arXiv:2611.31218v1 [math.NT] 23 Nov 2026

整体函数域上的丢番图集合

HECTOR PASTEN 与 XAVIER VIDAUX

ABSTRACT. 设 $q \equiv 3 \bmod 4$ 为一个素数幂，并设 K 为有理函数域 $\mathbb{F}_q(t)$的有限可分扩张，其常数域为 $\mathbb{F}_q$。我们证明 $\mathbb{F}_q[t]$在 $\mathbb{F}_q(t)$中是丢番图的，且后者在 K中是丢番图的。我们由 Demeyer 的工作推出，K 具有 DPRM 性质：K 上的丢番图集合与可枚举集合相同。

1. INTRODUCTION

希尔伯特第十问题要求一种算法，用以判定丢番图方程在 $\mathbb{Z}$ 中的可解性。Davis、Putnam、Robinson 与 Matiyasevich [4, 11]给出的否定解答实际上给出的不止是不可判定性：$\mathbb{Z}^n$ 中的丢番图集合恰好是可枚举集合。

更一般地，我们称一个可枚举环 R 具有 DPRM 性质，如果（在 R上） R 的笛卡尔幂中的丢番图集合与可枚举集合相同。见 [13]。因此，$\mathbb{Z}$ 具有 DPRM 性质。

我们关注全局函数域的情形。设 q 是一个素数幂，$k = \mathbb{F}_q$，并且$F = k(t)$，其中 t 是一个独立变量。全局函数域 是指一个有限扩张 K/F，它是可分的，且常数域为 k。

首先，Pheidas [16]对 $k(t)$ 上的希尔伯特第十问题给出了否定答案，其中 k 是一个奇特征有限域。特征 2 的情形由 Videla [21] 解决，随后该方法得到扩展，涵盖了一般的全局函数域 [19]。然而，这种方法只能得到不可判定性，无法对丢番图集合进行分类。我们证明以下结果：

定理 1.1。 假设 $q \equiv 3$ 模 4。那么 $k[t]$ 在 $F = k(t)$中是丢番图的。

定理 1.2。 假设 $q \equiv 3$模 4，并设 K/F 是一个全局函数域。那么 F 在 K中是丢番图的。

由这两个结果，再利用 Demeyer [5] 的工作，立即可得：

定理 1.3. 假设 $q \equiv 3$模4，并设 K/F 为一个全局函数域。则 K 具有 *DPRM* 性质。

我们证明的核心是*Pheidas* 谓词这一概念，它仿照 Pheidas 的工作 [17]而建立。这一概念在围绕 $\mathbb{Q}$上的希尔伯特第十问题的所有近期进展中都处于核心地位，参见[12, 8, 2, 1, 9]。在 [12],之后，Pheidas 谓词的标准记号变为 Φ。

我们作若干评注。

- 我们对 Pheidas 谓词的构造遵循了继 [12]之后如今已成为标准的方法：取满足适当平方类条件的两条椭圆曲线上的点。正是在这里使用了 $q \equiv 3$ 模 4。

Date：2026年11月24日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类：11R58；次分类：11G05, 11U05。

Key words and phrases. 丢番图集合、函数域、希尔伯特第十问题。H.P. 得到来自智利的 ANID Fondecyt Regular 项目资助 1230507 的支持。X.V. 得到 Universidad de Concepci´on 的 Proyecto 2025001477INV 的支持。

- 我们的结果与 Koll´ar 在 $\mathbb{C}$上的结果形成鲜明对比，见 [10]：在我们的情形中，多项式在有理函数中是丢番图的；对于函数域扩张 K/F，我们有F 在 K中是丢番图的。

- 现在我们知道，根据 [8, 2, 1]， $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中是丢番图的。这是定理 1.1 的类比。
- 我们可以探讨定理 1.2 的算术类比： $\mathbb{Q}$ 在数域中是丢番图的吗？我们先前的工作 [14] 恰好探讨了这个问题，并给出了一个有条件的肯定回答。

- 在我们完成这项工作期间，我们从 Arno Fehm 处得知，他已经得到了定理 1.1 的一个版本，其中没有对 q施加同余限制。他的证明独立于我们的证明。他还针对 k（t）得出了本文未涉及的其他不可判定性和可定义性结果。感谢他与我们分享他的预印本。

我们在引言末尾提出一个问题：将 k 替换为 $\mathbb{F}_p$的代数闭包后，是否也能得到类似的结果?

2. The Pheidas predicate

本节与我们先前的工作 [14]基本一致。
设 K/F b e一个全局函数域。我们引入由下式定义的、 K 上的一元谓词 Θ

$$\Theta(b): \quad \exists \nu, \mu, \nu', \mu', y \in K \text{ with } y \neq 0 \text{ and}$$
$$\nu^2 + (b-1)\mu^2 = b, \quad \nu'^2 + (b-1)\mu'^2 = b, \quad \mu\mu'(1-b) = y^2.$$

引理 2.1. 设 v 为 K 的一个素位，且 $b \in K$ 满足 $K \models \Theta(b)$。若 $v(b) < 0$ ，则 $v(b)$ 为偶数。

证明。 这是一个利用赋值的初等验证，我们将其留给读者 . □

下面的关键命题有一个更为技术性的证明，我们将其留到第 5 节。正是在这里我们使用 $q \equiv 3$模 4。

命题 2.2. 假设 $q \equiv 3$模 4。设 $b \in k[t]$ 的次数为偶数且 $v_t(b) = 1$。则$F \models \Theta(b)$

我们使用的 Pheidas 谓词是定义在 K 上的一元谓词 Φ ，定义如下:

$$\Phi(b): \quad b \in k \text{ or } \Theta(t^\epsilon b - a_0 - a_1 t) \text{ for some } \epsilon \in \{0,1\} \text{ and } a_0, a_1 \in k.$$

由 Φ定义的 K 子集也记作 Φ。

Th定理 2.3（Pheidas 谓词的性质）。 假设 $q \equiv 3$ 模 4。则 :
（Ph1） $k[t] \subseteq \Phi$（Ph2）存在 K的一个有限素点集，记为 S_Φ，使得若 $b \in \Phi$ ，则对每个满足 $v(b) < 0$ 的 $v \notin S_\Phi$，都有 $v(b)$ 为偶数。

证明。 这可由本节前面的结果直接得到。 □

3. Defining the rational functions

令 $n = [K: F]$。对于 $x \in K$，将其高度定义为 $h(x) = n^{-1} \deg((x)_\infty)$，并且

$$N^{(1)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{v_\mathfrak{p}(x) > 0} \deg \mathfrak{p}.$$

引理 3.1（弗罗贝尼乌斯关系）。 集合 $\mathscr{P} = \{(u, u^{p^j}): \ u \in K, j \geq 0\}$ 在K中是丢番图集。此外，对于每个 $s_0 \geq 0$ ，集合 $\mathscr{F} = \{(x, x^{q^s}, t^{q^s}): \ x \in K, s \geq s_0\}$ 在 K中是丢番图集。

证明。关于 $\mathscr{P}$，参见 [16, 19]。

令 $t_0 = t^{q^{s_0}}$ 并选择 $k = \mathbb{F}_p(\zeta)$，其中当 $k = \mathbb{F}_p$ 时有 $\zeta = 1$。条件 $(t_0,\ T),\ (t_0+\zeta,\ T+\zeta) \in \mathscr{P}$ 恰好选出满足 $s \geq s_0$ 的 $T = t^{q^s}$。事实上，比较 t_0 中的次数可知，两个 p 次幂必须相等；比较常数则可知，该幂必须固定 ζ。

为使 x 和 t 的幂同步，从而得到 $\mathscr{F}$，利用 $\mathscr{P}$ 以及赋值环是丢番图 [6] 这一事实即可轻松做到。□

下一个引理是可分映射的黎曼–赫尔维茨公式的一个标准应用。关于 abc 猜想下的算术类比，参见 [14]。

引理 3.2 (梅森–斯托瑟斯)。令 g 为 K 的亏格。考虑一个次数为 d 的无平方因子多项式 $G \in k[X]$，并令 $x \in K \setminus K^p$。则

$$N^{(1)}(G(x)) \geq (d-2)h(x) - \frac{2g-2}{n}.$$

令 L/K 为伽罗瓦群为 Γ、常数域为 k_L 的 K/F 的伽罗瓦闭包。定义 $f = [k_L :\ k],\ \ m = [L :\ Fk_L]$，于是 $|\Gamma| = mf$。给定在 k_L 上通过 $z \mapsto z^{q^s}$ 作用的 $s \geq 1$ 和 $\tau \in \Gamma$，令 $Q_s(\tau)$ 表示 L 的素点集合，该集合由 L/F 中弗罗贝尼乌斯为 τ、且位于 $k[t]$ 的一个次数为 s 的素数之上的非分歧素理想组成。

以下是在函数域情形下对切博塔廖夫定理的应用，参见 [7]。

引理 3.3 (切博塔廖夫)。存在一个常数 c_L，使得

$$\sum_{\mathfrak{P} \in Q_s(\tau)} \deg \mathfrak{P} \geq fq^s - c_L q^{s/2}$$

对所有先前选取的 s 和 τ 都成立。

选取一个固定的、次数为 $d \geq 2m+5$ 的无平方因子 $G \in k[X]$，并令 $s_0 \geq 1$。定义一元谓词 $\Psi(x)$，要求 $x \notin K^p$ 成立，且存在某个 $w,\ T,\ M \in K$ 满足

$$(x, w, T) \in \mathscr{F}, \quad (T-t, M) \in \mathscr{P}, \quad \frac{(w-x)^2}{T-t} \in \Phi, \quad \frac{M^2}{G(x)} \in \Phi. \tag{3.1}$$

根据引理 3.1 和分解 $K = \bigoplus_{i=0}^{p-1} K^p t^i$，谓词 Ψ 是丢番图的。

引理 3.4. 每个 $a \in k[t] - F^p$ 都满足 Ψ（在 K 上）。

证明。K/F 的可分性给出 $a \notin K^p$。选取一个 $s \geq s_0$，使其能被 $G(a)$ 的所有不可约因子的次数整除，并令 $p^j \geq \deg G(a)$。对于选择的 $T = t^{q^s}$，每个这样的因子都整除 $T-t$，因此 $G(a)$ 整除 $(T-t)^{p^j}$。此外，$T-t$ 整除 $a \circ T - a = a^{q^s} - a$。因此，(3.1) 中的两个分式都属于 $k[t] \subseteq \Phi$。□

引理 3.5. 存在一个常数 c_1，使得

$$(d-4)h(x) \leq q^s + c_1$$

每当 $x \in K \setminus K^p$、$s \geq 1$ 和 $j \geq 0$ 满足 $M^2/G(x) \in \Phi$ 时，其中 $M = (t^{q^s} - t)^{p^j}$。

证明。除 S_Φ 外，$G(x)$ 的每个奇数阶零点都整除 $t^{q^s} - t$：否则 $M^2/G(x)$ 在该处就会有奇数阶极点。这些素数的次数总和为 $\leq nq^s$。将每个偶数阶零点按不超过其重数一半计数，可得

$$N^{(1)}(G(x)) \leq \frac{1}{2}h(G(x)) + \frac{1}{2}q^s + c_\Phi = \frac{d}{2}h(x) + \frac{1}{2}q^s + c_\Phi, \qquad \text{where } c_\Phi = \frac{1}{n}\sum_{\mathfrak{p} \in S_\Phi} \deg \mathfrak{p}.$$

引理 3.2 给出了关于 $c_1 = 2c_\Phi + \frac{4g-4}{n}$ 的断言。□

引理 3.6。 如果 s_0 足够大，那么每个满足 $K \models \Psi(x)$ 的 $x \in K$ 都属于 F。

证明。令 c_S 为 S_Φ中某个素数在 L 上的素数的次数之和。由于$d-4 > 2|\Gamma|/f$，我们可以选取满足以下条件的 s_0：对每个 $s \geq s_0$:

$$2|\Gamma|\frac{q^s + c_1}{d-4} < fq^s - c_L q^{s/2} - c_S. \tag{3.2}$$

假设 $\Psi(x)$ 在 $T = t^{q^s}$ 下成立。固定一个 τ，它通过 q^s-弗罗贝尼乌斯作用于 k_L。对于远离 S_Φ 的 $\mathfrak{P} \in Q_s(\tau)$，定义 $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K$。非分歧性给出 $v_\mathfrak{p}(T-t) = 1$。因此，(3.1) 中的第一个分式具有奇数赋值，根据 (Ph2)，该赋值必为正。由此可知，x 在 $\mathfrak{P}$ 处是整的，且 $\tau x \equiv x^{q^s} \equiv x$ 模 $\mathfrak{P}$。若 $\tau x \neq x$，则 $\tau x - x$ 的零因子由引理 3.3 知次数为 $\geq fq^s - c_L q^{s/2} - c_S$，其极因子的次数至多为 $2|\Gamma|h(x)$。这与 (3.2) 和引理 3.5 矛盾。因此，固定 x 的元素集合 τ（它是 Γ 的一个子群）包含 Γ 中 $\mathrm{Gal}(L/Fk_L)$ 的一个完整陪集，进而也包含该子群本身。因此 $x \in Fk_L \cap K = F$，因为 K 的常数域为 k。□

定理 *1.2* 的证明。 对于该 s_0，引理 3.4 和 3.6 给出

$$k[t] - F^p \subseteq \mathscr{D} := \{x : K \models \Psi(x)\} \subseteq F^\times.$$

对于非零的 a，$b \in k[t]$，每条 F^p-直线 $a^{-1}F^p$ 与 $b^{-1}F^p$ 至多包含 1，t，$t+1$ 中的一个。我们在这三者中选取位于两条直线之外的 c。于是 ca，$cb \in \mathscr{D}$，从而我们推出

$$F = \{0\} \cup \{u/v : u, v \in \mathscr{D}\}$$

在 K 中是丢番图的。 □

4. Defining the polynomials

在本节中 $K = F$。对于满足 $v_\infty(z) \leq 0$ 的 $z \in F^\times$，令 $\delta(z) = -v_\infty(z)$；于是对$z \in A \setminus \{0\}$，$\delta(z) = \deg z$。

引理 4.1（次数）。 设 $\rho \subseteq \mathbb{N}^r$ 为一个递归可枚举关系。则所有 $(z_1, \ldots, z_r) \in (F^\times)^r$，其中对所有 i 有 $v_\infty(z_i) \leq 0$，并且 $\rho(\delta(z_1), \ldots, \delta(z_r))$，在 F 上是丢番图的。

证明。 考虑在正整数上由条件“存在 $i \geq 0$，使得 $t = p^i s$”定义的关系 $s|_p t$。Pheidas 的一个定理表明，$P = (\mathbb{N}, 0, 1, +, |_p, =)$ 正存在地定义了乘法 [15]。素数处的局部环在 F 中是丢番图的，因此通过 [6], 运用引理 3.1，可经由 δ得到 P 的正存在解释。由 $\mathbb{Z}$的 DPRM 性质即可得出结论。□

定理 *1.1* 的证明。 固定 G和 c_1，如第 3 节中所述，并满足 $K = F$。对于 s_1，$s \geq 1$要求 s能被不超过 $q^{s_1} + c_1$的每个正整数整除。这是关于数对 (q^{s_1}, q^s) 的递归可枚举条件。令 $\Xi(x)$为 F上的一元关系，要求 $x \notin F^p$, x 在 S_Φ中的有限素数处为整，并且对某个 s_1，s 如前所述，以及某个 $j \geq 0$,

$$\frac{(t^{q^{s_1}} - t)^{2p^j}}{G(x)} \in \Phi \text{ and } (t^{q^s} - t)x^2 \in \Phi. \tag{4.1}$$

这是丢番图问题：引理 3.1 定义所需的幂，引理 4.1 对 $(\delta(t^{q^{s_1}})\ \delta(t^{q^s}))$ 施加条件，而 [6] 给出了必要的整性。

对于 $x \in k[t] \setminus F^p$，按照引理 3.4 选取 s_1，j 以及适当的 s；(4.1) 中的两个表达式都属于 $k[t]$。反过来，若 $\Xi(x)$ 成立，则由引理 3.5 可得 $h(x) \leq q^{s_1} + c_1$。π 的任何有限极点的次数都整除 s，因此 $v_\pi(t^{q^s} - t) = 1$。(4.1) 中的第二个表达式在 π 处有一个奇数阶极点，这迫使 $\pi \in S_\Phi$，且 x 是整的。因此，Ξ 定义了 $k[t] \setminus F^p$。由于$k[t] = k \cup \{y^{p^j} : \Xi(y)$ 且 $j \geq 0\}$ 是丢番图的，结论成立。□

5. The elliptic curves argument

从现在起，我们假设 $q \equiv 3$ 模 4，因此 -1 在 k 中不是平方。本节的目标是证明命题 2.2。

5.1. 两个四次曲线。 设 $c = 1 - b$。若 c 是一个平方，则取 $\nu = \nu' = \mu = \mu' = 1$ 和 $y^2 = c$。因此，从现在起，我们可以假设 c 不是一个平方。

我们断言，对于某个 $\lambda \in F^\times$，以下方程

$$N^2 = bU^4 + c\lambda^2, \text{ and } N'^2 = bU'^4 + c^3\lambda^2 \tag{5.1}$$

有满足 $UU' \neq 0$ 的解。事实上，可以看出，取

$$(\nu, \mu) = \left(N/U^2, \lambda/U^2\right), \text{ and } (\nu', \mu') = \left(N'/U'^2, c\lambda/U'^2\right) \tag{5.2}$$

满足 Θ 的定义，其中 $y = c\lambda/(UU')$。我们通过构造 $D = b(b-1)\lambda^2$ 来证明这一断言，使得 D 和 Dc^2 都满足同一个四次曲线可解性判据。

5.2. 有理点判据。 对于 $D \in F^\times$，我们考虑定义在 F 上的椭圆曲线

$$E_D : y^2 = x^3 - Dx \text{ and } E'_D : y^2 = x^3 + 4Dx.$$

$\hat{}$ 设 $\phi\colon E_D \to E'_D$ 和 $\phi\colon E'_D \to E_D$ 为核为 $\{O, (0,0)\}$ 的同源。对于 $D, d \in F^\times$，令 $C_d(D)$ 为四次曲线

$$N^2 = dU^4 - (D/d)V^4,$$

with $(U, V) \neq (0, 0)$。定义 $S(D)$ 为使 $C_d(D)$ 处处局部可解的类 $[d] \in F^\times/F^{\times 2}$ 的集合，并令 $S'(D) = S(-4D)$。由下降理论可知它们是群。

引理 5.1 (有理点判据)。若 D 和 $-D$ 均为非平方数，且 $|S(D)| = 4$ 且 $|S'(D)| = 2$，则每条满足 $[d] \in S(D)$ 的 $C_d(D)$ 都具有一个 F-有理点。

证明。</style>点和 (0,0) 在每个下降像中给出两个类。因此，$S'(D)$ 完全由全局元素表示，而 $S(D)$ 除有理点像外至多还有一个陪集。就对偶 2-同源 ϕ 和 $\hat{}\,\phi$ 而言，这意味着 $\#Ш(E_D)[\phi] = 0$ 且 $\#Ш(E'_D)[\hat{}\,\phi] \leq 2$。由等变性 [20]，2-主群 $T = Ш(E_D)[2^\infty]$ 和 $T' = Ш(E'_D)[2^\infty]$ 均为有限群。因此，$\hat{}\,\hat{}\,\phi\colon T \hookrightarrow T'$，因为 $Ш(E_D)[\phi] = 0$，且 $|\ker(\phi_*\colon T' \to T)| \leq 2$。由于 $T[2] \hookrightarrow \ker \phi_*$ 的阶由交替的 Cassels–Tate 配对可知为平方数，故得 $T[2] = 0$，进而得 $T = 0$。于是 $T' = \ker \hat{}\,\phi_*$ 的阶也是不超过 2 的平方数，因此 $T' = 0$。下降正合列证明了该断言。□

5.3. 局部条件。 设 v 是 F 的一个素位。定义 $H_v = F_v^\times/F_v^{\times 2}$、$U_v \subset H_v$ 为单位类，并分别定义 $W_v(D)$、$W'_v(D)$ 为 $S(D)$、$S'(D)$ 的局部像。对于 $D = \varpi^e u$（u 是单位，ϖ 是 v 处的一致化子），可计算得

	$W_v(D)$	$W'_v(D)$
$e \equiv 0$ (模 4)	U_v	U_v
e 奇数	$\langle[-D]\rangle$	$\langle[D]\rangle$
$e \equiv 2$ 模 4，u 平方	H_v	$\{1\}$
$e \equiv 2$ 模 4，u 非平方数	$\{1\}$	H_v

(5.3)

其中最后两行要求 -1 在剩余域中不是平方（因为 $q \equiv 3 \bmod 4$）。将 $2v(x)$ 与 $v(D)$ 在 $y^2 = x(x^2 - D)$ 中比较，并利用 $|W_v(D)|\,|W'_v(D)| = 4$（作为 $\hat{}\,\phi\phi = [2]$），即可得出这一结论。对于 $e \equiv 2 \bmod 4$，检查 $v(x) = 1$ 即可；当 u 是平方时，可以取点 $(\varpi\sqrt{u}, 0)$。在每种情况下，都可见 $W_v(D)$ 与 $W'_v(D)$ 在希尔伯特符号下正交。

5.4. 对 D 的选择。 令 γ 为 $b(b-1)$ 的首一无平方因子代表元，并令 B 为其支撑。设 $\Omega = \langle [b],\ [c] \rangle = \langle [b],\ [-\gamma] \rangle$ 和 $\Omega' = \langle [\gamma] \rangle$，注意它们的维数分别为 2 和 1。由于 γ 在无穷远处是局部平方，我们可以选取 $a \in \{0,1\}$，使 $\deg(\gamma) + 2a \equiv 2 \bmod 4$，并令 $D_0 = \gamma t^{2a}$（这里用到了 b 的次数为偶数这一事实）。表 (5.3) 给出

$$(W_v(D_0), W_v'(D_0)) = \begin{cases} (\langle [-\gamma] \rangle, \langle [\gamma] \rangle) & (v \in B), \\ (H_\infty, \{1\}) & (v = \infty), \\ (U_v, U_v) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此 $\Omega \subseteq S_0 := S(D_0)$ 和 $\Omega' \subseteq S_0' := S'(D_0)$：在 B of b（分别为 c）中的素因子处，元素 c（分别为 b）是局部平方。这些群是有限的；根据 t和 ∞处的条件，分别排除了 $[-1]$。

选取 $\delta_1, \ldots, \delta_r$ 以及 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$，作为 S_0/Ω 和 S_0'/Ω' 的基的提升。二次互反律和狄利克雷定理 [18]给出互不相同且不属于 B 的奇次数素数 ℓ_i 和 m_j，它们满足以下二次剩余性质（这里，若 $h = i$，则 $[h = i]$ 为 1，否则为 0）：

$$\begin{aligned} (b/\ell_i) = (c/\ell_i) = 1, \quad (\delta_h/\ell_i) = (-1)^{[h=i]}, \\ (\gamma/m_j) = 1, \quad (\epsilon_h/m_j) = (-1)^{[h=j]}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Put

$$D = D_0 \left(t^{r+s} \prod_i \ell_i \prod_j m_j \right)^2. \tag{5.5}$$

此前所有局部条件仍然成立，包括无穷远处的素点，因为 (5.5) 中平方因子的次数为偶数。在 ℓ_i处，第一个像是 $\{1\}$，第二个像是 H_{ℓ_i}。另一方面，在 m_j 处，两者的角色互换。特别地，$\Omega \subseteq S(D)$ 和 $\Omega' \subseteq S'(D)$。

另一方面，如果 $\eta \in S'(D)$，则希尔伯特符号下的正交性以及 $(\delta_i,\ \eta)$ 上的希尔伯特互反律$_v$意味着 $1 = (\delta_i,\ \eta)_{\ell_i} = (-1)^{v_{\ell_i}(\eta)}$。因此，$\eta \in S_0'$，而 m_j 处的条件排除了它所有的 ϵ_j 坐标。通过对称论证，并将 $S(D)$ 的一个类与 ϵ_j 配对，我们可推得

$$S(D) = \Omega, \qquad S'(D) = \Omega'.$$

这些等式对 Dc^2 也成立：若 $v(c)$ 为奇数，则 $v(D)$ 为奇数；否则，乘以 c^2 不会改变相应的 (5.3) 局部行。参数 D 和 Dc^2 及其相反数都是非平方元，因为它们在 t 处的赋值为奇数。设 $D = b(b-1)\lambda^2$，引理 5.1 给出的判据表明，$[b]$ 可由 $C_b(D)$ 和 $C_b(Dc^2)$ 上的点表示。这两个点都没有 $U = 0$ 或 $V = 0$（因为 $[b] \neq [-D],\ 1$），所以规范化 $V = 1$ 得到 (5.1)。代换 (5.2) 完成了命题 2.2 的证明。

6. 致谢与人工智能的使用

H.P. 获得了智利 ANID Fondecyt Regular 项目资助 1230507 的支撑。X.V. 获得了康塞普西翁大学 Proyecto 2025001477INV 的支撑。

将 Pheidas 谓词与 Mason-Stothers 结合使用这一基本策略源自我们先前的工作 [14]，在那项工作中，我们将 Pheidas 谓词与 abc 猜想结合使用。在此语境下使用关系 $|_p$ 的想法由人工智能模型提出。技术计算借助人工智能完成，并由作者核验。

感谢 Arno Fehm 与我们分享他的相关研究。

References

[1] 2026 2611 16130 2 M. Bhargava,
[2] *A Diophantine definition of $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$.* 2026 2611 16130
A. Burungale, *A Diophantine definition of $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$.*预印本（ ）arXiv：。v Burungale, 1 预印本（ ）arXiv：。v
[3] G. Cornelissen, K. Zahidi,

Elliptic divisibility sequences and undecidable problems about rational points。《纯粹与应用数学杂志》613（2007），1–33。[4] M. Davis, H. Putnam, J. Robinson, *The decision problem for exponential diophantine equations*。《数学年刊》（2）74（1961），425–436。[5] J. Demeyer,

Recursively enumerable sets of polynomials over a finite field are Diophantine。《数学创刊》170（2007），第3期，655–670。[6] J. Demeyer, J. Van Geel,

An existential divisibility lemma for global fields 147 2006 4, 。《数学 293 308
月刊》（ ），第 期，–。[7] M. Fried, M. Jarden, *Field arithmetic*。数学及其边界领域成果（3） [数学成果及相关领域（3）], 11。施普林格出版社，柏林，1986年。xviii+458 页。[8] E. Glazer, *$\mathbb{Z}$ is Diophantine in $\mathbb{Q}$*。预印本，发布于2026年11月5日。[9] *Why should $\mathbb{Z}$ be Diophantine in $\mathbb{Q}$?* 2026 2611 17124
[10] ´ *Diophantine subsets of function fields of curves* 2 2008 3, 299 311
A. Kozachinskiy, H. Pasten, X. Vidaux, 。预印本（ ）arXiv：。J. Kollar, 。《代数与数论》（ ），第 期，–。[11] Y. Matiyasevich, *The Diophantineness of enumerable sets*。（俄文）《苏联科学院通报》191（1970）279–282。
[12] *Hilbert's tenth problem over the rational numbers* 6 2026 OpenAI, 。预印本，
[13] *Notes on the DPRM property for listable structures* 87 2022 1, 273
发布于H. Pasten的10月。《符号逻辑杂志》（ ），第 期，–312。
[14] *On Hilbert's tenth problem for number fields* 2026 2611 24748 H. Pasten, X.
[15] *An undecidability result for power series rings of positive characteristic. II*
Vidaux, 。预印本（ ）arXiv：。T. Pheidas, 。《美国数学会会刊》100（1987），第3期，526–530。[16] T. Pheidas, *Hilbert's tenth problem for fields of rational functions over finite fields*。《数学创刊》103（1991），第1期，1–8。[17] T. Pheidas, *An effort to prove that the existential theory of $\mathbb{Q}$ is undecidable*。希尔伯特第十问题：与算术和代数几何的关系（根特，1999），237–252，《当代数学》270，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2000年。[18] M. Rosen, *Number theory in function fields*。《数学研究生教材》210。施普林格出版社，纽约，2002年。xii+358 页。[19] A. Shlapentokh, *Diophantine undecidability over algebraic function fields over finite fields of constants*。《数论杂志》58（1996），第2期，317–342。[20] D. Ulmer, *Elliptic curves over function fields*。L函数算术，211–280，IAS/Park City数学丛书18，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2011年。[21] C. Videla,

Hilbert's tenth problem for rational function fields in characteristic 2。《美国数学会会刊》120（1994），第1期，249–253。

Departamento de Matemáticas , Pontificia Universidad Católica de Chile, and CENIA. Chile
Email address, H. Pasten: hector.pasten@uc.cl

Departamento de Matemáticas Universidad de Concepción. Chile , , X. Vidaux:
Email address
xvidaux@udec.cl