arXiv:2611.31197v1 [physics.flu-dyn] 23 Nov 2026

一种采用显式压力松弛的中心型有限体积方法，用于弱可压缩单相和两相流

Shintaro Matsushita[a, *], Suhas S. Jain[b, c], Andrei G. Fedorov[c, d], Tetsuya Suekane[a]

[a]东京科学大学机械工程系，日本东京，*152-8550*[b]佐治亚理工学院多相流研究中心，美国佐治亚州亚特兰大，*30332*[c]佐治亚理工学院*George W. Woodruff*机械工程学院，美国佐治亚州亚特兰大，*30332*[d]佐治亚理工学院*Parker H. Petit*生物工程与生物科学研究所，美国佐治亚州亚特兰大，*30332*

摘要

本文提出一种用于弱可压缩单相和两相流的无耗散中心型有限体积方法。该方法在结构化同位网格上，将保持动能的对流与守恒弥散界面正则化及显式压力松弛相结合。为控制相邻网格单元本征密度不同时过量的相质量流出，我们采用调和面密度构造相质量通量。这样既衔接了相体积输运与相质量输运，又不改变对流动能恒等式，并由此得到一个充分正性条件，以及在有限速度散度下的逆密度输运恒等式。为在耦合计算中保留低耗散输运的优势，压力增量格式在预测步中纳入已有的压力梯度。相容的单元与面算子为额外压力迭代给出条件能量估计，而全离散收支则分别列出对流、预测压力功和最终校正。在 128^3 个网格单元上的无黏均匀各向同性湍流计算中，相对动能变化幅度低于

*通讯作者。电子邮箱：matsushita.s.90b7@m.isct.ac.jp (Shintaro Matsushita)

1.2×10^{-7}，在 $t^* = 8$ 下，单相计算和密度比为 1000 的两相计算均如此。与之匹配的迎风计算分别仅保留初始能量的 3.60% 和 30.72%。剪切层、方腔、上升气泡和溃坝算例展示了该方法在不可压缩区流动中的适用性。在三维溃坝算例中，调和平均能够保持相质量为正，而算术平均会产生负值。采用中心格式对流时，指定的亚格子应力提供了主要耗散。局部压力算法和同位有限体积形式为未来在 GPU 上结合自适应网格细化开展大规模多相大涡模拟奠定了基础。

关键词：弱可压缩流动、中心型有限体积方法、动能、调和相密度通量、演化压力投影、多相流

---

1. 引言

低马赫数多相流的高分辨率模拟必须解析跨越多个尺度的涡旋运动和变形界面。两个数值要求尤为重要：动量输运必须保留已解析结构，压力计算则必须能够扩展至表示这些结构所需的大量网格单元。迎风数值黏性可能会在分子黏度或预设的亚格子尺度（SGS）模型发挥作用之前，就将这些结构耗散掉。因此，仅有计算上可扩展的压力算法，并不足以构成低耗散的多相流求解器。本文通过一种中心弱可压缩有限体积格式，同时满足这两项要求。

在不可压缩投影法中，压力泊松方程用于满足速度散度约束。高效求解器和压力分裂方法显著改进了这一方法。例如，Dodd和Ferrante [1], 将变系数两流体压力问题化简为常系数求解。然而，椭圆问题在收敛过程中仍会使整个计算域相互耦合。显式弱可压缩方法则以有限的人工声速演化压力，用局部更新取代上述求解。尽管声学尺度限制了时间步，但紧致模板和可预测的通信模式非常适合在 GPU 和自适应网格上进行并行计算。

在格子玻尔兹曼方法（LBM）中，利用弱可压缩性模拟名义不可压缩流已十分成熟。这类方法保留有限声速，并在低马赫数下趋近不可压缩状态。多相应用包括三维溃坝和液体射流破碎 [2]。Holzer 等人 [3] 展示了在最多 2048 个 GPU 上模拟数百个已解析气泡的结果。这些成果表明，局部弱可压缩算法适用于大规模多相流模拟。

在先前的工作中，我们针对低马赫数两相流开发了一种弱可压缩弥散界面方法 [4] ，并将其扩展至界面自适应网格细化（AMR） [5]。我们使用约 0.1 mm 厚的膨胀液膜作为研究对象，并通过约 0.9 百万个网格单元进行解析，其最细分辨率相当于 8192×8192 均匀网格。湿底溃坝性能测试表明，在 FLOW超级计算机的 128 个 GPU 上，完整 AMR 计算的弱扩展效率约为 81%，流体更新的弱扩展效率约为 95%。因此，弱可压缩性已使自适应网格上的高分辨率多相流模拟成为可能，并展现出多GPU可扩展性。演化压力投影（EPP）通过局部压力弛豫抑制声学振荡 [6]，并已扩展至满足动量守恒的同位网格格式 [7]。这些进展为本研究奠定了压力处理和并行计算基础。

若要使这一计算方法能够支持采用显式亚格子尺度模型的大涡模拟（LES），就必须探讨迎风耗散的作用。近期的弱可压缩方法包括 Melvin 和 Mandal 提出的 HLLC格式 [8] ，以及其包含表面张力的路径守恒扩展[9]。迎风通量有助于提高稳健性，但也会耗散已解析动能。当这种数值耗散占未解析尺度能量损失的显著部分时，离散格式便会与任何显式模型并行发挥隐式亚格子尺度封闭的作用。因此，数值误差与亚格子尺度建模可能相互影响 [10]。消除迎风对流能量汇，可使分子应力和亚格子尺度应力作用于保留的速度梯度，并使其对能量传递的贡献能够得到直接评估。

动能守恒空间离散格式为实现这一目标奠定了基础。Morinishi等人 [11]提出了不可压缩有限差分格式的守恒要求，Morinishi [12]则为变密度低马赫数流发展了反对称形式。对于弥散界面两相流，Mirjalili和Mani [13] 在交错网格上构造了一致的质量与动量输运格式，以保持动能。

Manzanero等人 [14] 发展了一种与Cahn–Hilliard动力学耦合的能量一致人工可压缩不连续Galerkin方法。这些方法表明，无耗散输运要求离散质量方程和动量方程共同满足动能平衡。对于当前应用，同位有限体积实现尤其具有吸引力，因为所有动量分量共用一个单元层次结构，并且可在自适应网格加密中使用守恒面通量。

动能与熵保持（KEEP）格式利用这些离散关系，为可压缩流构造中心通量 [15]。Jain 和 Moin [16] 将该公式扩展至可压缩两相流，并在动能平衡中纳入界面正则化导致的质量输运。对于界面，Jain 提出的高精度守恒弥散界面（ACDI）方法 [17] 将中心输运与平衡扩散和锐化相结合。随后，Hwang 和 Jain [18] 基于压力泊松方程求解，在非结构化同位网格上开发了不可压缩ACDI方法。这些进展表明，在考虑界面诱导的质量通量时，大密度比两相输运仍可采用中心离散来构建。显式弱可压缩压力演化则提供了一种途径，可将这种低耗散输运与结构化网格求解器的局部计算结构结合起来。

目标低马赫数流动涉及涡旋运动和界面变形，但不含激波，因此中心输运尤其适用。在这种流动状态下，界面轮廓控制也很有用：弱压缩可能使弥散界面轮廓发生变形，我们先前的研究 [5] 探讨了通过相场扩散使其恢复。ACDI 在界面输运过程中实现了这种扩散–锐化平衡。因此，它可以与 EPP 结合使用，二者各司其职：ACDI 维持界面轮廓，EPP 抑制声学压力振荡。

将中心输运扩展到这种弱可压缩情形时，一个核心难题是构造相质量通量。在有限速度散度下，相体积和相质量独立演化，因此由相质量除以相体积得到的本征密度也会随之演化。当某一相在相邻网格单元中所占体积分数较小时，单元之间可能出现很大的相对差异。此时，算术平均面密度可能会从本征密度较低的网格单元中带出过多质量。共享通量虽能守恒总相质量，却无法单独防止局部相质量变为负值。因此，相质量通量必须控制局部流出，同时不损害中心动量输运的动能平衡。

为解决这一难题，我们对面两侧各相的本征密度取调和平均。由此得到的面密度不超过任一侧网格单元本征密度的两倍。这为流出质量提供了局部上界，并给出了一个以实际相体积流出量为依据的充分正性条件，其中包括界面正则化的影响。与此同时，采用中心速度平均可在共享质量通量下保持对流动能抵消。调和平均还会抵消逆密度泛函中的内面输运，仅留下有限速度散度的影响。调和平均已用于保压力平衡可压缩通量 [19]；在此处，它将独立演化的相体积和相质量联系起来，并使正质量输运与中心动量对流相协调。该流出界无需速度严格无散，因此可直接应用于弱可压缩两相流。

第二个问题是如何将压力松弛与无耗散输运耦合起来。在 Yang and Aoki 的同位EPP格式中， [7], 压力通过面速度进行松弛，随后将得到的压力作用力插值到单元速度上。这里，试探面速度由经过压力校正的单元动量构造，因此压力梯度和速度散度作用于同一个离散动能。我们还在整个动量预测步中保留已有压力梯度，随后再用压力增量校正动量。当对流本身不提供能量汇时，这种时间上的衔接十分重要：不必要的耗散性压力分裂会掩盖中心输运的优势。由此得到的局部显式压力松弛具有条件能量估计，其完整压力功可以独立于对流进行测量。

所提出的结构化同位有限体积法采用中心空间离散处理对流、黏性应力、压力、界面规则化和表面张力。调和相质量输运在保留对流动能恒等式的同时提供流出界；压力增量EPP将这种输运与局部显式压力松弛联系起来。两者结合后，无需迎风动量耗散即可计算较大的界面变形。我们建立了离散输运和压力性质，并利用全离散能量收支确定这些性质如何延续到耦合计算中。

本评估将所提出的中心方法与仅为衡量动量对流耗散效应而构建的迎风变体进行比较。相输运、EPP 和物理模型保持相同，

并且全离散能量收支将对流、分子黏性、亚格子尺度和压力贡献分开。单相和两相流中的无黏均匀各向同性湍流（HIT）量化了完整算法所保留的能量以及压力耦合的效应。动量重构与本征密度平均的成对变化区分了它们各自对能量和相质量输运的影响。进一步的基准测试评估涡旋输运、与不可压缩参考解的一致性，以及毛细作用和浮力运动。密度比为 1000 的三维溃坝随后展示了相质量输运的改进，并量化了迎风耗散与显式亚格子尺度封闭之间的竞争。这些比较确立了低耗散输运如何改变显式亚格子尺度模型在弱可压缩求解器中的作用。其共用的单元布置和守恒面通量也便于未来集成到我们的 GPU 自适应网格细化框架中，该框架已采用有限体积相场输运 [5]。

2. 控制模型与数值方法

2.1. 独立相变量与弱可压缩模型

我们考虑无相变的等温不可混溶牛顿流体。所有流体共用速度 $\boldsymbol{u}$ 和压力 p 。液相体积分数ϕ、部分质量密度 m_1、 m_2、动量密度 $\boldsymbol{M}$和压力是独立单元变量。对于各相 $\ell = 1$、2，定义

$$\alpha_1 = \phi, \quad \alpha_2 = 1 - \phi, \quad \rho = m_1 + m_2, \quad \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{M}}{\rho}, \quad r_\ell = \frac{m_\ell}{\alpha_\ell}. \tag{1}$$

因此， m_ℓ 是混合物体积质量，而 r_ℓ 是相 ℓ的本征密度。固定的参考密度 ρ_ℓ^0 用于初始化 $m_\ell = \rho_\ell^0 \alpha_\ell$；这一代数关系在演化过程中并不施加。这一区别使相质量保持守恒，同时允许速度具有压力模型所容许的小幅有限散度。

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_\ell + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_\ell = \alpha_\ell \nabla \cdot \boldsymbol{u}, \quad & \boldsymbol{j}_\ell = \alpha_\ell \boldsymbol{u} - \boldsymbol{a}_\ell, \\ \partial_t m_\ell + \nabla \cdot \boldsymbol{f}_\ell = 0, \quad & \boldsymbol{f}_\ell = r_\ell \boldsymbol{j}_\ell, \\ \boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{a}_1, \quad & \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\partial_t \boldsymbol{M} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{f}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}_\sigma, \qquad \partial_t p = -\rho c^2 \nabla \cdot \boldsymbol{u}. \tag{3}$$

这里， $\boldsymbol{a}_1$ 是界面正则化体积通量， c 是人工声速， $\boldsymbol{f}_\sigma$ 是单位体积表面张力。对相质量方程求和可得 $\partial_t\rho + \nabla\cdot\boldsymbol{f} = 0$，其中的质量通量与动量输运中的质量通量完全一致。对体积分数方程求和可保持 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$。将物质对流写成通量形式时会产生体积分数源项。在有限散度下，该 formulation 可保持相质量守恒，同时允许相体积发生变化。

压力方程使等温弱可压缩模型闭合。将压力按 $\rho_0 {U^2}_{\mathrm{ref}}$ 缩放，并取参考密度为 ρ_0，可得到一个与 ${M^{-2}}_{\mathrm{ref}}$ 成正比的系数，其中 $M_{\mathrm{ref}} = U_{\mathrm{ref}}/c$。在压力演化有界且密度为正的情况下，小-$M_{\mathrm{ref}}$ 平衡会使速度散度相应地较小。我们采用有限人工马赫数和 EPP 松弛来计算此类流动。

$$\tau_{ab} = \mu\left(\partial_b u_a + \partial_a u_b - \frac{2}{3}\delta_{ab}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right), \qquad \mu = \mu_1\phi + \mu_2(1-\phi). \tag{4}$$

输入量 μ_ℓ 为动力粘度。系数 $2/3$ 在二维计算中予以保留，这对应于面外速度为零的三维本构定律。

2.2. 有限界 *ACDI* 界面正则化

对于两相计算，我们采用 Hatashita 和 Jain [20]提出的有限界面厚度 ACDI 正则化。纯相极限分别表示为 $\delta = 10^{-8}$ 和 $1-\delta$。令 $s = 1-2\delta$ 并初始化 $\phi = \delta + s\chi$，其中 $\chi \in [0,1]$。ACDI 辅助距离和法向量为

$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon\log\frac{\phi-\delta}{1-\phi-\delta}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}, \\ \boldsymbol{a}_1 &= \Gamma\left[\epsilon s\nabla\phi - \frac{s^2}{4}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\psi}{2\epsilon}\right)\boldsymbol{n}\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

宽度 ϵ 和正则化速度 Γ设定了扩散–锐化平衡。当 $|\nabla\psi| = 1$时，符号距离剖面 $\phi = \delta + \frac{s}{2}[1 + \tanh(\psi/(2\epsilon))]$ 使这些项达到平衡。辅助变量根据当前相分数计算，而不会作为另一个未知量进行输运。

计算对数时使用临时参数，并将其限制在 $[0, s]$ 范围内，同时在分子和分母中加上 $\eta = 10^{-100}$ 。这定义了

在有限纯相极限处的对数，且不修改存储字段。当梯度为零时，法向量设为零。在极限 $\delta \to 0$ 下，式 (5) 恢复标准的 ACDI 剖面关系 [17]。

2.3. 共置有限体积网格上的共享面通量

该方法始终采用中心空间离散：输运采用对称面插值，黏性项和压力导数采用中心差分，ACDI 和毛细力采用中心格式。所有主变量均存储于笛卡尔网格单元中心。设 V_i 为单元体积，S_f 为面面积，$s_{if} = \pm 1$ 为面 f 相对于单元 i的向外方向。相邻网格单元共享同一个面通量。有限体积散度和面算术平均为

$$(Dq)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{f \in \partial i} s_{if} S_f q_f, \qquad \overline{q}_f = \frac{q_L + q_R}{2}. \tag{6}$$

对于单位法向量为 $\boldsymbol{e}_f$ 且间距为 h的面，中心格式的 ACDI 正则化为

$$A_{1,f} = \Gamma \left[\epsilon s \frac{\phi_R - \phi_L}{h} - \frac{s^2}{4} \operatorname{sech}^2\!\left(\frac{\psi_L + \psi_R}{4\epsilon} \right) \overline{\boldsymbol{n}}_f \cdot \boldsymbol{e}_f \right], \qquad A_{2,f} = -A_{1,f}. \tag{7}$$

单元法向量采用 ψ的中心梯度计算，并在面处使用其算术平均。法向对流速度记为 U_f。体积通量和质量通量为

$$F_{\alpha_\ell,f} = \overline{\alpha_\ell}_f U_f - A_{\ell,f}, \qquad F_{m_\ell,f} = r^H_{\ell,f} F_{\alpha_\ell,f}, \qquad F_{m,f} = F_{m_1,f} + F_{m_2,f}. \tag{8}$$

$$r^H_{\ell,f} = \frac{2 r_{\ell,L} r_{\ell,R}}{r_{\ell,L} + r_{\ell,R}} = \frac{2}{\alpha_{\ell,L}/m_{\ell,L} + \alpha_{\ell,R}/m_{\ell,R}}. \tag{9}$$

此处 $r_{\ell,L}$ 与 $r_{\ell,R}$ 是面 f 两侧相邻两个网格单元中同一相 ℓ 的本征密度。方程 (9) 在互换 L 与 R 时保持对称，因而保留中心格式的相质量通量。调和平均密度也曾用于保持压力平衡的可压缩欧拉格式[19]。在本表述中，该平均值通过式 (8) 将独立演化的相体积与相质量联系起来，其中包括 ACDI 输运。其

流出质量的界与逆密度输运恒等式在第 3.2 节中导出。

$$\dot{\alpha}_{\ell,i} = -(DF_{\alpha_\ell})_i + \alpha_{\ell,i}\theta_i, \qquad \dot{m}_{\ell,i} = -(DF_{m_\ell})_i, \qquad \theta_i = (DU)_i. \tag{10}$$

仅存储 α_1；$\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ 提供互补方程。动量对流通量和输运预测器中非压力部分为

$$\boldsymbol{F}_{M,f} = F_{m,f}\overline{\boldsymbol{u}}_f, \qquad \boldsymbol{R}_M = -D\boldsymbol{F}_M + D\boldsymbol{\tau} + \rho\boldsymbol{g}. \tag{11}$$

密度和动量更新使用相同的实际质量通量。乘以对称的单元速度平均值后，对流动能抵消便不再依赖相体积通量的具体形式。因此，输运恒等式包含了界面正则化导致的质量再分配。

2.4. 黏性力和毛细力

变黏度的处理与所近似的导数保持一致。在垂直于方向 d 的面上，令 $\delta_d u_a = (u_{a,\ R} - u_{a,\ L})/h$，并令 D_a^c 表示中心单元导数。面散度中使用的应力分量为

$$\begin{aligned} \tau_{ad,f} &= \overline{\mu}_f\, \delta_d u_a + \overline{\mu D_a^c u_d}_f, && a \neq d, \\ \tau_{dd,f} &= 2\overline{\mu}_f\, \delta_d u_d - \frac{2}{3}\left(\overline{\mu}_f\, \delta_d u_d + \sum_{b \neq d} \overline{\mu D_b^c u_b}_f \right). \end{aligned} \tag{12}$$

法向导数使用面黏度算术平均。横向导数使用黏度加权单元导数的算术平均。对于恒定黏度，这些形式可简化为通常的中心应力。分子应力和亚格子尺度应力的横向平均中均保留 μ 的位置。在附录 B 所考虑的周期性设置下，这将得到一个对称耗散算子。

表面张力由连续表面力（连续表面力） [21]表示。对于曲率，首先在每个面上计算 ψ 的梯度：其法向分量采用相邻单元差分，其切向分量采用中心单元导数的平均值。对该面梯度进行归一化得到

$\boldsymbol{n}_f^\sigma$，以及 $\kappa_i = -[D(\boldsymbol{n}_f^\sigma \cdot \boldsymbol{e}_f)]_i$。在 $\chi = (\phi - \delta)/s$下，面上的法向力为

$$f_{\sigma,d,f} = \sigma\overline{\kappa}_f \frac{\phi_R - \phi_L}{sh}, \qquad f_{\sigma,d,i} = \frac{1}{2}\left(f_{\sigma,d,i+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_d} + f_{\sigma,d,i-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_d}\right). \tag{13}$$

单元动量增量为 $\Delta t \boldsymbol{f}_{\sigma,\,i}$。在除以密度之前对面力取平均，可使力的施加位置与单元动量更新保持一致。表面张力在单独的显式阶段施加，其有限动能变化也计入能量预算。附录 E 对由此产生的压力-毛细平衡和寄生流进行了评估。

2.5. 输运预测器与兼容的显式压力松弛

时间推进完全显式。每个物理时间步包括一个显式输运预测器、存在表面张力时单独进行的毛细更新，以及固定次数的局部压力松弛迭代。步开始时的压力梯度纳入预测步，最终的压力增量对动量进行一次修正。这一序列将压力与中心输运耦合，而无需进行隐式压力或速度求解。

令 $q = (\phi,\ m_1,\ m_2,\ \boldsymbol{M})$，并令 $L(q;\ U^n,\ p^n)$ 包含相方程和动量右端项 $\boldsymbol{R}_M - G_c p^n$，其中 $\boldsymbol{R}_M$ 由式（11）定义。因此，步开始时的压力在整个动量预测过程中均发挥作用。在三阶段保强稳定性保持（SSP）龙格-库塔（RK）更新 [22]期间，物理单元的压力值和平流面速度U^n 保持不变:

$$\begin{aligned} q^{[1]} &= q^n + \Delta t L(q^n; U^n, p^n), \\ q^{[2]} &= \frac{3}{4}q^n + \frac{1}{4}\{q^{[1]} + \Delta t L(q^{[1]}; U^n, p^n)\}, \\ q^{\mathrm{tr}} &= \frac{1}{3}q^n + \frac{2}{3}\{q^{[2]} + \Delta t L(q^{[2]}; U^n, p^n)\}. \end{aligned} \tag{14}$$

每个阶段都会计算相通量、本征密度、动量通量中的单元速度以及应力。我们用 q^{tr} 表示预测步状态，并设定 $\rho^* = m_1^{\mathrm{tr}} + m_2^{\mathrm{tr}}$。在这些阶段中纳入已有的压力作用力，可将压力支撑的运动与输运耦合起来。随后通过压力松弛得到更新该作用力所需的增量。预测步之后只进行一次压力迭代。

定义 A 为将单元速度算术插值为面法向速度的算子，$D_c = DA$；定义 G_c 为中心格式的单元压力梯度。对于均匀周期性

网格，在单元体积内积 $\langle a,\ b\rangle_V = \sum_i V_i a_i \cdot b_i$ 下，$G_c = -D_c^{\dagger}$。首先使用入射面速度演化压力：

$$p^{(0)} = p^n - \rho^* c^2 \Delta t\, DU^n. \tag{15}$$

存在表面张力时，毛细阶段给出 $\boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{M}^{\mathrm{tr}} + \Delta t \boldsymbol{f}_\sigma$；否则给出 $\boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{M}_{\mathrm{tr}}$。压力松弛过程中，$\rho^*$、$\phi^{\mathrm{tr}}$ 和 $\boldsymbol{M}^*$保持不变。给定压力增量 $\pi = p - p^n$，试探速度为

$$\pi = p - p^n, \qquad \boldsymbol{u}(p) = \frac{\boldsymbol{M}^* - \Delta t G_c \pi}{\rho^*}, \qquad U(p) = A\boldsymbol{u}(p). \tag{16}$$

$$p^{(r+1)} = p^{(r)} - \rho^* c^2 \Delta t\, DU(p^{(r)}), \qquad r = 0, \ldots, N_p - 1. \tag{17}$$

根据式（15），我们再进行 $N_p = 20$ 次迭代。每次迭代都会更新压力边界值，并根据相同的预测动量和当前压力增量计算试探速度。随后将得到的增量仅应用于动量一次：

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^{(N_p)}, \qquad \boldsymbol{M}^{n+1} = \boldsymbol{M}^* - \Delta t G_c (p^{n+1} - p^n), \\ \boldsymbol{u}^{n+1} &= \frac{\boldsymbol{M}^{n+1}}{\rho^*}, \qquad U^{n+1} = A\boldsymbol{u}^{n+1}. \end{aligned} \tag{18}$$

因此，下一输运步使用的面通量与修正后的单元动量相对应。每次压力松弛更新都根据前一次压力试算值计算其右端项；迭代索引并不代表额外的物理时间步。固定的迭代次数不会引入隐式求解或椭圆收敛容差。分布式执行时，每次迭代都会交换相邻单元的压力数据。该算子配对的动能解释和步长条件将在第 3.3 节中推导。

2.6. 时间步、边界条件与单相极限

显式更新受声学、界面正则化、黏性和毛细时间步限制约束。对于网格间距 h，时间步选择为

$$\Delta t \le \min\left\{ \frac{C_a h}{U_{\max} + c},\quad \frac{C_d h^2}{\Gamma \epsilon},\quad \frac{C_d h^2}{\nu_{\max}},\quad C_\sigma \sqrt{\frac{\min_\ell \rho_\ell^0 h^3}{\pi \sigma}} \right\}. \tag{19}$$

不含扩散或表面张力的项将被省略。这里， $U_{\max}$是最大的绝对单元或面速度分量， $\nu_{\max}$ 是计算得到的最大扩散率，其中包括三维情况下的亚格子黏度。第 6 节和第 7 节的二维基准算例采用 $C_d = C_\sigma = 0.1$ 和 $C_a = 0.1$，但 $C_a = 0.3$的方腔除外。均匀各向同性湍流计算采用（C_a，C_d）=（0.2，0.08），三维溃坝采用（C_a，C_d，C_σ）=（0.1，0.08，0.1）。除这些界限外，还会额外应用规定的时间步上限。

龙格-库塔阶段的作用可通过周期网格上的常系数对流看出。中心差分会得到虚特征值 $\mathrm{i}\omega$，而式 (14) 的稳定性多项式 $R(z) = 1 + z + z^2/2 + z^3/6$ 满足 $|R(\mathrm{i}\omega\Delta t)| \le 1$，当 $|\omega\Delta t| \le \sqrt{3}$ 时成立。因此，中心输运无需添加迎风耗散通量即可显式推进。这一线性限制与式 (19) 中的扩散和毛细约束相辅相成；变密度压力迭代还需满足式 (30) 中的独立条件，而相质量正性则在第 3.2 节讨论。中心格式与 WENO3-JS 的比较采用相同的时间步策略（第 4.1 节）。

在第 6 节和第 7 节的二维基准测试中，参考人工马赫数为 0.02；在三维溃坝测试中则为 0.03。剪切层和方腔采用 $c = 50$。对于气泡和二维溃坝，$c = \max(U_{\mathrm{ref}}/0.02, U_{\max}/0.02)$。三维溃坝采用 $c = \max(U_{\mathrm{ref}}/0.03, 1.1U_*/0.03)$，其中 U_* 是 $U_{\max}$ 和最大单元速度大小中较大者。正则化速度为 $\Gamma = \gamma_\Gamma U_{\max}$，其问题相关系数见表 2。这些声速控制数值压力演化；它们并非用于声波预测的物理声速。

周期边界在相对的面之间共享通量。在固壁处，法向相体积通量和相质量通量均为零，并对速度施加指定的无滑移或滑移条件。相分数的法向梯度为零，对应于中性润湿。压力虚拟值满足静水法向梯度 $\partial_n p = \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{n}$；当不存在法向重力时，该条件简化为齐次诺伊曼条件。在预测步中，虚拟值使用当前阶段的密度，而p^n 的内部值保持不变。每个阶段开始前，都以一致的方式施加动量和速度边界值。

单相计算采用 $\phi = 1$、$m_1 = \rho$ 和 $m_2 = 0$。省略相分数方程和界面正则化项，质量通量为 $F_{m,\,f} = \rho_f U_f$。因此，单相格式采用流体密度的算术

平均值，而双相格式对每种本征相密度采用公式 (9)。两者采用相同的中心动量通量和 EPP 更新。双相公式适用于二维和三维空间维度。

3. 离散输运与压力性质

以下分析将阐明该方法三个主要组成部分的性质。中心动量输运可抵消对流造成的动能数值产生和耗散。密度的调和插值可限制相质量流出，并满足逆密度输运恒等式，同时不影响这一抵消性质。相容压力算子可为连续松弛迭代给出条件能量估计。第 4.2 节随后将算子功与有限阶段能量变化结合，得到用于数值测试的能量收支。

3.1. 守恒输运与对流动能抵消

共享每个面通量可使两个相质量右端项的单元求和均呈望远镜式消去。因此，在周期性边界或不可渗透边界条件下，相积分守恒，浮点累积误差除外。同样的论证也表明，动量对流是守恒的。动能的额外性质源于动量通量中使用的速度。

$$K = \sum_i V_i \frac{|\boldsymbol{M}_i|^2}{2\rho_i}, \qquad \dot{K} = \sum_i V_i \left(\boldsymbol{u}_i \cdot \dot{\boldsymbol{M}}_i - \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_i|^2 \dot{\rho}_i \right). \tag{20}$$

对于一个从 L 指向 R 的内部面，其对流贡献为

$$\dot{K}_f = S_f F_{m,f} \left[(\boldsymbol{u}_R - \boldsymbol{u}_L) \cdot \overline{\boldsymbol{u}}_f - \frac{|\boldsymbol{u}_R|^2 - |\boldsymbol{u}_L|^2}{2} \right] = 0. \tag{21}$$

这一面通量恒等式采用公共质量通量和速度算术平均值。它消除了空间对流造成的动能数值产生和数值耗散，无需假设速度无散，也不要求采用特定的密度平均值。尤其是，调和相密度插值与相方程中使用的相同 ACDI 质量输运相结合时，仍保留这一恒等式。分子应力和非负涡黏性应力仍发挥耗散作用，如附录 B 所示。压力、表面张力、重力和有限时间增量分别对

耦合能量平衡产生贡献。第 4.2 节对这些贡献进行了测量，从而能够在其他条件相同的情况下识别迎风动量重构的影响。

3.2. 调和相密度：流出界与逆密度恒等式

当某一相仅占据单元中很小一部分时，比值 $r_\ell = m_\ell/\alpha_\ell$ 可能产生很大的局部差异。因此，算术本征密度均值 $r^{A}_{\ell,\,f} = (r_{\ell,\,L} + r_{\ell,\,R})/2$会将相邻单元中的较大密度带入低密度单元的流出质量通量中。相反，调和平均满足 $0 < r^{H}_{\ell,\,f} \le 2r_{\ell,\,i}$，适用于任一具有正本征密度的相邻单元。这是该平均值的一种对称性质，与输运方向无关。

为了将这个面上的界与一次显式更新联系起来，定义在 Δt 期间向外输运的单元相体积比例为

$$C_{\alpha_\ell,i} = \frac{\Delta t}{V_i \alpha_{\ell,i}} \sum_{f\in\partial i} S_f \max(s_{if} F_{\alpha_\ell,f}, 0). \tag{22}$$

对于输入 m_ℓ 和 α_ℓ均为正的前向欧拉 (FE) 质量更新，流入项均非负。利用调和密度的上界 $2r_{\ell,\,i}$ 可得

$$\begin{aligned} m^{\mathrm{FE}}_{\ell,i} &\ge m_{\ell,i} - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{f} S_f \max(s_{if} F_{\alpha_\ell,f}, 0)\, 2r_{\ell,i} \\ &= m_{\ell,i}(1 - 2C_{\alpha_\ell,i}). \end{aligned} \tag{23}$$

因此，$C_{\alpha_\ell,\,i} < 1/2$ 是保证前向欧拉更新中相质量为正的充分条件。由于式 (14) 是这些更新的凸组合，只要每个组成阶段均满足该条件且相分数为正，就能保持正性。这里 $C_{\alpha_\ell,\,i}$ 使用实际的相体积通量，包括 ACDI 正则化。有限速度散度会影响该通量以及不断演变的相分数，但不会在守恒相质量更新中引入源项。第8.2节将这一充分条件与溃坝过程中测得的各阶段最小值进行比较。

另一个半离散恒等式说明了为何调和平均适用于独立演化的相体积和相质量。考虑一个逆密度泛函：当相质量趋近于零而相体积保持有限时，该泛函会增大：

$$\mathcal{B}_\ell = \sum_i V_i \frac{\alpha_{\ell,i}^2}{m_{\ell,i}} = \sum_i V_i \frac{\alpha_{\ell,i}}{r_{\ell,i}}. \tag{24}$$

调和平均满足 $r_{\ell,\,f}^{H}(1/r_{\ell,\,L} + 1/r_{\ell,\,R}) = 2$。将这一关系代入对式（24）求导后得到的内部面贡献，可得

$$S_f F_{\alpha_\ell,f} \left(\frac{1}{r_{\ell,R}} - \frac{1}{r_{\ell,L}} \right) \left[2 - r_{\ell,f}^{H} \left(\frac{1}{r_{\ell,L}} + \frac{1}{r_{\ell,R}} \right) \right] = 0. \tag{25}$$

这一抵消特性具体源于调和本征密度插值。采用算术平均时，式（25）中的方括号变为$-(r_{\ell,\,R} - r_{\ell,\,L})^2/(2r_{\ell,\,L}r_{\ell,\,R})$，当相邻密度不相等时该项非零。因此，尽管对流动能恒等式与密度平均值无关，逆密度恒等式却本质上使用了调和平均。在周期性或无通量边界条件下对所有网格单元求和，因而得到

$$\frac{d\mathcal{B}_\ell}{dt} = 2 \sum_i V_i \frac{\alpha_{\ell,i}}{r_{\ell,i}} \theta_i. \tag{26}$$

调和插值抵消了完整相体积通量的内部面贡献，包括界面正则化，仅留下有限散度源项。无需假设 $\theta = 0$ 。因此，即使本征密度在界面两侧发生变化，采用调和平均的输运也不会改变 $\mathcal{B}_\ell$。其演化由解析压缩和膨胀所控制。该恒等式描述了空间输运结构；式（23）则给出了有限显式阶段内对质量损失的相应控制。

对于光滑的正本征密度，该平均仍然是中心格式的二阶面近似。事实上，

$$r_f^H - r_f^A = -\frac{(r_R - r_L)^2}{4 r_f^A}. \tag{27}$$

因此，对于常值本征密度，这两种平均具有相同的线性化；对于光滑数据，二者相差 $O(h^2)$。因此，该稳健性机制与中心输运设计相兼容。第8.2节通过匹配计算，检验了该机制在三维溃坝问题中的表现。

3.3. 压力松弛的动能行为

接下来，我们考察局部压力迭代的动能响应。压力更新使用修正动量的单元梯度，以及其插值速度的散度。与第2.5节的松弛阶段一样，在均匀周期网格上固定预测动量 $\boldsymbol{M}^*$和正密度 ρ^* 。此时，试探速度的动能是压力增量 $\pi = p - p^n$的二次函数：

$$\mathcal{K}(\pi) = \frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{M}^* - \Delta t G_c \pi, R^{-1}(\boldsymbol{M}^* - \Delta t G_c \pi)\right\rangle_V, \qquad R = \mathrm{diag}(\rho^*). \quad (28)$$

伴随关系给出 $\nabla_\pi \mathcal{K} = \Delta t D_c \boldsymbol{u}(p)$。取 $B =$diag$(\rho^* c^2)$ 后，因此每次额外迭代都是预条件下降步

$$\pi^{(r+1)} = \pi^{(r)} - B\nabla_\pi \mathcal{K}(\pi^{(r)}). \quad (29)$$

$$\lambda_{\max}\left(\Delta t^2 B^{1/2} G_c^\dagger R^{-1} G_c B^{1/2}\right) < 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{K}(\pi^{(r+1)}) \le \mathcal{K}(\pi^{(r)}). \quad (30)$$

附录 A 中的推导指出，声学步和密度分布如何影响这一条件。在满足该条件时，每次额外迭代都会降低或保持前一次试探速度的动能不变。这确立了相容压力算子的能量控制性质，其中包括非均匀正密度。这里比较的是同一预测状态下连续两次压力试探。物理时间层之间的变化还包括预测压力功以及式 (15) 中的初始压力更新；其通过第 4.2 节中的完整能量预算进行评估。

4. 验证设计与全离散能量预算

4.1. 匹配重构比较与参考问题

评估结合了受控能量测试、不可压缩参考问题和大变形基准测试。无黏均匀各向同性湍流（HIT）测试了单相和两相流中的中心格式对流，并隔离了压力—输运耦合。周期剪切层将能量损失与涡旋输运联系起来，而方腔则将壁面约束速度剖面与不可压缩参考数据进行比较。上升气泡用于测试毛细作用和

浮力变形。随后，二维和三维溃坝测试考察了冲击、卷吸、相质量稳健性，以及显式亚格子尺度模型下的能量传递路径。

为量化消除迎风动量耗散的益处，我们构造了一种对比格式，仅将式（11）中的中心速度 $\boldsymbol{u}_f$替换为采用 Jiang–Shu（JS）非线性权重 [23]的三阶加权本质无振荡（WENO）重构。该对比格式记为 WENO3-JS；所提出的方法始终采用中心重构。$F_{m,\ f}$ 的符号决定 WENO模板的选取，具体说明见附录C。两种计算采用相同的相输运、EPP、分子应力、表面张力、时间步策略和亚格子尺度模型。因此，测得的对流功差异可归因于动量重构。第5.4节和第8.2节中的算术/调和平均比较评估了相质量通量中本征密度均值的选取。

表1：物理参数。成对数值分别对应相1和相2；单相行列出唯一流体的参数值。黏度均为动力黏度，两相基准算例的量纲参数采用国际单位制。

问题	ρ_1, ρ_2	μ_1, μ_2	g_y	σ
单相均匀各向同性湍流	1	0	0	0
两相 HIT	1000, 1	0, 0	0	0
单相剪切层	1	0 或 10^{-4}	0	0
空腔	1	$1/Re$	0	0
两相剪切层	100, 1	$10^{-2}, 10^{-4}$	0	0
气泡A	1000, 100	10, 1	-0.98	24.5
气泡B	1000, 1	10, 0.1	-0.98	1.96
二维溃坝	1000, 1	$10^{-3}, 1.8\times10^{-5}$	-9.81	0
三维溃坝	1000, 1	$10^{-3}, 1.8\times10^{-5}$	-9.8	0.0728

动能采用实际混合物密度进行计算，其中 $K_0 = K(0)$ 表示其初始值。在周期性二维测试中，拟涡能为 $Z = \frac{1}{2}\sum_i V_i \omega_{z,i}^2$，其中 $\omega_z = \partial_x v - \partial_y u$ 采用中心差分计算。速度散度按下式计算

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{u})_i = \frac{1}{V_i} \sum_{f \in \partial i} s_{if} S_f U_f. \tag{31}$$

表 2：界面和时间积分参数。 n 表示 HIT 中每个方向的网格单元数，以及剪切层测试中每单位长度的网格单元数。列出的 Δt 值为时间步上限。所有算例均使用额外的 20 次压力迭代。

问题	ϵ/h	γ_Γ	Δt
HIT，$n = 64,\ 128$	0.51（两相）	1.0192	$2 \times 10^{-5}(64/n)$
单相剪切层	–	–	5×10^{-6}（$128/n$）
空腔，$Re = 1000$，5000	–	–	自适应
两相剪切层	0.51	1.0192	5×10^{-6}
气泡A/B	0.6792465	4.368	自适应
二维溃坝	0.6792465	1.0192	自适应
三维溃坝	0.51	1.0192	自适应

积分诊断采用单元体积权重。参考误差在已公布的采样位置处计算，或通过对模拟历程线性插值至参考时刻来计算。相对离散 L_2 差分为

$$e_2(q) = \left[\frac{\sum_k (q_k - q_k^{\mathrm{ref}})^2}{\sum_k (q_k^{\mathrm{ref}})^2} \right]^{1/2}. \tag{32}$$

4.2. 算子功与有限阶段能量变化

我们使用式（20）根据输运质量和动量计算动能。在每个预测阶段，均在龙格-库塔组合之前测量每个方程右端项的贡献。对流功率为

$$P_{\mathrm{adv}} = \sum_i V_i \left[\boldsymbol{u}_i \cdot (-D\boldsymbol{F}_M)_i - \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}_i|^2 (-DF_m)_i \right]. \tag{33}$$

对于周期边界，同一数量的面表示为

$$P_{\mathrm{adv}} = \sum_f S_f F_{m,f} (\boldsymbol{u}_R - \boldsymbol{u}_L) \cdot \left(\boldsymbol{u}_f^M - \overline{\boldsymbol{u}}_f \right). \tag{34}$$

动量输运速度 $\boldsymbol{u}_f^M$在中心格式中取算术平均，在 WENO3-JS 中取重构速度。界面正则化输运通过公共质量通量 F_m纳入。对于一阶迎风动量输运，式 (34) 给出了一个与速度跳跃平方成正比的非正面贡献，而中心贡献

为零。对于非线性 WENO3-JS 重构，直接根据式 (34) 计算带符号的功。

分子黏度、亚格子尺度应力和重力由其各自的动量右端项计算。预测压力功率为

$$
\begin{aligned}
P_{p,\mathrm{RK}}^{[s]} &= \sum_i V_i \boldsymbol{u}_i^{[s]} \cdot (-G_c p^n)_i, \\
W_j^n &= \Delta t \sum_{s=0}^{2} b_s P_j^{[s]}, \quad (b_0, b_1, b_2) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

此处 $q^{[0]} = q^n$，且 j 表示对流、分子黏度、亚格子尺度应力、重力或预测压力。压力作用力是在每个阶段实际施加的力，包括边界延拓。在均匀周期网格上，伴随关系给出 $P_p^{[s]}{}_{,\mathrm{RK}} = \langle p^n, D_c \boldsymbol{u}^{[s]} \rangle_V$：其符号由压力与速度散度之间的相关性决定。输运时间残差是有限预测能量变化与其累积右端项功之差：

$$
R_{\mathrm{tr,time}}^n = K(q^{\mathrm{tr}}) - K(q^n) - W_{\mathrm{adv}}^n - W_\mu^n - W_{\mathrm{SGS}}^n - W_g^n - W_{p,\mathrm{RK}}^n. \tag{36}
$$

在最终压力修正时，密度固定，且 $\delta \boldsymbol{M}_p = -\Delta t G_c(p^{n+1} - p^n)$。其精确的有限动能变化为

$$
\Delta K_{p,\mathrm{corr}}^n = \sum_i V_i \left[\frac{\boldsymbol{M}_i^* \cdot \delta \boldsymbol{M}_{p,i}}{\rho_i^*} + \frac{|\delta \boldsymbol{M}_{p,i}|^2}{2\rho_i^*} \right]. \tag{37}
$$

就第 3.3 节而言，该修正为 $\Delta K_{p,\mathrm{corr}}^n = \mathcal{K}(\pi^{(N_p)}) - \mathcal{K}(0)$，而式 (30) 比较从 $\pi^{(0)} = p^{(0)} - p^n$ 开始的连续迭代。物理步上的完整压力贡献是预测器功与最终校正之和：

$$
W_{p,\mathrm{total}}^n = W_{p,\mathrm{RK}}^n + \Delta K_{p,\mathrm{corr}}^n. \tag{38}
$$

毛细贡献 ΔK_σ^n 同样是 CSF 阶段前后的测得能量差。对各时间步求和可得

$$
\begin{aligned}
K(t) - K(0) = {} & W_{\mathrm{adv}} + W_\mu + W_{\mathrm{SGS}} + W_g \\
& + W_{p,\mathrm{RK}} + \Delta K_{p,\mathrm{corr}} + \Delta K_\sigma + R_{\mathrm{tr,time}} + \varepsilon_K.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

闭合残差 ε_K 验证了记录的更新的核算。项 $R_{\mathrm{tr,\ time}}$ 衡量预测步的离散能量链残差，此时已扣除所有力功。压力功可能为正，也可能为负；其总量及两个分量均按测得的符号报告。二维能量按单位深度计。三维溃坝初始时静止，因此其能量以焦耳报告。

OpenAI ChatGPT和Codex借助记录的模拟数据以及上述诊断定义，对数值结果进行了分析和可视化。

5. 无黏均匀各向同性湍流

5.1. 配置与比较设计

无黏均匀各向同性湍流测试用于评估在无分子黏度和亚格子尺度耗散的情况下，耦合输运与压力算法保留能量的能力。我们比较单相流和密度比为1000的两相流中的中心格式与WENO3-JS动量输运。两相配置遵循Hwang和Jain [18]的球形液滴测试。另有一组比较仅改变中心格式两相方法中的本征密度均值。

计算域为边长为 $2\pi L_0$的周期立方体，其中 $L_0 = 1$。初始速度的空间平均值为零，目标谱为

$$\begin{aligned} E(k) \propto k^4 \exp\left[-2\left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right], \qquad k_0 L_0 = 4, \\ U_0 = \sqrt{\frac{\langle |\boldsymbol{u}(0)|^2 \rangle}{3}} = 1, \qquad t^* = \frac{t U_0}{L_0}. \end{aligned} \tag{40}$$

傅里叶速度模态被投影到离散波$\tilde{}$矢量 k_d =sin($k_d h$)/h 的垂直方向，并归一化至 $U_0 = 1$；零模态和奈奎斯特平面模态均予以省略。固定的伪随机实现（随机种子为20261118）为每种分辨率生成一个初始速度文件，供该网格上的所有比较共用。初始时， $p = 1$ ，且单相密度为 $\rho = 1$。两相算例在计算域中心加入半径为 L_0 的球形液滴，并采用$\rho_1^0/\rho_2^0 = 1000/1$ 以及第2.2节所述的有限界面剖面。液滴内外均保留初始速度。重力和表面张力均为零。

在 64^3 和 128^3 个网格单元上对比中心格式与 WENO3-JS，直至$t^* = 8$；两相情形采用调和平均。能量

收支和下方的界面可视化采用 128^3 个网格单元，并在同一网格上增加一个中心算术平均情形。所有情形均以 $c = 640$开始，并额外进行 20 次压力迭代。声速控制器的局部马赫数限制为 0.1，安全系数为 1.1；这些计算中，c 保持为 640。时间步上限和界面参数列于表 2。在每组对比中，初始场、压力处理、时间步策略和界面设置均相同。

5.2. 单相与两相流中的动能保持

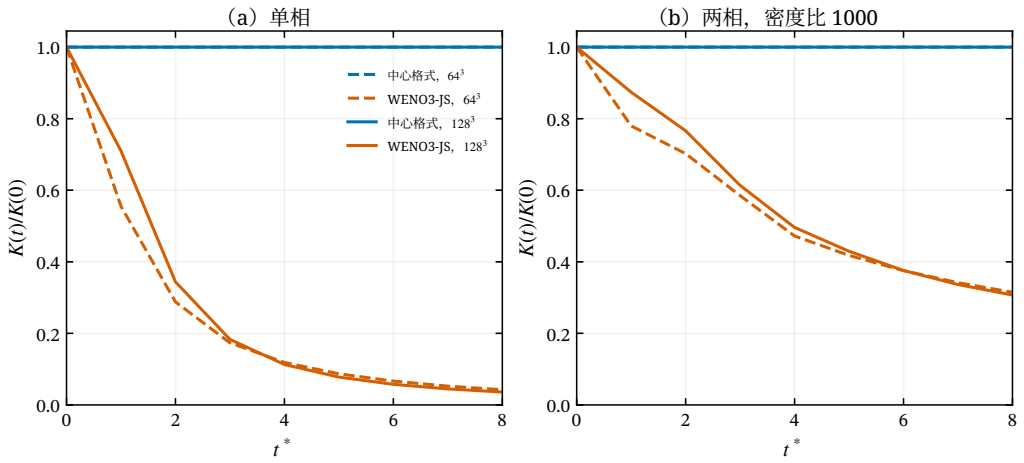


图1：无黏各向同性湍流中的归一化动能。(a) 单相；(b) 密度比为1000、采用本征密度调和平均的两相。实线表示 128^3 网格单元，虚线表示 64^3 网格单元。蓝色与橙色分别表示中心格式和WENO3-JS动量输运。每种情形均按其自身的 K_0归一化；两个子图共用相同的纵向刻度。

图1显示，在单相流和两相流中，中心格式的能量保持与迎风耗散之间存在明显差异。在 128^3 个网格单元、 $t^* = 8$时，中心方法的相对能量变化分别为 -7.47×10^{-8} 和-1.18×10^{-7}，而 WENO3-JS 保留了初始能量的 3.60% 和 30.72%。在 64^3 个网格单元上也存在相同差异：中心格式的能量变化幅度均不超过 2.2×10^{-7}，而 WENO3-JS 保留了初始能量的 4.24 % 和 31.49%。因此，消除迎风动量耗散，能在两种配置和两种网格上都大幅保留初始动能。

5.3. 对能量收支的对流贡献和压力贡献

表3将 128^3 能量变化分解为累积对流功、总压力功和输运时间残差。在所测能量变化的尺度下，中心格式的对流贡献可以忽略；而在单相流和两相流中，WENO3-JS分别通过对流损失了 K_0 的96.40%和69.28%。因此，在采用相同压力处理的情况下，动量重构解释了图1中的巨大差异。

表3： $t^* = 8$ 网格单元上的无黏各向同性湍流能量变化和累积功，并按各工况的 K_0归一化。SP和TP分别表示单相流和两相流；C和W分别表示中心格式和WENO3-JS输运；H和AR分别表示调和本征密度均值和算术本征密度均值。最后一行给出了第5.4节中的密度平均比较。

Case	$\Delta K/K_0$	W_{adv}/K_0	$W_{p,\mathrm{total}}/K_0$	$R_{\mathrm{tr,time}}/K_0$
SP C	-7.472×10^{-8}	2.780×10^{-20}	-7.461×10^{-8}	-1.037×10^{-10}
SP W	-9.640×10^{-1}	-9.640×10^{-1}	-3.941×10^{-8}	-6.799×10^{-13}
TP C H	-1.185×10^{-7}	-4.268×10^{-18}	-1.045×10^{-7}	-1.396×10^{-8}
TP W H	-6.928×10^{-1}	-6.928×10^{-1}	-2.643×10^{-8}	7.636×10^{-12}
TP C 算术平均	-1.201×10^{-7}	6.643×10^{-19}	-1.060×10^{-7}	-1.408×10^{-8}

对于中心格式情形，图 2 分别展示了预测压力功和最终增量修正。在两相流中，预测步的贡献为$+3.36\times10^{-7}K_0$，最终校正为 $-4.40\times10^{-7}K_0$。两者之和与输运时间残差共同解释了较小的净能量损失。 64^3 个网格单元上的净压力功为 $+2.27\times10^{-7}K_0$。与迎风平流损失相比，这一正贡献同样很小。第 3.3 节中的估算适用于预测步固定时连续进行的压力迭代；方程（37）–（39）则考虑了完整的物理步，包括预测压力功，其符号可能变化。

对于中心格式 128^3 单相和两相调和计算，最大归一化闭合残差分别为 3.81×10^{-16} 和 5.69×10^{-16}；相应的 WENO3-JS 数值分别为 4.05×10^{-12} 和 1.19×10^{-12}。中心格式情形下的最大局部马赫数分别低于 0.014 和 0.090。附录 D 中的另一项压力耦合比较固定了空间算子和声学设置。将已有压力纳入预测步，并仅施加最终增量，与在无压力预测器之后施加完整压力相比，可使能量变化幅值降低四个数量级以上。因此，压力耦合有助于在完整计算中保留中心输运的优势。

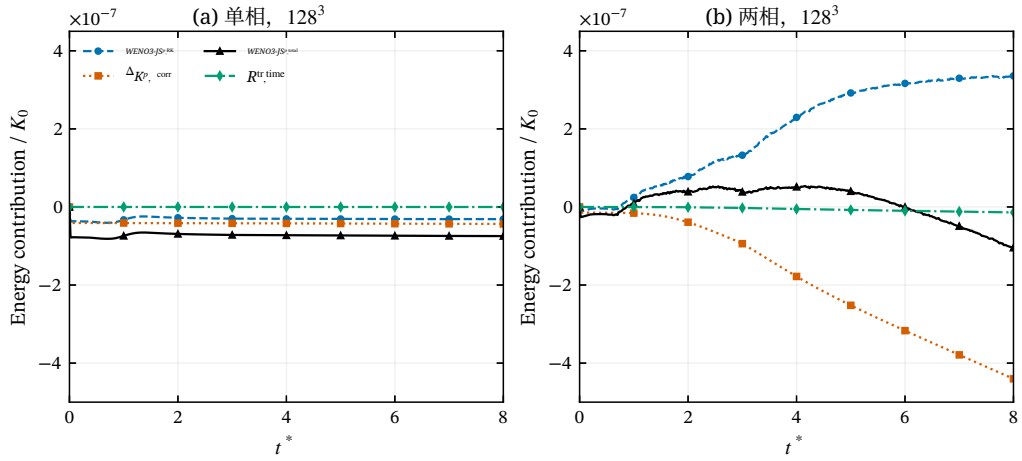


图2：中心格式均匀各向同性湍流在 128^3 网格单元上的能量预算贡献。预测压力功、最终压力增量修正、二者之和以及输运时间残差均按 K_0归一化。(a) 单相；(b) 采用调和平均的两相。两个面板使用相同的纵向刻度；连线连接采样值，标记位于整数时刻。

5.4. 两相计算中的本征密度平均

为单独考察密度平均值，我们比较初始数据、界面参数和压力设置均相同的中心格式 128^3 调和平均情形与算术平均情形。两者在保持正相质量的情况下均达到 $t^* = 8$。它们的相对动能变化分别为 -1.18×10^{-7} 和 -1.20×10^{-7}，且均保留了表3中的对流抵消。这些结果表明，调和相质量输运与保持动能的动量对流相容。更严格的相质量鲁棒性测试是第8.2节中的大变形溃坝问题，在该问题中，不同的密度平均值会导致不同结果。

图3展示了在 128^3 个网格单元上进行的同一中心格式调和平均计算中的界面演化。初始球体到 $t^* = 8$ 时发展出细长且碎裂的结构。因此，尽管界面发生了显著变形，动能净变化仍然很小。

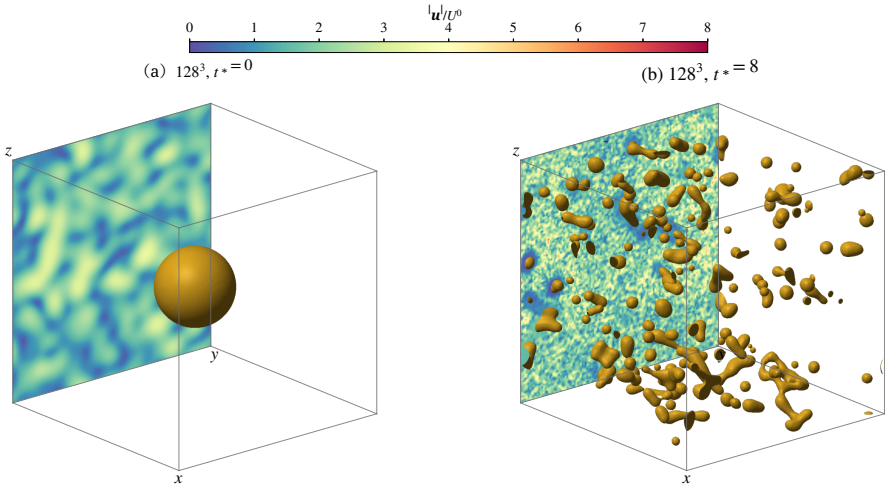


图3：采用本征密度调和平均的中心格式两相无黏各向同性湍流中， 128^3 网格单元上的界面演化。(a) $t^* = 0$；(b) $t^* = 8$。金色表面表示 $\phi = 0.5$；彩色 $x = 0$ 平面显示将单元速度矢量插值到网格点后得到的 $|\boldsymbol{u}|/U_0$ 。两个面板使用相同的视角和色标。

6. 单相验证

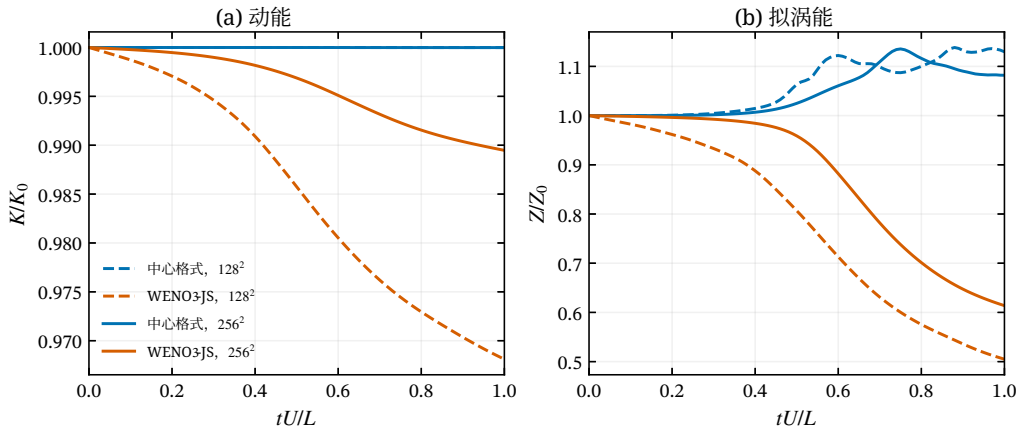
6.1. 双周期剪切层

双周期剪切层为研究涡旋输运提供了一个不受壁面功影响的可控测试。计算域为 $[0,1]^2$, ，初始密度为 $\rho = 1$，参考尺度为 $U = L = 1$。初始速度为

$$u(x,y) = \begin{cases} \tanh[80(y-0.25)], & y < 0.5, \\ \tanh[80(0.75-y)], & y \geq 0.5, \end{cases} \qquad v(x,y) = 0.05\sin[2\pi(x+0.25)]. \tag{41}$$

计算采用 128^2 和 256^2 个网格单元来 $tU/L = 1$，使用 $c = 50$ 和 $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$（$128/n$）。研究了无黏流和 $\nu = 10^{-4}$。中心格式与 WENO3-JS 的压力处理相同，因此无黏流对比能够单独考察动量重构对能量收支的影响。

图4和表4清楚地显示了两种输运算子之间的差异。在 128^2 个网格单元上，中心格式能量损失为 K_0的0.000889%，而WENO3-JS为3.18914%。中心对流功为



Fig图4：无黏单相剪切层：归一化动能和拟涡能。颜色ide表示动量重构，线型表示分辨率。

7.12×10^{-17}%的 K_0，而WENO3-JS通过对流损失了3.18838%。两者的总压力贡献分别为 -0.000889%和 -0.000754%。因此，在相同的EPP条件下，能量保持方面的巨大差异源于动量对流。

表4： $tU/L = 1$处的单相无粘能量收支，占 K_0的百分比； n 表示 n^2个网格单元。

方法， n	ΔK	W_{adv}	W_μ	$W_{p,\text{total}}$
中心格式，128	-0.000889	7.119×10^{-17}	0.000000	-0.000889
WENO3-JS ，128	-3.189138	-3.188×10^{0}	0.000000	-0.000754
中心格式，256	-0.000966	5.526×10^{-17}	0.000000	-0.000966
WENO3-JS ，256	-1.052334	-1.051×10^{0}	0.000000	-0.000885

在 256^2 个网格单元上，中心格式能量损失低于 K_0 的 0.001%，而 WENO3-JS 的能量损失为 1.05233%。网格细化会降低迎风损失，但其对流贡献仍比总压力贡献大三个数量级以上。因此，两种网格都表明，消除对流能量汇是有益的。

图 5 展示了能量损失差异对涡结构的影响。中心方法保留了紧密卷绕的剪切层和更强的涡量变化，而这些结构在迎风重构中会受到耗散。与总动能相比，拟涡能更能凸显不同方法之间的差异

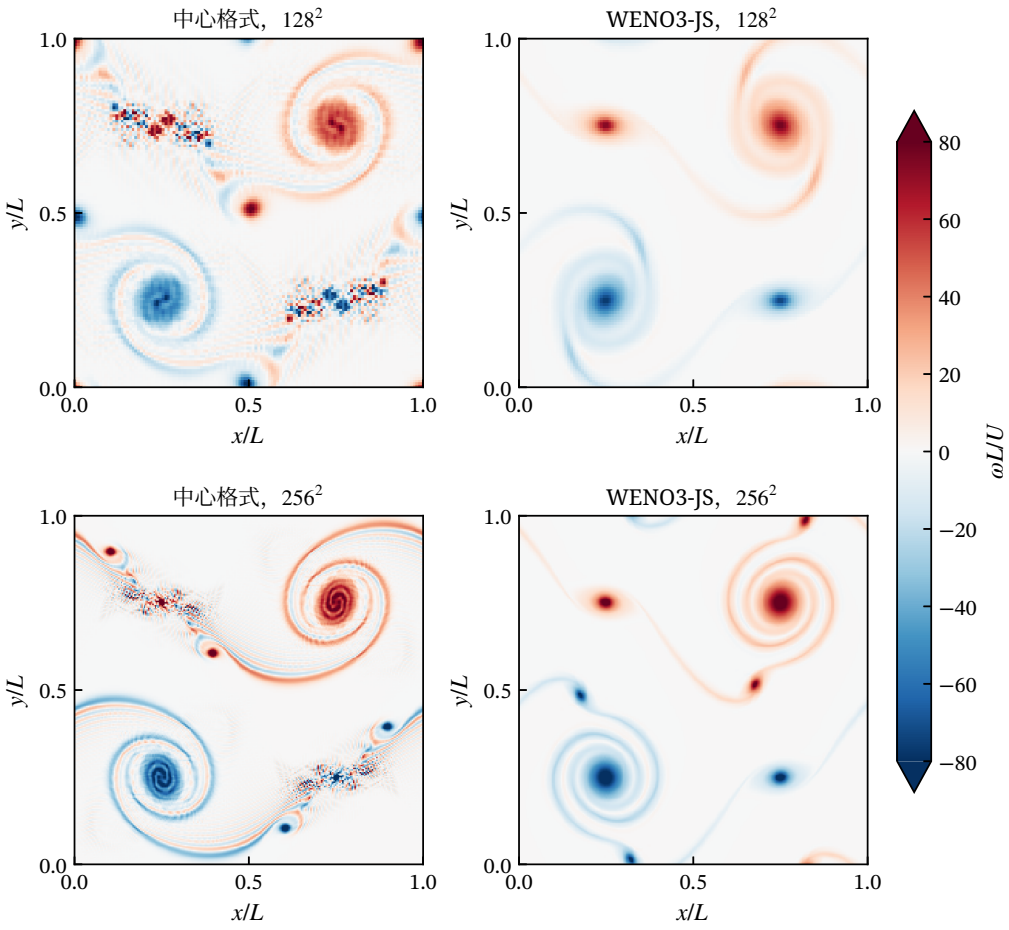


图5： $tU/L = 1$时刻的单相无黏涡量。行： 128^2 和 256^2；列：中心格式和WENO3-JS。所有子图均显示完整单位区域，并采用同一色标范围。

因为它对速度梯度进行加权。该无黏试验展示了输运性质及其对保留结构的影响；有限黏度算例则通过预设的物理耗散尺度提供互补的测试。

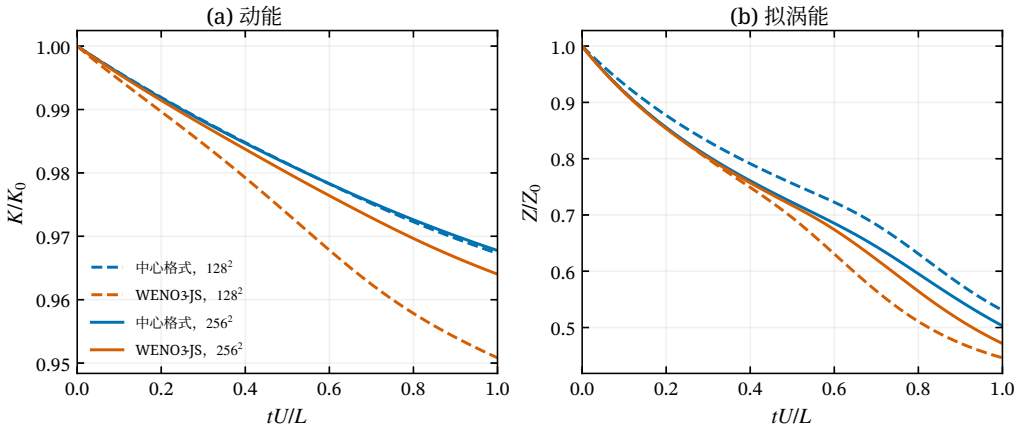


图6： $\nu = 10^{-4}$时的单相剪切层：归一化动能和拟涡能，采用与图4相同的重构和网格约定。

Ta表5： $tU/L = 1$ 和 $\nu = 10^{-4}$时的单相粘性能量收支，占 K_0的百分比 .

方法， n	ΔK	W_{adv}	W_{μ}	$W_{p,\mathrm{total}}$
中心格式, 128	-3.269966	2.552×10^{-11}	-3.269147	-0.000819
WENO3-JS , 128	-4.917211	-1.980×10^{0}	-2.936504	-0.000696
中心格式, 256	-3.224370	-1.372×10^{-10}	-3.223528	-0.000842
WENO3-JS , 256	-3.597175	-4.318×10^{-1}	-3.164519	-0.000811

图6和表5表明，中心输运在 $\nu = 10^{-4}$时仍能保持预设的黏性衰减。在 128^2 个网格单元上，分子黏度贡献了 K_0的3.26915%，而总压力贡献为 -0.000819%。WENO3-JS通过动量对流进一步消除了1.98001%，其黏性损失则为2.93650%。后者之所以发生变化，是因为同一应力算子作用于不同的解析梯度。因此，消除迎风耗散后，预设黏度便可通过保留下来的流场决定耗散。

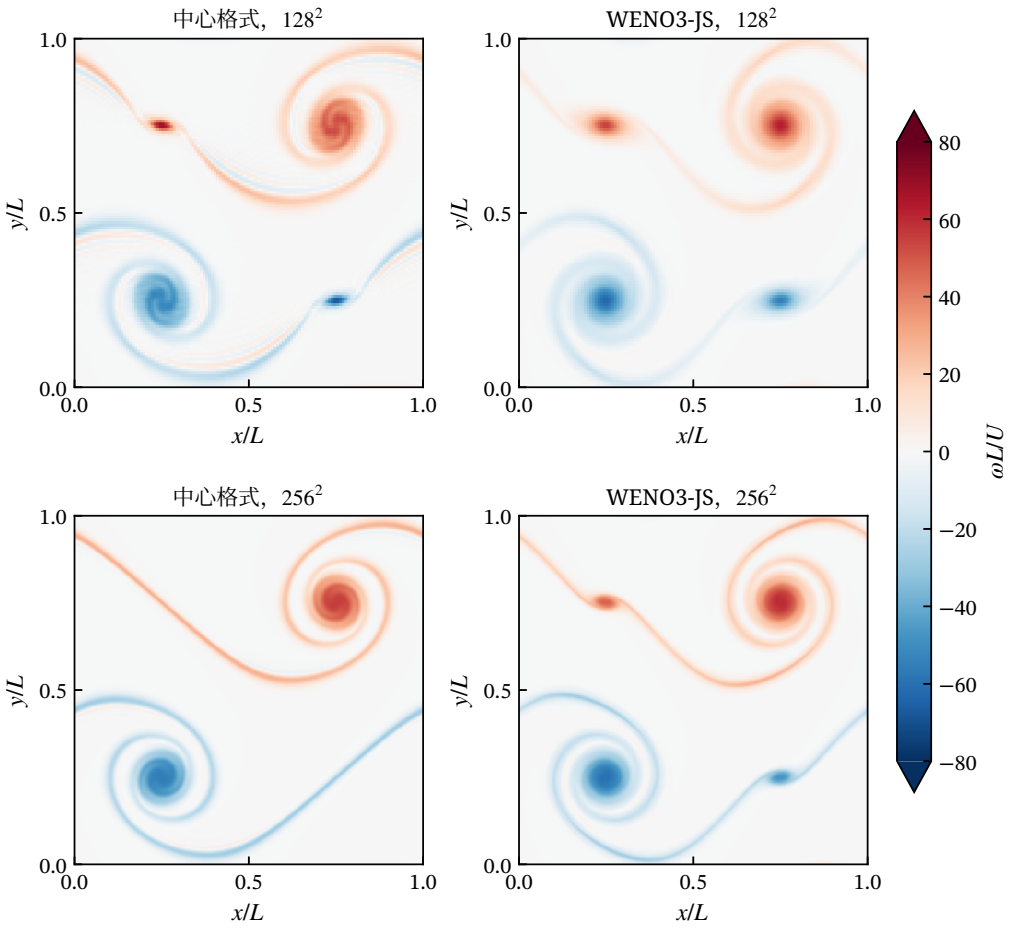


图7： $tU/L = 1$ 时、 $\nu = 10^{-4}$条件下完整单位区域上的单相涡量。四个面板均使用相同的色标范围。

图7中的涡量比较将能量收支与已解析剪切层联系起来。在分子黏度相同的情况下，中心格式对流比迎风重构保留了更陡峭的梯度。在 256^2 个网格单元上，中心格式黏性损失为 K_0 的3.22353%，总压力功为 -0.000842 %。WENO3-JS的平流损失降至0.431845%，但仍相当于其分子黏性损失的13.6%。因此，即使经过网格细化，输运耗散的差异仍然存在。

6.2. 顶盖驱动方腔

单位正方形方腔的顶盖速度为 $U = 1$ ，其他壁面均施加静止无滑移条件。采用 $\rho = 1$ 和 $\mu = 1/Re$，在 128^2 和 256^2 网格上计算 $Re = 1000$和5000这两种情况。图8将中心格式和WENO3-JS的速度剖面与Ghia 等人 [24]报告的每个分量17个采样点进行比较。

中心格式剖面再现了主要回流和近壁速度极值。在 $Re = 5000$处，网格细化使参考采样点处的最大绝对差异从 0.0307 降至 0.00874（ u/U ），并从 0.0271 降至 0.00899（ v/U）。因此，中心格式弱可压缩方法无需对动量输运进行迎风稳定化，便能捕捉到已确立的不可压缩环流。

以间隔一个对流时间的输出为基准监测速度变化，使用 max $|\Delta u_a|L/(U^2\Delta t_{\mathrm{out}})$，阈值为 10^{-6}。所有八组中心格式和 WENO3-JS 计算均满足这一标准。在相同的网格、压力和黏度设置下，WENO3-JS 剖面也逐渐接近参考解；在 256^2 个网格单元上、 $Re = 5000$ 处的最大绝对差异为 0.0109（ u/U ）和 0.0102（ v/U）。

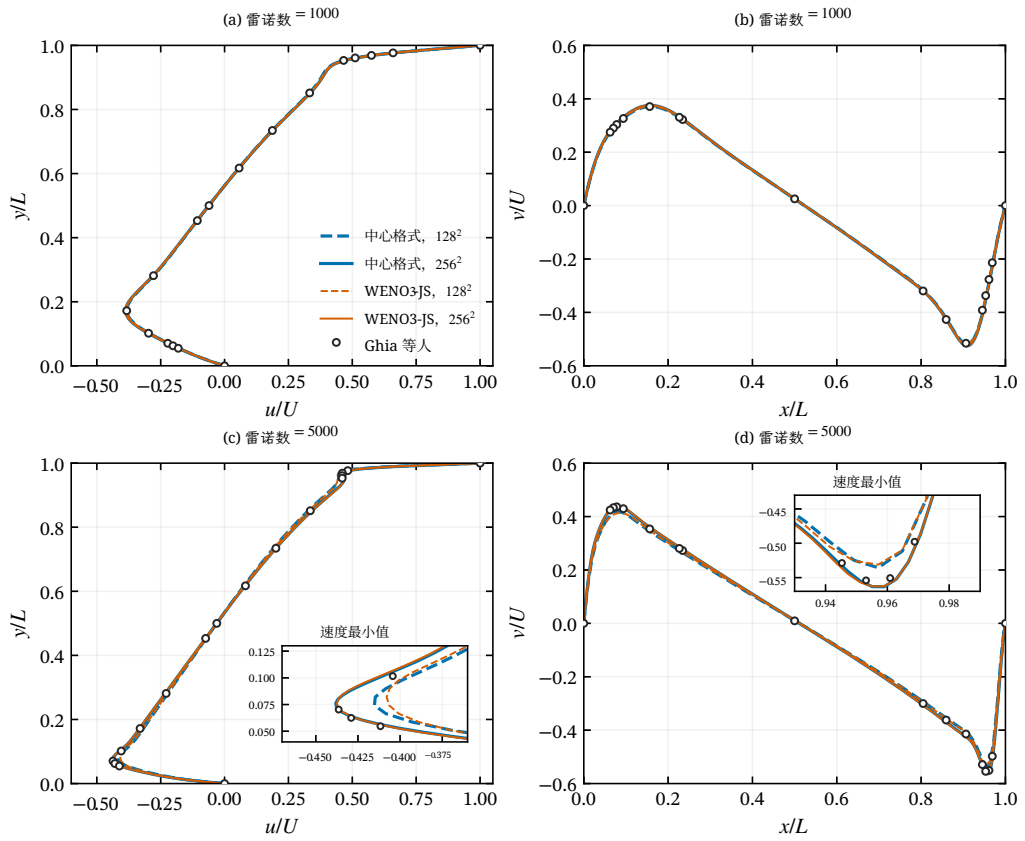


图8：顶盖驱动方腔中心线剖面： $u(y)$ 在 $x/L = 0.5$ 和 $v(x)$ 在 $y/L = 0.5$。上： $Re = 1000$；下： $Re = 5000$。蓝色和橙色曲线分别表示中心格式和 WENO3-JS 输运；虚线和实线分别表示 128^2 和 256^2 网格单元。插图放大了 $Re = 5000$处的速度最小值。圆圈表示 Ghia 等人的不可压缩参考数据 [24]。

7. 两相验证

7.1. 黏性两相剪切层

式(41)的周期速度场与两个半径为0.15的液体圆盘相结合，分别以(0.25, 0.25)和(0.75,0.75)为中心。参考密度比为100，其中$(\mu_1, \mu_2) = (0.01, 10^{-4})$，因此两相均具有参考运动黏度 10^{-4}。基于 $U = L = 1$ 的雷诺数为 10^4。重力与表面张力均不存在。相分数由周期符号距离初始化，相质量采用其参考本征密度。在 128^2 和 256^2 网格单元上的计算采用 $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ 以及相密度调和平均值。

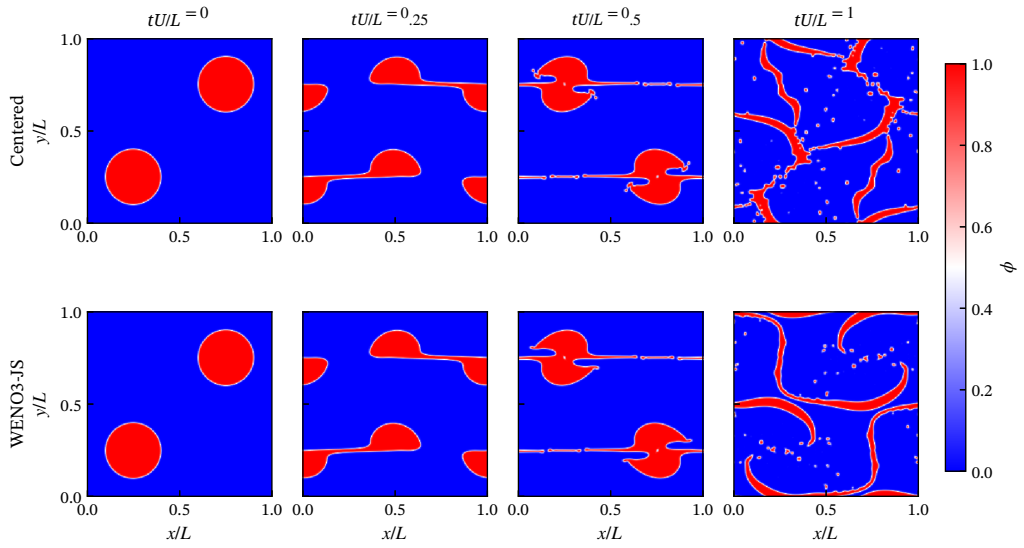


图9： 256^2 网格单元上的两相剪切层相分数。上：中心格式；下：WENO3-JS。所示时刻为 $tU/L = 0$、0.25、0.5和1。色标范围从$\phi = 0$ （气体）到 $\phi = 1$ （液体）。

两种动量重构的早期圆盘拉伸相似（图9）。随着各层伸长并相互作用，中心格式在变形界面附近保留了更精细的涡旋运动，而WENO3-JS给出更光滑的速度场（图10）。由于密度和黏度随相分布而变化，这一差异也会改变分子黏性功。因此，能量分解比仅看最终动能更能提供信息。

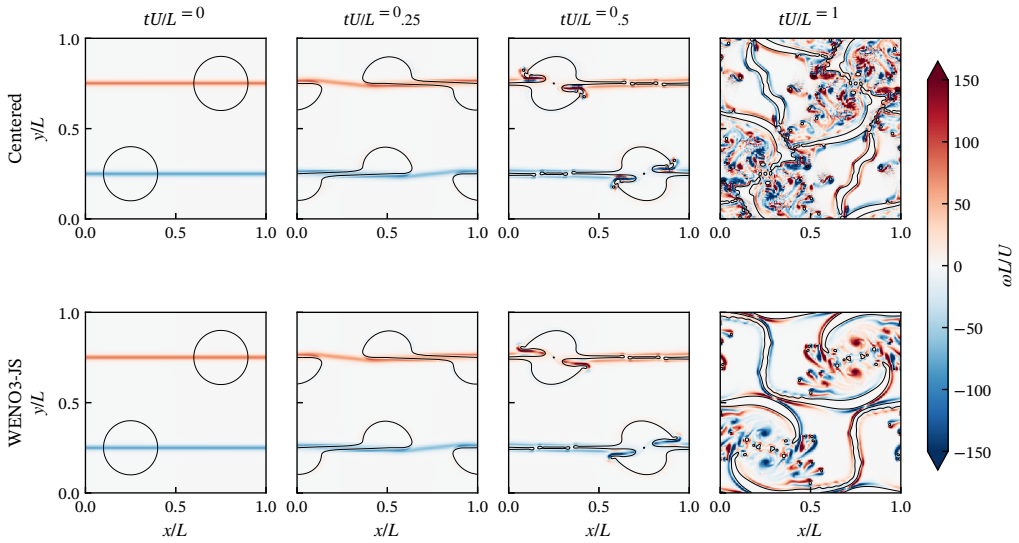


图10：相同两相剪切层的涡量和 $\phi = 0.5$ 界面。两种重构在所有时刻均采用同一涡量标度。

表6： $tU/L = 1$处的两相剪切层累积功，占 K_0的百分比。以 K_0 归一化的最大闭合误差低于 8.8×10^{-13}。

方法， n	W_{adv}	W_{μ}	$W_{p,\mathrm{total}}$	$R_{\mathrm{tr,time}}$
中心格式, 128	9.531×10^{-12}	-6.879596	-0.001079	1.436×10^{-10}
WENO3-JS , 128	-6.748×10^{0}	-4.334879	-0.000708	1.076×10^{-10}
中心格式, 256	-5.687×10^{-9}	-12.110751	-0.000726	-5.197×10^{-9}
WENO3-JS , 256	-6.440×10^{0}	-6.614254	-0.000658	2.125×10^{-9}

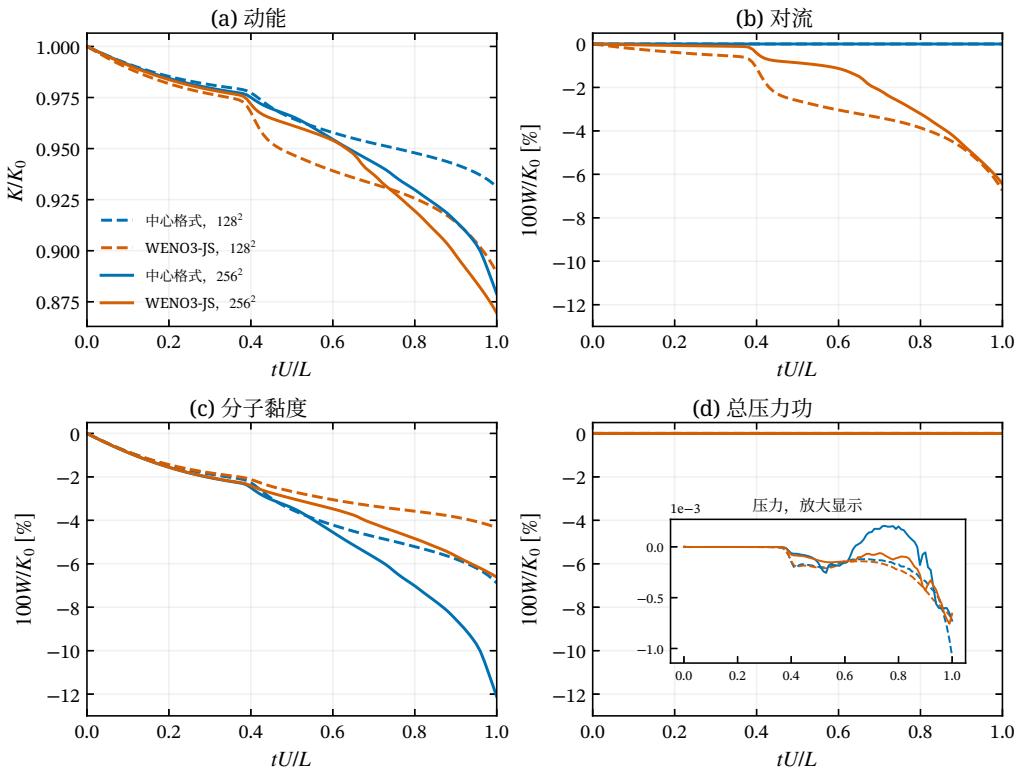


图11：两相剪切层能量历程。图（b）–（d）中的累积对流、分子黏度和压力功使用相同的纵轴范围，均表示为 K_0 的百分比。

表6证实，本征密度调和平均在变密度流动中保留了中心输运特性。在 256^2，处，测得的中心对流功为 K_0 的 -5.69×10^{-9}%；WENO3-JS 的这一比例为 -6.44015%。分子黏度分别消耗了 12.11075% 和 6.61425%。因此，中心输运使较强的解析梯度能够作用于明确规定的黏性耗散，而迎风重构则通过动量对流直接消除了其中相当大的一部分。

网格细化后，中心压力贡献的总量值从 0.001079% 降至 K_0 的 0.000726%。在较细网格上，该值为分子黏性损失的 0.0060%。此量既包括输运阶段中的压力功，也包括最终增量修正。图11中的共同尺度表明，压力松弛保留了实际应用中的低耗散优势：分子黏度仍是中心格式计算中的主要能量汇。

全部四组谐波剪切层计算在组分欧拉阶段均保持正相质量。正性条件采用实际相体积通量进行评估，其中包括ACDI 正则化，如式（23）所示。这将测得的质量输运与动能恒等式中出现的同一通量联系起来。

7.2. 上升气泡

Hysing 等人 [25] 的上升气泡基准算例采用 1×2 计算域，半径为0.25的气泡初始中心位于(0.5,0.5)。流体初始处于静止状态。竖直边界为自由滑移，水平边界为无滑移。重力为 $g_y=-0.98$。算例A的密度比为10，表面张力为24.5；算例B的密度比为1000，表面张力为1.96。物理参数见表1。算例A采用 64×128和 128×256 网格单元，算例B采用 128×256 和 256×512 网格单元。两者均计算至 $t=3$ 秒。

$$y_c=\frac{\sum_i V_i(1-\phi_i)y_i}{\sum_i V_i(1-\phi_i)},\qquad V_b=\frac{\sum_i V_i(1-\phi_i)v_i}{\sum_i V_i(1-\phi_i)}. \tag{42}$$

质心 y_c 和气体体积加权上升速度 V_b 与已发表的最精细 TP2D、FreeLIFE 和 MooNMD 历史数据进行比较。最终界面采用 $\phi=0.5$ 等值线。参考解之间的差异在算例B中最大，此时界面变形更剧烈。

案例 A 在上升历程和变形后的气泡顶部方面均与结果高度吻合（图 12）。在 128×256 网格上，相对于 L_2，

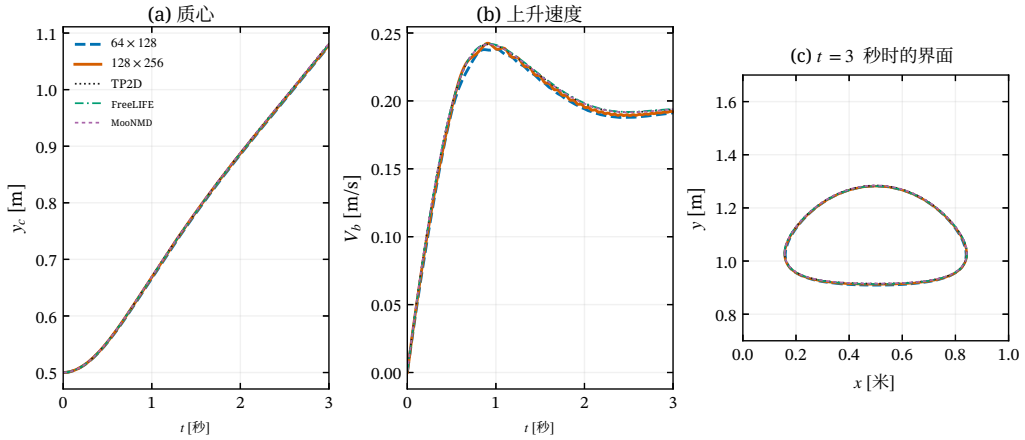


图12：上升气泡算例A：质心、上升速度和最终界面。参考数据为 Hysing 等人 [25] 提供的 TP2D、FreeLIFE 和 MooNMD 最精细网格结果。

在 TP2D 的 $t = 0.01$–3 秒范围内，质心高度和上升速度的相对差异分别为 0.149% 和 1.03%。有限宽度界面保留了气泡的主要形状，同时再现了其上升速度的加快及随后趋于平稳的过程。

算例B形成了明显的裙边和细长的尾部结构（图13）。计算捕捉到了主要的向上位移和帽形，且随着网格细化，轨迹逐渐接近 TP2D 的趋势。质心高度的相对L_2 差异从 1.227% 降至 0.806%，上升速度的相对差异则从 7.44% 降至 5.52%。后续演化符合 TP2D 的趋势，其差异范围与强变形界面的不同处理方式有关。

这两个算例在较大的密度比下采用相同的中心动量和调和相质量通量，且未改变输运处理。比较结果表明，中心格式在两种密度比下都能捕捉浮力上升和毛细变形。

7.3. 二维溃坝

宽度为 $a = 0.146$ 米、高度为 $H_0 = 0.292$米的矩形水柱在长 0.584×0.584米的水槽中塌陷。所有壁面（包括顶板）均为无滑移边界。初始速度为零， $g = 9.81$ 米/秒^2,，且忽略表面张力。参考速度为 $U_{\mathrm{ref}} = \sqrt{gH_0} = 1.69248$ 米/秒。在 128^2和 256^2 个网格单元上进行的计算延续至 $t = 1$ 秒，涵盖初始涌浪、下游壁面撞击、爬升以及随后的回流。

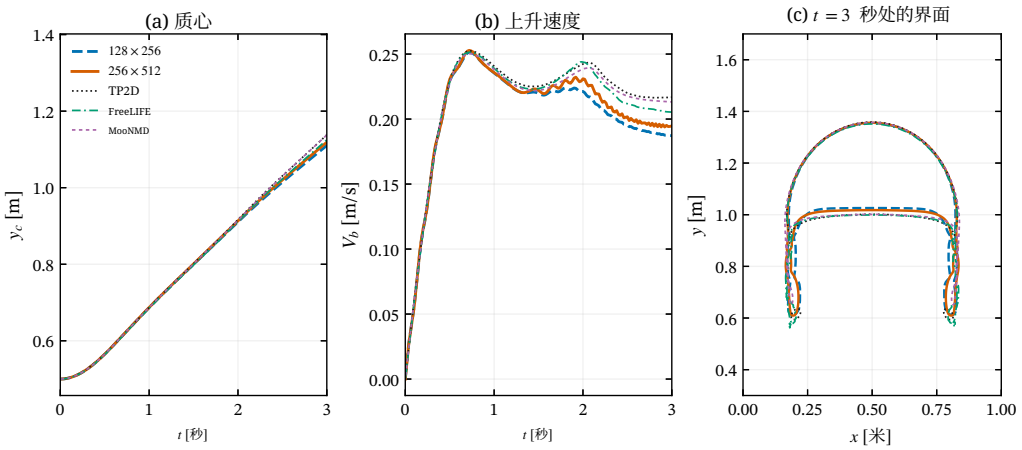


图13：上升气泡算例 B，诊断量与图12相同。最终界面显示了气泡顶部和细长的尾部结构。

图14将归一化涌浪前沿位置与 Martin 和 Moyce [26] 以及 Koshizuka 和 Oka [27]，的实验结果进行了比较，并同时列出了已发表的移动粒子半隐式（MPS）计算结果。前沿位置与 MPS 传播结果一致，而残余液柱高度则与 Martin–Moyce 测量结果高度吻合。在撞击前时段的后期，实验测得的前沿位置往往滞后于数值曲线。这些比较涵盖了初始液柱的水平扩展和垂直塌陷。

撞击后，液体沿下游壁面爬升，抵达顶板后折返流入水槽（图15）。右壁面历程记录了这一爬升与回流过程，而液体面积历程则量化了弱可压缩公式产生的微小体积响应。该计算采用与周期性测试和浮力驱动测试相同的中心输运方法，模拟了这一强烈变形的流动。

两套网格在 $t = 1$ 秒内均保持正相质量。 128^2 和 256^2个网格单元上的最大相对质量误差分别为 5.80×10^{-13} 和 1.24×10^{-12} 。图14比较了两种分辨率下的前沿、壁面爬升和液体面积历程。

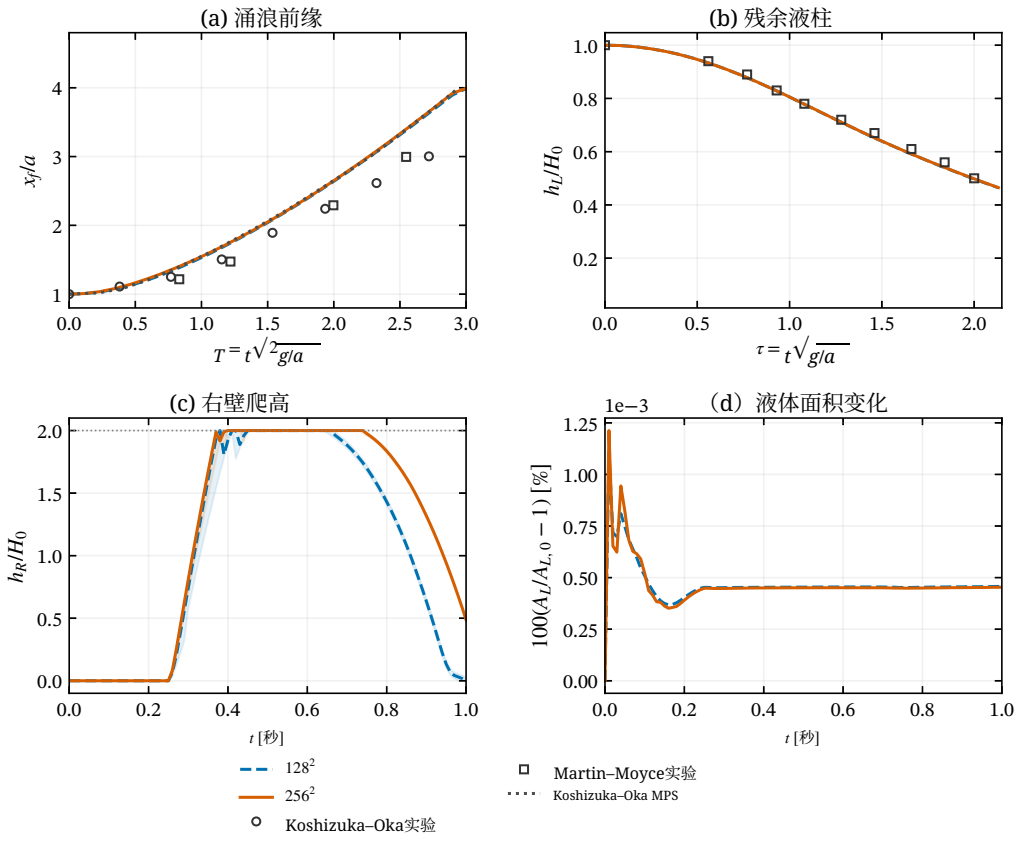


图14：二维溃坝历程。(a) 涌浪前缘与 Martin–Moyce 和 Koshizuka–Oka 实验数据点，以及 Koshizuka–Oka 移动粒子半隐式（MPS）计算结果的对比。(b) 残余液柱高度与 Martin–Moyce 的对比。(c) 右壁上的最高湿润点；阴影范围为 $\phi = 0.1$ 和 0。9 两个交点之间的区域。(d) 相对液体面积变化。实验对比涉及撞击前时段。

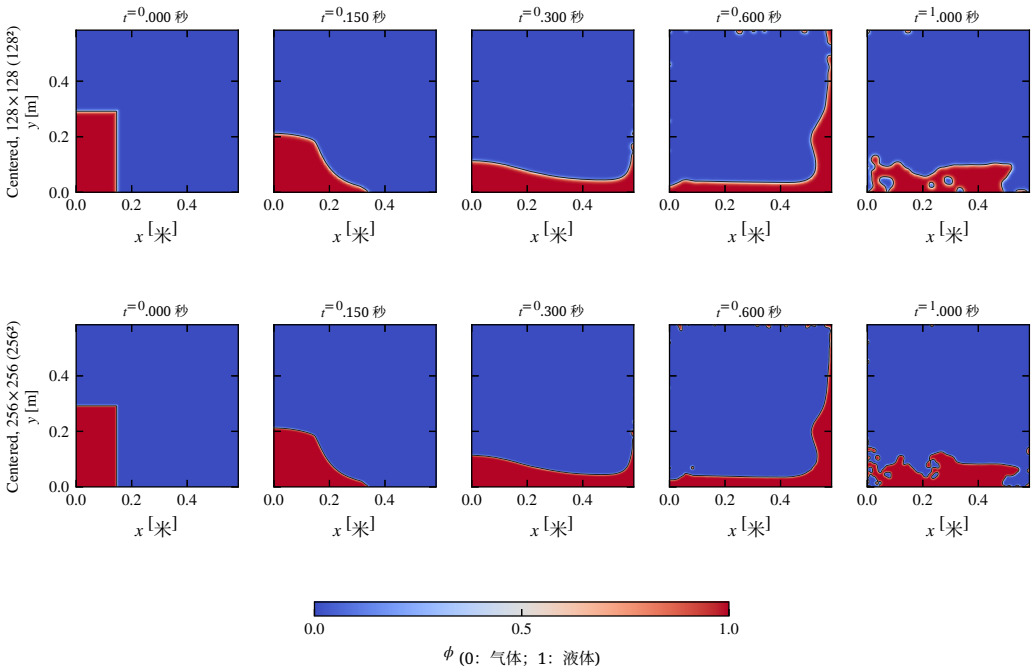


图15：在 128^2 和 256^2 个网格单元上二维溃坝相演化。黑线表示 $\phi = 0.5$；图中显示了实际保存的时刻。计算域包括封闭屋顶。上： 128^2；下： 256^2。统一的色标表示液相体积分数。

8. 使用显式亚格子尺度模型的三维溃坝

8.1. 配置与亚格子尺度闭合

湿底溃坝是一种涉及快速界面变形、壁面冲击和卷吸的三维应用。这类配置也用于弱可压缩流和格子玻尔兹曼多相研究 [5, 2]。本研究的水槽尺寸为 $L_x \times L_y \times L_z = 0.72 \times 0.36 \times 0.12$ 米。左端有一根宽度为 0.15 米的水柱，占据全高 0.36 米；其余槽底初始覆盖着厚度为 0.018 米的液层。包括顶板和侧向壁面在内的所有壁面均为无滑移壁面。流体初始速度为零。密度比为 1000，$g = 9.8$ 米/秒^2，物性参数见表1。

参考长度为水头差 $H = 0.36 - 0.018 = 0.342$米，且 $U_{\mathrm{ref}} = \sqrt{gH} = 1.83074$ 米/秒。比较采用 $144 \times 72 \times 24$和 $288 \times 144 \times 48$ 个网格单元，分别对应 $h = 0.005$ 和 0.0025 米。两种动量重构均从相同的初始场计算至 $t = 1$ 秒。除非明确标为算术对照，相密度平均值均采用调和平均。两种重构均启用表面张力和相同的亚格子尺度闭合。

Nicoud和Ducros提出的壁面自适应局部涡黏性（WALE）模型 [28] 使用速度梯度张量 $g_{ab} = \partial_b u_a$、其对称部分S以及 g^2的对称偏差部分：

$$S = \frac{1}{2}(g + g^T), \qquad S^d = \frac{1}{2}\{g^2 + (g^2)^T\} - \frac{1}{3} I \,\mathrm{tr}(g^2). \tag{43}$$

$$\nu_t = (C_w \Delta)^2 \frac{(S^d : S^d)^{3/2}}{(S : S)^{5/2} + (S^d : S^d)^{5/4}}, \qquad C_w = 0.5, \quad \Delta = h. \tag{44}$$

当速度梯度趋于零时，黏度为零。梯度在面上通过法向差分和中心横向导数计算。与一个网格单元相邻的六个面值经平均后构成$\mu_{t,i} = \rho_i \frac{1}{6} \sum_{f \in \partial i} \nu_{t,f}$。亚格子尺度应力采用式（12），其中 μ 替换为 μ_t。分子功与亚格子尺度功分别累积。该模型及其系数对中心格式和WENO3-JS相同，而其实际亚格子尺度功取决于解析梯度。

8.2. 大变形下的正相质量输运

在相同的中心动量输运、压力增量松弛、表面张力和WALE闭合条件下，比较算术与调和本征密度平均。二者均从同一静止水柱出发；图16比较阶段更新期间的最小气相分密度。在 $144 \times 72 \times 24$ 网格单元上，算术平均算例出现负的气相分密度，于 $t = 0.922803$ 秒被检测到，而调和平均算例直至 $t = 1$ 秒仍保持正相质量。在 $288 \times 144 \times 48$网格单元上的算术平均计算同样出现负的气相分密度，于 $t = 0.273883$ 秒被检测到。在相同分辨率下，两种调和动量重构均在 $t = 1$秒时仍具有正相质量。算术平均的检测时间指阶段级相质量诊断。

这种差异源于给定流出相体积通量所携带的质量。如果供体本征密度 $r_{\ell,i}$ 远小于相邻单元的密度，那么算术平均面密度相对于 $r_{\ell,i}$可能任意大。相反，调和密度满足 $r_{\ell,f}^{H} \le 2r_{\ell,i}$。因此，在一个组成欧拉步内，流出质量有上界$2C_{\alpha_\ell,i}m_{\ell,i}$；当 $C_{\alpha_\ell,i} < 1/2$ 时，式（23）可保证剩余质量为正。该上界取决于局部相质量和实际相体积通量（包括正则化），不要求速度散度为零。

表 7：三维溃坝的各阶段相质量诊断量。时间列表示诊断终点。相分密度的单位为 kg/m^3；n_x 标识第8.1节中的网格。

方法，n_x	t [秒]	最小值 m_1^{FE}	最小值 m_2^{FE}	最大值 C_α
中心格式算术平均, 144	0.922803	8.848×10^{-6}	-4.096×10^{-11}	0.01259
中心格式 算术平均, 288	0.273883	9.838×10^{-6}	-5.627×10^{-10}	0.01172
中心格式 调和平均, 144	1.000000	8.026×10^{-6}	3.879×10^{-9}	0.01259
WENO3-JS 调和平均, 144	1.000000	8.865×10^{-6}	1.501×10^{-9}	0.02969
中心格式 调和平均, 288	1.000000	6.787×10^{-6}	1.989×10^{-9}	0.02275
WENO3-JS 调和平均, 288	1.000000	8.064×10^{-6}	2.545×10^{-10}	0.02980

两种调和动量重构在整个144网格计算中均保持正质量。它们最大的流出相体积库朗数分别为0.01259和0.02969，明显低于充分阈值。任一积分相质量的最大相对误差均低于 1.1×10^{-14}。对于中心格式情形，本征密度比 r_ℓ/ρ_ℓ^0在

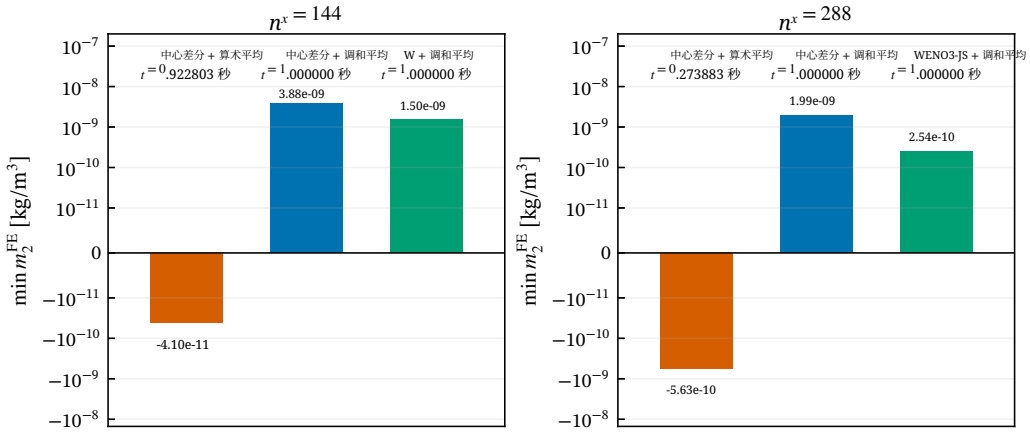


图16：监测到的组分欧拉阶段中的最小气相分密度。检测到负质量后，算术平均运行在标示时间终止；两种网格上的调和平均运行均达到 $t = 1$ 秒。对称对数刻度显示了正负两种符号。AR 和 H 分别表示算术平均和调和本征密度平均；C 和 W 分别表示中心格式和 WENO3-JS 动量输运。

含 $\alpha_\ell > 1/2$ 的网格单元中保持在0.999596与1.000305之间。因此，调和公式能够处理微量相输运，同时保持全局相质量以及主体相中较小的密度变化。

第5.4节中的算术平均均匀各向同性湍流计算也成功完成。在溃坝过程中，要求苛刻的相质量流出情形最能体现调和平均的优势。调和平均在保持相同中心差分动能恒等式的同时，提供了局部流出界限。

8.3. 界面演化与能量传递路径

图17展示了涌浪前进、撞击壁面以及液体碎片回流的过程。两种动量重构均使用相同的物理参数，捕捉到了这一大尺度演变过程。运动后期，界面褶皱和液体碎片方面的差异逐渐显现。下文的能量收支将这种行为与不同的输运和亚格子尺度贡献联系起来。

表 8 给出了 3.52989 J 和 3.26141 J 的最终动能，但导致能量损失的机制存在显著差异。中心格式对流贡献了 4.99×10^{-20} J，而 WENO3-JS 通过对流移除了 2.31127 J。相应的 WALE功为 -3.53846 和 -1.21693 J。采用中心方法时，WALE 提供了组合能量的 96.8%

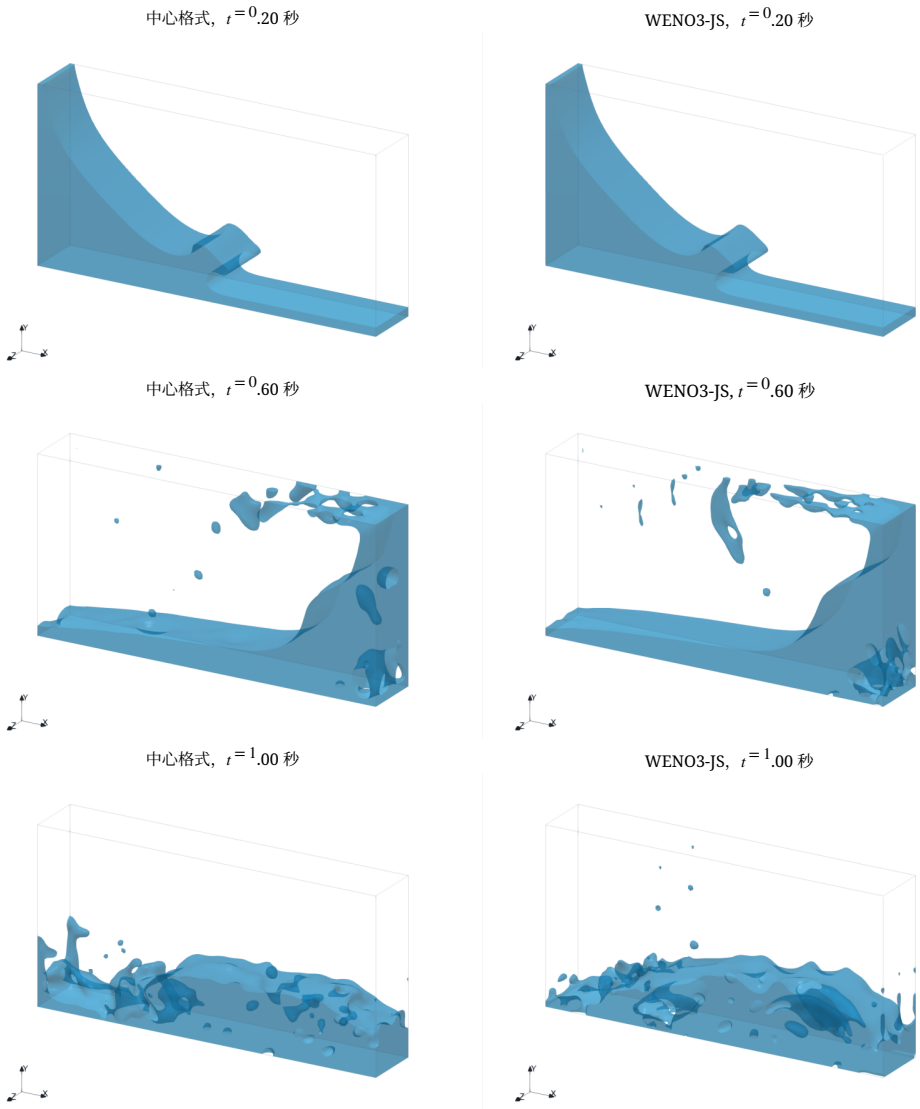


图17： $t = 0.20$、0.60 和 1.00 秒时， $144 \times 72 \times 24$ 个网格单元上的三维液体区域。左：中心格式；右：WENO3-JS。两者均采用本征密度调和平均、压力增量松弛和 WALE。蓝色表面勾勒出 $\phi \geq 0.5$的边界，包括其与水箱壁的接触处。

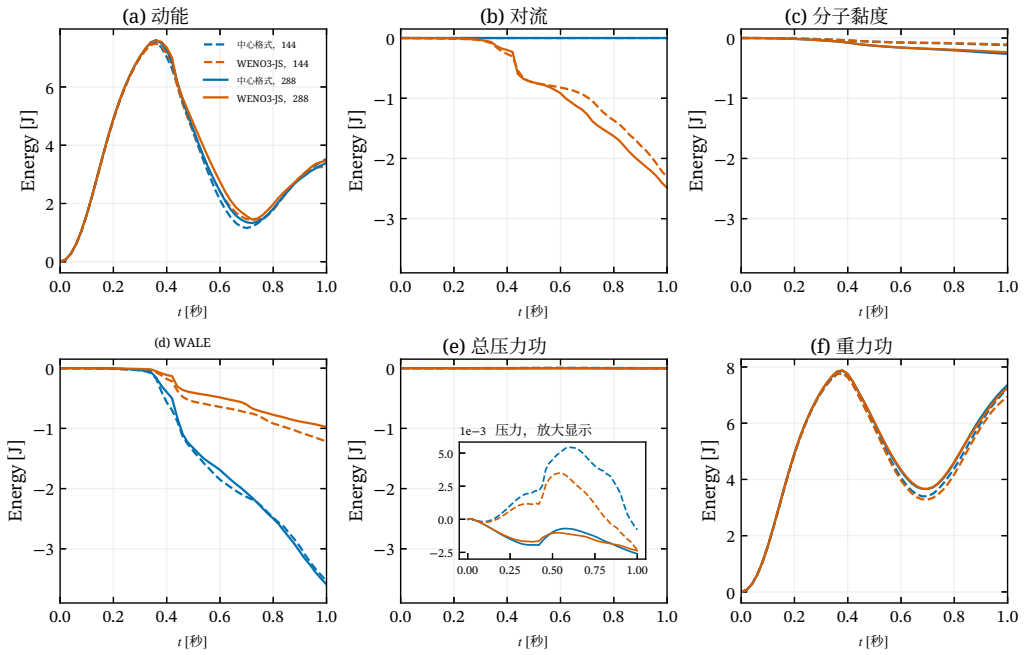


图18：三维溃坝能量历程，单位为焦耳。虚线和实线分别表示 $144\times72\times24$和 $288\times144\times48$网格单元。累积对流、分子黏性、WALE 和总压力面板采用相同的纵向刻度。压力插图展示了较小的总压力功，其中包括预测器功和最终增量修正。

表 8： $t = 1$ 秒、 $144\times72\times24$ 网格单元上的累积能量预算，单位为焦耳。 $K(0) = 0$。总压力行是前两行压力的总和，并非额外贡献。

贡献	中心格式	WENO3-JS
$K(1)$	3.5298908	3.2614146
W_{adv}	4.987×10^{-20}	-2.3112683
W_{μ}	-0.1180166	-0.1065419
W_{SGS}	-3.5384554	-1.2169268
W_{g}	7.2449084	6.9404537
$W_{p,\mathrm{RK}}$	-0.0006437	-0.0021733
$\Delta K_{p,\ \text{相关}}$	-0.0001506	-0.0001519
$W_{p,\ \mathrm{total}}$	-0.0007943	-0.0023253
ΔK_{σ}	-0.0577512	-0.0419768
$R_{\mathrm{tr,time}}$	-1.357×10^{-11}	8.834×10^{-11}
ε_K	-3.067×10^{-12}	-2.587×10^{-13}

分子损失和亚格子尺度损失。对于 WENO3-JS，对流占对流、分子和亚格子尺度损失总和的 63.6%。因此，当移除迎风对流汇时，显式模型便成为主要的耗散机制。

更强的亚格子尺度功是同一 WALE 闭合对不同解析梯度的响应。中心输运使能量传递至该显式算子的过程在预算中清晰可见。在中心格式计算中，总压力贡献为 -7.9430×10^{-4} J，仅占 WALE 损失的 0.0224%。其预测步和修正分量均已计入。两种计算的最终绝对预算闭合误差均低于 3.1×10^{-12} J，输运时间残差低于 9×10^{-11} J。因此，压力增量耦合在这一强变形壁面约束流动中保持了低耗散输运优势。

8.4. 加密网格比较

这些 $288\times144\times48$计算采用相同的物理参数、调和本征密度通量、压力算法和 WALE 系数。网格细化使物理单位下的弥散界面厚度和 LES 滤波宽度均减半，同时保持它们与网格间距的比值不变。算术平均计算在此分辨率下产生了负的相质量（表 7）。

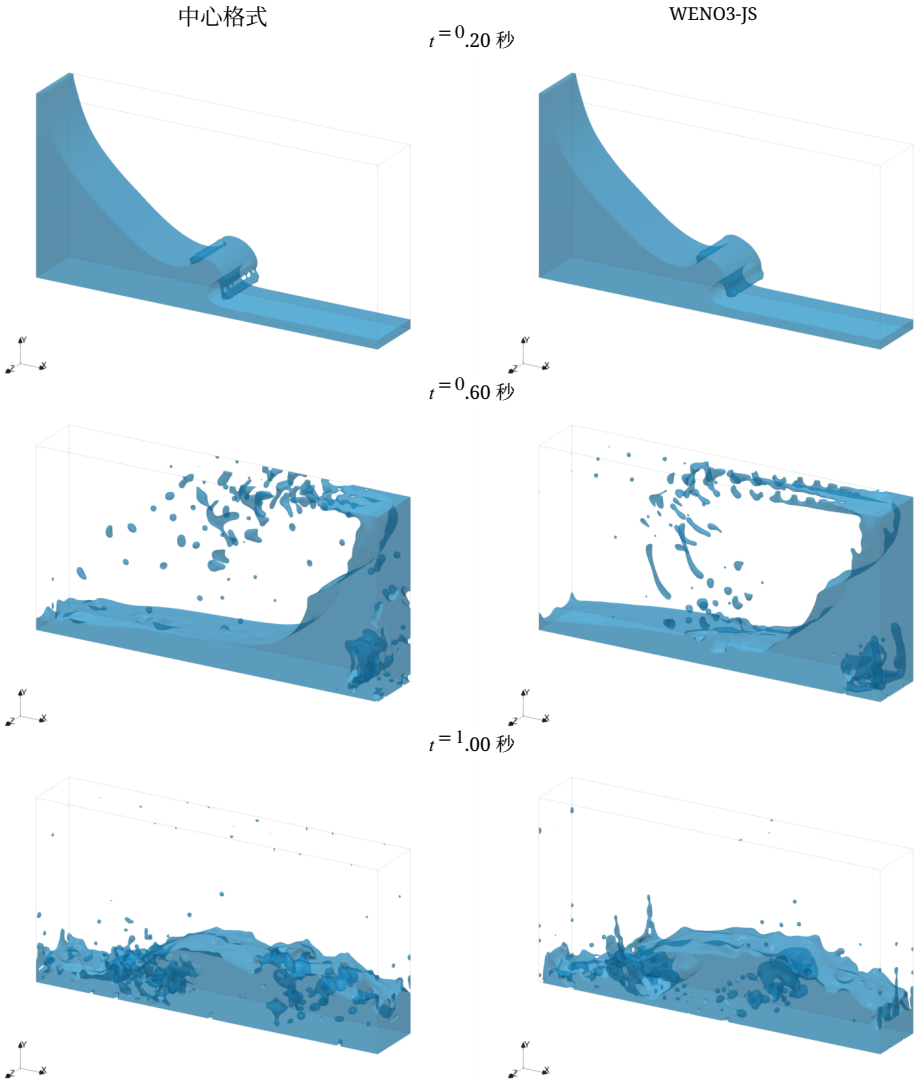


图19： $t = 0.20$、0.60和1.00秒时的细化网格液体区域。 $288 \times 144 \times 48$网格单元上的结果：左为中心格式，右为WENO3-JS。两者均采用本征密度调和平均，并与图17采用相同的液体区域定义和视角。

图19展示了细化网格界面演化，包括撞击与回流过程中分辨出的更细液体碎片。两种调和重构在 $t = 1$ 秒内均保持正相质量。最大流出相体积库朗数对中心格式为0.02275，对WENO3-JS为0.02980，满足式（23）中的充分条件。任一积分相质量的最大相对误差均低于 3.1×10^{-14}。对于中心格式计算，体本征密度比保持在0.999300与1.000478之间。结合算术对照，这些结果将调和通量的正质量输运推广到更细网格，且不改变中心动量通量。

图18中的能量分解在更细网格上仍保持两种输运方法之间的同一区别。中心对流功为-4.83×10^{-19} J，而分子黏度与WALE分别移除0.26282 J和3.59332 J。因此，WALE占二者合计损失的93.2%。在WENO3-JS计算中，对流移除2.48768 J，占对流、分子与亚格子尺度合计损失的67.2%。中心格式的总压力功为 -0.002606 J，仅为WALE损失的0.0725%。最终动能分别为3.39100 J和3.46992 J。该能量收支即使在最终动能接近时，仍能识别出不同的耗散机制。

9. 讨论

9.1. 低耗散弱可压缩输运

所提出的方法将中心输运与局部显式压力计算相结合，用于单相和两相流。其构造针对两个相互耦合的要求：保留动量对流所携带的动能，以及在强变形界面中稳健地输运相质量。对称速度插值提供半离散对流抵消，而本征密度调和平均则限制由流出相体积所携带的质量。这两种性质能够共存，是因为动能恒等式使用公共质量通量，而不固定其密度插值。

均匀各向同性湍流（HIT）对比量化了由此产生的与迎风输运的差异。在 $t^* = 8$ 的 128^3 个网格单元上，中心格式的相对动能变化幅值在单相流中低于 7.5×10^{-8}，在两相流中低于 1.2×10^{-7}。WENO3-JS分别保留了 K_0的3.60%和30.72%。在剪切层中，中心方法在允许指定黏度耗散能量的同时，保留了更强的涡结构。上升气泡和

溃坝展示了同一套公式在浮力运动、毛细变形、冲击和破碎中的应用。

9.2. 压力耦合与解析能量收支

压力增量格式在耦合计算中保留了中心格式对流的优势。在输运阶段纳入 p^n ，使压力梯度能够在速度场演化过程中发挥作用。随后，EPP 迭代通过同一个 p^n 的变化来校正压力，最终动量修正则将这一增量应用一次。在附录 D 的匹配 HIT 对比中，尽管中心格式空间算子和声学设置完全相同，这种时间上的关联仍使能量变化的幅度相较于完整压力校正降低了四个数量级以上。

压力贡献以预测压力功加上最终校正实际造成的动能变化来衡量。这种分解解释了两相 HIT 中正负不一但幅度都很小的能量变化，也解释了黏性剪切层和溃坝中的微小净损失。第 3.3 节确立了连续压力试探之间条件能量不增的性质。方程（37）–（39）将这些试探与实际应用的动量修正和预测器功联系起来，从而说明测得的总压力贡献为何可能为正或为负。对于中心格式 256^2 两相剪切层，总压力功的幅度为分子黏性损失的 0。0060%；对于 144 网格和 288 网格的三维溃坝，其数值分别为 WALE 损失的 0。0224% 和 0。0725%。因此，在这些情形下，压力处理保留了无耗散平流的实际优势。

9.3. 对显式亚格子尺度建模和大规模计算的启示

三维能量收支显示，动量重构会改变显式亚格子尺度模型所发挥的作用。在 WALE 系数相同的情况下，中心输运的主要耗散来自分子应力和亚格子尺度应力；在 144 和 288 网格上，WALE 分别贡献了两者合计损失的 96.8% 和 93.2%。而在 WENO3-JS 计算中，两种网格上的合计平流、分子和亚格子尺度损失分别有 63.6% 和 67.2% 来自动量对流。数值阻尼也会改变显式模型作用所依据的梯度，从而导致亚格子尺度功出现差异。去除该平流耗散项后，模型的贡献便可直接识别，这也为比较多相大涡模拟中的显式封闭模型提供了有用依据。

这种共置有限体积结构也支持未来与 GPU 自适应网格细化求解器集成。所有动量分量共用相同的单元层次结构，而相质量通量和动量通量是显式的面量，适用于守恒的粗细网格耦合。对于 N 个网格单元，三个输运阶段和N_p次压力迭代需要 $O[(3+N_p)N]$ 的工作量和 $O(N)$的存储空间。规则的笛卡尔模板通过相邻晕区交换实现，并采用标量归约来估计步长和计算诊断量。声学时间步限制仍然存在，但无需进行全局椭圆型收敛过程。这些特性促使我们在先前工作 [5] 所展示的大尺度弱可压缩自适应网格加密框架中，进一步拓展当前的低耗散形式。

10. 结论

本文为弱可压缩单相和两相流开发了一种采用显式压力松弛的中心型有限体积方法。该方法结合了动能守恒中心对流、有限界面厚度 ACDI 正则化、调和内禀密度输运，以及结构化同位网格上的压力增量连接。共享质量通量和对称速度插值在有限速度散度下可消除半离散对流产能和动能耗散。调和平均对相质量流出施加界限，并为每个组分欧拉阶段提供充分的正性条件，同时不改变该输运恒等式。

EPP 构造在输运预测器中纳入旧压力梯度，并使用最终压力增量对动量进行一次修正。使单元压力梯度与根据单元动量重构的散度相匹配，可在密度和预测步固定时，为额外压力迭代提供条件性能量不增估计。压力增量连接使耦合算法保留了中心格式对流的低耗散。在相同压力设置下，中心格式的 128^3 单相和两相均匀各向同性湍流能量与其初始值的差异分别为 $-7.47\times10^{-8}K_0$和 $-1.18\times10^{-7}K_0$；而 WENO3-JS 的 K_0 则损失了 96.40% 和 69.28%。在 64^3 个网格单元上的比较也体现出中心格式能量保持与迎风耗散之间相同的差异。测得的压力功和输运时间残差解释了这些幅度较小的剩余能量变化。

剪切层测试展示了低耗散输运对涡旋运动的影响，而上升气泡计算再现了主要的上升

及不可压缩基准中的变形趋势。在密度比为 1000 的三维溃坝中，调和平均能够保持正相质量，而算术对照则出现负气体质量。在 144 和 288 网格上，调和计算对各积分相质量的守恒相对误差分别低于1.1×10^{-14} 和 3.1×10^{-14} 。在采用相同 WALE 闭合的情况下，中心格式消除了迎风对流能量汇，并将主要耗散归于显式应力模型。全离散收支将这一贡献与分子黏度、压力、毛细作用及时间积分区分开来。

该方法为采用显式亚格子尺度建模的大尺度多相大涡模拟提供了一种低耗散途径。其局部压力算法和共置有限体积形式的设计着眼于未来在 GPU 和自适应网格加密中的应用。将已验证的输运和压力耦合方法扩展到自适应网格和复杂边界，是迈向实际大尺度流动的下一步。

附录 A. 压力松弛能量估计

该推导针对式（17）中的额外压力迭代，并将预测动量和正密度视为固定值。令 $\delta\pi$ 为试探压力增量的任意变化。展开式（28）可得精确的有限差分

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\pi+\delta\pi)-\mathcal{K}(\pi) &= -\Delta t\langle \boldsymbol{u}(p), G_c\delta\pi\rangle_V + \frac{\Delta t^2}{2}\langle G_c\delta\pi, R^{-1}G_c\delta\pi\rangle_V \\ &= \langle \Delta t D_c\boldsymbol{u}(p), \delta\pi\rangle_V + \frac{1}{2}\langle \delta\pi, H_p\delta\pi\rangle_V,\end{aligned} \tag{A.1}$$

其中 $H_p = \Delta t^2 G_c^{\dagger} R^{-1} G_c$ 是海森矩阵。第二行对均匀周期网格使用 $G_c = -D_c^{\dagger}$。因此 $g_p = \nabla_\pi \mathcal{K} = \Delta t D_c\boldsymbol{u}$（$p$）。压力更新为 $\pi^+ = \pi - Bg_p$，其中 $B = \mathrm{diag}(\rho^* c^2)$ 为正定矩阵。代入 $\delta\pi = -Bg_p$ 并令 $z = B^{1/2}g_p$，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\pi^+)-\mathcal{K}(\pi) &= -\langle g_p, Bg_p\rangle_V + \frac{1}{2}\langle Bg_p, H_pBg_p\rangle_V \\ &= -\|z\|_V^2 + \frac{1}{2}\langle z, B^{1/2}H_pB^{1/2}z\rangle_V \\ &\le -\left[1 - \frac{1}{2}\lambda_{\max}(B^{1/2}H_pB^{1/2})\right]\|z\|_V^2.\end{aligned} \tag{A.2}$$

线性项非正，而二次项反映有限的压力变化。方程（30）通过限制二次项，使两者之和非正。对于常密度和声速，特征值为（$c\Delta t$）$^2\sum_d \sin^2$（$k_d h$）$/h^2$，明确显示了声学时间尺度。由于 $\sin^2$（$k_d h$）≤ 1，额外压力迭代的充分界限在二维中为 $c\Delta t/h < 1$ ，在三维中为 $c\Delta t/h < \sqrt{2/3}$ 。这些常密度界限仅描述压力迭代。对于变密度，相同的估计通过 R 和 B 保留实际密度分布。将 p 替换为增量 $\pi = p - p^n$ 后，海森矩阵保持不变。因此，所得估计适用于本文采用的压力增量格式，并且对每个固定的预测状态均成立；完整物理步内的能量变化由方程（39）给出。

附录 B. 变黏度算子的耗散形式

周期网格恒等式阐明了式（12）中的黏度放置方式。令a_{ab}^{+} 和 a_{ab}^{-} 分别表示 u_a 沿 b方向的前向差分和后向差分。定义中心梯度以及这两个单边斜率之差：

$$g_{ab} = \frac{a_{ab}^{+} + a_{ab}^{-}}{2}, \qquad e_{ab} = \frac{a_{ab}^{+} - a_{ab}^{-}}{2}, \qquad S = \frac{g + g^T}{2}, \quad S' = S - \frac{1}{3} I \,\mathrm{tr}(g). \tag{B.1}$$

利用面平均法向系数和按单元加权的横向项进行分部求和，可得：

$$\sum_i V_i \boldsymbol{u}_i \cdot (D\boldsymbol{\tau})_i = -\sum_i V_i \mu_i \left[2S_i' : S_i' + \sum_{a \neq b} e_{ab,i}^2 + \frac{4}{3} \sum_a e_{aa,i}^2 \right] \le 0. \tag{B.2}$$

对于二维情形，张量嵌入三维空间，且平面外分量为零。当 $\mu_i \ge 0$时，方括号内的每一项均非负。该表达式作为二次型也具有对称性，并且可直接推广到非负的冻结亚格子尺度黏度。此恒等式解释了为何在面应力中保留将$\mu D_a^c u_d$ 作为乘积进行平均的处理。

附录C. 上风对比中使用的速度重构

对于通过面 $i+1/2$ 的正总质量通量，每个速度分量v 均由 v_{i-1}， v_i， v_{i+1} 重构为

$$v_{i+1/2}^{M} = w_0\left(-\frac{1}{2}v_{i-1} + \frac{3}{2}v_i\right) + w_1\left(\frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}v_{i+1}\right). \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned} &\beta_0 = (v_i - v_{i-1})^2, \qquad \beta_1 = (v_{i+1} - v_i)^2, \\ &\widehat{w}_0 = \frac{1/3}{(\epsilon_W + \beta_0)^2}, \qquad \widehat{w}_1 = \frac{2/3}{(\epsilon_W + \beta_1)^2}, \qquad w_k = \frac{\widehat{w}_k}{\widehat{w}_0 + \widehat{w}_1}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

负通量模板通过镜像反射得到。正则化参数为 $\epsilon_W = 10^{-6}$，单位为各项测试所用的速度平方单位。该重构仅逐分量应用于动量输运；相体积通量和相质量通量仍采用方程 (8) 中的通量。

附录 D. 无黏湍流中的压力耦合比较

接下来，我们考察时间步内压力作用力的施加位置如何影响能量保持。在对比计算中，动量预估中不包含压力，之后再施加完整压力$-\Delta t G_c p^{n+1}$。在所提出的方法中，$-G_c p^n$ 在整个预测步中发挥作用，之后仅施加增量$-\Delta t G_c(p^{n+1} - p^n)$。我们分别将这两种方式称为完整压力和压力增量修正。两种计算采用相同的中心格式空间算子、初始场、$c = 640$、时间步上限2×10^{-5}以及 20 次压力迭代。通过 $t^* = 2$比较单相和两相调和平均情形。

表 D.1：压力耦合比较中 $t^* = 2$、64^3 网格单元上的归一化动能 K/K_0。声速、时间步和中心格式空间算子均相同。

Flow	完整压力校正	压力增量修正
单相	0.9990517375	0.9999999292
两相，调和平均	0.9964133792	1.0000001286

表 D.1 显示，完整压力校正在单相流中损失 $9.48 \times 10^{-4} K_0$，在两相流中损失 $3.59 \times 10^{-3} K_0$。采用压力增量耦合时，相应的能量变化为$-7.08 \times 10^{-8} K_0$和 $+1.29 \times 10^{-7} K_0$。因此，在这些匹配测试中，时间压力耦合将能量变化的幅度降低了四个数量级以上。两种变体中的空间对流均保持为中心格式，这表明若要保持低耗散，除了动量通量外，还必须关注压力耦合。

附录 E. 静态液滴中的寄生流与能量平衡

即使动量对流本身既不产生也不耗散动能，离散压力与毛细力之间的不平衡仍可能引发寄生流。本文采用密度比为 1000 的静止圆形液滴来测量这种残余运动，并评估调和本征密度插值相对于算术插值的影响。通过匹配的无粘计算，将残余能量输入与其粘性衰减区分开来；同时，压力跳跃和轮廓变形用于量化其对解析液滴的影响。

液体区域的半径为 $R = 0.1$ 米，位于边长为 1×1 米的正方形中心，边界为无滑移壁面。参考密度为$(\rho_1^0, \rho_2^0) = (1000, 1)$ 千克/米^3,，动力粘度为$(\mu_1, \mu_2) = (10^{-3}, 1.8 \times 10^{-5})$ 帕·秒，且 $\sigma = 0.0728$ 牛/米。重力和亚格子尺度应力均不存在。以 r 表示距液滴中心的距离，初始场为 $\chi = \{1 + \tanh[(R - r)/(2\epsilon)]\}/2$、 $\phi = \delta + (1 - 2\delta)\chi$、$m_\ell = \rho_\ell^0 \alpha_\ell$、 $\boldsymbol{u} = 0$以及 $p = 10^5 + (\sigma/R)\chi$ 帕。初始宽度与输运宽度满足 $\epsilon/h = 0.51$。该弥散拉普拉斯压力分布采用第2.4节的数值曲率和毛细力算子进行演化。

对于 $D = 2R$，定义 $\tau_\sigma = (\rho_1^0 D^3/\sigma)^{1/2} = 10.483$秒、 $U_\sigma = D/\tau_\sigma$以及$E_{\sigma,0} = 2\pi R\sigma$。初始圆形界面能量 $E_{\sigma,0}$ 用于归一化单位深度的动能，因为 $K(0) = 0$。在 32^2,64^2, 和 128^2 网格单元上的中心调和计算延伸至 $t/\tau_\sigma = 10$。它们采用 $c = 10$ 米/秒、 $\Gamma = 1.0192 U_{\max}$、式 (19) 中的 $(C_a, C_d, C_\sigma) = (0.2, 0.08, 0.1)$，以及分别为 5×10^{-4}、 2.5×10^{-4}和 1.25×10^{-4} 秒的时间步上限。在 64^2 网格单元上的三项对照分别将调和平均替换为算术平均、将两种黏度均设为零，或将时间步上限减半，并保留其余设置。

匹配的 64^2 调和平均和算术平均计算在所绘制的尺度下给出了无法区分的历程（图 E.1a、b）；它们在$K/E_{\sigma,0}$中的最大差异为 1.34×10^{-15}。因此，在该测试中，本征密度均值的变化不会对寄生运动产生可测量的影响。网格细化将最终压力跳跃误差从 14.47% 降至 2.65% 和 0.603%（图 E.1c）。该误差既包含有限界面宽度的影响，也包含曲率离散化误差。然而，峰值 $u_{\max}/U_\sigma$分别为 0.0352、0.0488 和 0.306；最大寄生速度并未随网格细化而降低。

在 128^2 个网格单元上，最强的运动位于液体轮廓之外，而液体区域仍近似呈圆形（图 E.1d）。在观测区间内，相对于等面积圆的最大均方根径向偏差为 R的 0.138%，轮廓面积的变化最多为 0.063%，相对于其

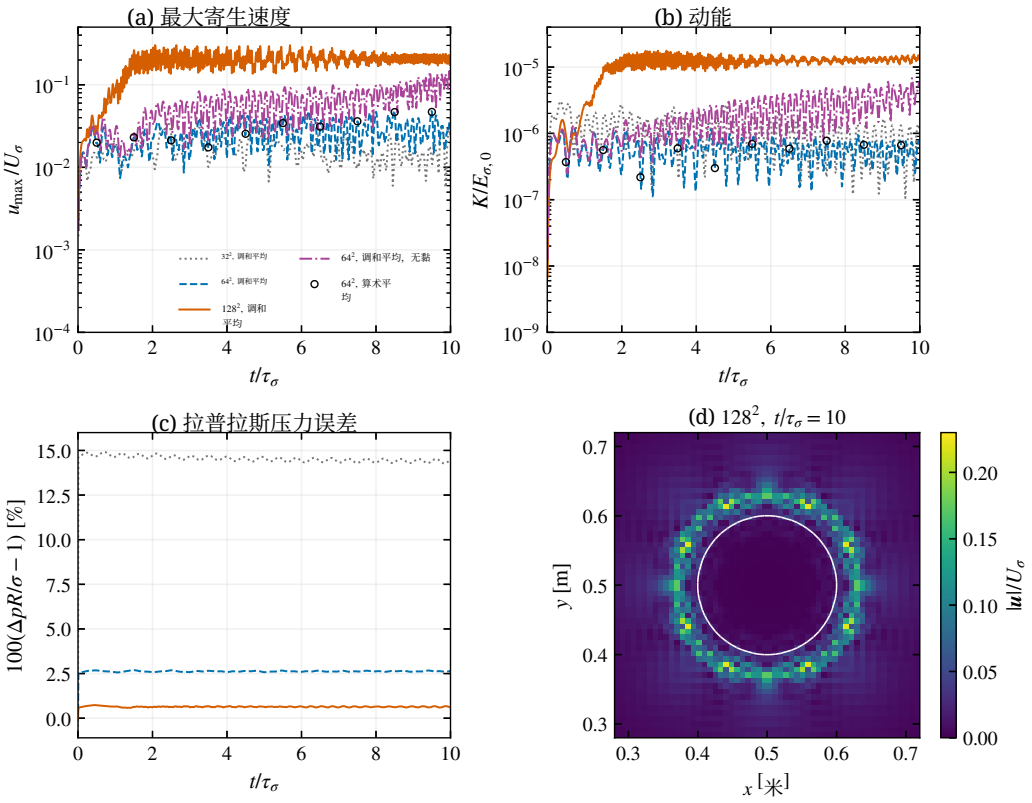


图 E.1：密度比为 1000 的静态液滴。(a) 最大寄生速度 $u_{\max} = \max_i |\boldsymbol{u}_i|$；(b) 动能；(c) 相对压力跃变误差，使用$\chi > 0.99$ 和 $\chi < 0.01$中的平均压力；(d) $t/\tau_\sigma = 10$时 128^2 个网格单元上的速度大小，白色为 $\phi = 0.5$等值线。H 和 AR 分别表示调和本征密度均值和算术本征密度均值。所有情况均采用中心动量输运。算术控制符号与64^2 调和平均历史曲线重叠。无黏性对照在两相中的黏度均为零。(c) 图比较了三种黏性调和网格。

初始值，以及 $K/E_{\sigma,\,0} < 1.79 \times 10^{-5}$。因此，尽管界面附近的局部速度较大，残余运动对解析液滴形状的影响仍然很小。

全离散预算说明了这种残余运动如何得以维持（表 E.1）。预测步中的压力功与毛细阶段能量变化各自都远大于二者之和。它们的符号取决于更新顺序，因此考察合并后的压力–毛细贡献。在 128^2 个网格单元上，$(W_{p,\,\mathrm{total}} + \Delta K_\sigma)/E_{\sigma,\,0} = 2.72 \times 10^{-4}$；分子黏度耗散了 2.57×10^{-4}，在 $t/\tau_\sigma = 10$时留下了 $K/E_{\sigma,\,0} = 1.49 \times 10^{-5}$。累积黏性损失是最终动能的 17。3 倍，而净对流功可以忽略不计。因此，剩余能量虽小，却反映了有限残余驱动力被黏性耗散的结果。

表 E.1： $t/\tau_\sigma = 10$ 时方程（39）中的静态液滴能量及累积贡献，按 $E_{\sigma,\,0}$ 归一化。所有列均采用中心格式对流和本征密度调和平均。最后一行报告观测区间内闭合残差绝对值的最大值。

贡献	64^2	128^2	64^2，无黏
K	6.827×10^{-7}	1.485×10^{-5}	5.643×10^{-6}
W_{adv}	8.678×10^{-26}	-2.553×10^{-24}	-1.957×10^{-25}
W_μ	-2.852×10^{-6}	-2.567×10^{-4}	0
$W_{p,\,\mathrm{RK}}$	5.5937777×10^{-3}	5.7037464×10^{-3}	5.5873527×10^{-3}
ΔK	-4.960×10^{-10}	-7.711×10^{-11}	-4.963×10^{-10}
$\Delta K_\sigma^{p,\,\text{相关}}$	$-5.5902419 \times 10^{-3}$	$-5.4321784 \times 10^{-3}$	$-5.5817094 \times 10^{-3}$
$R_{\mathrm{tr,time}}$	2.177×10^{-15}	3.420×10^{-15}	-1.891×10^{-15}
最大值$_t\,\lvert\varepsilon_K\rvert$	1.633×10^{-15}	1.394×10^{-13}	8.262×10^{-15}

将 64^2 时间步长上限减半后，$5 \le t/\tau_\sigma \le 10$ 范围内的平均 K 和平均 $u_{\max}$ 分别变化了 -0.142% 和 -0.0472%。所有六组计算在每个组分欧拉阶段均保持正相质量，积分相质量相对误差低于 8.1×10^{-14}。

在 64^2 个网格单元上不考虑黏度时，正的压力–毛细净贡献使 $K/E_{\sigma,\,0}$ 从 2.49×10^{-6}（$t/\tau_\sigma = 5$ 时）增至 5.64×10^{-6}（10 时）。最终压力增量修正的贡献较小且为负，而净对流功仍可忽略。因此，对流恒等式仍然成立，但无法阻止残余压力–毛细失衡向动能供能。这种残余运动限制了当前力离散方法在近乎静止的毛细流中的精度。

CRediT 作者贡献声明

Shintaro Matsushita： 概念化、数据整理、形式分析、经费获取、研究调查、方法学、软件、验证、可视化、撰写——初稿、撰写——审阅与编辑。**Suhas S. Jain：** 形式分析、方法学、监督、撰写——审阅与编辑。**Andrei G. Fedorov：** 经费获取、项目管理、资源、验证、撰写——审阅与编辑。**Tetsuya Suekane：**经费获取、监督、撰写——审阅与编辑。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在已知的、可能影响本文所述研究工作的财务利益冲突或个人关系。

数据可用性

本文所报告曲线和能量预算表所依据的数值数据，以及案例设置和后处理说明，将存放于 Mendeley Data：https://doi.org/10.17632/sdb8kgc3pt.1。由于存储空间需求，数据集中不包含完整的时间分辨三维体场。

致谢

本研究得到了日本学术振兴会（JSPS）科学研究费助成事业（KAKENHI）项目（编号：22H03770、22K14178 和 25K07582）的资助，以及日本科学技术振兴机构（JST）通过创新研究生态系统可持续合作伙伴关系计划（ASPIRE）提供的资助（项目编号：JPMJAP2407）。本研究使用了东京科学大学的 TSUBAME4.0 超级计算机。资助机构未参与研究设计、数据收集、分析或解释、稿件撰写，也未参与决定是否提交论文发表。

稿件准备过程中生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

在准备本研究期间，作者使用 OpenAI ChatGPT 和 Codex 辅助英文起草和编辑，以及数值结果的分析与可视化。使用这些工具后，作者对内容进行了必要的审阅和编辑，并对已发表文章的内容负全部责任。

参考文献

[1] M. S. Dodd, A. Ferrante，不可压缩两流体流动的快速压力修正方法，计算物理学杂志 273 (2014) 416–434。doi: 10.1016/j.jcp.2014.05.024。[2] Y. P. Sitompul, T. Aoki，适用于剧烈两相流的滤波累积量格子玻尔兹曼方法，计算物理学杂志 390 (2019) 93–120。doi:10.1016/j.jcp.2019.04.019。[3] M. Holzer, M. Bauer, H. Köstler, U. Rüde，通过代码生成在 CPU 和 GPU 上高效模拟高密度比下不相溶流体的格子玻尔兹曼多相流，The International Journal of High Performance Computing Applications 35 (4) (2021) 413–427。doi: 10.1177/10943420211016525。[4] S. Matsushita, T. Aoki，结合弥散界面方法的弱可压缩格式，用于低马赫数两相流，计算物理学杂志 376 (2019) 838–862。doi:10.1016/j.jcp.2018.10.019。[5] S. Matsushita, T. Aoki, 基于结合界面自适应AMR方法的弱可压缩格式的气液两相流模拟，计算物理学杂志 445 (2021) 110605。doi:10.1016/j.jcp.2021.110605。[6] K. Yang, T. Aoki，基于演化压力投影方法的弱可压缩纳维–斯托克斯求解器，用于两相流模拟，计算物理学杂志 431 (2021) 110113。doi:10.1016/j.jcp.2021.110113。[7] K. Yang, T. Aoki，一种动量守恒弱可压缩纳维–斯托克斯求解器，用于高密度比剧烈两相流模拟，International Journal of Computational Fluid Dyna mics 36 (9) (2022) 776–796。doi:10.1080/10618562.2023.2202391。[8] A. Melvin, J. C. Mandal，不可压缩两相流弱可压缩求解器的开发，计算物理学杂志 538 (2025) 114195。doi:10.1016/j.jcp.2025.114195。

[9] A. Melvin, J. C. Mandal，含表面张力弱可压缩两相模型的路径保守方法，计算物理学杂志 565 (2026) 115203。doi:10.1016/j.jcp.2026.115203。[10] S. Ghosal，大涡模拟中湍流数值误差的分析，计算物理学杂志 125 (1) (1996) 187–206。doi: 10.1006/jcph.1996.0088。[11] Y. Morinishi, T. S. Lund, O. V. Vasilyev, P. Moin，用于不可压缩流动的完全守恒高阶有限差分格式，计算物理学杂志 143 (1) (1998) 90–124。doi:10.1006/jcph.1998.5962。[12] Y. Morinishi，变密度低马赫数流动中对流项的斜对称形式与完全守恒有限差分格式，计算物理学杂志 229 (2) (2010) 276–300。doi:10.1016/j.jcp.2009. 09.021。[13] S. Mirjalili, A. Mani，利用相场方程模拟两相流的一致性、能量守恒动量输运，计算物理学杂志 426 (2021) 109918。doi:10.1016/j.jcp.2020.109918。[14] J. Manzanero, G. Rubio, D. A. Kopriva, E. Ferrer, E. Valero，具有分部求和性质的不可压缩纳维–斯托克斯/卡恩–希利亚德系统熵稳定间断伽辽金近似，计算物理学杂志 408 (2020) 109363。doi:10.1016/j.jcp.2020.109363。[15] Y. Kuya, K. Totani, S. Kawai，通过分裂对流形式构造适用于可压缩流的动能与熵保持格式，计算物理学杂志 375 (2018) 823–853。doi:10.1016/j.jcp.2018.08.058。[16] S. S. Jain, P. Moin，一种适用于可压缩两相流的动能与熵保持格式，计算物理学杂志 464 (2022) 111307。doi:10.1016/j.jcp.2022.111307。[17] S. S. Jain，用于两相流模拟的高精度守恒相场方法，计算物理学杂志 469 (2022) 111529。doi:10.1016/j. jcp.2022.111529。[18] H. Hwang, S. S. Jain，一种适用于非结构网格上两相流的稳健相场方法，计算物理学杂志 507 (2024) 112972。doi:10.1016/j.jcp.2024.112972。[19] C. De Michele, G. Coppola，基于调和平均的可压缩流新型压力平衡与动能保持通量，计算物理学杂志 518 (2024) 113338。doi:10.1016/j.jcp.2024.113338。

[20] L. H. Hatashita、S. S. Jain，《采用七方程和六方程模型的可压缩两相流弥散界面方法》，arXiv:2608.16750（2026年）。doi:10.48550/arXiv.2608.16750。网址：https://arxiv.org/abs/2608.16750[21] J. U. Brackbill、D. B. Kothe、C. Zemach，《一种用于表面张力建模的连续介质方法》，计算物理学杂志 100（2）（1992年）335–354。doi:10.1016/0021-9991(92)90240-Y。[22] S. Gottlieb、C.-W. Shu、E. Tadmor，《强稳定保持高阶时间离散方法》，SIAM评论 43（1）（2001年）89–112。doi:10.1137/ S003614450036757X。[23] G.-S. Jiang、C.-W. Shu，《加权ENO格式的高效实现》，计算物理学杂志 126（1）（1996年）202–228。doi:10.1006/jcph. 1996.0130。[24] U. Ghia、K. N. Ghia、C. T. Shin，《采用纳维–斯托克斯方程和多重网格方法求解不可压缩流的高雷诺数问题》，计算物理学杂志 48（3）（1982年）387–411。doi:10.1016/0021-9991(82)90058-4。[25] S. Hysing、S. Turek、D. Kuzmin、N. Parolini、E. Burman、S. Ganesan、L. Tobiska，《二维气泡动力学的定量基准计算》，《流体数值方法国际期刊》60（11）（2009年）1259–1288。doi:10.1002/fld.1934。[26] J. C. Martin、W. J. Moyce，《第四部分：刚性水平面上液柱坍塌的实验研究》，《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑：数学与物理科学 244（882）（1952年）312–324。doi:10.1098/rsta.1952.0006。[27] S. Koshizuka、Y. Oka，《用于不可压缩流体破碎的移动粒子半隐式方法》，《核科学与工程》123（3）（1996年）421–434。doi:10.13182/NSE96-A24205。[28] F. Nicoud、F. Ducros，《基于速度梯度张量平方的亚格子尺度应力建模》，《流动、湍流与燃烧》62（3）（1999年）183–200。doi:10.1023/A:1009995426001。