arXiv:2611.31191v1 [cs.DS] 23 Nov 2026

警察获胜边补全：难度、结构与参数化算法

Rajat Adak ✉印度科学研究所计算机科学与自动化系，印度班加罗尔

摘要

W我们研究警察获胜边补全问题，即确定需要向图中添加最少多少条边，
t才能使一名警察抓捕一名可见强盗。

我们首先给出一个从支配集问题出发的精确归约。对于每个非空图 H，我们构造一个具有 $2|V(H)|+2$ 个顶点的图 G_H，使得

警察必胜补全数$(G_H) = \gamma(H)$。

这解决了 Mertzios 等人提出的一个复杂性问题，并表明即使对于直径为二、具有一条支配边且支配数为二的连通图，该问题也具有 NP 完全性。该问题以补全预算 k 为参数时也是 W[2]-困难的，甚至以 $k+\gamma(G)$ 为参数时亦是如此。

这与经典的最小填充问题形成了有趣的对比。每个连通弦图都是警察必胜的，且该包含关系是严格的。因此，在连通输入上，警察必胜补全允许比弦图补全严格更大的目标类。有趣的是，虽然最小填充相对于添加的边的数量是固定参数可 tractable 的，但警察获胜边补全对于同一参数却是 W[2]-困难的。

随后，我们给出无限制警察必胜补全的两个下界。第一个下界表明警察必胜补全数(G) $\geq 2n-m-b-c-1$，其中 n，m，b，c分别表示顶点、边、非平凡块和连通分量的数目。该下界对部分 2-树是紧的，从而给出一个线性时间的最优值算法以及一个二次时间构造。对于外平面图，可以在线性时间内构造一个最优补全，同时保持外平面性。第二个下界使用圈空间模去由三角形生成的子空间。它给出了精确公式警察必胜补全数$(G) = c-1+\sum_{i=1}^{r}(\ell_i-3)$，适用于具有长度为 ℓ_1，...，ℓ_r 的长圈块的块仙人掌图。

我们还展示了最优值在不交并和联接下的变化规律。这些结果给出了适用于余图以及更一般的 P_4-稀疏图的多项式时间算法，并为完全多部图提供了精确公式。与部分 2-树和块仙人掌图的情形不同，即使在完全二部图上，最优警察必胜补全也可能远小于最小弦图补全。

最后，我们给出了针对 $k+\mathrm{nd}(G)$ 的固定参数算法；针对孪生覆盖数 $t=\mathrm{tc}(G)$ 本身的算法，其运行时间为 $2^{O(t^3)}n^{O(1)}$；以及针对组合参数的算法

$$k+\mathrm{tw}(G)。$$

2012 年 ACM 学科分类 计算理论 → 图算法分析；计算理论 → 参数化复杂性与精确算法；计算数学 →图论

关键词与短语警察必胜图、警察与强盗、边补全、最小补全数、参数化复杂度、孪生覆盖、树宽、余图

1 引言

警察与强盗是一种在图上进行的经典博弈。一名警察和一名强盗分别占据图中的顶点，并沿着图的边移动；警察试图移动到强盗所在的顶点来抓捕强盗。若一名警察能在标准的交替移动追捕游戏中抓捕可见强盗，则称该图为可胜图。在 [13], 有限警察必胜图恰好被刻画为可拆解图：其中，若一个顶点的闭邻域包含于另一个顶点的闭邻域，则可反复删除该顶点，直至只剩一个顶点。这一刻画使得识别可在多项式时间内完成。我们转而探讨需要添加多少条边才能得到这样的图。对于非空图 G，定义

$$\operatorname{copfill}(G) = \min\bigl\{|F| : F \subseteq \tbinom{V(G)}{2} \setminus E(G),\ G+F \text{ is cop-win}\bigr\}.$$

判定问题警察获胜边补全询问 $\operatorname{copfill}(G) \le k$ 是否成立。

该问题在 Mertzios、Michail、Skretas、Spirakis 和 Theofilatos 最近发表的论文 [12] 中被明确提出。他们将警察必胜补全与在增长步数不受限制时最小化多余边联系起来，并提出这一优化问题是否可在多项式时间内求解，或为 NP 难问题。我们通过一个包含两个辅助顶点的最优值保持归约解决了这一问题。

与弦图补全的比较

经典的最小填充问题要求找出使图成为弦图所需添加的最少边数。将其最优值记为 $\operatorname{fill}(G)$。其判定版本是 NP 完全问题 [16], ，但当参数为添加的边数时，它属于固定参数可处理问题 [10]。Fomin 和 Villanger [6] 给出了一种算法，其运行时间为 $O(2^{O(\sqrt{k}\ \text{对数}\ k)} + k^2 nm)$。每个连通弦图都是警察必胜的，因此对于连通输入

警察必胜补全数$(G) \le$ 补全数(G)。

目标警察必胜图类严格更大，因为轮图是警察必胜图，但不一定是弦图。然而，我们的结果表明，对于 k，警察必胜补全是 W[2]-难的。我们还研究了弦图补全何时仍然是最优的。下界必须允许不同块或连通分量之间存在边，而不能假设补全遵循输入分解。

结果与证明思路

我们的第一个结果是对支配集问题的精确归约。对于每个非空图 H，我们构造一个图 G_H，使得警察必胜补全数$(G_H) = \gamma(H)$。一个支配集可以给出一种补全，使警察能在两步内获胜。反过来，我们利用到一个四环的收缩和计数论证，从任意补全中得到一个支配集。构造出的图的直径为二，支配数为二。这证明了对于 k 和 $k+\gamma(G)$，问题是 NP 完全且 W[2]-难的。

我们接着研究一个最优弦图补全何时同时也是一个最优警察必胜补全。第一个下界是警察必胜补全数$(G) \ge 2n - m - b - c - 1$，其中 b 统计含有一条边的块， c 统计连通分量。该界对部分 2-树是紧的。它给出一个线性时间最优值算法和一个二次时间构造，而外平面图也允许线性时间最优构造。我们的第二个下界使用并非和的圈

三角形的。它在块仙人掌图上给出精确值 $c-1+\sum_i(\ell_i-3)$，并附带一个线性时间构造。

我们还展示了最优解在不交并和联接下的表现。我们为余图和 P_4-稀疏图给出了线性时间算法。完全二部图则表明，最优可胜补全可能远小于最优弦图补全。对于 $K_{3,\ 3}$，这两种最优解已经有所不同，而该图的树宽为三。

最后，我们利用对称性，为 $k+\mathsf{nd}(G)$ 以及孪生覆盖数 $t=\mathsf{tc}(G)$ 得到固定参数可解算法，后者的运行时间为 $2^{O(t^3)}n^{O(1)}$。对补全图进行定向也能为 $k+\mathsf{tw}(G)$ 得到固定参数可处理算法。

相关背景与组织结构

Cai 框架 [1] 为由有限多个禁诱导子图刻画的遗传类上的图修改问题提供固定参数可解算法。该框架不能直接用于警察必胜图，因为警察必胜性质不是遗传性质。Cai 还单独证明了，以添加的边数为参数的弦图补全问题是固定参数可处理的。与此相对，我们证明，对于相同参数，警察获胜边补全是 W[2]-困难的。

我们的论证使用拆解序、收缩映射、圈空间论证和对称性。第 2 节介绍预备知识和符号约定。第 3 节给出精确归约及其复杂性结论。第 4 节和第 5 节分别建立两个结构下界，并探讨其算法应用。第 6 节建立不交并和联接公式，并将其应用于余图和完全多部图。第 7 节介绍参数化算法。识别过程、显式补全算法及其实现细节，以及树宽算法所用的形式化逻辑编码，均与相应结果一并给出。

2 预备知识

除非另有说明，所有图均为有限、简单、无向且非空的。令$n=|V(G)|$, $m=|E(G)|$，并令 $c=c(G)$表示连通分量的数量。用 $N_G(v)$和 $N_G[v]$ 分别表示开邻域和闭邻域，并且 $N_G[D]=\bigcup_{v\in D}N_G[v]$。支配集 D 满足 $N_G[D]=V(G)$。支配集的最小大小为 $\gamma(G)$，称为支配数。顶点覆盖是 $V(G)$的一个子集，且与每条边相交；其最小大小为$\mathsf{vc}(G)$。若边 ab 满足 $N_G[a]\cup N_G[b]=V(G)$，则称其为支配边。

警察选择一个起始顶点，然后强盗选择一个，接着由警察先行动。每个回合，玩家可以原地不动，也可以沿一条边移动。当警察到达强盗当前所在的顶点时，即发生抓捕，警察获胜。若 $N[v]\subseteq N[w]$，则顶点 v 被支配 于另一个不同的顶点 w。拆解序 通过删除被支配的顶点，直到只剩一个顶点为止。根据 [13], , 图中存在拆解序当且仅当该图是可胜图。特别地，可胜图是连通的。显然，连通弦图是可胜图：它存在一个单纯顶点 [4], , 其任意一个邻点都支配它；删除该顶点会保持连通性和弦性。正如本节末尾所述，可在 $O(n^3)$ 时间内完成警察必胜图识别。

从 J 到子图 R 的收缩 逐点固定 R，并将相邻顶点映射为相同或相邻的顶点。容易验证，可胜图的收缩仍是可胜图。在 J 中模拟获胜策略，以应对 R 中的强盗，并投影警察的位置。我们只在显式映射的情形下使用这一性质。

令$\mathcal{B}(G)$包含阶至少为三的极大二连通子图，以及每个桥对应的一个 K_2块。不将孤立顶点视为块。记作 $b=b(G)\ =|\mathcal{B}(G)|$

以及 $n_B = |V(B)|$, $m_B = |E(B)|$。我们可以在 $O(n+m)$时间 [15]内使用深度优先搜索来查找连通分量和块。

对于非连通输入，最小的连通弦图补全大小为 $\text{fill}(G) + c - 1$。对每个原始连通分量的限制都要求各自进行弦图填充，而要保证连通性，至少需要 $c-1$ 条分量间边。反过来，将各连通分量的最优弦图补全用桥联接起来即可。因此，对于任意输入，$\text{copfill}(G) \le \text{fill}(G) + c - 1$。

立方时间警察获胜判定

一个状态描述博弈当前的位置。我们使用 $2n^2$ 状态（c，r，σ），其中 c 表示警察所在的顶点，r 表示强盗所在的顶点，σ 表示轮到谁行动。每次移动时，当前行动的玩家可以留在原顶点，也可以移动到一个邻点，然后轮次交替。

如果警察能从某个状态出发强制抓捕强盗，就称该状态为必胜状态。所有满足$c = r$ 的状态都是必胜状态。接着，我们从后往前推理。警察行动的状态中，如果警察有一步能到达必胜状态，该状态就是必胜状态。强盗行动的状态中，如果强盗的每一步都会到达必胜状态，该状态就是必胜状态。我们反复应用这两条规则，直到找不到新的必胜状态。这样找到的状态，恰好就是警察能够强制抓捕强盗的状态。

这些规则是正确的，因为在一个警察回合的必胜状态中，警察可以选择一步转移到另一个必胜状态；而在一个强盗回合的必胜状态中，强盗的每一步转移都会到达一个必胜状态。如果一个状态不是必胜状态，那么强盗总能选择一些移动来避开必胜状态，从而避免被抓捕。

可以利用队列高效地找出必胜状态。对于每个状态，记录哪些状态可以转移到该状态。对于每个强盗回合的状态，还要跟踪其可能的移动中有多少尚未确定为必胜状态。每个状态和每次转移都只处理一次。由于共有 $O(n^3)$ 次转移，该算法的时间和空间复杂度均为 $O(n^3)$。

最后，G 是警察必胜的，当且仅当存在一个警察的起始顶点 c，使得对于强盗的每个可能起始顶点 r，$(c, r, \text{警察})$ 都是必胜状态。

3 精确困难性归约

我们从支配集问题进行归约。对于每个顶点 $u \in V(H)$，构造中都包含一个顶点 s_u，而选择 u 加入支配集对应于添加边 bs_u。这条边使得 s_u 能够支配每个满足 $v \in N_H[u]$ 的顶点 x_v。主要困难在于反向，因为补全也可能使用其他缺失边。

3.1 构造

设 H 是一个非空图。对于每个 $u \in V(H)$，引入两个顶点 s_u 和 x_u，并令

$$S = \{s_u : u \in V(H)\}, \qquad X = \{x_u : u \in V(H)\}.$$

再添加两个顶点 a，b，并令 $V(G_H) = S \cup X \cup \{a, b\}$。

令 S 为一个团，X 为一个独立集。将 a 与 S 的每个顶点联接，将 b 与 X 的每个顶点联接，并添加 ab。其余的边恰好为

$$s_u x_v \in E(G_H) \iff v \in N_H[u].$$

注意，在 G_H中，a 不与 X中的任何顶点相邻，且 b 不与 S中的任何顶点相邻。显然，G_H 有 $2|V(H)| + 2$ 个顶点，并包含每一条边 $s_u x_u$。对于 $D \subseteq V(H)$，令 $F_D = \{bs_u : u \in D\}$。图1展示了 G_H中的边以及 F_D中的边。

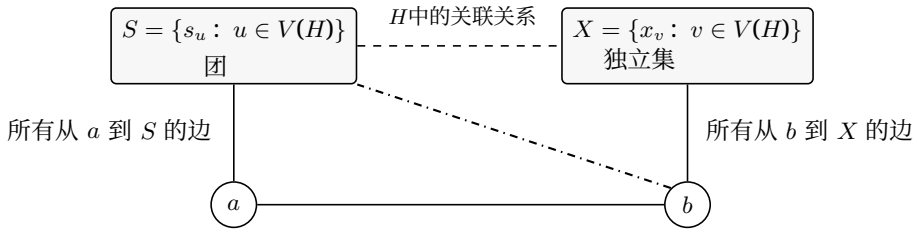

图1 图 G_H。虚线表示 $s_u x_v$ 与$v \in N_H[u]$之间的闭邻域关联关系。点划对角线表示为所有 $u \in D$ 添加的补边 bs_u

3.2 正确性

▶ **引理 1.** 如果 D 支配 H，则 $G_H + F_D$ 是警察必胜的，并可在两步警察步数内完成抓捕。因此，警察必胜补全数$(G_H) \leq \gamma(H)$。

证明。警察从顶点 a出发。如果强盗从 a 出发，那么他已经被抓获；如果他从 b 或 S 中出发，那么他会在第一步被抓获。否则，强盗从 x_v出发。选择满足 $v \in N_H[u]$ 的 $u \in D$ （因为 D 是一个支配集，所以存在这样的 u ），并在第一步将警察移至 s_u 。强盗可以停留在 x_v，移动到 b，或移动到某个 s_w。位于 s_u 的警察根据选择可以看到 x_v ，通过 $bs_u \in F_D$ 看到 b ，并且由于 S 是一个团，可以看到 S 中的所有其他顶点。因此，每个仍未被抓获的强盗位置都会在警察下一步行动时被抓获。◀

▶ **引理 2**。 设 J 包含一个四环 C。假设存在映射 $\rho : V(J) \to V(C)$，其逐点固定 C ，并将 J 的每条边映射为 C 的一条边或 C的单个顶点。则 J 不是警察必胜图。

证明。 映射 ρ 是将 J 收缩到 C 的收缩映射，其含义见第 2 节。如果 J 是警察必胜图，那么其收缩 C 也将是警察必胜图。

然而，四环不是警察必胜图。事实上， C_4 中没有任何顶点被另一个顶点支配，因此 C_4 没有拆解序。所以 C 不是警察必胜图，矛盾。◀

对于反向，任取 F，使得 $J = G_H + F$ 是警察必胜图。令

$$D_0 = \{u : bs_u \in F\}, \qquad S_0 = \{s_u : u \in D_0\}, \qquad Q = J[X].$$

注意， $D_0 \subseteq V$（H）可以为空，并且 $S_0 \subset V$（G_H）。 Q 的每条边都是填充边，因为 X 是 G_H中的独立集。若 x_v $v \in N_H[D_0]$，则称其为被覆盖的。注意，覆盖仅指原始的关联关系，而不是 S 与X之间新添加的边。如果 Q 的一个连通分量 R 不包含任何被覆盖的顶点，那么我们将看到， Q 之外至少还有一条额外的填充边与 R中的某个顶点关联。

▶**引理 3.** 设 R 是 Q 的一个连通分量，其中不含被覆盖的顶点。那么， F 中存在一条边 ax_v ，满足 $x_v \in R$；或者存在一条边 $s_u x_v$ ，满足 $u \in D_0$ 和 $x_v \in R$。 F 中的此类边称为 R的重要边 。

证明。 假设不存在重要边，对于 R。令 $x_v \in R$，因此 v 未被覆盖。由于 $v \notin N_H[D_0]$，我们有 $v \notin D_0$。顶点 a、b、x_v、 s_v按此顺序构成一个四环。其对角线 ax_v 和 bs_v 不存在，因为我们假设没有重要边，并且根据

$v \notin D_0$，分别。定义 ρ： $V(J) \to V(C)$，如下

$$\rho(z) = \begin{cases} a, & z \in \{a\} \cup S_0 \cup (X \setminus R), \\ b, & z = b, \\ x_v, & z \in R, \\ s_v, & z \in S \setminus S_0. \end{cases}$$

映射 ρ 固定四环 $C = a - b - x_v - s_v - a$.

现在检查 J 的每条边是否都被映射到 C 的一条边，或 C 的一个顶点。根据 D_0 的定义， b 与 $S \setminus S_0$ 的任何顶点之间都没有边。此外， R 的任何顶点与 a 之间都没有边，因为这样的边会是一条重要边。 R 与 S_0 之间也没有边：不存在这样的原始边，因为 R 不包含任何被覆盖的顶点；也不存在这样的新增边，因为我们假设 R 没有重要边。最后， R 与 $X \setminus R$ 之间没有边，因为 R 是 $Q = J[X]$ 的一个连通分量。

因此， J 的每条边经由 ρ 映射后，都映射到 C 的一条边或 C 的一个顶点。因此， ρ 是从 J 到 C 的一个收缩。根据引理 2， J 不是警察必胜的，这就产生了矛盾。◀

▶ **引理 4.** 对于每个警察必胜补全 F，都可以在多项式时间内构造出 G_H的一个大小至多为 $|F|$ 的支配集。

证明。 令 $D = D_0 \cup \big(V(H) \setminus N_H[D_0]\big)$. 那么 D 支配 H，因为每个尚未被 D_0 支配的顶点都包含在 D中。我们将证明 $|D| \le |F|$。

回顾一下，若 $v \in N_H[D_0]$，则称 x_v 被覆盖。对于 Q的一个连通分量 R，令 t_R 表示 R中被覆盖顶点的数量。其余 $|R| - t_R$ 个顶点 $x_v \in R$ 未被覆盖，因此它们对应的顶点 v 属于 $D \setminus D_0$。

首先，假设 $t_R \ge 1$。由于 R 是连通的，它包含一棵有$|R| - 1$ 条边的生成树。 Q 的每条边都是填充边，因此这些边是 F中的 $|R| - 1$ 条不同边。由于，$|R| - t_R \le |R| - 1$, 有足够多的此类填充边，可以对应 R所对应的 $D \setminus D_0$中的所有顶点。

现在假设 $t_R = 0$。那么对应于 R 的所有 $|R|$ 顶点都属于 $D \setminus D_0$。同样， R 的一棵生成树包含 F 的 $|R| - 1$ 条边。此外，引理 3 为 R 提供了一条重要边，它是 F 的另一条边，与生成树中的 $|R| - 1$ 条边不同。因此在这种情况下， R 至少得到 F 的 $|R|$ 条不同的边。

为 Q 的不同连通分量计数的边互不相同。此外，重要边不是 Q 的边；属于不同连通分量的重要边也互不相同，因为它们在 X 中的端点位于不同的连通分量中。

最后，对于每个 $u \in D_0$，边 bs_u 都属于 F。这些 $|D_0|$ 条边与上文计数的所有边均不相同。由于 Q 的连通分量构成了 X 的一个划分， $D \setminus D_0$ 的每个顶点都恰好对应一个未被覆盖的顶点 x_v，因此

$$|D \setminus D_0| = \sum_R (|R| - t_R).$$

加上上文确定的互不相同的填充边，可得

$$|F| \ge |D_0| + \sum_R (|R| - t_R) = |D|.$$

因此， D 是 H 的一个支配集，其大小至多为 $|F|$。 ◀

▶**定理 5.** 对于每个非空图 H，警察必胜补全数$(G_H) = \gamma(H)$。因此 $(H, k) \mapsto (G_H, k)$是从支配集到 警察获胜边补全的最优值保持、预算保持的多项式时间归约。

证明。 由引理 1 可得 警察必胜补全数(G_H) $\leq \gamma(H)$。 反之，在引理 4 中，若取 F作为 G_H 的最小 Cop-Win 补全，则得到 $\gamma(H) \leq |F|$ = 警察必胜补全数(G_H)。 因此警察必胜补全数(G_H) $= \gamma(H)$。

G_H 的构造可在多项式时间内完成，且预算保持不变。因此，(H， k) 是支配集的一个是实例，当且仅当 (G_H， k) 是警察获胜边补全的一个是实例。◀

由定理 5 可得更多困难性结果。

▶**推论 6。** 警察获胜边补全 即使对于具有支配边且支配数为二的连通、直径为二的图，仍是 *NP* 完全问题。在这些限制条件下，它对于 k 和 $k + \gamma(G)$ 是 [2] 困难的，而仅对于 $\gamma(G)$ 则是参数化 *NP* 困难的。此外，定理 *5* 的归约保持近似比。

证明。边 ab 支配 G_H，所以 G_H 连通且 $\gamma(G_H) \leq 2$。 a 和 b 都不是全邻接的，而且 $S \cup X$ 中没有顶点是全邻接的，因此 $\gamma(G_H) = 2$。每对不相邻顶点之间的距离都是二。 X 中的两个顶点有共同邻点 b，而顶点 a 和 b 分别经过两步到达 X 和 S。若 s_u 和 x_v 不相邻，则 s_u、 s_v、 x_v 构成一条长度为二的路径。因此， G_H 的直径为二。

定理 5 给出了 NP 困难性。该问题也属于 NP，因为可以在多项式时间内检验给定的补全。该归约保留了 k ，并生成满足γ（G_H） $= 2$的图。因此，支配集的 W[2] 困难性也适用于 k 和$k + \gamma$（G）。此外，对于单独的 γ（G），该归约也说明它是参数化 NP 困难的，因为在构造出的图中，这一参数恒为 2。

最后，根据引理 4， G_H 的任意补全 F 都可以转换为 H 的一个支配集 D ，且满足 $|D| \leq |F|$。如果 F 是一个 α-近似补全，那么由定理 5 可得$|D| \leq |F| \leq \alpha$ 警察必胜补全数(G_H) $= \alpha\gamma(H)$。 因此， D 也是一个 α- 近似支配集。◀

4 弦图补全何时为最优

现在我们关注这样一个问题：图的弦图补全何时也是最优的警察必胜补全。第一个下界通过统计共胜块中的边数，并追踪添加边如何改变块结构。

4.1 一种密度下界的块结构

回顾一下，$\mathcal{B}(G)$是 G的块集合，也就是说，它由阶至少为三的极大二连通子图，以及每座桥对应的一个 K_2 块组成。对于 $B \in \mathcal{B}(G)$，令$n_B = |V(B)|$ 和 $m_B = |E(B)|$。令 c 为 G的连通分量数。

$$\sum_{B \in \mathcal{B}(G)} (n_B - 1) = n - c, \qquad \sum_{B \in \mathcal{B}(G)} m_B = m. \tag{1}$$

对于第一个恒等式，在每个连通分量中，先任取一个块，再逐一添加其余块。每个新块都与此前添加的块恰好共享一个顶点，因此会贡献 $n_B - 1$ 个新顶点。对所有连通分量求和可得 $n - c$。第二个恒等式成立，是因为每条边恰好属于一个块。孤立顶点对两个求和项的贡献均为零。

注意，连通图的每个块都是一个收缩。这是因为，块外的每个连通分量恰好连接到一个块顶点，并且整个连通分量都可以映射到该顶点。如果存在两个不同的连接顶点，就会与该块的极大性矛盾。因此，警察必胜图的每个块都是警察必胜的。

▶ **引理 7**。 如果 J 是 G的连通生成超图，那么 $b(J) \leq b(G) + c(G) - 1$。

证明。 逐条插入 J 的新边。如果一条添加的边的两个端点位于同一个连通分量中，那么它要么仍处于同一个块内，要么会形成一条穿过多个块的环，从而使这些块合并。因此，块的数量不会增加。

如果一条添加的边联接两个不同的连通分量，它就会形成一个新的桥块，并使块的数量恰好增加一。由于恰好需要 $c(G) - 1$ 条添加的边才能使图连通，因此我们得到： $b(J) \leq b(G) + c(G) - 1$. ◀

▶ **引理 8**。 一个有 $s \geq 3$ 个顶点的 2-连通可胜图 J 至少有 $2s - 3$ 条边。因此，每个连通的可胜图都满足

$$|E(J)| \geq 2|V(J)| - b(J) - 2. \tag{2}$$

证明。 我们通过对 s进行归纳来证明第一个结论，其中 K_2 为基例。设 J是一个有2个顶点的连通可胜图 $s \geq 3$ 。由于 J 是警察必胜图，因此存在一个顶点 v被某个顶点 w支配。令 $J' = J - v$. 那么 J' 是连通的警察必胜图。

我们首先断言，除了 w 之外， J' 中没有其他顶点能成为割点。假设某个 $x \neq w$ 是割点。由于 v 被 w 支配， v 在 $J' - x$ 中仍保留的每个邻点，要么是 w ，要么与 w 相邻。因此，所有这些邻点都位于 $J' - x$ 的同一个连通分量中，即包含 w 的那个连通分量。将 v 加回也无法使该连通分量与其他任何连通分量相连。因此， $J - x$ 仍会是不连通的，这与 J 的 2-连通性矛盾。

令 $r = b(J')$，也就是说， J' 中块的数量为 r。由于 w 是唯一可能的割点， J' 的 r 个块通过 w 联接。因此， $J' - w$ 恰有 r 个连通分量。 J' 的每个块要么是 K_2 ，要么是二连通警匪胜利图，因为 J' 是警察必胜的。因此，根据归纳法， J' 的每个块 B 至少有 $2n_B - 3$ 条边。因此，

$$|E(J')| \geq \sum_{B \in \mathcal{B}(J')} (2n_B - 3) = 2 \sum_{B \in \mathcal{B}(J')} (n_B - 1) - r = 2(s - 2) - r.$$

其中，最后一个等式由块恒等式得出

$$\sum_{B \in \mathcal{B}(J')} (n_B - 1) = (s - 1) - 1 = s - 2.$$

由于 J 是 2-连通的， $J - w$ 是连通的。因此， v 必定在 $J' - w$的每个 r连通分量中都有一个邻点。此外， $vw \in E(J)$，因为 v 被 w支配。因此， $d_J(v) \geq r + 1$.由此可得

$$|E(J)| = |E(J')| + d_J(v) \geq 2(s - 2) - r + (r + 1) = 2s - 3.$$

为证明 (2)，设 J 是任意一个连通的警察必胜图。 J 的每个块也都是警察必胜图，因此对每个块应用上述界并将它们相加，得到

$$|E(J)| \geq \sum_{B \in \mathcal{B}(J)} (2n_B - 3) = 2|V(J)| - b(J) - 2.$$

当 J 由单个顶点构成时，同样的界也成立。 ◀

▶ **定理 9**。 对于每个非空图 G，警察必胜补全数$(G) \geq 2n - m - b - c - 1$。

证明。 令 F为 G的任意警察必胜补全，并令 $J = G + F$。由引理7和引理8可得，

$$m + |F| = |E(J)| \geq 2n - b(J) - 2 \geq 2n - (b + c - 1) - 2.$$

重新整理得，$|F| \geq 2n - m - b - c - 1$，从而得到所需的界。

利用 (1) 可得到以下等价的分块形式，

$$\text{copfill}(G) \geq 2n - m - b - c - 1 = c - 1 + \sum_{B \in \mathcal{B}(G)} (2n_B - 3 - m_B) \tag{3}$$

◀

4.2 部分2-树

部分部分 2-树 是树宽至多为二的图。2-树 从 K_2 开始，并反复添加一个与现有边的两个端点都相邻的顶点。显然，它在 $s \geq 2$ 个顶点上有 $2s - 3$ 条边，并且是弦图。容易验证，取子式不会增加树宽，而且部分 2-树有一个度至多为二的顶点。

为完整起见，树分解由排列在一棵树上的顶点袋组成。每个顶点和每条边都必须出现在某个袋中，并且包含任意固定顶点的袋必须构成一个连通子树。其宽度是最大的袋大小减一。在宽度为二的分解中，移除任何包含于相邻袋中的袋后，一个叶袋中会有一个只出现在该袋中的顶点。由于该袋至多有三个顶点，这个顶点至多有两个邻点。因此，每个非空的部分 2-树都有一个度至多为二的顶点。

▶ **引理 10.** 设 Q 是一个具有 $|V(Q)| \geq 3$ 的 2-连通偏 2-树。那么 Q 有一个二度顶点。若 v 是任意一个这样的顶点，其邻点为 x、y，则 $Q' = (Q - v) + xy$ 的树宽至多为二，并且要么是 K_2，要么是 2-连通的。

证明。 由于 Q 是 2-连通图，其最小度至少为二。由于它是偏2-树，因此存在一个度至多为二的顶点。故存在一个二度顶点 v。收缩vx 并删除可能的重边后，恰好得到 $(Q - v) + xy$，因此 Q' 的树宽至多为二。

若 $|V(Q')| \geq 3$，则删除任意一个顶点 z。当 $z \notin \{x, y\}$ 时，$Q - z$ 中任何经过 x, v, y 的路径都可以改为经过边 xy，因此 $Q' - z$ 是连通的。当 $z = x$ 或 $z = y$时，顶点 v 是连通图 $Q - z$的叶节点。从连通图中删除叶节点不会破坏连通性。因此，$Q' - z$ 是连通的。于是 Q' 是 2-连通的。如果只剩下两个顶点，即 $|V(Q')| = 2$，则添加的或已有的边 xy 使得 $Q' = K_2$。◀

▶**命题 11.** 设 B 是一个有 $s \geq 3$ 个顶点的 2连通部分2树。反复应用引理*10*，并记录每条添加的缺失边 xy，可得到一个集合 F_B，使得 $B + F_B$ 是一棵2树，且 $|F_B| = 2s - 3 - |E(B)|$.

因此，F_B 是 B的最小警察必胜补全。

证明。 反复应用引理10，最终得到一个 K_2。逆向执行删除过程时，每个被删除的顶点都会被加回到一条现有边的两个端点旁。这恰好是构造一棵 2树的有效步骤。

此外，正向过程中添加的任何边，其连接的顶点在当时都尚未被删除。因此，被删除的顶点恢复后，没有任何添加的边会丢失。所以，逆向过程恰好给出 $B + F_B$。

一个包含 s 个顶点的 2-树恰好有 $2s - 3$ 条边。由于最终图是 $B + F_B$，因此我们得到上述界限。为证明该补全是最小的，设 F 是 B 的任意一个警察必胜补全。由于添加边不会破坏 2-连通性，$B + F$ 仍然是 2-连通的。根据引理 8，$|E(B)| + |F| \geq 2s - 3$. 因此 $|F| \geq 2s - 3 - |E(B)| = |F_B|$,所以 F_B 是最小警察必胜补全。

◀

10 Cop-Win 边补全

引理10表明，在两个邻点之间添加一条边后，我们可以反复移除一个二度顶点，直到只剩下 K_2 。命题 11 表明，这一过程给出了最小补全以及添加的边的确切数量。下面算法1中的伪代码实现了这一过程。

算法1 部分 2-树块的最小警察必胜补全

输入：一个 2-连通部分 2-树 B，满足 $|V(B)| \geq 3$。
输出：一个最小填充集 F_B，使得 $B + F_B$ 是一棵 2-树。
1： $Q \leftarrow B$**；2：当 $|V(Q)| > 2$ 时循环 3：选择一个邻点为 x、y 的二度顶点 v 。4：如果 $xy \notin E(Q)$，则 5：将 xy 加入 Q 和 F_B。6：结束 if 7：从 Q 中删除 v 。8：结束循环 9：返回 F_B**

根据命题 11，可得正确性和最优性。特别地，该算法恰好添加 $2s - 3 - |E(B)|$ 条边。

▶**定理 12。** 对于每个非空部分 2-树 G,

$$\operatorname{copfill}(G) = 2n - m - b - c - 1 = c - 1 + \sum_{B \in \mathcal{B}(G)} (2n_B - 3 - m_B). \tag{4}$$

该类图的最优值可在 $O(n + m)$ 时间内计算得出。最优补全可在 $O(n^2)$ 时间和空间内构造，且补全图是弦图。

证明。 对每个阶至少为三的块应用命题 11，并保持桥块不变。从每个原始连通分量中各取一个代表元，用 $c - 1$ 条新边将它们连接成一条路径。这些边都是桥，且补全后的原始块都是2树。每个环都包含在某个补全后的块中，因此所得图是连通弦图，故警察必胜。添加的边数恰好等于式 (4) 右边的值，与定理 9 一致。

可以在 $O(n + m)$ 时间内找到 G 的连通分量和块。由此可得 b 和 c，而 n 和 m 可直接从输入中获得。因此，公式 $\operatorname{copfill}(G) = 2n - m - b - c - 1$ 可在线性时间内给出最优值。

邻接矩阵实现对每个块的时间和空间开销为 $O(n_B^2)$。由于

$$\sum_B n_B = n - c + b \leq 2(n - c) \implies \sum_B n_B^2 \leq \Big(\sum_B n_B\Big)^2 = O(n^2),$$

整个构造满足所述界。

对于含有 s 个顶点的块，使用邻接矩阵，并记录哪些顶点仍处于活跃状态以及它们的当前度数。每轮扫描以寻找一个活跃的二度顶点 v，并找出它的两个邻点 x，y。这需要 $O(s)$ 时间。检查或添加边 xy 并更新度数需要 $O(1)$ 时间。由于总共进行 $s - 2$ 轮，算法的时间和空间开销为$O(s^2)$。

对每个非平凡块分别应用该算法，然后用一条路径联接原始连通分量。如上所示，对所有块求和后，总时间和空间为 $O(n^2)$，添加的边数为 $O(n)$。◀

任意输入上的识别

同样的过程也可以用于检验一个图是否为部分 2-树。分别处理每个 2-连通块。如果当前块包含超过两个顶点，但没有二度顶点，则拒绝。

如果该过程成功完成，则反转删除序列。从最后一条边 xy 开始。每当恢复一个已删除的顶点 v 时，就将袋 $\{v,\ x,\ y\}$ 连接到一个已包含 x 和 y 的袋上。由此得到一个宽度至多为二的树分解，因此原图是一个部分 2-树。

使用上述邻接矩阵实现，该识别过程需要 $O(n^2)$ 时间。当输入已知是部分 2-树时，定理 12 中的 $O(n+m)$ 界适用。

4.3 外平面图

对于外平面图，由于外平面图是部分 2-树，定理 12 已经给出了最优值。利用外平面嵌入，我们可以在线性时间内而非二次时间内构造一个最优补全，并使补全图保持为外平面图。

▶**定理 13.** 对于每个非空外平面图，都可以在 $O(n+m)$ 时间和空间内构造一个最优可胜补全，且补全图本身也是外平面图。

证明。 固定一个外平面嵌入。对于每个阶至少为三的块，添加对角线，对每个原有有界面进行扇形三角剖分。这些对角线互不相交，补全后的块是弦图。利用欧拉公式，对 B 可得，所需边数为

$$\sum_{f\ \text{bounded}} (|f|-3) = (2m_B - n_B) - 3(m_B - n_B + 1) = 2n_B - 3 - m_B.$$

块 B 中的边。用 $c-1$ 条桥联接原有连通分量。添加的边数与定理 12 相符，因此该方案是最优的。块分解、嵌入和面的遍历都可在线性时间内完成。具体实现如下。◀

算法 2 分别处理外平面嵌入中每个块的有界面。每个面都仅使用该面内部的对角线进行扇形三角剖分。这样可以避免桥或块其他部分已有的对角线造成的问题。

每条新增的对角线都是新的，因为若两个非连续顶点之间已存在一条边，该边就已经将面分开。在不同面中添加的对角线互不相同，也不会交叉。

所有面的边界总长度为 $O(m)$，因此使用邻接表和外平面嵌入即可在 $O(n+m)$ 时间内处理所有面并写出所有新边。最后，将各个连通分量并排放置，并用画在连通分量外部的桥将它们联接起来。这一做法保持了外平面性。

因此，定理 13 中的构造需要 $O(n+m)$ 时间和空间。

12 Cop-Win 边补全

算法 2 外平面图的最小 Cop-Win 补全

输入：一个非空外平面图 G。输出：一个保持外平面性的最小填充集 F。1：计算连通分量、块以及一个外平面嵌入。2：$F \leftarrow \varnothing$3：对于每个满足 $|V(B)| \geq 3$ 的块 B，执行 4：对于 B 的导出嵌入中的每个原始有界面，执行 5：按循环顺序列出其边界，记为 v_1、……、v_ℓ。6：对于 $j = 3$、……、$\ell - 1$，执行 7：将 $v_1 v_j$ 加入 F。8：结束循环 9：结束循环 10：结束循环 11：从每个原始连通分量中选取一个顶点 r_i，$1 \leq i \leq c$。12：对于 $i = 1$、……、$c - 1$，执行 13：将 $r_i r_{i+1}$ 加入 F。14：结束循环 15：返回 F

5 三角形空间下界

当图包含大型团块时，定理 9 给出的下界可能会变弱，尽管这类团块不需要添加边。为处理同时包含稠密块和长环的图，我们采用第二个下界，它基于不能由三角形生成的环。

5.1 圈空间给出的下界

我们将每个边集合视为 $\mathbb{F}_2$ 上的一个向量。圈空间$\mathcal{C}(G)$是所有满足每个顶点的度均为偶数的边集合构成的集合。其维数为 $m - n + c$，这可由基于生成森林得到的标准基本环基推出。令$\mathcal{T}(G)$为所有三角形向量张成的空间，并令 $\delta(G) = \dim\mathcal{C}(G) - \dim\mathcal{T}(G)$.

▶ **引理 14.** 若 J 是警察必胜的，则 $C(J) = T(J)$。

证明。 我们对一个拆解序使用归纳法，该拆解序属于 J。设 v 被 w支配，并任取 $z \in \mathcal{C}(J)$。对于每一条边 vu，它属于 z 且满足 $u \neq w$，将三角形 vuw 加到 z。该三角形存在，因为 w 支配 v，因此每个邻点 u，其所属为 v，也与 w相邻。完成此操作后，所有边，这些边属于 z 且关联于 v，除可能的 vw外，均被移除。

由于 z 在 v处的度为偶数，边 vw 也必然消失。因此，剩余的边集合可视为 $J - v$的一个圈空间元素。

根据归纳法，该剩余元素是 $J - v$中的三角形之和。把上面所用的三角形加回去，即可表明原来的 z 也是 J中的三角形之和。◀

设 $E_0(G)$ 为不位于 G的任何三角形中的边的集合。对于 $z \in \mathcal{C}(G)$，定义 $L_0(z) = |\mathrm{supp}(z) \cap E_0(G)|$。注意，$\mathcal{T}(G)$的每个向量在 $E_0(G)$上取值为零。

▶ **定理 15.** 对于每个非空图 G 以及每个 $z \in \mathcal{C}(G)$,

$$\mathrm{copfill}(G) \geq c(G) - 1 + L_0(z) - 3\delta(G). \tag{5}$$

证明。 设 F 是大小为 k 的警察必胜补全，并令 $J = G + F$。我们将 $\mathcal{C}(G)$ 的每个向量视为 $\mathcal{C}(J)$ 的一个向量，做法是把所有对应于新边的坐标赋为零。

选择一个由 G 的三角形组成的 $\mathcal{T}(G)$ 的基。由于 J 是警察必胜的，根据引理 14，有 $\mathcal{C}(J) = \mathcal{T}(J)$。因此，通过添加 J 的三角形，我们可以将这个基扩展为 $\mathcal{C}(J)$ 的一个基。取 $\delta = \delta(G)$，可知必须添加的三角形数量为

$$\dim \mathcal{C}(J) - \dim \mathcal{T}(G) = (m + k - n + 1) - (m - n + c - \delta) = k - c + 1 + \delta.$$

现在将 z 写成这个基中元素之和。设 $T_1, \dots, T_q$ 是该和中出现的新添加三角形，并令 $U = \operatorname{span}\{T_1, \dots, T_q\}$。由于这些三角形是基的一部分，

$$q \le k - c + 1 + \delta, \qquad \dim U = q, \qquad U \cap \mathcal{T}(G) = \{0\}.$$

接下来我们只考虑 F 中的新边。定义 $\rho : U \longrightarrow \mathbb{F}_2^F$，方法是仅保留对应于 F 的边的条目。如果 U 的一个向量属于 $\ker \rho$，那么它不使用 F 中的任何边，因此属于 $\mathcal{C}(G)$。因此，$\ker \rho \subseteq \mathcal{C}(G)$。此外，$\ker \rho \cap \mathcal{T}(G) = \{0\}$。因此，$\dim \ker \rho + \dim \mathcal{T}(G) \le \dim \mathcal{C}(G)$。

回顾可知，$\delta = \dim \mathcal{C}(G) - \dim \mathcal{T}(G)$，因此由上述不等式可得 $\dim \ker \rho \le \delta$。从而由秩-零度定理，$\operatorname{rank} \rho = \dim U - \dim \ker \rho \ge q - \delta$.

设 a_F 为出现在 T_1，……，T_q 中的不同填充边的数目。由于 $\rho(U)$ 仅使用这 a_F 个坐标（其余 F 个坐标为零），$a_F \ge \operatorname{rank} \rho \ge q - \delta$.

z 的展开式可写为 $T_1 + \cdots + T_q = z + t_0$，其中某个 $t_0 \in \mathcal{T}(G)$。由于 z 与 t_0 均不含填充边，出现在 T_1，……，T_q 中的每条填充边都必须出现偶数次。因此这 a_F 条这样的边中每一条至少出现两次。

现考虑 $\operatorname{supp}(z) \cap E_0(G)$ 中的一条边。这样的边出现在 z 中，但不能出现在 t_0 中，因为 G 的任何三角形都不包含 $E_0(G)$ 的边。因此它必须在 T_1，……，T_q 中至少出现一次。

这 q 个三角形总共包含 $3q$ 次边出现，而 $L_0(z)$ 中的原始边与 G的 a_F 填充边互不相交。因此

$$3q \ge L_0(z) + 2a_F \ge L_0(z) + 2(q - \delta).$$

因此，$L_0(z) \le q + 2\delta \le (k - c + 1 + \delta) + 2\delta = k - c + 1 + 3\delta$。整理后得，$k \ge c - 1 + L_0(z) - 3\delta$，由此证明了该结论。◀

5.2 块仙人掌图

每个块仙人掌图的块都是团或无弦环 [14]。桥块和三角形视为团块。令 C_1、……、C_r 为长度为 $\ell_i \ge 4$ 的圈块，并令 $L = \sum_i \ell_i$。

▶**定理 16**。对于每个非空块仙人掌图 G，

$$\operatorname{copfill}(G) = c - 1 + \sum_{i=1}^{r} (\ell_i - 3) = c - 1 + L - 3r. \tag{6}$$

可以在 $O(n + m)$ 时间和空间内构造一个最优补全，且该补全是弦图。

证明。 的每个环 都包含在单个块中，因此 G 的圈空间由其各块的圈空间组合而成。对于团块，每个环都可以写成

三角形之和，因此它对 $\delta(G)$ 没有贡献。桥不包含任何环，因此也没有贡献。然而，每个长环块 C_i 的圈空间都是一维的，且不包含三角形。因此，每个 C_i 对 $\delta(G)$ 恰好贡献 1。由于这样的环块有 r 个，我们得到 $\delta(G) = r$.

令 z 为 C_1，……，C_r 的边集之并。它们是边不相交的偶子图，因此 $z \in \mathcal{C}(G)$。这些块中没有任何一条边位于三角形中，从而得到 $L_0(z) = L$。定理 15 由此给出警察必胜补全数$(G) \geq c - 1 + L - 3r$。

为达到相等，对每个 C_i 通过添加 $\ell_i - 3$ 条对角线进行扇形三角剖分（如同我们在外平面情形中所做的那样），保持团块不变，并用 $c - 1$ 座桥连接原有的连通分量。所得图是连通的且为弦图，添加的边数与下界相符。块分解、环遍历以及补全的构造均可在线性时间内完成，因为 $L \leq \sum_B n_B \leq 2(n - c)$。

识别测试与完整算法如下所示。 ◀

块仙人掌图补全与识别

一个块是团，当且仅当 $m_B = \binom{n_B}{2}$. 若它不是团，则它是无弦环，当且仅当该块内每个顶点的度均为二。因此，在计算出块分解之后，我们可以通过对每个块检查这两种情形，在线性时间内识别块仙人掌图。若某个块既不是团也不是无弦环，则拒绝。否则，我们使用算法 3 构造一个最优补全。

算法 3 块仙人掌图的最小警察必胜补全

输入：一个非空块仙人掌图 G。输出：一个最小填充集 F，使其生成一个弦图。1：计算连通分量和块；设置 $F \leftarrow \varnothing$。2：对于每个块 B，执行 3：如果 $m_B \neq \binom{n_B}{2}$，则 4：按顺序将其环列为 v_1、……、v_ℓ。5：对于 $j = 3$、……、$\ell - 1$，执行 6：将 v_1v_j 添加到 F。7：结束循环 8：结束条件判断 9：结束循环 10：为每个原始连通分量选择一个顶点 r_i，$1 \leq i \leq c$。11：对于 $i = 1$、……、$c - 1$，执行 12：将 r_ir_{i+1} 添加到 F。13：结束循环 14：返回 F

定理 16 证明，即使允许在图中的任意位置添加边，所构造的补全仍是最优的。遍历所有圈块需要 $O(L)$ 时间，其中

$$L \leq \sum_B n_B \leq 2(n - c) = O(n).$$

可以在 $O(n + m)$ 时间内找到各个块并检查团块。由于只添加了 $O(n)$ 条边，整个构造需要 $O(n + m)$ 的时间和空间。

三角形空间界为何有用

对于长度为 ℓ 的圈块，密度项为 $\ell - 3$。对于阶数为 s 的团块，它为

$$2s - 3 - \binom{s}{2} = -\frac{(s-2)(s-3)}{2}.$$

因此，即使一个大团本身不需要添加任何边，也可能使密度界变得弱得多。相比之下，团对 $\delta(G)$ 毫无贡献。

例如，考虑一个 4-圈和一个团 K_s，其中 $s \geq 4$，恰好共享一个顶点。三角形空间界给出的精确值为 1，而密度界给出 $1 - \frac{(s-2)(s-3)}{2}$。

因此，三角形空间界能够体现环的贡献，而不会因存在一个大团而变弱。

▶**推论 17.** 若 G 是一个非空的部分2-树或块仙人掌图，则

$$\operatorname{copfill}(G) = \operatorname{fill}(G) + c(G) - 1.$$

因此，在这些图类的连通图上，两种最优值相同。

证明。 定理 12 和 16 给出了一个大小为 警察必胜补全数(G) 的连通弦图补全。此类补全的最小大小为 补全数$(G) + c(G) - 1$，正如第 2 节所述。对任意图，反向不等式均成立，因为每个连通弦图都是警察必胜图。◀

6 不交并、联接与余图

前面的结果给出了一些图类，在这些图类中，最优弦图补全也是最优警察必胜补全。接下来，我们考察组合图的两种简单方式。除了给出更多精确算法外，这些公式还表明，对于某些图类，警察必胜补全所需的添加边可能少于弦图补全，而且两种最优值之间的差距可以任意大。

6.1 不交并

到目前为止，我们在构造补全时一直通过添加桥来连接各个连通分量。下面的结果表明，只要每个连通分量都以最优方式补全，这种做法总是最优的。

我们给出定理 20 中下界所需的细节。主要思路是沿拆解序收缩顶点，同时追踪两侧之间的边。

▶**引理 18.** 设 J 有一个拆解序 $v_1, \ldots, v_s$。假设删除 $z = v_i$ 时，后续顶点 $w = v_j$ 支配它，其中 $i < j$。收缩 zw 会得到另一个可胜图，而省略 z 后的原序列是该收缩图的一个拆解序。

证明。 按照原序列进行，直到 z。在每个这样的步骤中，z 和 w 都仍然存在。如果顶点 v 被 $u \notin \{z, w\}$ 支配，那么收缩后这一关系仍然成立。事实上，每个顶点的新邻域都是其旧邻域的像，而邻域包含关系得以保留。如果 v 被 z 或 w 支配，那么合并后的顶点支配它，因为其邻域包含这两个邻域的像。

当拆解序到达 z 时，它所有剩余的邻点都已经是 w 的邻点，因为 w 支配 z。因此，将 z 收缩到 w 对剩余顶点的作用与删除 z 相同。所以，我们可以继续使用原拆解序的其余部分。◀

16 Cop-Win 边补全

▶**引理 19.** 设 J 是一个可胜图，且 $V(J) = A \sqcup B$，其中 A 和 B 均非空。存在可胜超图 J_A，其为 $J[A]$ 的超图，以及可胜超图 J_B，其为 $J[B]$ 的超图，使得

$$|E(J_A) \setminus E(J[A])| + |E(J_B) \setminus E(J[B])| \leq |E_J(A, B)| - 1.$$

证明。 选取 J的一个拆解序，并为除最后一个顶点以外的每个顶点选择一个在序中更靠后的顶点 $p(v)$，使得该顶点被删除时，后者支配前者。边 $vp(v)$ 构成一棵树 T，其根为最后一个顶点。不失一般性，假设根位于 B。

我们首先定义两个映射。映射 q_B 固定 B 中的顶点，并将 A 中的每个顶点映射到其在树 T中属于 B 的第一个祖先。令 T_0 为 $T[B]$ 中包含根的连通分量。由于 A 非空，存在一个顶点 $a_0 \in A$，其父节点属于 T_0。定义 q_A固定 A，将 T_0 中的每个顶点映射到 a_0，并将 B 中的其他所有顶点映射到其在 A中的第一个祖先。

在任一映射下，映射到任意固定顶点的所有顶点构成 T的一个连通子树。因此，我们可以通过收缩这些子树中的父边，得到每个映射对应的商图。引理 18表明，这两个商图都是警察必胜的。将它们记为J_A 和 J_B。由于这些映射固定其目标集合中的顶点，J_A 包含 $J[A]$，且 J_B包含 $J[B]$。

我们现在计算这两个商图的新边。固定其中一个目标集合$C \in \{A, B\}$ 及其映射 q_C。考虑商图中一条在 $J[C]$ 中不存在的边。它是边 $xy \in E(J)$ 的像，其中 $q_C(x) \neq q_C(y)$。选取这样一条边，并在拆解序中将其较早的端点称为 x，将其较晚的端点称为 y。

若 $x \notin C$，则将 x 替换为其父节点 $p(x)$。到 y 的边仍然存在，因为当 x 被删除且 y 晚于 x 时，$p(x)$ 支配 x。此外，只要 $x \notin C$，就有 $q_C(p(x)) = q_C(x)$，因此其像不变。若两个端点的顺序发生变化，则将较早的那个重命名为 x。重复此过程，直到较早的端点属于 C。该过程会终止，因为每一步都有一个端点在拆解序中严格后移。它不可能以两个端点都在 C 中结束，否则其像将是 $J[C]$ 的一条原有边。因此，我们最终得到一条跨越 (A, B) 的边，其较早的端点属于 C。

我们将每条缺失的商边与上文找到的交叉边相关联。对于固定的目标集合，不同的缺失商边对应不同的交叉边，因为每条交叉边在 q_C 下只有一个像。此外，J_A 和 J_B 使用的交叉边互不相同，因为在第一种情况下，较早的端点位于 A 中，而在第二种情况下，它位于 B 中。

最后，树边 $a_0p(a_0)$ 是一条交叉边，其两个端点在两个映射下都映射到同一个顶点（通过 q_A 映射到 a_0，通过 q_B 映射到 $p(a_0)$）。因此，它在任一商图中都不可能对应一条缺失边。所以，J_A 和 J_B 中缺失边的总数至多为 $|E_J(A, B)| - 1$，从而得到所需的界。◀

▶ **定理 20**。设 $G_1, \ldots, G_q$ 是顶点集两两不交的非空图。则

$$\operatorname{copfill}\left(\bigsqcup_{i=1}^{q} G_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{copfill}(G_i) + q - 1.$$

一种最优补全的构造方法是：分别对每个 G_i 作最优补全，并用 $q-1$ 条桥将所选拆解序中各自的最后一个顶点相连，使这些桥构成一棵树。

证明。 上述构造给出上界。将每个 G_i 最优地补全，并选取最后一个顶点 r_i 作为补全图的一个拆解序的末顶点。联接顶点r_1，……，r_q，用 $q-1$ 条桥构成一棵树。我们可以先把每个已补全的 G_i 拆解至 r_i。剩余的图是顶点 r_1，……，r_q上的一棵树，它是警察必胜的。因此整个

补全图是警察必胜的。对于下界，只需考虑两个图。设F是 $G_1 \sqcup G_2$的任意一个警察必胜补全，令 $J = (G_1 \sqcup G_2) + F$，并设 h 为 F 中联接这两个顶点集的边数。

我们使用上文已证明的引理 19。它给出 $J[V(G_1)]$ 与 $J[V(G_2)]$的警察必胜超图，二者合计至多使用 $h-1$ 条额外的边。两个原始图内部已经添加的所有边，连同这些进一步添加的边，因此分别给出警察必胜补全，总共至多使用 $|F|-1$ 条边。因此，警察必胜补全数(G_1) +警察必胜补全数$(G_2) \leq |F|-1$.

反复应用这一点，即可证明该结果对 q 个图成立。 ◀

因此，请注意：只要还剩下另一个连通分量，删除一个孤立顶点或一个团分量，就会使警察必胜补全数恰好减少 1。我们在处理孪生覆盖时将用到这一点。

6.2 联接与余图

对于顶点集互不相交的图 $H_1, \ldots, H_q$，它们的联接 $H_1 \vee \cdots \vee H_q$通过添加不同图之间的所有边而得到。Cameron 和 Fitzpatrick [2] 证明，两个图的联接是警察必胜的，当且仅当其中至少一个是警察必胜的。该结论对任意多个因子都成立。

▶ **命题 21**。 对于非空图 H_1，……，H_q，其中 $q \geq 2$,

$$\operatorname{copfill}(H_1 \vee \cdots \vee H_q) = \min_{1 \leq i \leq q} \operatorname{copfill}(H_i).$$

证明。 不同因子之间的所有边均已存在，因此每条填充边都位于某一个因子内部。若补全后的联接是警察必胜的，则 Cameron 和 Fitzpatrick 的结果蕴含某个补全后的因子是警察必胜的。因此每个补全至少需要 $\min_i$警察必胜补全数(H_i)条边。反之，仅对具有最小最优值的一个因子进行补全。此时该联接变为警察必胜，且恰好使用这么多条边。 ◀

一个余图 可由单个顶点通过反复进行不交并与联接得到。因此，定理 20 与命题 21 中的公式可用于得到整个类的算法。

▶**定理 22**。 余图的最优可胜补全可在多项式时间内求得，并且也可构造一个最优的添加的边集合。给定一棵余树，最优值可在与余树规模成线性的时间内计算。

并集和联接公式给出了余树算法。蜘蛛图是警察必胜的，从而将该算法扩展到 P_4-稀疏图（推论 23）。

证明。 考虑 G 的余树。余树的每个节点都表示由其下方叶节点得到的余图。对于每个节点 x，令 f（x） 表示使该图成为警察必胜图所需添加的最少边数。我们采用自底向上的方式计算这些值。

如果 x 是一个叶节点，那么它表示一个单独的顶点，因此 $f(x) = 0$。

设 x 是一个并节点，其子节点为 x_1、……、x_q。 x 所表示的图是其子节点所表示的图的不交并。因此，根据定理 20，

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} f(x_i) + q - 1.$$

若 x 是一个联结节点，则由命题 21 可得

$$f(x) = \min_{1 \le i \le q} f(x_i).$$

因此，每个节点的最优值都由其子节点的值直接决定，所以可以通过一次自底向上的余树遍历计算所有值。

补全本身也可以同时构造。在并节点处，取所有子节点的最优补全，并用 $q-1$ 桥将补全图联接起来。在联结节点处，选择值最小的子节点，仅在该子节点内部使用最优补全，并且不在其他子节点内部添加边。定理 20 和命题 21 表明，这些选择在每个节点处都是最优的。

由于可以在多项式时间内找到余图的余树，因此这就得到了所述的多项式时间算法。◀

为确保完整性，算法 4 给出了定理 22 中使用的显式构造。对于余树的每个节点，我们存储由该节点表示的图的一个最优填充边集、其大小，以及一个可以在补全图的拆解序中保持为最后一个的顶点。当需要在并节点处用桥联接补全后的子图时，就会用到这个最后一个顶点。

算法 4 根据余树求余图的最小警察必胜补全

输入： 一个非空余图的余树 G。
输出： 一个最小补全数集合 F。

对于 余树中的每个节点 x，按自底向上的顺序执行：
  如果 x 是表示顶点 v 的叶节点，**则**
    $f_x \leftarrow 0$；$F_x \leftarrow \varnothing$；$r_x \leftarrow v$
  否则如果 x 是一个并节点，其子节点为 $x_1, \ldots\ldots, x_q$ **则**
    $F_x \leftarrow \bigcup_i F_{x_i}$
    对于 $i = 1, \ldots\ldots, q-1$ **执行**
      添加 $r_{x_i} r_{x_{i+1}}$ to F_x
    结束 for
    $f_x \leftarrow \sum_i f_{x_i} + q - 1$
    $r_x \leftarrow r_{x_1}$
  else
    选择一个具有最小值 f_{x_j} 的子节点 x_j
    $F_x \leftarrow F_{x_j}$；$f_x \leftarrow f_{x_j}$；$r_x \leftarrow r_{x_j}$
  结束 if
结束 for
令 r 为余树的根。
返回 F_r

在并节点处，首先将每个已完成的子节点逐一拆解至其存储的代表元。随后添加的桥在这些代表元上构成一条路径，可将其拆解至第一个代表元。因此，为并节点存储的代表元是有效的。

在联结节点处，将所选的最低成本子节点拆解至其存储的代表元。由于该顶点与其他子节点中的每个顶点都相邻，因此随后可以删除所有剩余顶点，所以这个代表元也是有效的。

因此，该构造在每个节点都保留了一个有效的最后一个顶点。定理 20 和命题 21 表明，在这两种情况下，添加的边数都是最少的。

6.3 推广到 P_4-稀疏图

▶**推论 23.** 可以在$O(n+m)$ 时间内构造出一个 P_4-稀疏图的最优可胜补全。

证明。若一个图 P_4-稀疏，则任意五个顶点的集合所诱导的子图至多含有一个诱导 P_4。每个非平凡的 P_4-稀疏图都是不交并、联接或蜘蛛图 [9]。蜘蛛图有一个划分$(S,\ K,\ R)$，其中 $|S| = |K| \geq 2$，其中 S是独立集，K是团，R与 K 完全邻接，且与 S完全不邻接，而 S 与 K 之间的边在以 S 和K为两部分的完全二部图中构成完美匹配或完美匹配的补图。

每个蜘蛛图都是警察必胜图。对于每个 $s \in S$，选择一个邻点 $v \in K$。由于 $N(s) \subseteq K$ 和K是一个团，$N[s] \subseteq N[v]$。删除 S中的所有顶点。此时，K中的任意顶点在剩余图中都是全邻接的，而剩余图可约化至该顶点。无需补全头部 $G[R]$ 。

从叶节点向根处理分解。叶节点或蜘蛛图的值为零。在有 q 个子节点的并节点处，定理 20 给出 $f = \sum_i f_i + q - 1$ ；在联结节点处，命题 21 给出 $f = \min_i f_i$。因此，这些递推式可以计算出最优值。

为构造解，在每个节点保留一个顶点，使其能够作为该节点所选补全的拆解序的末尾顶点。在叶节点处，保留其顶点；在蜘蛛图处，保留 K 中的任意顶点。在并节点和联结节点处，使用算法 4 中的构造。在并节点处，用一条路径连接所有子节点所保留的顶点；在联结节点处，只保留值最小的子节点的补全。相同的拆解论证表明，这些选择能保留一个有效的顶点。

该分解有 O 个节点，且可在 $O(n+m)$ 时间内构造 [8]。在自底向上的遍历中，只存储值、保留的顶点和选择。在第二次遍历中恢复填充边：在并节点处访问所有子节点，在联结节点处只访问选定的子节点，并在叶节点或蜘蛛图处停止。这样可以避免在中间节点复制填充边集。处理的子节点连接数和输出的桥数总计为 $O(n)$，因此得到所述的 $O(n+m)$ 运行时间。◀

6.4 弦图补全中的差距

对于部分 2-树和块仙人掌图，推论 17 表明，最优连通弦图补全也是警察必胜补全的最优解。但这一等式并不适用于所有图。完全二部图是一个简单的例子，其数值可由联接公式得出。

▶ **推论 24**。对于 $2 \leq a \leq b$,

$$\operatorname{copfill}(K_{a,b}) = a - 1, \qquad \operatorname{fill}(K_{a,b}) = \binom{a}{2}.$$

尤其是，两种最优解之间的差距可以任意大。

证明。由于 $K_{a,\ b} = K_a \overline{\nabla}\, K_b$ 而在 s 个顶点上的独立集需要添加 $s-1$ 条边才能成为警察必胜图，因此命题 21 得出警察必胜补全数 $\operatorname{copfill}(K_{a,\ b}) = a - 1$。一种最优补全是在较小部分内添加一棵生成树。

对于弦图补全，至少必须将一个部分变成团。否则，从每个部分各取两个不相邻的顶点，就会诱导出一个 4-圈。将较小的部分变成团只需 $\binom{a}{2}$ 条边，且已足够，这就证明了第二个公式。◀

这也表明，部分 2-树的等式并不适用于树宽三的图。$\mathrm{tw}(K_{3,\,3}) = 3$，但 $\mathrm{copfill}(K_{3,\,3}) = 2$，而 $\mathrm{fill}(K_{3,\,3}) = 3$。对于 $K_{a,\,a}$，两个最优解之间的比值为 $a/2$，因此无界。更一般地，对于具有 $q \geq 2$ 的完全多部图，联接公式给出 $\mathrm{copfill}(K_{a_1,\,\ldots\ldots,\,a_q}) = \min_i(a_i - 1)$。

7 结构限制下的参数化算法

困难性归约表明，即使补全预算也作为参数，较小的支配集仍无法使该问题变得容易求解。现在我们考虑一些参数，它们能够限制可添加边的位置。我们首先利用邻点相同的顶点，再将这一思路扩展到孪生覆盖。最后，我们给出一种结合补全预算和树宽的算法。

7.1 邻域多样性

邻域多样性的概念由 Lampis [11]提出。两个不同的顶点 u和 v 若除彼此之外拥有相同的邻点，则具有相同的类型，也就是说，$N_G(u)\setminus\{v\} = N_G(v)\setminus\{u\}$。这一关系将 $V(G)$划分为若干类型。类型的数量称为邻域多样性 $d = \mathrm{nd}(G)$。每种类型要么是一个团，要么是一个独立集；任意两种类型之间要么完全相邻，要么没有边。因此，同一类型中的顶点可以相互替换。比较所有邻域对，即可在 $O(n^3)$时间内得到该划分。

▶ **引理 25**。 对于 $k \geq 1$，任意选择每种类型V_i中的 $\min\{|V_i|, 2k\}$ 个代表元 R_i，并令 $R = \bigcup_i R_i$。如果存在大小至多为 k 的警察必胜补全，则存在一个最优补全，使得每条新增边的两个端点都在 R 中。此外，$|R| \leq 2kd$。

证明。 设 F 是一个补全，且 $|F| \leq k$，并令 T 包含其边的端点。于是 $|T| \leq 2k$。对于每种类型 V_i，我们可以置换其顶点，使得 $T \cap V_i$ 中的顶点映射到 R_i。这些置换构成 π 的一个自同构 G。将每个 $uv \in F$替换为 $\pi(u)\pi(v)$ 可得到一个大小相同的集合，且其端点位于 R中，并且补全图同构于 $G + F$。因此它也必然是警察必胜的。 ◀

▶ **定理 26**。 对于 $k \geq 1$，警察获胜边补全 可在 $O\big((k+1)(2kd)^{2k}n^3\big)$ 时间内求解，其中 $d = \mathrm{nd}(G)$。对于 $k = 0$，多项式时间的警察必胜图识别即可满足要求。因此，该问题对于 $p = k + d$ 是固定参数可处理的，运行时间为 $2^{O(p \log p)}n^{O(1)}$。

证明。 首先假设 $k \geq 1$。根据引理 25 计算代表集 R。由该引理可知，如果 G 存在大小至多为 k 的警察必胜补全，那么存在一种补全，使得每条新增边的两个端点都属于 R。因此，只需考虑端点位于 R 中的非边。

设 q_R 为这类非边的数量。我们尝试这些非边中至多包含 k 条边的每个集合 F，并测试完整图 $G + F$ 是否为警察必胜图。如果某个这样的集合满足条件，我们就返回“是”。反过来，如果存在大小至多为 k 的补全，引理 25 保证存在一种补全，其所有端点都属于 R，因此它必然包含在考察的集合之中。由此可知，该搜索是正确的。

由于 $q_R \leq |R|^2$，所考虑的集合数量至多为

$$\sum_{i=0}^{\min\{k,q_R\}} \binom{q_R}{i} \leq (k+1)\max\{1, q_R\}^k \leq (k+1)\max\{1, |R|\}^{2k}.$$

根据引理 25， $|R| \le 2kd$，因此选择数量至多为 $(k+1)(2kd)^{2k}$.对于每种选择，警察必胜图识别需要 $O(n^3)$ 的时间，因此总运行时间为$O\big((k+1)(2kd)^{2k}n^3\big)$.

最后，令 $p = k + d$。由于 k， $d \le p$，$(k+1)(2kd)^{2k} \le (p+1)(2p^2)^{2p} = 2^{O(p \log p)}$。因此，该问题关于 $p = k + d$ 参数化后属于固定参数可处理。

对于 $k = 0$，不能添加任何边，因此只需直接测试 G 是否已经是警察必胜图。◀

这一论证只用到了自同构，以及针对目标性质的多项式时间测试。因此，它也适用于补全为任何可在多项式时间内识别的同构不变图类的边补全问题。

7.2 孪生覆盖

邻域多样性将同一类型的所有顶点视为可互换。孪生覆盖让我们能够采用类似的思路。该参数由 Ganian [7] 引入。

若两个相邻顶点 u、v 满足 $N_G[u] = N_G[v]$，则它们是真孪生顶点。如果集合 $X \subseteq V(G)$ 中每条两个端点都在 X 外部的边，其端点都是真孪生顶点，则称 $X \subseteq V(G)$ 为孪生覆盖。此类集合的最小规模记为 $\mathsf{tc}(G)$。每个顶点覆盖都是孪生覆盖，因此 $\mathsf{tc}(G) \le \mathsf{vc}(G)$。对于孪生覆盖 X， $G - X$ 的每个连通分量都是一个团，且该团的所有顶点在 X 中具有相同的邻点。我们称这些团为外部团。

▶ **引理 27**。设 X 是 G 的孪生覆盖，且 $k \ge 1$。对于每个外部团 Q，任意保留最少$\{|Q|, 2k+1\}$ 个顶点，并令 G' 为所得的诱导子图，其中包含所有 X。那么

$$\mathrm{copfill}(G) \le k \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{copfill}(G') \le k.$$

此外， G' 的任何至多使用 k 条边的补全，都可以通过使用相同的添加边扩展为 G 的补全。

证明。首先假设 G 有一个警察必胜补全 F，其中 $|F| \le k$。至多有 $2k$ 个顶点是 F中边的端点。由于外部团中的所有顶点都是真孪生顶点，我们可以对团中的顶点重新排列，使每个填充边端点都落在保留的顶点中。在每个被缩小的团中，因此至少有一个保留顶点 u 未被 F触及。每个被删除的顶点 v 与 u 具有相同的原始闭邻域，且也未被F触及，因此 $N[v] \subseteq N[u]$ 在补全图中成立。于是可以先删除所有被移除的顶点。剩下的图是 G'的一个警察必胜补全，从而证明了正向结论。

反过来，设 F 是 G' 的一个警察必胜补全，填充边集为 $|F| \le k$，并将所有已删除的顶点及其原有邻接关系恢复。在每个缩短后的外部团中，至少有一个保留顶点 u 不与 F中的任何边关联。每个恢复的顶点 v 在原图中都是 u 的真孪生顶点，且也未被 F触及，因此 u 支配 v。因此，我们可以先删除所有恢复的顶点。删除这些顶点后，剩余的图恰好是 $G' + F$，它是警察必胜的。接着按照 $G' + F$的拆解序继续操作，即可得到 $G + F$的拆解序。因此， $G + F$ 是警察必胜的，所以同一填充边集 F 也是 G的一个补全。◀

▶**定理 28**。 给定一个大小为 h的孪生覆盖 X ， 警察获胜边补全 可在时间 $2^{O(k(h+\log(k+1)))}n^{O(1)}$内求解。若存在合适的补全，则返回该补全。

证明。 如果 $k = 0$，我们只需检验 G 是否已经是警察必胜图。因此假设$k \ge 1$。

22 Cop-Win 边补全

首先应用引理 27。这将得到一个图 G'，其中每个外部团的大小至多为 $2k+1$，同时不改变是否存在大小至多为 k 的补全。

令 X 为孪生覆盖，其中 $|X| = h$。我们根据两个性质对 G' 的外部团进行分组。第一，根据它们的公共邻域 $S \subseteq X$；第二，根据它们的大小 s。由于 $s \leq 2k+1$，因此至多有 $2^h(2k+1)$ 个这样的类别。同一类别中的团与图中其余部分具有完全相同的邻接关系，因此可以相互置换。

对于每个类别 $\mathcal{C}$，选择 $\min\{2k, |\mathcal{C}|\}$ 个代表团，并令 R 包含 X 以及这些选定团中的所有顶点。一个至多包含 k 条边的填充边集至多有 $2k$ 个端点，因此至多可以接触 $2k$ 个外部团。因此，通过在每个类别内置换团，我们可以假设填充边集所接触的每个外部团都是选定的代表团之一。因此，如果存在一个解，那么必然存在一个解，使得每个填充边端点都位于 R 中。

R 的大小有界

$$|R| \leq h + 2k\,2^h \sum_{s=1}^{2k+1} s = h + O(k^3 2^h).$$

现在，我们枚举所有 F 个数至多为 k、且两个端点均位于 R中的非边的集合，并对每种选择检验完整图 $G' + F$ 是否为警察必胜图。

这样的选择至多有

$$(k+1)\max\{1, |R|\}^{2k} = 2^{O(k(h+\log(k+1)))}$$

种，并且每种选择都可以在多项式时间内完成检验。因此，总运行时间为

$$2^{O(k(h+\log(k+1)))} n^{O(1)}.$$

最后，如果找到 G' 的一个补全，引理 27保证可以恢复被移除的顶点，而无需添加任何其他边。因此，同一个填充边集就给出了原图 G的补全。◀

现在我们可以去除对 k的依赖。关键在于，在处理完连通分量后，将孪生覆盖变成一个团，就已经得到了一种补全，其大小仅取决于该覆盖。

▶ **定理 29.** 警察获胜边补全以仅 $t = \mathrm{tc}(G)$ 为参数时是固定参数可处理的，并且可在 $2^{O(t^3)} n^{O(1)}$ 时间内求解。该算法还可以找到最优补全。

证明。 根据定理 20，我们可以分别求解各个连通分量，再用桥联接它们的补全。因此，我们考虑一个连通图 G。如果 G 是一个团，其最优补全为零。

否则，在 $V(G)$ 上构造一个辅助图，其中恰好包含 G 中端点不是孪生顶点的边。该辅助图的一个顶点覆盖恰好是 G 的一个孪生覆盖。在多项式时间内，取一个极大匹配的端点即可得到大小为 $h \leq 2t$ 的孪生覆盖 X。

每个外部团都与 X 中的一个顶点相邻，因为 G 是连通的。令 F_X 为 X 内部的缺失边，并令 $q = |F_X| \leq \binom{h}{2}$。图 $G + F_X$ 是警察必胜的。这是因为，X 现在是一个团，并且 X 外的每个顶点都被其在 X 中的任一邻点支配。我们可以删除所有外部顶点，然后拆解 X，从而得到一个拆解序。

如果 $k \geq q$，则该构造给出一个预算内的补全。否则 $k < q = O(t^2)$，因此我们应用定理 28，使用 $h \leq 2t$。运行时间变为

$$2^{O(k(h+\log(k+1)))} n^{O(1)} = 2^{O(t^3)} n^{O(1)}.$$

检验从零到 q 的各个可能预算，同样能在相同的渐近时间内给出最优值及相应的补全。随后，定理 20 将原始连通分量的最优解组合起来。◀

▶ **推论30.** 警察获胜边补全对于参数 $t = \mathrm{vc}(G)$ 单独而言是固定参数可处理的，运行时间为 $2^{O(t^3)} n^{O(1)}$。

证明。 每个顶点覆盖都是孪生覆盖，因此 $\mathrm{tc}(G) \le \mathrm{vc}(G)$。应用定理 29。 ◀

7.3 树宽与补全预算

前面的算法利用了可通过自同构相互置换的顶点或团。对于树宽，我们采用另一种方法。拆解序可以通过图的定向来描述，从而使我们能够应用一种针对有界树宽图的通用算法。

对于 D的定向 H，用 $N_D^+(v)$ 表示 v的出邻点。

▶引理 31。 </style}非空图 是警察必胜图，当且仅当它存在一个无环定向，且该定向有唯一汇点，使得每个 都有一个出邻点 满足 $(v) \subseteq N_H[w]$.

证明。 取一个拆解序，并将每条边从其较早（按序排列）的端点定向到较晚的端点。显然，该定向是无环的，且最后一个顶点是唯一汇点。当顶点 v 被删除时，它有一个序列中更靠后的顶点 w 支配它。因此 w 是 v 的出邻点，并且与 v的其他所有出邻点相邻，从而得到所需的包含关系。

反过来，取一个满足该条件的定向的拓扑序。当删除$v \neq r$ 时，它剩余的邻点恰好是它的出邻点。指定的顶点w 与 v 以及所有这些剩余邻点都相邻。因此，在该步骤中，w 支配 v 。该拆解序将 H 约化为 r。◀

▶定理32。 存在一个可计算函数 f，使得警察获胜边补全 可在 $f(k, \mathrm{tw}(G))(n+m)^{O(1)}$ 时间内求解。只要存在大小至多为 k 的补全，就可以构造出这样的补全。

证明。我们对有界树宽图上的 MSO_2 逻辑应用 Courcelle 定理 [3]。令 $t = \mathsf{tw}(G)$。将每条边 uv细分一次，用路径 u, e_{uv}, v替换，并将所得图记为 $S(G)$。用固定的一元谓词 Orig 和 Sub 标记原始顶点和细分顶点。通过对每条原始边，将一个包含 u, v的袋连接到一个新袋 $\{u, v, e_{uv}\}$，宽度为 t 的 G 树分解可扩展为 $S(G)$。因此

$$\mathrm{tw}(S(G)) \le \max\{t, 2\}, \qquad |V(S(G))| = n + m, \qquad |E(S(G))| = 2m.$$

令 Z 为定义在 $S(G)$ 上的 MSO_2 边集变量。要求每个细分顶点关联的两条边中恰有一条属于 Z，并将其原始端点解释为对应原始边的头部。记 $\mathsf{Sel}_Z(e, y)$ 表示 ey属于 Z，定义

$$\begin{aligned}\mathrm{Arc}_Z(x, y) \equiv\ & \mathrm{Orig}(x) \wedge \mathrm{Orig}(y) \wedge x \neq y \\ & \wedge \exists e \big[\mathrm{Sub}(e) \wedge \mathrm{Adj}_{S(G)}(e, x) \wedge \mathrm{Sel}_Z(e, y)\big].\end{aligned}$$

因此，Z 的允许选择恰好对应于原始边的定向。

对于每个 $j \in \{0, \dots, k\}$，对原始顶点的 j有序对 (a_i, b_i) 进行量化。要求每个有序对中的端点互不相同且不相邻，并且各无序对互不相同。不同的有序对可以

共享端点。有序对 (a_i, b_i) 表示一条从 a_i 指向 b_i 的新增边。补全图中的邻接关系和定向由以下内容描述

$$\mathrm{Arc}_j(x,y) \equiv \mathrm{Arc}_Z(x,y) \vee \bigvee_{i=1}^{j} (x = a_i \wedge y = b_i),$$

$$\mathrm{Adj}_j(x,y) \equiv \mathrm{Adj}_G(x,y) \vee \bigvee_{i=1}^{j} \big((x = a_i \wedge y = b_i) \vee (x = b_i \wedge y = a_i)\big).$$

此处 $\mathrm{Adj}_G(x,\ y)$ 表示 $x,\ y$ 是具有共同细分邻点的不同原始顶点。对于 $j = 0$，空析取式为假。这些谓词是公式缩写。不向 $S(G)$ 中插入候选非边。

在以下条件中，所有顶点变量和顶点集都通过 Orig 限制为原始顶点。要求

$$\forall Y \subseteq V(G)\ \big(Y \neq \varnothing \Longrightarrow \exists v \in Y\ \forall u \in Y\ \neg\, \mathrm{Arc}_j(v,u)\big).$$

这表达了无环性。事实上，有向环会违反其顶点集上的条件。反之，如果一个非空集合中的每个顶点在该集合中都有一个出邻点，那么反复沿着出边行进就会产生一个有向环。

最后，要求存在一个没有出边的原始顶点 r，并且对于每个 $v \neq r$，要求 e

$$\exists w\ \big[\mathrm{Arc}_j(v,w) \wedge \forall u\ \big(\mathrm{Arc}_j(v,u) \Longrightarrow (u = w \vee \mathrm{Adj}_j(u,w))\big)\big].$$

这表示 w 是满足 $N_D^+(v) \subseteq N_{G+F}[w]$ 的 v 的出邻点。除 r 外的每个顶点都有一个出邻点，因此 r 是唯一汇点。

令 φ_j 断言存在满足这些条件的 Z、端点对和 r。根据引理 31，满足赋值给出一个恰好有 j 条添加的边的警察必胜补全。反过来，含有 j 条边的警察必胜补全具有该引理所述的一个定向，该定向可给出一个满足赋值。因此

$$S(G) \models \bigvee_{j=0}^{k} \varphi_j \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{copfill}(G) \leq k.$$

展开缩写后，该析取式是一个 MSO_2 句子，其长度仅取决于 k。因此，Courcelle 定理 [3], 结合标准的固定参数可 tractable 树分解预处理，可得运行时间 $f(k,\ t)(n+m)^{O(1)}$。

也可以通过判定测试恢复一个补全。首先找到一个成功的 j，然后逐个固定端点变量，依次尝试原始顶点，并保留能够扩展所有先前固定选择的选项。每个选择都通过一个单点一元标签加以约束，这不会改变树宽。公式长度仍然仅取决于 k。至多需要 $(k+1)+2jn$ 次模型检验调用，因此恢复过程仍能在固定参数可处理的运行时间内完成。注意，由此得到的顶点对构成所需的填充边集。◀

同一结果表明 $k + \mathrm{fvs}(G)$是固定参数可处理的，因为删除一个大小为 s的反馈顶点集会留下一个森林，且$\mathrm{tw}(G) \leq s+1$。上述算法并未解决仅按树宽进行的参数化，因为它仍然依赖于 k。

8 结论与进一步的问题

警察必胜边补全不同于弦图补全。即使在支配数为二的连通图上，它对于填充预算也是 W[2]-困难的。这两个下界给出了精确

算法，适用于部分 2-树和块仙人掌图；不交并与联接公式则给出了适用于余图的算法。完全二部图表明，警察必胜补全所需的边数可能远少于弦图补全所需的边数。

参数化算法利用邻域多样性和孪生覆盖中的对称性，并对 $k + \mathrm{tw}(G)$ 使用定向论证。仅以树宽为参数的复杂性问题仍未解决，尤其是树宽三的情形。进一步降低对孪生覆盖的依赖，并找到其他满足 $\mathrm{copfill}(G) = \mathrm{fill}(G) + c(G) - 1$ 的图类，也很值得研究。

生成式人工智能的使用

使用 ChatGPT 进行文献检索、手稿整理和 LaTeX 准备。它协助完成了三角形空间下界（定理 15）和不交并下界论证（引理 19 和定理 20），并生成了树宽参数化固定参数可 tract 算法（第 7.3 节）。作者对最终手稿及其数学正确性负责。

参考文献

1 蔡雷震。遗传性质图修改问题的固定参数可 tract 性。《信息处理快报》，58(4):171–176，1996。2 Ben Cameron 和 Shannon Fitzpatrick。边收缩与警察必胜临界图。《澳大利亚组合学杂志》，63(1):70–87，2015。3 Bruno Courcelle。图的单子二阶逻辑。一、有限图的可识别集合。《信息与计算》，85(1):12–75，1990。4 Gabriel Andrew Dirac。论刚性回路图。载于《汉堡大学数学研讨会论文集》，第 25 卷，第 71–76 页。施普林格，1961。5 Rod G Downey 和 Michael R Fellows。固定参数可处理性与完全性 I：基本结果。《SIAM 计算杂志》，24(4):873–921，1995。6 Fedor V Fomin 和 Yngve Villanger。最小填充的亚指数参数化算法。《SIAM 计算杂志》，42(6):2197–2216，2013。7 Robert Ganian。改进顶点覆盖作为图参数。《离散数学与理论计算机科学》，17（离散算法），2015。8 Beverly Jamison 和 Stephan Olariu。在线性时间内识别 p_4-稀疏图。《SIAM 计算杂志》，21(2):381–406，1992。9 Beverly Jamison 和 Stephan Olariu。p_4-稀疏图的树表示。《离散应用数学》，35(2):115–129，1992。10 Haim Kaplan、Ron Shamir 和 Robert E Tarjan。弦图、强弦图和真区间图上的参数化补全问题的可处理性。《SIAM 计算杂志》，28(5):1906–1922，1999。11 Michael Lampis。树宽限制的算法元定理。《算法学》，64(1):19–37，2012。12 George Mertzios、Othon Michail、George Skretas、Paul G Spirakis 和 Michail Theofilatos。图增长的复杂性。《计算机与系统科学杂志》，147:103587，2025。13 Richard Nowakowski 和 Peter Winkler。图中的顶点间追逐。《离散数学》，43(2-3):235–239，1983。14 Dieter Rautenbach 和 Lutz Volkmann。块仙人掌图的支配数。《离散数学》，187(1-3):185–193，1998。15 Robert Tarjan。深度优先搜索与线性图算法。《SIAM 计算杂志》，1(2):146–160，1972。16 Mihalis Yannakakis。计算最小填充是 NP 完全的。《SIAM 代数离散方法杂志》，2(1):77–79，1981。