导出的二形式规范场的拉格朗日方程，这两种简化都没有体现出来

$$\partial_m(\sqrt{-g}(v-\hat{s})^{[m}\tilde{H}^{nl]}) = 0 \tag{3.85}$$

（参见 [1]，其中讨论了它的性质以及由此推导出式（3.84）的过程）。

3.7 无张力 M5 膜规范固定描述的剩余对称性

表达式（3.38）描述了由时空超对称变换所诱导的剩余 κ–对称变换。不过，这些变换也可以由洛伦兹群诱导。事实上，在规范固定之前，采用费米坐标函数变换的完整形式（其中还包括庞加莱变换和尺度对称变换），即式（2.11），可得[4]

$$\kappa^{+q} = -e^{\beta}\mathcal{O}_{qp}(\xi)\left(\epsilon^{+p(\mathfrak{v})} + \frac{1}{2}L^{\#I}\Theta^{-r(\mathfrak{v})}\gamma^{I}_{rp}\right) . \tag{3.86}$$

因此，规范下戈德斯通费米子场等的变换为

$$\begin{aligned}\delta\Theta^{-q(\mathfrak{v})} = \delta\Theta^{\underline{\alpha}}\mathfrak{v}^{-}_{\underline{\alpha}q} = \epsilon^{-q(\mathfrak{v})} + \frac{1}{2}K^{=I}\left(\epsilon^{+p(\mathfrak{v})}\gamma^{I}_{pq} + \frac{1}{2}L^{\#J}\Theta^{-p(\mathfrak{v})}(\gamma^{I}\gamma^{J})_{pq}\right) - \\ -\frac{1}{4}\left(L^{\#=}\Theta^{-q(\mathfrak{v})} - L^{IJ}\Theta^{-p(\mathfrak{v})}(\gamma^{IJ})_{pq}\right) .\end{aligned} \tag{3.87}$$

当洛伦兹变换参数 L^{ab}及其投影$L^{\#=}$、 $L^{\#I}$ 和 L^{IJ} 均设为零时，这便化为(3.39)。

在规范 (3.30) 下，时空对称性（包括超对称性）作用下玻色坐标函数的变换具有如下形式（推导见附录 C）

$$\begin{aligned}\delta X^{\underline{a}} = a^{\underline{a}} + X^{\underline{b}}L_{\underline{b}}{}^{\underline{a}} + \lambda X^{\underline{a}} + i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\left(\mathfrak{u}^{\#\underline{a}}\epsilon^{-q(\mathfrak{v})} + \mathfrak{u}^{I\underline{a}}\gamma^{I}_{qp}\epsilon^{+p(\mathfrak{v})}\right) + \\ +i\left(\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^{I}_{qp}\epsilon^{+p(\mathfrak{v})} + \frac{1}{2}L^{\#J}\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^{IJ}_{qp}\Theta^{-p(\mathfrak{v})}\right)\left(\mathfrak{u}^{I\underline{a}} - \frac{1}{2}K^{=I}\mathfrak{u}^{\#\underline{a}}\right) .\end{aligned} \tag{3.88}$$

这意味着，保持光锥规范-方程 (3.66)–(3.68) 和 (3.30) 不变的剩余微分同胚变换，对世界体坐标 $\xi^{m} = (\xi^{++}、\ \xi^{--}、\ \xi^{i})$ 的作用如下

$$\begin{aligned}\delta\xi^{++} = a^{\#} + \xi^{++}\left(\lambda - \frac{1}{2}L^{\#=}\right) + \xi^{\check{i}}L^{\#\check{i}} + \\ + X^{\check{I}}(\xi)L^{\#\check{I}} ,\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}\delta\xi^{--} = a^{=} + \xi^{--}\left(\lambda + \frac{1}{2}L^{\#=}\right) + \xi^{\check{i}}L^{=\check{i}} + \\ + X^{\check{I}}L^{=\check{I}} + 2i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\epsilon^{-q\mathfrak{v}} + i\nabla_{++}X^{\check{I}}\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^{\check{I}}_{qp}\,\epsilon^{+p\mathfrak{v}} - \\ + \frac{i}{2}\nabla_{++}X^{\check{I}}L^{\#J}\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^{\check{I}J}_{qp}\Theta^{-p(\mathfrak{v})} ,\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}\delta\xi^{\check{i}} = a^{\check{i}} + \xi^{\check{j}}\left(\lambda\delta^{\check{j}\check{i}} - L^{\check{j}\check{i}}\right) + \frac{1}{2}\xi^{++}L^{=\check{i}} + \frac{1}{2}\xi^{--}L^{\#\check{i}} - \\ - X^{\check{J}}(\xi)L^{\check{J}\check{i}} - 2i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}(\xi)\gamma^{\check{i}}_{qp}\epsilon^{+p\mathfrak{v}} - \frac{i}{2}L^{\#J}\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^{\check{i}J}_{qp}\Theta^{-p(\mathfrak{v})} ,\end{aligned} \tag{3.91}$$

- -其中 $\gamma^{i} = \delta^{i}_{I}\gamma^{I}$、 ∇_{++}定义于 (3.79)，并且我们使用了方程 (3.75)

这些变换包含了玻色和费米坐标场的贡献，它们分别汇集在上述表达式的第二行和第三行中。

无张力 M5 膜在规范 (3.66)–(3.68) 和 (3.30) 下的玻色和费米戈德斯通场变换为

$$\begin{aligned}\delta X^{\check{I}} := X^{\check{I}\prime}(\xi') - X^{\check{I}}(\xi) = a^{\check{I}} + \xi^{\check{j}}\left(\lambda\delta^{\check{j}\check{I}} - L^{\check{j}\check{I}}\right) + \frac{1}{2}\xi^{++}L^{=\check{I}} + \frac{1}{2}\xi^{--}L^{\#\check{I}} - \\ - X^{\check{J}}(\xi)L^{\check{J}\check{I}} - 2i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}(\xi)\gamma^{\check{I}}_{qp}\epsilon^{+p\mathfrak{v}} - \frac{i}{2}L^{\#J}\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^{\check{I}J}_{qp}\Theta^{-p(\mathfrak{v})}\end{aligned} \tag{3.92}$$

[4]该计算使用了约束 (B.3)–(B.5) 的恒定旋量移动标架对应式。

and

$$\begin{aligned}\delta\Theta^{-q(\mathfrak{v})} &:= \Theta^{-q(\mathfrak{v})\prime}(\xi') - \Theta^{-q(\mathfrak{v})\prime}(\xi) = \\ &= \epsilon^{-q(\mathfrak{v})} - \frac{1}{2}\nabla_{++}X^{\check{I}}\left(\epsilon^{+p(\mathfrak{v})}\gamma^{\check{I}}_{pq} + \frac{1}{2}L^{\#J}\Theta^{-p(\mathfrak{v})}(\gamma^{\check{I}}\gamma^{J})_{pq}\right) - \\ &\quad -\frac{1}{4}\left(L^{\#=}\Theta^{-q(\mathfrak{v})} - L^{IJ}\Theta^{-p(\mathfrak{v})}(\gamma^{IJ})_{pq}\right)\,, \end{aligned} \tag{3.93}$$

其中 $\gamma^I = \delta^I_J\gamma^J$。

如果我们关注同一世界体点处场的变分，就必须使用如下表达式

$$\underline{\delta}X^{\check{I}} := X^{\check{I}\prime}(\xi) - X^{\check{I}}(\xi) = \delta X^{\check{I}} - \delta\xi^m\partial_m X^{\check{I}} \tag{3.94}$$

and

$$\underline{\delta}\Theta^{-q} := \Theta^{-q\prime}(\xi) - \Theta^{-q}(\xi) = \delta\Theta^{-q} - \delta\xi^m\partial_m\Theta^{-q}\,. \tag{3.95}$$

然而，如果要计算保持相对于κ–对称性和微分同胚的规范不变的（超）对称性代数，并为此取二阶变分，则必须使用变分式 (3.92) 和 (3.93)[5]。

注意，玻色坐标场的变换式 (3.92) 包含与世界体坐标呈线性关系的项；这些项与常数平移 a^I 一起收集在第一行中，表明了 $X^I(\xi)$ 的戈德斯通性质。费米戈德斯通场的变换 (3.93) 则不然，其中不包含与世界体坐标成正比的项。

相比之下，同一世界体点处的变分 (3.94) 和 (3.95) 在两种情况下都包含与坐标成正比的项，这些项来自 (3.89)–(3.91) 中给出的 $\delta\xi^m$。

(3.92) 和 (3.95) 中玻色场与费米场的变换清楚地表明，参数为 ϵ^{-q} 的时空超对称性是非线性实现的，其中 Θ^{-q} 是其戈德斯通场；而 ϵ^{+q} 超对称性则是线性实现的，并以超多重态特有的方式作用于玻色场和费米场：玻色场通过费米场变换，费米场则通过玻色场的导数变换，尽管相应的导数 ∇_{++} 实际上是玻色场偏导数 $\partial_{++}X^I$ 的相当非线性函数。

注意，描述 SO(9) 变换的斯图克尔伯格场 $\mathcal{O}^{IJ}(\xi)$ 将与 $(v\mp\hat{s})^m E^a_m$ 正交的向量 u^I_a 和常值标架中的向量联系起来，尤其是与 $\mathfrak{u}^J_a$ 联系起来，但它并未出现在剩余微分同胚对称变换 (3.89)–(3.89) 中。这是自然的，因为 SO(9) 是我们基于两个类光向量 $(v\pm\hat{s})^a = (v\pm\hat{s})^m E^a_m$ 构造移动标架时显式体现的规范对称性。

稍显令人惊讶的或许是缺少 $e^{\beta(\xi)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(v-\hat{s})^{++}}}$，因为这描述了将物理移动标架向量（$v\pm\hat{s}$）$^a = (v\pm\hat{s})^m E^a_m$ 与常值标架（3.33）联系起来的 $SO(1,1)$ 变换。这一事实值得进一步思考，而剩余（超）对称性（3.89）–（3.95）的结构和性质也值得进一步研究。

4 关于“通常的”无张力超-p-膜及其规范固定

所谓的“无张力超 p 膜”——不携带世界体规范场且通常称为零张力p膜的那些对象——确实可作为任意时空维数下 BPS 对象的经典模型

[5]原因在于，保持例如规范（3.68）的条件写作 $\delta X^i(\xi) := X^{i\prime}(\xi') - X^i(\xi)$。

维数 D 以及任意 p。这是因为它们是无质量超粒子的对应物，而已知无质量超粒子存在于任意时空维数 [35, 36]。为明确起见，我们将继续讨论 11 维目标超空间中的零张力p膜。就我们的目的而言，采用此类 11 维零张力 p 膜的旋量移动标架表述及其作用量是较为方便的。

$$S_{null-p} = \int d^{p+1}\xi\, \rho^{\#\,m} E_m^{\underline{a}}\, u_{\underline{a}}^{=} \ . \tag{4.1}$$

这是对 11 维零张力超弦作用量（$p = 1$）的直接推广；该作用量与扭量超弦和双扭量超弦的关系已在 [37] 和 [12]中讨论。该作用量的 D=4 对应形式已在 [38, 39], 中提出并研究，而针对零张力超弦的世界体超空间方法中的一种相关表述则是 [40]的研究主题。

在作用量 (4.1) 中，$u_{\underline{a}}^{=}(\xi)$ 是一个类光矢量场，将其视为由 $SO(1,10)$ 值矩阵描述的移动标架的一部分会很方便

$$\left(\frac{1}{2}\left(u_{\underline{a}}^{\#} + u_{\underline{a}}^{=}\right), u_{\underline{a}}^{I}, \frac{1}{2}\left(u_{\underline{a}}^{\#} + u_{\underline{a}}^{=}\right)\right) \ \in \ SO(1,10) \ . \tag{4.2}$$

然而，与无张力 M5 膜的情形不同，后者的 $u_a^{=}$ 由通量和 PST 标量的导数 (3.11) 构造而成（见 (3.10)）；在通常零 p 膜的情形中，它以及其他移动标架矢量和旋量移动标架变量，按照附录 B.1 中的公式 (B.3) –(B.6) 与这些变量相关联，都是独立的受约束辅助场 [6]。式 (4.1) 中的 E_m^a 是超引力超空间（下文中我们将其视为平直）的玻色超标架在$d = (p+1)$ 维世界体上的拉回，而 $\rho^{\#\,m}(\xi)$ 是一个辅助场，在 6 维微分同胚下按世界体矢量密度变换，$m = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ p$。

4.1 运动方程与诱导度规的简并

The 对矢量密度 $\rho^{\#\,m}(\xi)$ 变分作用量，得到方程

$$E_m^{\underline{a}}\, u_{\underline{a}}^{=} = 0 \ , \tag{4.3}$$

这尤其意味着，作用量 (4.1) 在质壳上为零。使用下文讨论的 δX^a 方程后，费米坐标函数的方程可简化为 $\rho^{\#\,m}\partial_m \Theta\Gamma^a u_a^{=} = 0$。利用约束 (B.3)，还可进一步简化为

$$\rho^{\#\,m}\partial_m \Theta^{\underline{\alpha}} v_{\underline{\alpha}q}^{-} = 0 \ . \tag{4.4}$$

推导或展开所有其他方程，都需要对受约束的移动标架或旋量移动标架场进行变分，或计算它们的导数。处理这些问题最简单的方法，是使用附录B中方程 (B.9)–(B.18) 给出的、以常矢量标架和常旋量标架表示这些场的表达式。这些表达式与无张力 M5 膜情形中使用的表达式类似。

因此，相关的独立变分为 $\delta K^{=I}$，由此得到方程

$$\rho^{\#\,m} E_m^{\underline{a}} \left(\mathfrak{u}_{\underline{a}}^{I} + \frac{1}{2} K^{=I} \mathfrak{u}_{\underline{a}}^{\#}\right) = 0 \ , \tag{4.5}$$

其中，$\delta\beta$ 和 $\delta\mathcal{O}_{qp}$ 是式（3.35）和（3.34）的变分中的参数，分别对应于作用量（4.1）的 $SO(1,\ 1)$和 $SO(9)$规范对称性（见第4.2.2节）。同样，$\delta K^{\#I}$ 是（B.10）和（B.11）变分中的参数，对应于所谓的 $\mathbb{K}_9$ 规范对称性，后者反映了缺少

[6]对于无质量超粒子，$p = 0$，它们可以与类光动量 [24–26, 11] 联系起来。事实上，这一说法也适用于具有 $p \geq 1$ 的零 p 膜。

作用量（4.1）中的移动标架向量 $u_{\underline{a}}^{I}$ 和 $u_{a}^{\#}$（见第4.2.2节以及例如 [11]以了解更多细节）。将后一个参数设为零后，我们很容易发现，（4.5）可以写成如下形式

$$\rho^{\#\,m} E_{\underline{m}}^{\underline{a}} u_{\underline{a}}^{I} = 0\,. \tag{4.6}$$

结合式 (4.3)，可立即推出标准零 p 膜的诱导度规 $g_{mn} = E_m^a \eta_{ab} E_n^b$ 是退化的。事实上，利用式 (4.2)，可将其写成

$$g_{mn} = E_{\underline{m}}^{\underline{a}} \eta_{\underline{a}\underline{b}} E_{\underline{n}}^{\underline{b}} = E_{\underline{(m}}^{\underline{a}} u_{\underline{a}}^{=} E_{\underline{n)}}^{\underline{b}} u_{\underline{b}}^{\#} - E_{\underline{m}}^{\underline{a}} u_{\underline{a}}^{I} E_{\underline{n}}^{\underline{b}} u_{\underline{b}}^{I} \tag{4.7}$$

由此可清楚看出，存在如下壳上零矢量：$\rho^{\#m}$

$$\rho^{\#m} g_{mn} = 0\,. \tag{4.8}$$

这等价于说，该诱导度规在质壳上是退化的。实际上，在式 (4.7) 中使用式 (4.3)，即可将壳上诱导度规写为$g_{mn} = E_m^a \eta_{ab} E_n^b = E^a{}_{(m} u_{a}^{=} E_{n)}^{b}\, u_b^{\#} - E_m^a u_a^I E_n^b u_b^I$。不过，我们更倾向于讨论式 (4.8)，因为这类退化条件也会自然出现在零弦的 ILST 表述中 [13]。

玻色坐标函数的运动方程为 $\partial_m(\rho^{\#m} u_a^{=}) = 0$。利用式 (3.35) 可轻易得出，这意味着有两个独立的方程：一个是单态，另一个是 SO(9) 九重态：

$$\partial_m(e^{-2\beta}\rho^{\#m}) = 0\,, \tag{4.9}$$

$$\partial_m(\rho^{\#m} K^{=I}) = 0\,. \tag{4.10}$$

4.2 对称性

4.2.1 刚性对称性

作用量 (4.1) 显然具有 11 维超庞加莱对称性，包括时空超对称性。也容易验证，除了坐标函数之外，它对作用于移动标架和旋量移动标架变量的尺度对称性也保持不变

$$X^{\underline{a}} \mapsto \Lambda^2 X^{\underline{a}}\,, \qquad \Theta^{\underline{\alpha}} \mapsto \Lambda \Theta^{\underline{\alpha}}\,, \tag{4.11}$$

$$u_{\underline{a}}^{=} \mapsto \Lambda^{-2} u_{\underline{a}}^{=}\,, \qquad u_{\underline{a}}^{\#} \mapsto \Lambda^{+2} u_{\underline{a}}^{\#}\,, \qquad u_{\underline{a}}^{I} \mapsto u_{\underline{a}}^{I}\,, \tag{4.12}$$

$$\rho^{\#m} \mapsto \rho^{\#m}\,. \tag{4.13}$$

为便于后文参考，我们明确写出作用量 (4.1) 的完整刚性对称变换集合作用于坐标函数，也就是说，上述缩放（其中 $\Lambda = e^{2\lambda}$）以及 11 维超庞加莱对称性

$$\delta X^{\underline{a}} = a^{\underline{a}} + i\Theta\Gamma^{\underline{a}}\epsilon + X^{\underline{b}} L_{\underline{b}}{}^{\underline{a}} + 2\lambda X^{\underline{a}}\,, \tag{4.14}$$

$$\delta\Theta^{\underline{\alpha}} = \epsilon^{\underline{\alpha}} + \frac{1}{4} L^{\underline{ab}} (\Theta\Gamma_{\underline{ab}})^{\underline{\alpha}} + \lambda\Theta^{\underline{\alpha}}\,. \tag{4.15}$$

与无张力 M5 膜的情形一样，完整的共形对称性仅出现在作用量 (4.1) 的纯玻色极限中，但当 Θ^{α} 非零时便会被破坏。考虑到在“通常的”11 维超空间中尚不知晓时空共形超对称性，这一点看起来很自然。事实上，在已知这种对称性的维度中，特殊共形生成元与超对称生成元的对易子会产生共形超对称性，从而再现完整的超共形超群。

4.2.2 规范对称性与规范固定

由于 u_a^I 动标架矢量不出现在作用量中，因此将这些矢量彼此混合的 SO(9) 旋转是移动标架作用量 (4.1) 的一个（平凡的）显式对称性。此外，由于 $u_a^\#$ 也不出现在作用量中，所谓的 $\mathbb{K}_9$ 对称性（将这些矢量与u_a^I 混合）同样是规范对称性（更多细节及其他参考文献见 [11] ；其中还介绍了规范对称性对旋量移动标架变量的作用）。

需要强调的是，这与无张力 M5 膜的情况不同：在无张力 M5 膜中，$u_a^\# = (v + \hat{s})_a$由规范场强和 PST 标量的导数构成（如同 $u_a^= = (v - \hat{s})_a$ ），因此不存在 $\mathbb{K}_9$ 规范对称性。由于同样的原因，标准零 p 膜作用量 (4.1) 的 $SO(1,1)$ 规范对称性也不存在；该对称性通过缩放 $u_a^=$，并对 $u_a^\#$ 和 $\rho^{\#m}$ [7]同时进行相反的缩放来实现，

$$u_{\underline{a}}^= \mapsto e^{-2\tilde{\lambda}(\xi)} u_{\underline{a}}^=, \qquad u_{\underline{a}}^\# \mapsto e^{+2\tilde{\lambda}(\xi)} u_{\underline{a}}^\#, \qquad \rho^{\#m} \mapsto e^{+2\tilde{\lambda}(\xi)} \rho^{\#m}. \tag{4.16}$$

当然，利用这一规范对称性，可以重新定义刚性的时空尺度对称变换 (4.11)，使其不作用于移动标架，而是对 $\rho^{\#m}$进行缩放。显然，对于无张力 M5 膜，无法做到这一点。

为了看出使零 p 膜作用量 (4.1) 保持不变的 κ–对称性的形式，计算其任意费米变分会比较方便，该变分定义为

$$\delta_f X^{\underline{a}} = i\delta_f \Theta \Gamma^{\underline{a}} \Theta \ , \qquad \delta_f u_{\underline{a}}^= = 0 \ , \qquad \delta_f \rho^{m\#} = 0 \tag{4.17}$$

其中 $\delta_f\Theta^\alpha$ 任意。容易得到

$$\delta_f S_{null-p} = -2i \int d\Theta \Gamma^{\underline{a}} \delta\Theta u_{\underline{a}}^= = -4i \int d\Theta^{\underline{\alpha}} v_{\underline{\alpha} q}^- \, \delta_f \Theta^{\underline{\beta}} v_{\underline{\beta} q}^- \ , \tag{4.18}$$

其中，为了得到最终形式，我们使用了约束 (B.3)（参见 (3.16) 和 (3.17)）。利用约束 (3.21)，可知对于任意费米函数 $\kappa^{+q}(\xi)$，当 $\delta_f\Theta^\alpha = v_q^{-\alpha}\kappa^{+q}$ 时，该式为零。因此，考虑到方程 (3.21)，我们发现费米坐标函数的超对称性和 κ–对称变换由方程 (3.29) 给出，

$$\delta\Theta^{\underline{\alpha}} = \epsilon^{\underline{\alpha}} + v_q^{-\underline{\alpha}} \kappa^{+q} \ . \tag{4.19}$$

此时显然，对标准类型的无类光–p–膜的 κ–对称性和微分同胚对称性进行规范固定（这类膜除其世界体上的坐标函数外不携带任何世界体场），可以采用与无张力 M5 膜相同的方式。坐标函数的规范固定条件可选为方程 (3.30) 和 (3.66)–(3.68) 的形式，其中 $\check{m} = 1, \ldots, (p-1)$ 和 $\check{i} = 1, \ldots, (p-1)$。

戈德斯通场是费米坐标函数 s 中在完全光锥规范固定后不消失的分量，以及未与世界体坐标等同的玻色坐标函数。这些是十六个费米 $\Theta^{-q}(\xi^m) = \Theta^\alpha \mathfrak{v}_\alpha^{-q}$，与无张力M5膜的情形相同，但依赖于 $(p+1)$ 个世界体坐标，$\xi^m = (\xi^{++}, \xi^{--}, \xi^{\check{i}})$，其中 $\check{i} = 1, \ldots\ldots, (p-1)$；以及 $(10-p)$ 个玻色 $X^I(\xi^m)$，编号为 $\check{I} = (p+1)\ldots\ldots, 10$。

保持这种光锥规范的刚性对称性，由与无张力 M5 膜情形完全相同的方程描述，只是指标取值范围需采用上文所述的适当范围。

[7]这一最后的巧合体现在这两者具有相同的双重符号 $\# \equiv {}^{++}$ 。

5 结论与讨论

本文解决了无张力 M5 膜局域费米子 κ 对称性的规范固定问题，该膜的作用量在我们近期的 [1] 中得到了推导。为此，我们采用了旋量移动标架方法 [10–12]，并以相当非平凡的方式将其应用于无张力 M5 膜。

为了阐明无张力 M5 膜与不携带世界体规范场的标准零类-p-膜之间的区别，我们还讨论了后者的旋量移动标架表述。我们证明，坐标函数的规范固定条件以及保持这些条件的剩余对称性，实质上与无张力 M5 膜的情形相同，并指出了其中的差异。对于本文所考察的标准零类-p-膜作用量，移动标架场和旋量移动标架场是辅助变量，可与玻色坐标函数的共轭动量相关联。而在无张力 M5 膜的情形中，它们的含义则有所不同。

M5 膜的无张力极限 [1] 的一个特殊之处在于，它要求世界体规范场强保持非零，而且非退化。后一个条件意味着，由 b_2 的场强的对偶量构造的反对称二阶张量 H^{mn} （如式（2.7）所示）应具有最大数量 2 个非零本征值。这等价于说，式（2.8）中定义的复合六维矢量 s_m 应为非零，从而可以构造类空单位矢量 $\hat{s}^m = \frac{s^m}{\sqrt{-s^n s_n}}$；该矢量是定义式（2.14）中无张力 M5 膜 κ-对称性投影算符所必需的。

为构造适用于无张力 M5 膜模型中光锥规范固定的旋量移动标架，我们首先将利用规范场 b_2 构造的世界体单位六维矢量 $\hat{s}_m$（见式 (2.8)）和由 PST 标量的导数构造的世界体单位六维矢量 v_m（见式 (2.6)）提升为十一维单位矢量 $\hat{s}^a = \hat{s}^m E^a_m$ 和 $v^a = v^m E^a_m$，见式 (3.8)。随后，我们引入九个类空单位向量 u^I_a，使其与上述两个矢量正交且彼此正交，从而将这组正交单位矢量扩充为完整的十一维移动标架 (3.10)。旋量移动标架 (3.15) 被定义为此类移动标架中向量的一种平方根，具体由约束 (3.16)–(3.19) 和 (3.24) 确定。特别地，约束 (3.16)–(3.19) 表明，构成取值于 Spin(1,10) 的动标架矩阵的旋量移动标架变量 $v^{\mp}_{\alpha q}$，是由 $\hat{s}^a$ 和 v^a 的和与差给出的类光向量的一种平方根。

以这种方式构造的旋量移动标架变量，使我们能够通过（标准）光锥规范条件（3.30）的一个对应形式，固定无张力 M5 膜作用量的 κ–对称性。我们将这些变量与一个常旋量标架结合使用，该标架与无张力 M5 膜的某个常“背景场”构型相关联，从而在由条件（3.32）定义的这一常构型邻域内，通过 κ–对称性固定这种规范。

（3.66）–（3.68）中的世界体微分同胚对称性的光锥规范固定，是借助与上述常旋量标架相关（由其构造）的常矢量标架完成的。在这一光锥规范下，玻色和费米坐标函数的运动方程在形式上类似于超弦或零超弦方程，但包含了式（3.79）的非完整导数 ∇_{++}；不过，该导数以非线性的方式依赖于坐标函数的导数。

我们还给出了保持式 (3.30) 和 (3.66)–(3.68) 的光锥规范不变的剩余微分同胚对称变换 (3.89)–(3.91)。这些变换的常参数由靶空间庞加莱超群的参数和尺度对称性的参数给出；前者借助常矢量标架及其关联的旋量标架进行分解。在这种情况下，世界体坐标的剩余微分同胚对称变换 (3.66)–(3.68) 涉及无张力 M5 膜的戈德斯通场。这一现象已在 [1] 中针对无张力 M5 膜的玻色极限得到观察。

反过来，规范固定的无张力 M5 膜的戈德斯通场变换中，包含与世界体坐标成正比的项；首先，这些项通过式 (3.94) 和 (3.95) 中的剩余微分同胚出现，而对于玻色戈德斯通场，它们还通过靶空间洛伦兹变换的规范固定形式出现（见式 (3.92) 第一行）。

正如 [1], 中所注意到的，在无张力极限下，M5 膜的世界体二形式规范场 b_2 在其局部费米 κ–对称性下变得不变。作为一个不带体时空对称性指标的世界体场，它在时空超对称性下也保持不变。乍看之下，这似乎暗示着一个问题，即通常由（线性实现的）超对称性所要求的自由度平衡可能遭到破坏。然而，对于无张力膜而言并不存在这一问题，因为它们的κ–对称性类似于无质量超粒子的对称性；众所周知，后者可以存在于任意维数中，尽管会出现自由度不平衡的情况，例如在 D=11 中（见 [35, 36]）。

在进行规范固定后，时空超对称变换确实通过剩余微分同胚变换作用于世界体规范场，

$$\underline{\delta} b_{mn} = b'_{mn}(\xi) - b_{mn}(\xi) = -\delta\xi^l H_{lmn} + 2\partial_{[m}\Big(b_{n]l}\delta\xi^l\Big) + 2\partial_{[m}\alpha_{n]} \tag{5.1}$$

其中 $\delta\xi^m = (\delta\xi^{++}, \delta\xi^{--}, \delta\xi^{\check{\imath}})$ 由（3.89）–（3.89）给出，而一形式规范对称性参数为 $\alpha_n(\xi)$。利用这一点可以消去第二项，从而得到世界体规范场的诱导超对称变换为

$$\begin{aligned}\underline{\delta}_{susy} b_{mn} = -\delta_{susy}\xi^l H_{lmn} = -2i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\left(\epsilon^{-q(\mathfrak{v})} + \frac{1}{2}\nabla_{++}X^{\check{I}}\gamma^{\check{I}}_{qp}\epsilon^{-p(\mathfrak{v})}\right) H_{--mn} + \\ +2i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^{\check{i}}_{qp}\epsilon^{+p(\mathfrak{v})} H_{\check{i}mn}\,.\end{aligned} \tag{5.2}$$

尽管在平直靶超空间中保持无张力 M5 膜作用量规范固定形式不变的超对称数目，与六维最大超共形群中的超对称数目相同，但玻色对称性并未明显呈现为超共形群的对称性。

一般而言，保持无张力 M5 膜坐标函数上的光锥规范固定形式不变的对称性结构相当复杂，因此难以处理它们所构成的超群。不过不难看出，所有这些对称性都源自平直超空间的超庞加莱对称性，并由时空坐标函数的维尔缩放对称性加以扩充。或许，研究 $AdS_{7(4)} \times S^{4(7)}$ 或 $AdS_2 \times Y^9$ 超空间中的无张力 M5 膜，有助于揭示更大的对称性。请注意，即使在后一种情形最简单的版本——十一维超引力的最大超对称 $AdS_2 \times S^2 \times T^7$ 解中，超空间描述仍有待完善。

致谢

作者感谢 Dima Sorokin 和 Kurt Lechner 在本项目早期阶段的合作及富有成效的讨论。本研究部分由西班牙科学与创新部、西班牙国家研究署和欧洲区域发展基金（欧盟）资助，项目编号为 PID2024-155685NB-C21“引力、超引力与超弦”（GRASS）；同时也获得巴斯克政府资助，项目为“引力、宇宙学与基础物理” IT1977-26。

附录

A D=11伽马矩阵的一些性质

在我们采用的大部分为负的度规约定中， $\eta_{ab} = diag(+, -, ..., -)$, 满足克利福德代数关系 $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\eta^{ab}$ 的 32×32 11D 伽马矩阵 $(\Gamma^a)_\alpha{}^\beta$ 是虚数。电荷共轭矩阵$C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}$ 及其逆矩阵 $C^{\alpha\beta} = -C^{\beta\alpha}$ 也都是虚数。我们发现使用实对称矩阵更为方便

$$\Gamma^a_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = (\Gamma^a)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\gamma}} C_{\underline{\gamma}\underline{\beta}} = \Gamma^a_{\underline{\beta}\underline{\alpha}} \,, \qquad \tilde{\Gamma}_a{}^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = C^{\underline{\alpha}\underline{\gamma}} (\Gamma_a)_{\underline{\gamma}}{}^{\underline{\beta}} = \tilde{\Gamma}_a{}^{\underline{\beta}\underline{\alpha}} \,, \tag{A.1}$$

其满足

$$\Gamma^a \tilde{\Gamma}^b + \Gamma^b \tilde{\Gamma}^a = 2\eta^{ab} \,. \tag{A.2}$$

那么对于马约拉纳旋量 $\epsilon\Gamma^a\psi = \epsilon^\alpha \Gamma^a_{\alpha\beta}\psi^\beta = \epsilon_\gamma \tilde{\Gamma}^{a\gamma\delta}\psi_\delta = \epsilon^\alpha \Gamma^a{}_\alpha{}^\beta \psi_\beta$。

指标的（反）对称化定义为总权重为 1，因此

$$\tilde{\Gamma}^{a_1\ldots a_{2p+1}} = \tilde{\Gamma}^{[a_1}\ldots\tilde{\Gamma}^{a_{2p+1}]} = \frac{1}{(2p+1)!}\left(\tilde{\Gamma}^{a_1}\ldots\tilde{\Gamma}^{a_{2p+1}} \mp permutations\right) \,, \tag{A.3}$$

$$\tilde{\Gamma}^{a_1\ldots a_{2p}} = \tilde{\Gamma}^{[a_1}\ldots\Gamma^{a_{2p}]} = \frac{1}{(2p)!}\left(\tilde{\Gamma}^{a_1}\ldots\Gamma^{a_{2p}} \mp permutations\right) \,. \tag{A.4}$$

我们选择

$$\Gamma_{0\ldots9\;10} = -i\,I \,, \qquad \tilde{\Gamma}_{0\ldots9\;10} = +i\,I \,, \qquad \epsilon_{0\ldots9\;10} = 1 = \epsilon^{0\ldots9\;10} \tag{A.5}$$

这意味着

$$\Gamma_{a_1\ldots a_n} = \frac{i(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(11-n)!}\epsilon_{a_1\ldots a_n b_1\ldots b_{11-n}}\Gamma^{b_1\ldots b_{11-n}} \,. \tag{A.6}$$

B 关于旋量移动标架的更多细节

B.1 旋量移动标架变量的完整约束集

旋量移动标架变量的完整约束列表，这些变量构成取值于 Spin(1,10) 的矩阵 (3.15),

$$\left(v_{\underline{\alpha}q}{}^+, v_{\underline{\alpha}q}{}^-\right) \in Spin(1,10) \,, \tag{B.1}$$

以及构成取值于洛伦兹群的矩阵的移动标架变量

$$\left(\frac{1}{2}\left(u^{\#}_{\underline{a}} + u^{=}_{\underline{a}}\right), u^I_{\underline{a}}, \frac{1}{2}\left(u^{\#}_{\underline{a}} + u^{=}_{\underline{a}}\right)\right) \in SO(1,10) \tag{B.2}$$

因此，满足 (3.12)–(3.14) 的为（参见例如 [11] 及其中的参考文献）

$$v_q^-\tilde{\Gamma}_{\underline{\mu}}v_p^- = u^{=}_{\underline{\mu}}\delta_{qp} \,, \qquad u^{=}_{\underline{\mu}}\Gamma^{\underline{\mu}}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = 2v_{\underline{\alpha}q}{}^- v_{\underline{\beta}q}{}^- \,, \tag{B.3}$$

$$v_q^+\tilde{\Gamma}_{\underline{\mu}}v_p^+ = u^{\#}_{\underline{\mu}}\delta_{qp} \,, \qquad u^{\#}_{\underline{\mu}}\Gamma^{\underline{\mu}}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = 2v_{\underline{\alpha}q}{}^+ v_{\underline{\beta}q}{}^+ \,, \tag{B.4}$$

$$v_q^-\tilde{\Gamma}_{\underline{\mu}}v_p^+ = u^I_{\underline{\mu}}\gamma^I_{qp} \,, \qquad u^I_{\underline{\mu}}\Gamma^{\underline{\mu}}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = 2v_{(\underline{\alpha}|q}{}^-\gamma^I_{qp}v_{|\underline{\beta})p}{}^+ \,, \tag{B.5}$$

$$v_q^-\Gamma_{\underline{\mu}}v_p^+ = -u^I_{\underline{\mu}}\gamma^I_{qp} \,, \qquad u^I_{\underline{\mu}}\tilde{\Gamma}^{\underline{\mu}\underline{\alpha}\underline{\beta}} = -2v_q^{-(\underline{\alpha}}\gamma^I_{qp}v_p^{+\underline{\beta})} \,. \tag{B.6}$$

在 (B.5) 和 (B.6) 中，$\gamma^I_{qp} = \gamma^I_{pq}$ 为 SO(9) 狄拉克矩阵，其性质列于 (3.25) 中。

上述方程还描述了移动标架与逆旋量移动标架矩阵各元素之间的关系，

$$\begin{pmatrix} v_q^{-\underline{\alpha}} \\ v_q^{-\underline{\alpha}} \end{pmatrix} \in Spin(1,10) \tag{B.7}$$

这些元素满足 (3.21)–(3.22)，并可通过式 (3.20)用旋量移动标架变量 (3.15) 表示。

对于无张力 M5 膜，我们根据 (3.11)，由 PST 标量的导数（见 (2.6) 的 v_m）和规范场强（见 (2.8)、(2.23) 的 $\hat{s}_m$）构造出两个类光动标架矢量，

$$u^{\#}_{\underline{a}} = (v + \hat{s})_{\underline{a}} \,, \qquad u^{=}_{\underline{a}} = (v - \hat{s})_{\underline{a}} \,. \tag{B.8}$$

B.2 两个移动标架与两个旋量移动标架之间的关系

两个移动标架之间关系的完整形式由以下方程描述，该方程由 [34] 中得到（见本文式 (7.19)–(7.31)：

$$u^{=}_{\underline{a}} = e^{-2\beta}\left(\mathfrak{u}^{=}_{\underline{a}} + \frac{1}{4}(\vec{K}^{=})^2\mathfrak{u}^{\#}_{\underline{a}} + K^{=I}\mathfrak{u}^{I}_{\underline{a}}\right) \,, \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned} u^{\#}_{\underline{a}} = e^{+2\beta}\Bigg(&\mathfrak{u}^{\#}_{\underline{a}}\left(1 + \frac{1}{2}K^{=I}K^{\#I} + \frac{1}{16}(\vec{K}^{=})^2(\vec{K}^{\#})^2\right) + \\ &+\frac{1}{4}\mathfrak{u}^{=}_{\underline{a}}(\vec{K}^{\#})^2 + \mathfrak{u}^{I}_{\underline{a}}\left(K^{\#I} + \frac{1}{4}K^{=I}(\vec{K}^{\#})^2\right)\Bigg) \,, \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned} u^{I}_{\underline{a}} = &\left(\mathfrak{u}^{K}_{\underline{a}}\left(\delta^{KJ} + \frac{1}{2}K^{=K}K^{\#J}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\mathfrak{u}^{\#}_{\underline{a}}\left(K^{=J} + \frac{1}{4}K^{\#J}(\vec{K}^{=})^2\right) + \frac{1}{2}\mathfrak{u}^{=}_{\underline{a}}\tilde{K}^{\#J}\right)\mathcal{O}^{JI} \,. \end{aligned} \tag{B.11}$$

在式 (B.9)–(B.11) 中，$K^{=J}$ 和 $K^{\#J}$ 参数化陪集 $SO(1,10)/[SO(1,1) \times SO(9)]$，$\beta$ 是 SO(1,10) 的 SO(1,1) 子群的参数，而 $\mathcal{O}^{JI} = \mathcal{O}^{-1\,IJ}$ 是 SO(9) 值矩阵。

在本文中，我们利用这些关系将移动标架与常数（因而是不动的）标架联系起来。对于无张力 M5 膜，移动标架的类光向量可由世界体规范场强和 PST 标量的导数通过方程 (B.8) 表示。

旋量移动标架场用常数自旋子调和函数表示为

$$v^{-}_{\underline{\alpha}q} = e^{-\beta}\mathcal{O}_{qp}\left(\mathfrak{v}^{-}_{\underline{\alpha}p} + \frac{1}{2}K^{=I}\gamma^I_{pp'}\mathfrak{v}^{+}_{\underline{\alpha}p}\right) \,, \tag{B.12}$$

$$v^{+}_{\underline{\alpha}q} = e^{\,\beta}\mathcal{O}_{qp}\mathfrak{v}^{+}_{\underline{\alpha}p} + \frac{1}{2}e^{\,2\,\beta}\,\mathcal{O}^{IJ}K^{\#J}\gamma^I_{pp'}\mathfrak{v}^{-}_{\underline{\alpha}p'} \tag{B.13}$$

$$= e^{\,\beta}\mathcal{O}_{qp}\left(\mathfrak{v}^{+}_{\underline{\alpha}p} + \frac{1}{4}K^{\#J}K^{=I}(\gamma^J\gamma^I)_{pp'}\mathfrak{v}^{+}_{\underline{\alpha}p'} + \frac{1}{2}K^{\#I}\gamma^I_{pp'}\mathfrak{v}^{-}_{\underline{\alpha}p'}\right) \,. \tag{B.14}$$

这些表达式涉及 $Spin$(9) 矩阵，它们与上文使用的 SO(9) 矩阵之间的关系为

$$\mathcal{O}_{qr}\mathcal{O}_{ps}\gamma^I_{rs} = \gamma^J_{qp}\mathcal{O}^{JI} \,. \tag{B.15}$$

此外，由于 $Spin$(9) $\subset SO$(16)，这些矩阵还满足

$$\mathcal{O}_{qp} = \mathcal{O}^{-1}_{pq} \qquad . \tag{B.16}$$

逆自旋子动标架矩阵各元素的表达式为

$$v_q^{-\underline{\alpha}} = e^{-\beta}\mathcal{O}_{qp}\left(\mathfrak{v}_p^{-\underline{\alpha}} - \frac{1}{2}K^{=I}\gamma^I_{pp'}\mathfrak{v}_{p'i}^{+\underline{\alpha}}\right)\,, \tag{B.17}$$

$$v_q^{+\underline{\alpha}} = e^{\,\beta}\mathcal{O}_{qp}\left(\left(\delta_{pp'} + \frac{1}{4}K^{\#I}K^{=J}(\gamma^I\gamma^J)_{pp'}\right)\mathfrak{v}_{p'i}^{+\underline{\alpha}} - \frac{1}{2}K^{\#I}\gamma^I_{pp'}\mathfrak{v}_{p'i}^{-\underline{\alpha}}\right)\,. \tag{B.18}$$

C 方程（3.88）的推导

固定规范（3.30）后，玻色时空对称性和超对称性的变换会诱导某些 κ–对称性变换，使得玻色坐标函数的一般变换具有方程（3.88）的形式。推导如下

$$\begin{aligned}
\delta X^{\underline{a}} &= a^{\underline{a}} + X^{\underline{b}}L_{\underline{b}}{}^{\underline{a}} + \lambda X^{\underline{a}} + i\Theta\Gamma^{\underline{a}}\epsilon - i\Theta\Gamma^{\underline{a}}\kappa \\
&= a^{\underline{a}} + X^{\underline{b}}L_{\underline{b}}{}^{\underline{a}} + \lambda X^{\underline{a}} + i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\left(\mathfrak{u}^{\#\underline{a}}\epsilon^{-q(\mathfrak{v})} + \mathfrak{u}^{I\underline{a}}\gamma^I_{qp}\epsilon^{+p(\mathfrak{v})}\right) - \\
&\qquad -i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^I_{qr}\left(\mathfrak{u}^{I\underline{a}} - \frac{1}{2}K^{=I}\mathfrak{u}^{\#\underline{a}}\right)e^{-\beta}\mathcal{O}_{rp}\kappa^{+p} = \\
&= a^{\underline{a}} + X^{\underline{b}}L_{\underline{b}}{}^{\underline{a}} + \lambda X^{\underline{a}} + i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\left(\mathfrak{u}^{\#\underline{a}}\epsilon^{-q(\mathfrak{v})} + \mathfrak{u}^{I\underline{a}}\gamma^I_{qp}\epsilon^{+p(\mathfrak{v})}\right) + \\
&\qquad +i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^I_{qp}\left(\mathfrak{u}^{I\underline{a}} - \frac{1}{2}K^{=I}\mathfrak{u}^{\#\underline{a}}\right)\left(\epsilon^{+p(\mathfrak{v})} + \frac{1}{2}L^{\#I}\Theta^{-s(\mathfrak{v})}\gamma^I_{sp}\right) = \\
&= a^{\underline{a}} + X^{\underline{b}}L_{\underline{b}}{}^{\underline{a}} + \lambda X^{\underline{a}} + i\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\left(\mathfrak{u}^{\#\underline{a}}\epsilon^{-q(\mathfrak{v})} + \mathfrak{u}^{I\underline{a}}\gamma^I_{qp}\epsilon^{+p(\mathfrak{v})}\right) + \\
&\qquad +i\left(\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^I_{qp}\epsilon^{+p(\mathfrak{v})} + \frac{1}{2}L^{\#J}\Theta^{-q(\mathfrak{v})}\gamma^{IJ}_{qp}\Theta^{-p(\mathfrak{v})}\right)\left(\mathfrak{u}^{I\underline{a}} - \frac{1}{2}K^{=I}\mathfrak{u}^{\#\underline{a}}\right)\,.
\end{aligned} \tag{C.1}$$

D 关于规范固定无张力M5膜的离壳描述

规范固定理论的离壳形式非常有用，尤其是在除了寻求运动方程的规范固定形式之外，还要寻求作用量的规范固定形式时。在这种情况下，我们必须使用完整的方程（3.70），而不是其简化形式（3.72）。方程（3.69）–（3.71）意味着

$$(v-\hat{s})^m\partial_m = (v-\hat{s})^{++}\mathcal{D}_{++} \tag{D.1}$$

with

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{++} &= \nabla_{++} + \frac{\nabla_{++}\Theta^{-q}\,\Theta^{-q}}{1-2i\partial_{--}\Theta^{-q}\,\Theta^{-q}}\,\partial_{--} \\
&= \partial_{++} + \frac{1}{4}(K^{=\check{I}})^2\partial_{--} + \frac{\partial_{++}\Theta^{-q}\,\Theta^{-q} + \frac{1}{4}(K^{=\check{I}})^2\partial_{--}\Theta^{-q}\,\Theta^{-q}}{1-2i\partial_{--}\Theta^{-p}\,\Theta^{-p}}\,\partial_{--}\,.
\end{aligned} \tag{D.2}$$

在该方程的第一行中，我们使用了按方程（3.74）定义的 ∇_{++} （以 $K^{=I}$ 表示）。在质壳之外，（D.1）和（3.65）意味着

$$K^{=\check{I}} = -2\mathcal{D}_{++}X^{\check{I}}\,, \qquad \check{I} = 5,6,7,8,9 \tag{D.3}$$

因此，将 $\mathcal{D}_{++}$ 作用于 X^I，我们得到一个关于该导数的代数方程，

$$\mathcal{D}_{++}X^{\check{I}} = \partial_{++}X^{\check{I}} + \left((\mathcal{D}_{++}X^{\check{J}})^2 + \frac{\partial_{++}\Theta^{-q}\,\Theta^{-q} + (\mathcal{D}_{++}X^{\check{K}})^2\,\partial_{--}\Theta^{-q}\,\Theta^{-q}}{1 - 2i\partial_{--}\Theta^{-q}\,\Theta^{-q}} \right) \partial_{--}X^{\check{I}} \,. \tag{D.4}$$

显然，f 对于满足 $\partial_{--}X^I = 0, \mathcal{D}_{++}X^I$ 的“手征”玻色戈德斯通场，可化简为 $\partial_{++}X^I$

$$\mathcal{D}_{++}X^{\check{I}}|_{\partial_{--}X^{\check{J}}=0} = \partial_{++}X^{\check{I}} \,. \tag{D.5}$$

在一般情形下，将 (D.4) 两边平方，可得到关于 $Y = (\mathcal{D}_{++}X^I)^2$, 的二次方程

$$(D_{--}X^{\check{J}})^2\,Y^2 - (1 - 2D_{++}X^{\check{J}}D_{--}X^{\check{J}})Y + (D_{++}X^{\check{J}})^2 = 0 \,, \tag{D.6}$$

这里我们引入记号

$$D_{--} = (1 + \Xi)\,\partial_{--} \,, \tag{D.7}$$

$$\Xi = \frac{\partial_{--}\Theta^{-q}\,\Theta^{-q}}{1 - 2i\partial_{--}\Theta^{-p}\,\Theta^{-p}} \,, \tag{D.8}$$

$$D_{++} = \partial_{++} + \frac{\partial_{++}\Theta^{-q}\,\Theta^{-q}}{1 - 2i\partial_{--}\Theta^{-p}\,\Theta^{-p}}\partial_{--} \,. \tag{D.9}$$

在假设 $(\partial_{--}X^J)^2 \neq 0$ 的情况下，方程 (D.6) 的解为

$$Y_\pm = \frac{1}{2(1+\Xi)^2(\partial_{--}X^{\check{K}})^2} \Big(1 - 2(1+\Xi)D_{++}X^{\check{J}}\partial_{--}X^{\check{J}} \pm \sqrt{\Big(1 - 2(1+\Xi)D_{++}X^{\check{J}}\partial_{--}X^{\check{J}}\Big)^2 - (1+\Xi)^2(D_{++}X^{\check{J}})^2(\partial_{--}X^{\check{I}})^2} \Big) \,. \tag{D.10}$$

形式上，我们可以考虑 $(\mathcal{D}_{++}X^J)^2 = Y_+$ 和 $(\mathcal{D}_{++}X^J)^2 = Y_-$ 两种情形，但实际上，只有第二种情形是自洽的。

事实上，让我们考虑 $\partial_{++}X^J = 0 = \partial_{++}\Theta^{-q(\mathfrak{v})}$ 的情形，其中 $D_{++}X^{\check{J}} = 0$，因此Y_- 消失，而 $Y_+ = {}_2{}^1{}_{(1+\Xi)(\partial_{--}X^J)^2}$。尽管在我们用于推导 (D.10) 的 $(\partial_{--}X^J)^2 \neq 0$假设下，后者看起来是自洽的，但作为整个理论中的 $(D_{++}X^J)^2$ 表达式，它似乎并不合理，因为显然它有一个平凡解 $D_{++}X^J = 0 = \partial_{--}X^J$，在此情况下 Y_+ 的表达式与其定义不一致。

最后，按照上述记号，坐标函数的特征导数的非壳表达式为：

$$\mathcal{D}_{++} = D_{++} + Y_-(1+\Xi)\partial_{--} \,. \tag{D.11}$$

参考文献

[1] I. Bandos、K. Lechner 和 D. P. Sorokin，*M5* 膜的无张力/强场极限及其玻色体的共形对称性，Phys. Rev. D **114** (2026年)（即将刊出）[arXiv:2607.29653[hep–th]]。

[2] G. W. Gibbonsand P. C.West，*M5* 膜的度规与强耦合极限，J. Math. Phys. **42** (2001) 3188–3208，arXiv:hep-th/0011149 [hep-th]。

[3] P. S. Howe 和 E. Sezgin，*D = 11,* 第 *= 5*页，《物理快报》**B394** （1997年）62–66，arXiv:hep-th/9611008。

[4] P. S. Howe、E. Sezgin 和 P. C. West，《M理论五膜的协变场方程》，《物理快报》B399（1997年）49–59，arXiv:hep-th/9702008。[5] P. K. Townsend，《六维相互作用共形手征二形式电动力学》，《伦敦皇家学会会刊 A》476（2020年）第2236期，20190863，arXiv:1911.01161 [hep-th]。[6] E. Bergshoeff、D. P. Sorokin 和 P. K. Townsend，《M5膜哈密顿量》，《核物理学B》533（1998年）303–316，arXiv:hep-th/9805065。[7] I. A. Bandos、K. Lechner、A. Y. Nurmagambetov、P. Pasti、D. P. Sorokin 和 M. Tonin，《M理论超五膜的协变作用量》，《物理评论快报》78（1997年）4332–4334，arXiv:hep-th/9701149。[8] M. Aganagic、J. Park、C. Popescu 和 J. H. Schwarz，《M理论五膜的世界体作用量》，《核物理学B》496（1997年）191–214，arXiv:hep-th/9701166。[9] I. A. Bandos 和 P. K. Townsend，《光锥 M5 膜与多重 M2 膜》，《经典与量子引力》25（2008年）245003，arXiv:0806.4777 [hep-th]。[10] I. A. Bandos 和 A. Zheltukhin，《旋量移动标架形式中的 Green–Schwarz 超弦》，《物理快报》B288（1992年）77–84。[11] I. A. Bandos，《D=*11* 无质量超粒子的协变量子化、纯旋量 BRST 荷与隐藏对称性》，《核物理学B》796（2008年）360–401，arXiv:0710.4342 [hep-th]。[12] I. Bandos，《时空维数为 D=*4*、10 和 11 维时的扭量弦/双扭量弦与零张力超弦》，《高能物理学杂志》09（2014年）086，arXiv:1404.1299 [hep-th]。[13] J. Isberg、U. Lindstrom、B. Sundborg 和 G. Theodoridis，《经典与量子化无张力弦》，《核物理学B》411（1994年）122–156，arXiv:hep-th/9307108。[14] U. Lindstr¨om，《对 ILST 零弦的背景等距变换进行规范化》，arXiv:2611.27437[hep-th]。[15] M. Perry 和 J. H. Schwarz，《六维相互作用手征规范场与 Born–Infeld 理论》，《核物理学B》489（1997年）47–64，arXiv:hep-th/9611065。[16] P. Pasti、D. P. Sorokin 和 M. Tonin，《D = *11* 手征五膜的协变作用量

l

场，《物理学快报》**B398** （1997年）41–46，arXiv:hep-th/9701037。[17] I. Bandos，《关于在具有非平凡拓扑的时空中采用拉格朗日方法研究自对偶规范场》，《高能物理学杂志》**08** （2014年）048，arXiv:1406.5185 [hep-th].[18] P. Pasti、D.P.Sorokin 和 M.Tonin，《关于对偶对称模型中显式洛伦兹不变性和一般坐标不变性的注记》，《物理学快报》**B352** （1995年）59–63，arXiv:hep-th/9503182。[19] P. Pasti、D. P. Sorokin 和 M.Tonin，《关于手征 p-形式的洛伦兹不变作用量》，Phys. Rev. **D55** （1997年）6292–6298，arXiv:hep-th/9611100。[20] E. Sokatchev，《光锥调和超空间及其应用》，Phys. Lett.B **169** （1986年）209–214。[21] E. Sokatchev，《调和超粒子》，《经典与量子引力》**4** （1987年）237–246。[22] I. A. Bandos，《洛伦兹调和超空间中的超粒子》，Sov. J. Nucl. Phys.**51** （1990年）906–914。[23] I. A.Bandos 和 A. A.Zheltukhin，《扭量、调和变量和零超 p-膜》，《苏联物理学报快报》**51** （1990年）618–621。 [PismaZh.Eksp.Teor.Fiz.51,547（1990年）]。[24] F. Delduc、A. Galperin 和 E. Sokatchev，《洛伦兹调和（超）场与（超）粒子》，《核物理学B》**368** （1992年）143–171。

[25] A. S. Galperin、P. S. Howe 和 K. S. Stelle，《超粒子与洛伦兹群》，《核物理学B》368（1992年）248–280，arXiv:hep-th/9201020。[26] A. S. Galperin、P. S. Howe 和 P. K. Townsend，《超场的扭量变换》，《核物理学B》402（1993年）531–547。[27] I. A. Bandos 和 A. Y. Nurmagambetov，《N=*1* 超粒子的广义作用原理与外在几何》，《经典与量子引力》14（1997年）1597–1621，arXiv:hep-th/9610098。[28] I. A. Bandos 和 A. A. Zheltukhin，《与十一维空间中超膜的作用量积分相关的纽曼-彭罗斯二元组推广》，《苏联物理学报快报》55（1992年）81–84。[29] I. A. Bandos 和 A. A. Zheltukhin，《扭量类洛伦兹调和表述中的 N=*1* 超p膜》，《经典与量子引力》12（1995年）609–626，arXiv:hep-th/9405113。[30] I. A. Bandos、D. P. Sorokin、M. Tonin、P. Pasti 和 D. V. Volkov，《双重超对称几何方法中的超弦与超膜》，《核物理学B》446（1995年）79–118，arXiv:hep-th/9501113。[31] D. P. Sorokin，《超膜与超嵌入》，《物理学报告》329（2000年）1–101，arXiv:hep-th/9906142。[32] I. A. Bandos 和 D. P. Sorokin，《超弦与超p膜的超嵌入方法》，《弦理论》，第[32] 章（编者：C. Angelantonj 和 I. Antoniadis），《量子引力手册》（编者：C. Bambi、L. Modesto 和 I.L. Shapiro）。施普林格·自然，2024年。arXiv:2301.10668[hep-th]。[33] I. Bandos 和 U. D. M. Sarraga，《多D0膜系统的性质：十一维起源、运动方程及其解》，Phys. Rev. D 107（2023年）第8期，086006，arXiv:2212.14829 [hep-th]。[34] I. Bandos，《十维超杨-米尔斯理论和十一维超引力振幅及受约束超振幅的旋量标架形式体系》，《高能物理学杂志》11（2018年）017，arXiv:1711.00914 [hep-th]。[35] E. Bergshoeff 和 P. K. Townsend，《超D膜》，《核物理学B》490（1997年）145–162，arXiv:hep-th/9611173。[36] M. B. Green、M. Gutperle 和 H. H. Kwon，《十一维超粒子的光锥量子力学》，《高能物理学杂志》08（1999年）012，arXiv:hep-th/9907155 [hep-th]。[37] I. A. Bandos、J. A. de Azcarraga 和 C. Miquel-Espanya，《（超）扭量弦的超空间表述》，《高能物理学杂志》07（2006年）005，arXiv:hep-th/0604037。[38] I. A. Bandos 和 A. A. Zheltukhin，《零超 p-膜：哈密顿动力学与量子化》，Phys. Lett. B261（1991年）245–250。[39] I. A. Bandos 和 A. A. Zheltukhin，《四维时空中的零超p膜量子理论》，《物理进展》41（1993年）619–676。[40] I. A. Bandos、D. P. Sorokin、M. Tonin 和 D. V. Volkov，《双重超对称零弦与弦张力生成》，Phys. Lett. B319（1993年）445–450，arXiv:hep-th/9307039[hep-th]。