验证偏微分方程求解器的输出：从有限元到神经代理模型

Konstantinos
DovelosDovelos Engineering
konstantinos.dovelos@gmail.com

arXiv:2611.31211v1 [cs.CE] 23 Nov 2026

摘要

物理仿真的输出日益由无人审查的求解器生成，例如自动化流水线中的第三方软件包、大语言模型（LLM）编写的程序，以及学习型代理模型。在我们早先关于心脏脉冲场消融的工作中，我们提出求解器应在给出答案时同时返回一份证书。该证书由一个可容许势和一个严格守恒电荷的电流构成；一个小型独立检查器可据此，根据物理的书面规范给出有保证的误差界。在这里，同一检查器用于验证其他求解器对同一问题的输出。具体而言，FEniCSx 计算两个场，并获得与我们自己的求解器相同的误差界。我们在一个正确的求解器中植入了五种看似合理的程序错误，其中一种算出的阻抗与真实阻抗仅相差约 0.2%；它们全都收敛并通过网格收敛性研究，但证书拒绝或驳斥了这五种结果。在由大语言模型编写的三个求解器中，一个正确且获得了 0.1% 的认证，另一个从未求解方程，却能收敛。用于预测降阶基系数的神经网络会输出可容许场，并为每次预测提供有效的误差界：在训练范围内，区间宽度至多为 0.0021%；在范围外则为 0.3–25%，而 90% 的保形区间在 14 项测试中无一覆盖结果。未经调优、输出自由节点值的傅里叶神经算子只能得到有效但无信息量的误差界。在均匀网格上，将结果插值到证书网格会限制其效果；在证书网格上，薄单元会将微小的节点误差放大为巨大的能量误差。能量范数训练使认证区间缩窄十倍，而将节点损失输出投影到降阶基上，则使区间缩窄了二至四个数量级，但仍无信息量。该保证针对所述模型，对任何输出均成立，不受输入所在位置影响。只有当输出在能够分辨该问题的网格上具有准确的能量值时，这一保证才有参考价值。

关键词： 后验误差估计、代码生成、有限元方法、网格收敛指数、科学机器学习、验证数值计算。

1 引言

过去，偏微分方程（PDE）仿真都由专家逐个设置、划分网格并检查。如今，越来越少有专家逐一审查每次仿真。设计循环会在无人值守的情况下运行数千次仿真，工程师则要求大语言模型（LLM）编写

求解器，而学习型代理模型能在毫秒内预测完整场。这些情形都无法证明某个特定输出是准确的。

标准的证据形式无法涵盖这些情况。例如，代码验证（如使用制造解进行验证）可以证明代码能够在测试问题上正确求解方程，但无法说明某个特定输出的情况。网格收敛性研究（简称网格研究）以网格收敛指数（GCI） [1, 2], 为概要，估算具有代表性的案例中的离散化误差，并需要判断其趋势是否处于渐近范围内。它可以检验解是否收敛，但求解错误方程的求解器同样也会收敛。学习得到的代理模型没有可供细化的网格，因此网格研究并不适用。测试集保证和分割保形保证 [3] 是边际保证，只在对

校准分布进行随机抽样时平均成立，而非针对给定输入或分布偏移情形成立。一般而言，不存在与分布无关的条件覆盖率保证 [4, 5]。

在先前的工作中 [6], ，我们将“所述模型是否得到了正确求解？”这一问题与回答该问题的求解器区分开来。求解器返回的答案附带一份证书，其中包含一个满足规定电极值和接地值的势，以及一个严格守恒电荷的电流。一个小型独立检查器会根据物理书面规范验证该证书。通过在球算术中 [8], 计算 Prager–Synge 超圆 [7] ，它将证书转化为保证界。这些界属于经典的平衡通量类型[9, 10, 11, 12], ；该工作的贡献在于提供了一个检查器，能够针对给定输出独立于求解器对这些界进行严格计算。其数值实验主要依赖我们自己的求解器。

本文将未经修改的检查器应用于我们自己的求解器以外的求解器，在相同规范下进行验证，且不使用参考解。具体而言，本文提供了

- 来自 FEniCSx 的证书 [13], ——一个广泛使用的有限元程序包。在证书网格上，其原生证书获得的界与我们自己的求解器相同；在其自身网格上，则通过网格研究对其证书进行比较（第 4 节）；
- 正确求解器中五个看似合理的错误，以及由大语言模型编写的三个求解器。网格研究接受了六个能够运行的错误程序，而证书则会拒绝、驳斥或将它们逐一判定为未支持（第5节）；
- 采用一个或两个输入的学习型降阶代理模型，它们是用于预测适当正交分解（POD）基系数的神经网络。它们为每个预测生成完全可容许的证书，并给出有效界，无论预测位于训练范围之内还是之外；此外，还将这些结果与针对相同预测的保形区间和泛函上界进行比较（第 6节）；
- 具有自由节点输出的傅里叶神经算子（FNO）。在均匀网格上，它们受限于向证书网格的传递；而在证书网格上，较小的节点误差掩盖了能量精度不足的场。将其输出投影到POD基上，可使界缩小几个数量级，但仍不足以使其具有参考价值（第 6节）。

第 2节回顾了相关工作，第 3 节概述证书和检查器，并定义测试问题及可能的结果。该测试问题是线性、稳态、椭圆型且轴对称的，第7 节讨论了哪些内容可以推广到其他问题。

2 相关工作

计算机辅助证明使用区间算术计算超圆界 [14, 15, 16], ，平衡通量则通过对浮点数中得到的常规解进行后处理，为半线性问题的存在性和输出提供认证 [17]。已认证的降阶基方法通过内置于降阶模型中的误差估计量，对参数域上的输出进行界定 [18]。同期研究利用场相关电导率，对心脏脉冲场消融导管的病灶体积进行界定 [19]。在每种情况下，界都是在生成解的流程中计算的。我们的检查器是一个独立程序，仅读取规范和证书，如认证算法 [20] 以及用于浮点误差证书的小型已验证检查器 [21]。

对于神经偏微分方程求解器，先验结果界定了达到给定精度所需傅里叶神经算子的规模[22]及其在降低的浮点精度下的误差 [23], ，但它们并不界定给定预测的误差，而这正是后验界所做的。网络与神经算子可经训练输出附加场，再由廉价的后处理步骤据此计算出泛函误差上界，即误差的上界 [24, 25]。在主导项中，通量不必是无散的，其残差以Friedrichs型常数进入 [12]。物理信息神经网络亦存在严格上界，它们由控制动力学的性质导出 [26]。

上下界对任何其变分残差可被求值的近似都成立[27]。对网络范数的求积界与能量估计相结合，可给出与训练无关的验证算法 [28], 并且向外舍入的泰勒模型包络使求解障碍问题的网络的主导项成为严格的 [29]。自适应细化盒上的区间包络给出网络有保证的函数空间范数 [30], 并且区间算术将求解常微分方程的网络的后验界转化为机器可核验证明 [31]。对于神经算子，函数空间中的界传播在整个区域上认证残差和误差界 [32]。该方法需要神经网络的权重，并界定该神经网络能够输出的内容，而此处的证书只需要输出，并针对规范界定其误差。与本文证书最接近的是其场由构造即容许的网络。输出容许位移-应力对的物理信息网络在弹性力学中给出上界 [33], 并且具有精确无散速度和精确平衡应力的网络为幂律流动给出双侧能量包络 [34]。二者都涉及单个物理信息网络，且后者指出其界依赖于收敛的求积，而非区间包络。

大语言模型可以生成在代表性问题上表现良好的偏微分方程求解器 [35], ，但即使代码运行时没有错误，也仍可能求解错误的方程。在一个多物理场基准中，有39–40%的生成输入文件存在这种情况；研究者通过重建文件中编码的偏微分方程，并将其与预期方程进行比较，发现了这一问题 [36]。这类检查是结构性的，不会对输出误差给出界限。本文中的一个检查器无需修改，即可验证有限元程序包、大语言模型编写的程序、看似合理的程序错误以及学习型代理模型。该检查器独立于所有求解器，且其界限包含舍入误差。由于学习型降阶代理模型提供了完全可容许的证书，因此无需引入Friedrichs型常数。

3 方法与测试问题

我们首先概述 [6]的方法。规范规定了区域、电导率 σ以及 $\nabla\cdot(\sigma\nabla u)\;=\;0$ 中势 u的边界条件。证书由势 v 和电流 F组成。势在张量网格上是分片多项式，我们称之为证书网格；它在电极和地处取规定值。电流是分片多项式流函数 ψ的旋度，因此严格无散，且没有通量穿过绝缘壁。根据 $\|X\|^2=\int|X|^2\sigma^{-1}\,\mathrm{d}\mu$ 和$\mathrm{d}\mu=2\pi r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z$，超圆定理指出，$\sigma\nabla u$ 位于以 $c\;=\;(\sigma\nabla v+F)/2$ 为球心、以 $\eta/2$为半径的球面上，其中 $\eta=\|\sigma\nabla v-F\|$。该定理结合狄利克雷原理和汤姆森原理，可为电导以及每个损伤图单元的均方根场给出双侧界。损伤图单元是宽度为0.25毫米的一圈组织；根据其区间位于致死阈值（本例中为1000伏时700 V/cm）的上方、下方或跨越该阈值，分别判定为已证明致死、已证明未受损或尚未确定。 v的能量给出阻抗的下界，而 F 的能量给出其上界。

检查器执行两项测试。规格检查通过比较浮点值是否相等，精确验证可容许性。数值验证使用 256 位球算术包围每个单元积分，并界定数值误差。对于任何可容许证书，所得区间都包含所述模型的真实值。因此，错误的输出要么无法通过规格检查，要么运行报告的阻抗（我们称之为其主张）落在该区间之外，要么该区间过宽，无法支持此主张。使用 FEniCSx、合理的程序错误以及由大语言模型编写的求解器所进行的实验，均采用这个 256 位检查器。大多数代理实验涉及大量预测，因此改用 [6] 的向量化检查器；该检查器以双精度球算术复现其界限，耗时仅为我们的求解器同时处理两个场所需时间的 4–15%。

仅返回势的求解器可通过适配器转化为证书；适配器使用最小二乘法将流函数拟合到 $\sigma\nabla v$ 。适配器与任何求解器一样不受信任，它提供的电流会用于计算界。该拟合是向无散电流的投影，实质上是一种对偶求解，并且能从任意可容许势中得到近乎最优的电流。即使势在边界以外为零，其上界也等于真实阻抗，精确到

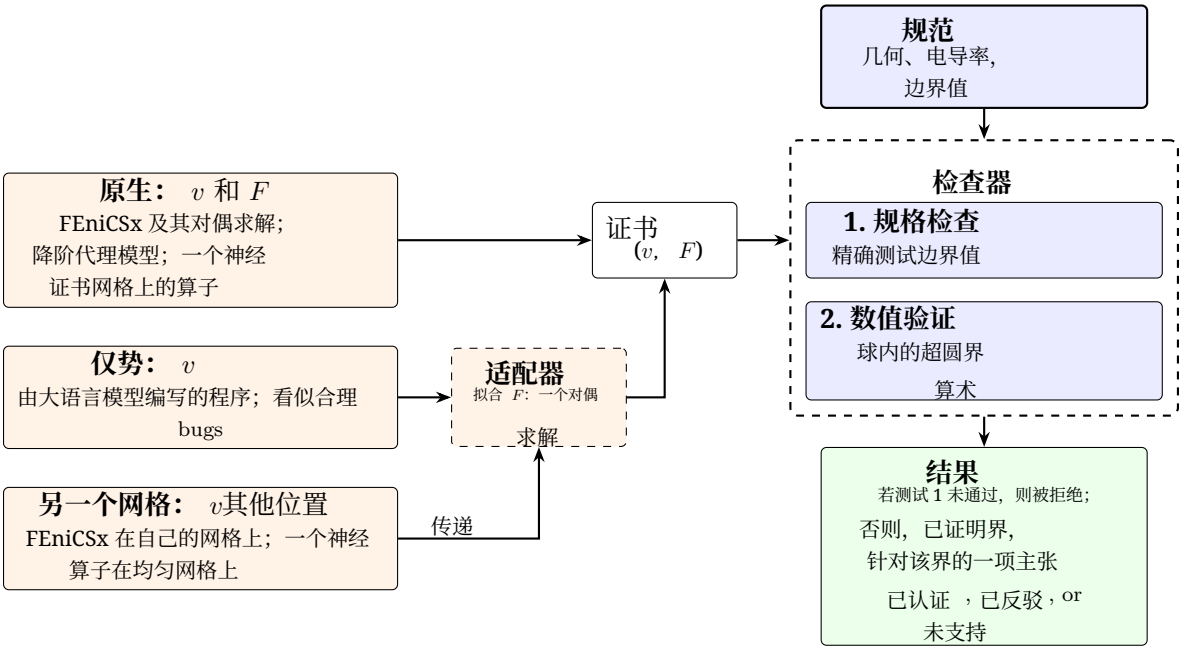


图 1：本文示例中，从求解器输出到检查器的三条路径。不可信组件（任何求解器、适配器以及任何传递过程）以橙色表示，可信组件以蓝色表示。原生证书同时提供两个场，适配器补全仅势输出，而适配器本身就是一次对偶求解；如果输出位于另一个网格上，则会先进行传递。检查器属于 [6]。未通过规格检查的证书将被拒绝。否则，数值验证会针对所述模型返回已证明界形式的结果，而主张则根据这些结果进行判定。

小数点后四位（第6.2节）。因此，对于仅势求解器，上界来自适配器；证书则通过势的能量（给出下界）以及 η来检验求解器。适配器的成本约等于一次原始求解。

图 1 展示了输出到达检查器的三种方式。求解器可以返回两个场，我们将其称为原生 证书。它也可以只返回证书网格上的一个势，由适配器完成证书。它还可以返回另一个网格上的场，此时必须先将其传递到证书网格上，并赋予精确的边界值。在每种情况下，检查器都会针对所述模型返回一个保证区间，而这些路径的差异仅在于哪些界来自求解器以及成本。

所有实验均使用 [6], 的单极损伤图问题：半径为1.25毫米、长度为3毫米的金属电极与心肌（$\sigma_t = 0.25\mathrm{S/m}$）接触，并处于血液（$\sigma_b = 0.7\mathrm{S/m}$，以binary64存储）之下，接地盒距其50毫米。其已认证阻抗Z为93.950 274 2 Ω至93.950 275 8 Ω（次数3， 169×332 个单元，界向外舍入），用作参考。我们的求解器证书在1 V下相对于 $\|c\| \approx 0.10$ 具有 $\eta = 1.3 \times 10^{-5}$，能量范数中的相对误差约为 10^{-4}，较大的 η 意味着场的精度较低。对于每次运行，区间仅由该次运行的场计算得出，随后将其所主张的阻抗与该区间进行比较。一次运行具有五种结果之一。若未产生有效输出，则崩溃；若其证书不可接受，则被拒绝。若其主张超出区间的相对量大于 10^{-6}（为其自身舍入所设的容差），则为已反驳；若主张位于区间之内，但区间未能将其证明到0.1%，则为未支持。否则，即为已认证。

4 FEniCSx 有限元程序包

FEniCSx 0.11 [13] 在独立环境中运行，仅通过文件与检查器交换数据。检查器发送规范，FEniCSx 则返回节点电位及其自身计算的阻抗，

表1：FEniCSx在其自身三角形网格上的势

FEniCSx	未知量	已认证阻抗（Ω）	η	分块，中位数	论断已证明
P2，0.25 毫米，1 µm 分级	21 591	93.80965–93.95028	4.0×10^{-3}	200%	no
P2，0.25 毫米，1 nm 分级	26 310	93.94985–93.95028	2.2×10^{-4}	32%	yes
P3，0.25 毫米，1 纳米分级	58 927	93.950272–93.950276	2.0×10^{-5}	3.0%	yes
证书网格，原生（Q3）	410 248	93.950274296–93.950275789	1.3×10^{-5}	1.9%	yes

第1–3行：来自适配器的电流。Pk：次数为 k的拉格朗日三角形；Q3：三次张量单元。分块：中位相对宽度。“论断已证明”：FEniCSx的阻抗已证明至 10^{-5}。界向外取整。

并在说明要求时返回流函数。在证书网格上，使用相同的三次张量单元（活动单元上有 410 248 个未知量），FEniCSx 在 1.9 秒内组装并求解势。与 [6], 中由适配器提供电流的情况不同，FEniCSx 在这里也求解对偶问题。再用 1.9 秒，它便在坐标（r^2， z）下的张量网格上，通过最小化流函数的互补能量来求解；流函数为多项式，并在轴线上设为零、在轴上设为常数。这个证书完全由 FEniCSx 根据我们的对偶表述组装并求解，得到 93.950 274 296 Ω 至 93.950 275 789 Ω 的范围，且$\eta = 1.3 \times 10^{-5}$与我们自己的求解器所得界限相同。其两端分别是 FEniCSx 的势能和电流能量；与 [6], 中一样，两个势之间的差异不超过 7×10^{-9}V。

在其自身网格上，FEniCSx提供了一种独立的离散化。Gmsh [37] 用朝两个电极角几何加密的三角形对几何进行网格划分。FEniCSx使用次数为 k的拉格朗日单元求解势，并在证书网格的节点处评估其解，电流由适配器提供（表1）。在 $k = 3$ 且分级至1 nm时， η为 2.0×10^{-5}，相比 1.3×10^{-5} 在证书网格上的结果，且未知量少七倍，尽管适配器仍在完整证书网格上工作。由于上界来自适配器，有信息量的部分是下界和 η。二次单元给出的 η 大十倍，且大多为未判定分块；分级仅至1µm时，该界仍然有效但较松。该证书针对在证书网格上评估的势，因此包含两种离散化之间的传递误差。

为与网格研究进行比较，我们将两组 Gmsh 网格按 2 倍因子细化，从 1 细化到 0。125 毫米，并根据间距调整分级斜率和远场增长。FEniCSx 在三个最细网格上的阻抗给出了 GCI [2], ，其按收敛比 R [38]进行分类。在加密至 1 纳米的三次单元上，该三元组以 4.8 阶收敛，且 GCI 与参考值一致。在未进行加密的二次单元上，按照典型用户对该问题进行网格划分的方式，该三元组单调收敛（$R = 0.47$），观测阶为 1.09。安全系数为 1.25 的 GCI 区间，即 93。5687 Ω 至 93。9499 Ω，仅差 4×10^{-4}Ω，未能覆盖真实阻抗。Roache 将系数 1.25 保留给观测阶与形式阶相匹配的情况 [1]。使用他更保守的系数 3 时，该区间包含真实值，因此 GCI 只有在采用这一安全系数时才成功。认证区间在两组网格的每一个网格上都包含真实值，这是必然的；而在未加密的网格组中，未决分块表明电极附近的网格不足。图 2展示了两组网格。

5 看似合理的程序错误与 LLM 编写的求解器

每个求解器接收相同的规范，该规范由偏微分方程、几何、边界条件和文件接口组成。它不会收到边界节点列表，因此定位这些节点是任务的一部分。每个求解器在临时文件夹中以三个系统细化的分辨率（1、0.5 和 0.25 毫米）运行，并将其势写入自身的张量网格。检查器结合来自适配器的电流，在该网格上以次数 1 认证此势，而三个网格上所主张的阻抗构成一项网格研究。

先前的工作 [6] 表明，网格研究会接受我们求解器的两个物理错误变体。在此，我们将五个看似合理的单行错误（包括那两个）应用到另一个正确的求解器，

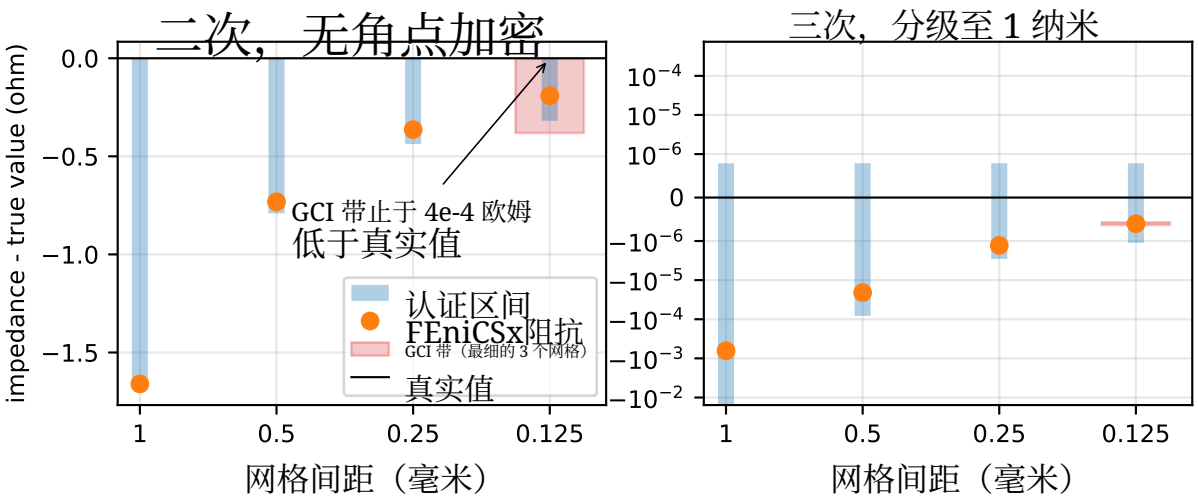


图 2：FEniCSx 在两个网格族上的阻抗、每个网格上的认证区间，以及相对于真实值的最细三个网格的 GCI 带。左图：未进行角点加密的二次单元，此时区间终点恰好低于真实值。右图（对称对数刻度）：加密至 1 纳米的三次单元，此时认证区间包含真实值，而位于其下方约 3×10^{-8} Ω 的 GCI 带则处于参考区间内。

表 2：正确求解器中可能存在的程序错误

单行错误	其阻抗（Ω）	网格研究	证书
顶部边界绝缘而非接地	94.16（偏差 0.2%）	收敛中，$R = 0.40$	被拒绝
仅电极的底面受驱动	390.9	收敛中，$R = 0.31$	被拒绝
组织和血液的电导率互换	136.7	收敛，$R = 0.45$	已反驳（88.62–93.98）
轴对称权重 r 缺失	0.393	收敛，$R = 0.29$	已反驳（40.34–93.98）
电流中缺少因子 2π	590.0	收敛，$R = 0.40$	已反驳（93.90–93.98）

即下文所述由 Claude Opus 5.5 编写的程序。表 2 给出了结果。五个变体全部收敛，因此网格研究接受全部五个，但证书能检出每一个。最难的情形是顶部边界保持绝缘而非接地。其阻抗与真实值相差约 0.2%，只有规格检查能将其暴露。若一项主张高于真实值，则该主张已反驳，依据是上界，而此处的上界来自适配器；若一项主张低于真实值，则该主张已反驳，依据是求解器自身势的能量。在 [6]，被交换的电导率属于未支持而非已反驳，因为求解器提供了自身电流，且该电流是用错误的电导率拟合的。在此，适配器使用所规定的电导率来拟合电流。

由大语言模型编写的求解器中，有两个程序来自本地开源模型（Qwen 3.8，27B 参数，通过 Ollama 接口运行，种子为 1 和 2，温度为 0.7，关闭推理模式）。另一个程序来自前沿模型（Claude Opus 5.5，在一个全新的 Claude Code 会话中运行，并提供了规范，同时指示其不要使用工具；采用默认采样设置，未设置种子）。这两种设置有所不同，而且仅有三个程序不足以估算发生率。表3总结了结果。

种子为 2 的 Qwen 程序设置了边界值，却从未将它们移到右端，因此求解的是一个齐次系统。每个自由节点的电压都是 0 V，电场在一个单元内就从电极电势降至零。它的边界值完全正确，因此势是可接受的；其主张随网格平滑变化，因此网格研究也会认可其收敛性。证书并不支持它的主张，而且其 η 比正确求解器的结果高出四个数量级。数量级检查或使用制造解进行代码验证也能发现这个程序，但数量级检查会漏掉上述五个程序错误中的四个。Claude 程序是正确的双线性有限元代码。其主张相对于严格下界低了 6×10^{-10}，这与其电流总和中的舍入误差一致

表 3：由语言模型编写的求解器

求解器	对其主张进行网格研究	证书、最细网格	正确 to 0.1%
Claude Opus 5.5 (88 行)	收敛（$R = 0.40$），band 包含真实值	已认证：主张 93.8997 Ω 已证明至 0.1%，$\eta = 3.0 \times 10^{-3}$	yes
Qwen 3.8, 种子 2（814 行）	收敛（$R = 0.44$，或低于 1.2），区间 5.5×10^{-5}Ω 至 7.1×10^{-5}Ω	未支持：6.3×10^{-5}Ω 至 93.98 Ω，$\eta = 126$	no（因子 1.5×10^{6}）
Qwen 3.8, 种子 1（542 行）	none	崩溃：奇异系统，非数值势，退出代码 0	no

。在七个成功运行的程序中，细化下的收敛性无法区分正确与错误的求解器，而证书无需参考解就做到了这一点。对于这些仅势能程序，其上界来自适配器的对偶求解。

6 学习型代理模型

检查器接受来自任意来源的可容许对，而代理模型可以通过图1所示的路径提供可容许对。对于原生证书，代理模型会预测证书网格上势和流函数的自由节点值，并精确施加边界值和壁值，因此证书完全由代理模型提供。单个输入为电导率比 ρ的降阶代理模型，以及双输入为 ρ和电极长度 L的降阶代理模型，采用原生路线（第 6.1 节）。均匀网格上的神经算子采用迁移路线（第 6.2 节），而证书网格上的神经算子则再次采用原生路线（第 6.3 节）。第 6.4 节将证书与保形区间和泛函上界进行比较，表 4 列出了训练细节。

6.1 降阶代理模型

第一个代理模型是一个基于降阶基 [40] 的神经网络，它将电导率比$\rho = \sigma_b/\sigma_t$ 映射为场。对训练解进行本征正交分解，得到势和流函数自由节点值的基；一个小型神经网络则将 $\log \rho$ 映射为 POD 系数以及阻抗的对数。电极值、接地值以及流函数的壁值均为精确值，因此每个预测都是完全由代理模型提供的证书，无需适配器。一次预测约需一毫秒，向量化检查约需一秒，因此检查是主要成本。

第二个代理模型有两个输入，ρ 以及电极长度 $L \in [2.5, 3.5]$毫米。改变L 只会移动组织上方的网格线，因此每个样本的证书网格都是针对$L = 3$毫米的网格，并对这些网格线进行分段线性映射，所有样本共用一个索引网格。在映射网格上，我们求解器的证书质量与原始网格上的相同（$\eta = 1.3\times10^{-5}$在 $L = 2$毫米时）。两个代理模型都在其训练范围内外进行了测试（表5）。

根据定理，每个区间都包含真实阻抗，这也可用于检验实现是否正确。在范围内，单个输入时阻抗可认证至 2×10^{-8}–2×10^{-5}，两个输入时可认证至 6×10^{-7}–2×10^{-5}。分片区间的变化更大：单个输入时，中位数宽度为 3–139%，因为每个分片都使用全局 η。两个输入时，在 12 个范围内测试中的 6 个测试里，1000 V 和 700 V/cm 处的损伤深度在轴线上由两侧夹定，分别是一个已证明致死的分片和一个已证明幸免的分片，并且每个夹定区间都与参考结果的夹定区间重叠。在范围内，η 在单个输入时为 2×10^{-5}–9×10^{-4}，两个输入时为 9×10^{-5}–1.1×10^{-3}。两个输入的训练场以单精度存储，因此存储的参考场本身也会产生 $\eta \approx 1.6\times10^{-4}$，而投影到 12 个模态会消除部分舍入误差。超出范围后，η 增长

表 4：代理模型及其训练

代理模型	训练数据	模型	损失函数和优化器	Cost
降阶阶，单个输入	17 个解，$\rho \in [1.7, 3.75]$	本征正交分解，每个场 6 个模态；神经网络 $1 \to 16 \to 16 \to 13$，tanh	标准化后的平方误差 POD 系数和对数阻抗；Adam，速率 3×10^{-3}，全批次，20 000 步数	1 s，CPU
降阶阶，两个输入	64个解，拉丁超立方中 $\rho \in [1.7, 3.75]$，$L \in [2.5, 3.5]$毫米	本征正交分解，每个场 12 个模态；神经网络 $2 \to 32 \to 32 \to 24$，tanh	标准化 POD 系数的平方误差；优化器与上述	1 s，CPU
神经算子，证书 grid	相同的 64 解，在 997×508 节点网格	傅里叶神经算子，48×24 模态，32 通道，4 层，2.6 百万参数；输入 $\log \rho$，L，节点坐标，掩码；输出 v 和 ψ	节点平方误差：Adam，批次 2，余弦调度，150 每隔一个节点训练若干轮 在 2×10^{-3} 处，然后在所有节点上训练 30 轮 节点位于 2×10^{-4} 处。能量误差（第 6.3节）：60 和在 10^{-3} 和 10^{-4}处训练 40 轮	46 和 38 分钟，GPU
神经算子，均匀网格	32 个解，$\rho \in [1.7, 3.75]$，在一个 256×512 网格	傅里叶神经算子，32×32 模态，32 通道，4层；输入 $\log \rho$、r、z，掩码；输出 v	区域上的平方误差以及电极；Adam，学习率 2×10^{-3}，余弦调度，批次 4，400 轮次	8.4 分钟，GPU

降阶网络以 NumPy 编写；神经算子使用 neuraloperator 库 [39]，并通过 PyTorch 在 MacBook Pro（M5 Pro，48 GB）的图形处理器上运行。训练解来自我们次数为 3 的求解器。

表 5：对每次预测的降阶代理模型进行认证

代理模型	测试	真实值位于认证区间内	认证宽度（相对值）	由势计算的阻抗误差	共形区间（90%）覆盖
单个输入	（6）内部	6	2×10^{-8}–2×10^{-5}	8×10^{-9}–1.2×10^{-6}	5
	（6）外部	6	0.8–15%	2.6×10^{-4}–1.3×10^{-2}	0
两个输入	内部（12）	12	6.4×10^{-7}–1.9×10^{-5}	1.1×10^{-7}–2.4×10^{-6}	12
	外部（8）	8	0.27–25%	1.4×10^{-4}–2.8×10^{-2}	0

单个输入：测试比值 1.8–3.6 在范围内，0.7–1.3 和 5–10 在范围外。两个输入：12 个随机成员在范围内；(ρ，L/毫米) = (0.7, 3)、(1, 3)、(5, 3)、(10, 3)、(2.8, 2)、(2.8, 4)、(0.7, 2)、(10, 4) 在范围外。保形区间：第 6.4节。

一个至三个数量级，区间仍然有效，而分块则变得无法判定。

单输入代理模型还会直接预测阻抗。这一输出在范围内的误差为 0.02–0.9%，在范围外为 19–140%；并且在每个测试点上都被反驳，反驳幅度远大于认证宽度。代理模型的场比其标量输出更准确，因此最好根据已认证的场读取阻抗。第一个版本将流函数的轴处数值与其邻近值分开预测，导致轴旁出现伪电流，并给出信息量不足的上界，而下界仍然准确。图 3比较了十二个测试比值上的认证宽度与两种误差。

6.2 均匀网格上的神经算子

未经调优的傅里叶神经算子 [41] 在 32 个比值上进行了训练，以将 $\log \rho$、r、z和区域掩码映射为整个区域均匀 256×512 网格上的势，网格间距为 0.2 毫米（表 4）。一次预测耗时 16 毫秒，最终训练损失相当于 1 V 场下约 0.6 mV 的均方根误差。该输出不满足可采纳性要求。因此，每次预测都先插值到证书网格上，再赋予精确的电极值和接地值：要么直接覆盖，要么将电极失配分摊到一个傅里叶神经算子网格间距内；随后使用适配器的电流完成计算。两个对照组也采用相同路径，即在同一均匀网格上采样的参考解和零场。表 6 总结了结果。

所有区间都包含真实值，且在下界一侧均不具信息性，而这正是

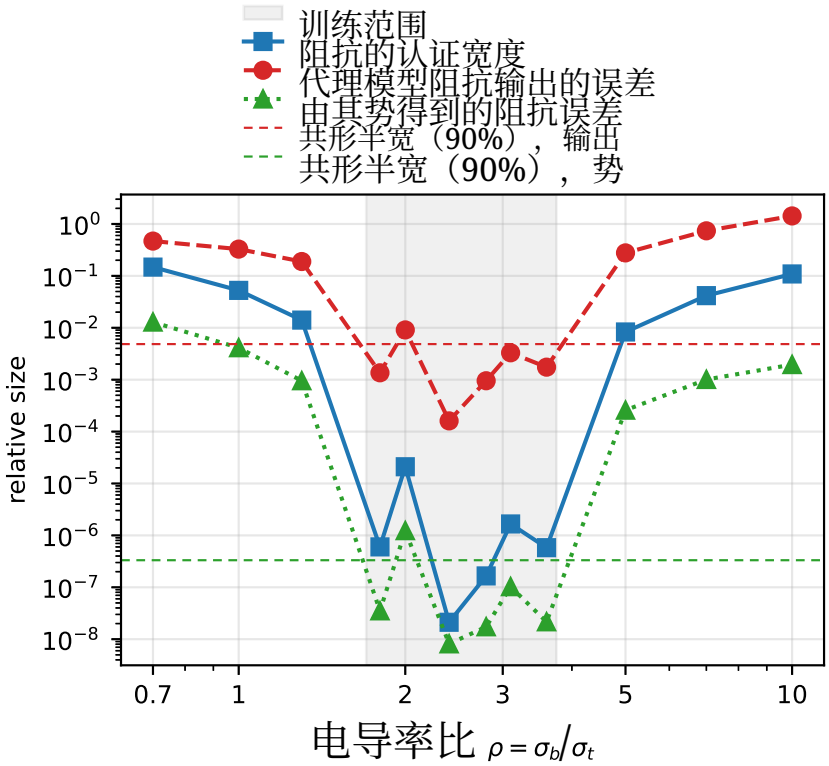


图 3：单输入降阶代理模型在 12 个测试比值下的表现。方块表示认证阻抗区间的相对宽度。圆圈表示代理模型自身阻抗输出的相对误差，三角形表示根据其势计算出的阻抗的相对误差，两者均以参考求解结果为基准。虚线表示围绕各自结果的 90% 保形区间的半宽，这些区间根据训练范围（阴影部分）内的 20 个比值进行校准。在此范围之外，两种误差均超过各自的共形半宽，而每个认证区间都包含真实值。

传递电势所确定的一侧。上界来自适配器，零场也获得了该上界。在同一网格上采样的参考解并不比傅里叶神经算子更好，因为在 0.2 毫米网格上采样无法解析电极边缘处的奇异场；此外，这种对照也刻意采用了悲观设置，因为我们将绝缘轴采样为 0 V。因此，限制因素是传递。采用这种传递时，在 0.2 毫米处采样的场都没有得到具信息性的界。与在同一均匀网格上、位于 $\rho = 2.8$ 处采样的参考场相比，傅里叶神经算子在距离电极 0.5 毫米处的平均误差多出 0.15 毫伏；但在距电极 0.5 毫米范围内，平均误差多出 16 毫伏，最大误差多出 64 毫伏。由远场主导的训练损失并未显示这些误差。第6.3 节避免了传递。

6.3 证书网格上的神经算子

不进行传递时，傅里叶神经算子（FNO）在证书的索引网格上运行；在该网格中，三次节点数组的节点 $(j,\ i)$ 就是一个网格点，无论其物理间距如何。它的谱卷积将该索引网格视为均匀网格，尽管从 1 nm 到毫米逐渐加密的网格远非均匀。我们的算子将以常数场形式给出的 $\log \rho$ 和 L，连同节点坐标和活动掩码，映射为势和流函数；它使用的训练样本与双输入代理相同，均为 64 个。前向传播后会精确施加边界值，因此每个预测都是一份证书，同样无需适配器。一次预测耗时 0。27 秒。

使用节点平方误差进行训练时，算子的节点误差很小：范围内测试的中位数为 0.36 mV，最大为 9 mV。尽管如此，在全部 20 次测试中均有效的每个认证区间，其宽度至少是阻抗本身的 10^{3} 倍，而阻抗

表 6：均匀网格输出，事后认证（12 个测试比值）

路径的输入	η	认证下界（Ω）	上界	分块
傅里叶神经算子，边界值已被覆盖	8.8–42	0.0006–0.013	= 真实值	未定
傅里叶神经算子，失配展宽	2.7–11	0.009–0.14	= 真实值	未定
在均匀网格上采样的参考值	10–38	0.0007–0.010	= 真实值	未确定
零场（仅边界值）	17–65	0.0002–0.0034	= 真实值	尚未确定

真实阻抗为 30 Ω 至 264 Ω；在证书网格上求解得到 $\eta \approx 10^{-5}$。

表 7：证书网格上的神经算子（训练范围内 12 项测试，范围外 8 项）

代理模型	η，范围内	宽度，范围内	Z 来自 v，内部	包含 Z
算子，节点损失	3.0–6.8	10^3–3.5×10^3	0.98–0.99	20 页，共 20 页
算子，能量损失	0.78–1.1	1.1×10^2–2.2×10^2	0.98	20 页，共 20 页
算子，投影后	0.037–0.18	0.16–4.0	–	20 项中的 20 项
降阶	8.8×10^{-5}–1.1×10^{-3}	6.4×10^{-7}–1.9×10^{-5}	1.1×10^{-7}–2.4×10^{-6}	20 项，共 20 项

宽度：认证阻抗区间的相对宽度； Z from v：由预测势的能量得到的阻抗相对误差；能量损失：在能量范数下微调后；投影后：使用节点损失训练、并投影到降阶代理模型的 12 个本征正交分解模态上的算子。所有情况使用相同的训练样本、测试数据和网格；在此网格上求解得到 $\eta \approx 10^{-5}$。

根据其势计算出的值低估了 98–99%（表7和图4）。问题出在证书网格上。该张量网格在电极角处加密至 1 nm，因此加密线贯穿整个区域；超过 9 000 个活动单元的厚度小于 10 nm，纵横比最高达 。在这些单元的大部分区域内，真实势的变化不到 1μV，因此，若单元两侧的节点误差相差 0.1 mV，便会在单元内产生 V/m 的伪场。求解器的场以及 POD 模态的任意组合在这些单元之间都保持一致，但对每个节点值分别自由预测的神经网络，其输出则未必如此。

随后，我们使用一种衡量证书所衡量内容的损失函数对算子进行微调，即衡量势误差的能量和流函数误差的互补能量，并在神经网络的输出中施加边界值。与场的能量相比，按训练场取平均后，势和流函数的误差能量分别从 78 和 1 700 降至 45 和 27， η则降低了四到六倍。两种误差仍远大于场本身的能量，因此微调后的算子依然不够准确，其界仍无法提供有用信息。

一个简单的后处理步骤是：对每个预测结果施加边界值，并通过对自由节点值进行最小二乘拟合，将其投影到训练解的前 12 个 POD 模态上。这些模态构成降阶代理模型的基。投影后的场在薄单元之间保持一致。对于采用节点损失训练的算子，认证宽度从 10^3–3.5×10^3降至阻抗的 0.16–4 倍，而 η 则降至 0.04–0.18。尽管如此，这仍不足以构成有意义的界限；不过，同一个基可以将投影后的参考场认证到 3×10^{-7}–3×10^{-6} （表 7）。POD 系数解释了其中的差异。在范围内测试中，参考系数在第四个模态之后降至 10^{-3} 以下；而算子的误差则在每个模态中都达到约 10^{-2} ，这些方向几乎不被解利用，却携带能量。增加模态数至 24 或 48 会使区间变宽；对于在能量范数下微调的算子，投影也会使区间变宽（$\eta = 15$–20）。降阶代理模型避免了这个问题，因为它的神经网络直接预测系数，并分别按各自的离散程度进行缩放。该投影最小化的是节点损失ℓ^2 范数，而非能量范数。有了这个基，无需任何神经网络，通过 12 模态伽辽金求解即可得到证书；因此，投影检验的只是算子自身的输出能否以低成本得到修正。

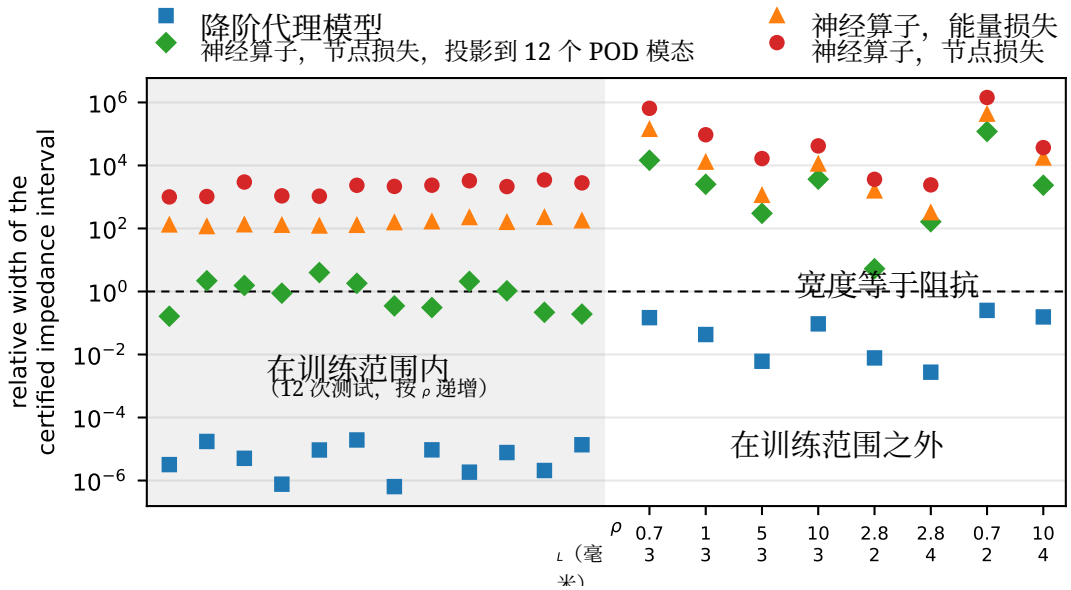


图 4：在证书网格上，双输入代理模型的 20 次测试中每次测试的认证阻抗区间相对宽度（阴影部分：位于训练范围内）。每个区间都包含真实阻抗。降阶代理模型在范围内的认证结果为 6×10^{-7}–2×10^{-5}，范围外为 0.3–25%。在范围内，神经算子在使用任一损失函数训练后，其区间宽度为阻抗的 10^{2} 至 3.5×10^{3} 倍；投影到降阶代理模型的 12 个 POD 模态后，区间宽度为阻抗的 0.16–4 倍。

6.4 共形区间与泛函上界

分割共形预测 [3] 利用训练分布中留出的样本，对点估计周围的区间进行校准。此处采用 90% 的名义覆盖率：单输入代理模型使用 20 个样本，双输入代理模型使用 24 个样本。在范围内，它覆盖了 6 个测试中的 5 个，以及 12 个测试中的 12 个。对于由势得到的阻抗，其区间宽度分别为阻抗的 6.6×10^{-7} 和 3.2×10^{-5}，与认证宽度相当。在范围外，14 个测试一个也未覆盖，因为那里的误差至少是校准半宽的 9 倍；而每个认证区间都包含真实值（表 5 和图 3）。对于采用节点损失和能量损失训练的神经算子，其估计值低估了 98%；在范围内，共形区间的宽度为阻抗的 1.8–3.6 倍，比其认证区间窄，分别覆盖了 12 个测试中的 12 个和 10 个。范围外，8 个测试一个也未覆盖。共形保证在校准分布上取平均成立，并未说明输入分布发生偏移时的情况；而证书对每个输出都成立。

针对神经解的学习上界方法 [24, 25] 评估泛函上界 [12]。对于可容许势 v 以及任意在绝缘壁处无通量的电流 y，其中y 不必是无散的，该上界指出 $\|\sigma\nabla(v-u)\| \le \|\sigma\nabla v - y\| + C_F\,\sigma^{-1/2}$ 最小 $\|\nabla\cdot y\|$，后者是未加权的 L^2 范数。穿过单极域的每条垂直线，其两端都终止于电极或地，因此弗里德里希斯常数 $C_F = H/\pi = 31.8$毫米成立，且这一结论是严格的；其中$H = 100$毫米为区域高度。我们通过对 $\sigma\nabla v$ 进行节点平均，从势恢复 y，并将其法向分量在轴线和轴处设为零，这是成本最低的选择；随后以双精度评估主导项。对于这里的任何代理模型，以及我们求解器自身的解，采用此电流得到的主导项都无法给出有限的阻抗上界。对于该解，其通量项 1.45×10^{-5}接近 $\eta = 1.30 \times 10^{-5}$，但相对于 0.10 的场范数，其弗里德里希斯项为 3.1×10^{3}。在 $\|\nabla\cdot y\|^2$中，99% 集中于电极-轴连接处的两个 1 纳米单元内，此处的势表现为距离的平方根；即使是距离两个角点均超过 1 毫米的单元，其弗里德里希斯项也为

1.5×10^{-3}，高出一百倍 η。学习得到、经过优化或局部平衡的电流 [10] 会降低这一项，但只有完全无散的电流才能将其消除；采用这样的电流时，主导项便退化为此处使用的超圆界。

7 讨论

实验区分了网格研究混为一谈的两个问题：离散化是否收敛，以及它是否收敛到所述问题的解。网格研究在其渐近假设范围内，并结合对安全系数的判断，可以回答第一个问题。由于它只将求解器与自身进行比较，因此无法回答第二个问题。五个看似合理的程序错误，以及一个由大语言模型编写、却从未求解该方程的求解器，都像正确的求解器一样实现了收敛。证书可以针对当前运行同时回答这两个问题，其宽度则反映该次运行的质量。因此，对于传统求解器，这两种方法互为补充：网格研究用于探索，证书则用于支持决策的运行。对于学习型代理模型，证书适用于任何输出；当场在证书网格上的能量精度较高时，证书也能提供有用信息。对于预测 POD 系数的网络，这一结论成立；但对于具有自由节点输出的神经算子，即使经过投影也不成立，因为它们的误差落在解几乎不会采用的方向上。

用户提供规范、一个张量网格（其网格线包含几何和分块的断点），以及势的节点值；如果求解器计算流函数，也需提供流函数的节点值。求解器在自身网格上计算网格节点处的势，并为边界节点赋予精确值；随后，适配器的成本约相当于一次原始求解。对 [6] 进行向量化检查时，检查两个场所需的时间占我们求解器运行时间的 4–15%，而对 FEniCSx 的 3.8 秒运行时间而言则约占 30%。为原生路线构建的代理模型会在网格上输出两个场，因此其证书只需一次前向传播和一次检查。

所选路径也决定了哪些界由求解器给出。能够返回两个场的求解器（如本例中的 FEniCSx，以及按构造即可输出两个场的降阶代理模型）会自行提供这两个界，因此能给出最有力、成本最低的证据。

证书只能界定数值误差；所述模型是否能描述组织，则属于验证问题 [6]。该测试问题是线性、稳态、椭圆型且轴对称的。超圆法依赖前三项性质，而轴对称性仅将问题简化为二维。在求解器自身网格上运行时，证书还会包含将其场传递到证书网格所引入的误差；若检查器针对求解器自身的单元进行检查，这部分误差便可消除。分块界使用全局 η，因此对局部量的认证不如收敛网格研究的估计那么紧；局部化界是当前最主要的待改进方向。三个由大语言模型编写的程序和五个看似合理的程序错误也构成一项案例研究，但数量不足以进行统计。神经算子在未经调优的情况下，分别使用 32 和 64 个样本进行训练。若神经算子基于与求解器相一致的基的系数进行训练，或者在没有细长薄单元的网格上运行，表现可能会更好；在节点 ℓ^2 范数下投影我们神经算子的输出，效果仍不够。检查器、我们的求解器和适配器共用一套规范中边界节点规则的实现，因此其中的错误会同时影响三者。在 [6]的假设下，向量化检查器具有严格的正确性保证。

在三维中，电流可以表示为 N´ed´elec 矢量势的旋度，从而使其在浮点运算中严格无散。随场增强而增大的电导率可使能量保持凸性，而凸对偶性则能由此给出同类证书 [12]。可以利用距离函数构造 [42], ，使代理模型输出可容许场；而针对四面体的向量化检查器，则可实用地检查包含数百万个单元的网格。

8 结论

未经任何修改的 [6], 检查器验证了我们自有求解器之外的求解器输出。它使用 FEniCSx 软件包自身的势和电流进行认证，其界限与我们自己的求解器一样严格。它

发现了五个看似合理的程序错误，以及一个经网格研究检验后被判定合格的大语言模型编写的求解器；它还将一个正确的大语言模型编写的求解器认证到 0.1%。对于降阶基上的神经网络的每个预测，它都给出了有效界限：在训练范围内界限很窄，在范围外也仍然有效，而保形区间在范围外失效。它还揭示了某些神经算子虽然节点误差很小，但场在能量意义上并不准确，即使投影到相同的基上也是如此。使用向量化检查器 [6]，检查原生证书的成本为求解器运行时间的 4–15%；仅势输出还需要适配器，耗时约相当于一次原始求解。

该检查无需专家或参考解，并且对每个输出都成立，无论其输入位于何处。只有当输出在能够解析该问题的网格上具有准确的能量时，这项检查才有参考价值；同时包含两个场的输出无需适配器。接下来的步骤包括第二个测试问题、局部化界、形式化验证的检查器以及三维证书。

代码可用性

检查器、求解器、存储的由大语言模型编写的程序及看似合理的程序错误，以及用于复现本文中每个数值的脚本，均可在 `https://github.com/kostisdov/certsim`（标签 `v2.0-preprint`）下依据 Apache License 2.0 许可获取。

参考文献

[1] P. J. Roache，《计算科学与工程中的验证与确认》。美国新墨西哥州阿尔伯克基：Hermosa，1998 年。[2] I. B. Celik、U. Ghia、P. J. Roache、C. J. Freitas、H. Coleman 和 P. E. Raad，《计算流体力学应用中离散化导致的不确定性的估计与报告程序》，*J.Fluids Eng.*，第 130 卷，第 7 期，文章编号 078001，2008 年，doi：10.1115/1.2960953。[3] A. N. Angelopoulos 和 S. Bates，《保形预测：浅显入门》，*Found.Trends Mach. Learn.*，第 16 卷，第 4 期，第 494–591 页，2023 年，doi：10.1561/2200000101。[4] V. Vovk，《归纳式保形预测器的条件有效性》，*Mach. Learn.*，第 92 卷，第 2–3 期，第 349–376 页，2013 年，doi：10.1007/s10994-013-5355-6。[5] R. Foygel Barber、E. J. Cand`es、A. Ramdas 和 R. J. Tibshirani，《分布无关条件预测推断的局限》，*Inf. Inference*，第 10 卷，第 2 期，第 455–482 页，2021 年，doi：10.1093/imaiai/iaaa017。[6] K. Dovelos，《基于证书的脉冲场消融模型验证》，arXiv:2611.18148，2026 年。[7] W. Prager 和 J. L. Synge，《基于函数空间概念的弹性力学近似》，*Quart. Appl. Math.*，第 5 卷，第 3 期，第 241–269 页，1947 年。[8] F. Johansson，《Arb：高效的任意精度中点半径区间算术》，*IEEETrans. Comput.*，第 66 卷，第 8 期，第 1281–1292 页，2017 年，doi：10.1109/TC.2017.2690633。[9] P. Ladev`eze 和 D. Leguillon，《有限元方法中的误差估计过程及其应用》，*SIAM J. Numer. Anal.*，第 20 卷，第 3 期，第 485–509 页，1983 年，doi：10.1137/0720033。[10]D. Braess、V. Pillwein 和 J. Sch¨oberl，《平衡残差误差估计具有 p-稳健性》，*Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*，第 198 卷，第 13–14 期，第 1189–1197 页，2009 年，doi：10.1016/j.cma.2008.12.010。[11] A. Ern 和 M. Vohral´ık，《适用于协调、非协调、不连续伽勒金方法及混合离散化的统一框架下的多项式次数稳健后验估计》，*SIAMJ. Numer. Anal.*，第 53 卷，第 2 期，第 1058–1081 页，2015 年，doi：10.1137/130950100。

[12] S. Repin，《偏微分方程的后验估计》。德国柏林：De Gruyter，2008 年，doi：10.1515/9783110203042。

[13]I. A. Baratta、J. P. Dean、J. S. Dokken、M. Habera、J. S. Hale、C. N. Richardson、M. E. Rognes、M. W. Scroggs、N. Sime 与 G. N. Wells，“DOLFINx：下一代 FEniCS 问题求解环境”，Zenodo，2023，doi: 10.5281/zenodo.10447666.[14] X. Liu 与 S. Oishi，“任意形状多边形区域上拉普拉斯算子的验证特征值计算”，《*SIAM* 数值分析期刊》，第 51 卷，第 3 期，第 1634–1654 页，2013，doi: 10.1137/120878446.[15] X. Liu、M. T. Nakao、C. You 与 S. Oishi，“斯托克斯方程有限元解的显式后验与先验误差估计”，《日本工业与应用数学期刊》，第 38 卷，第 2 期，第 545–559 页，2021，doi: 10.1007/s13160-020-00449-5.

[16] M. T. Nakao、M. Plum 和 Y. Watanabe，偏微分方程的数值验证方法与计算机辅助证明。新加坡：施普林格，2019，doi: 10.1007/978-981-13-7669-6。

[17] H. Ishizaka, “各向异性网格上半线性问题的低阶 CR–RT 平衡通量认证,” arXiv:2602.01636, 2026.[18] G. Rozza, D. B. P. Huynh, and A. T. Patera, “仿射参数化椭圆强制偏微分方程的降阶基近似与后验误差估计,”计算方法与工程档案, vol. 15, no. 3, pp. 229–275, 2008, doi: 10.1007/s11831-008- 9019-9.[19] H. Talleb, “pfa-guaranteed-lesion-volume：《心脏脉冲场消融有限元模型中病灶体积的保证界》代码,” Zenodo, 2026, doi: 10.5281/zen- odo.24128343.[20] R. M. McConnell, K. Mehlhorn, S. N¨aher, and P. Schweitzer, “认证算法,” 计算机科学评论, vol. 5, no. 2, pp. 119–161, 2011, doi: 10.1016/j.cosrev.2010.09.009.[21] H. Becker, N. Zyuzin, R. Monat, E. Darulova, M. O. Myreen, and A. Fox, “用于 Coq 和 HOL4 中有限精度误差界的经验证书检查器,” 收录于形式化方法与计算机辅助设计会议论文集（*FMCAD*）, 2018, pp. 1–10, doi: 10.23919/FMCAD.2018.8603019.[22] N. Kovachki, S. Lanthaler, and S. Mishra, “关于傅里叶神经算子的通用逼近与误差界,” 机器学习研究期刊, vol. 22, no. 290, pp. 1–76, 2021.[23] R. Tu, C. White, J. Kossaifi, B. Bonev, N. Kovachki, G. Pekhimenko, K. Azizzadenesheli, and A. Anandkumar, “混合精度神经算子的保证逼近界,” 收录于国际学习表征会议论文集（*ICLR*）, 2024, arXiv:2307.15034.[24] V. Fanaskov, A. Rudikov, and I. Oseledets, “神经函数后验误差估计,” arXiv:2402.05585, 2024.[25]V. Fanaskov, T. Yu, A. Rudikov, and I. Oseledets, “Astral：利用误差主界训练物理信息神经网络,” 发表于 ICLR 2026 AI&PDE 研讨会, arXiv:2406.02645.[26] B. Hillebrecht and B. Unger, “偏微分方程定义的物理信息神经网络的严格后验误差界,”*IEEE* 神经网络与学习系统汇刊, vol. 36, no. 1, pp. 1583–1593, 2025, doi: 10.1109/TNNLS.2023.3335837.[27] L. Ernst, N. Rekatsinas, and K. Urban, “偏微分方程近似的后验认证，特别应用于神经网络,” arXiv:2502.20336, 2025.

[28] E. Haugen, A. Stepanenko, and A. C. Hansen, “数值计算中的可信人工智能：关于基于神经网络的偏微分方程求解器的验证算法,” arXiv:2509.26122, 2025.[29]D. Damircheli, “抛物型障碍问题的认证神经逼近,” arXiv:2610.24202, 2026.[30] J. Gr¨undler, M. Maibaum, and P. Petersen, “深度神经网络函数空间范数的认证与精确计算,” arXiv:2603.06431, 2026.[31] K. Tanaka and K. Yatabe, “学习与验证：物理信息神经网络严格验证框架,” arXiv:2601.19818, 2026.[32] R. Hsiang, R. J. George, and A. Anandkumar, “神经算子的函数空间认证,” arXiv:2611.09038, 2026.[33]M. Guo and E. Haghighat, “弹性力学中物理信息神经网络解的基于能量的误差界,” 工程力学期刊, vol. 148, no. 8, Art. no. 04022038, 2022, doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0002121.[34] M. J. Bukhari, “Aequa：面向不可压缩幂律流动的间隙认证物理信息神经网络,” SSRN 预印本, 2026, doi: 10.2139/ssrn.7517498.[35] S. Li, T. Marwah, J. Shen, W. Sun, A. Risteski, Y. Yang, and A. Talwalkar, “CodePDE：一种由大语言模型驱动的偏微分方程求解器生成推理框架,” 机器学习研究汇刊, 2026, arXiv:2505.08783.[36] Z. Song, Y. Liu, C. Wan, C. Li, L. Liu, Y. Li, and C. Yuan, “仿真运行了，却求解了错误的物理问题：针对大语言模型生成的多物理场仿真代码进行基于偏微分方程的意图验证,” arXiv:2605.09360, 2026.[37] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, “Gmsh：具有内置前处理和后处理功能的三维有限元网格生成器,” 国际数值方法工程期刊, vol. 79, no. 11, pp. 1309– 1331, 2009, doi: 10.1002/nme.2579.[38] F. Stern, R. V. Wilson, H. W. Coleman, and E. G. Paterson, “计算流体力学仿真的验证与确认综合方法——第 1 部分：方法与流程,” 流体工程期刊, vol. 123, no. 4, pp. 793–802, 2001, doi: 10.1115/1.1412235.[39] J. Kossaifi, N. Kovachki, Z. Li, D. Pitt, M. Liu-Schiaffini, R. J. George, B. Bonev, K. Aziz- zadenesheli, J. Berner, V. Duruisseaux, and A. Anandkumar, “用于学习神经算子的库,”机器学习研究期刊, vol. 27, no. 205, pp. 1–6, 2026, arXiv:2412.10354.[40]J. S. Hesthaven and S. Ubbiali, “使用神经网络对非线性问题进行非侵入式降阶建模,” 计算物理学期刊, vol. 363, pp. 55–78, 2018, doi: 10.1016/j.jcp.2018.02.037.[41] Z. Li, N. Kovachki, K. Azizzadenesheli, B. Liu, K. Bhattacharya, A. Stuart, and A. Anand- kumar, “用于参数化偏微分方程的傅里叶神经算子,” 收录于国际学习表征会议论文集（*ICLR*）, 2021, arXiv:2010.08895.[42] N. Sukumar and A. Srivastava, “在物理信息深度神经网络中利用距离函数精确施加边界条件,” 计算力学方法与应用期刊, vol. 389, Art. no. 114333, 2022, doi: 10.1016/j.cma.2021.114333.