小覆盖轨道多面体色数的上界 2^n-1 对每个 $n\geq 4$ 均可达到

´ ˇ DJORDJE BARALIC, RISTE SKREKOVSKI

arXiv:2611.31219v1 [math.AT] 23 Nov 2026

ABSTRACT. Davis 和 Januszkiewicz 证明，作为小覆盖轨道空间的简单 n-多胞体 P 的面可以用 2^n-1 种颜色进行正常着色。对于 $n=2$，此上界是锐的；根据四色定理，对于 $n=3$，此上界并不锐；第一作者则证明了对于 $n=4$，此上界是锐的。我们证明，对于每个$n\geq 4$，此上界都是锐的。该多胞体由循环多胞体 $C^n(2^n-1)$ 的对偶经过余维至少为 3 的面的截断得到。该消解适用于任意域，并在含有 q 个元素的域上给出锐上界 $(q^n-1)/(q-1)$。更一般地，任意简单 n-多胞体，只要其面可以用 $k\leq 2^n-1$ 种颜色进行正常着色，经过余维至少为 3 的面的截断后，就会成为一个具有相同色数 k 的小覆盖的轨道多面体。此外，对于每个 $n\geq 4$，我们构造一个简单 n- 多胞体，其 $\chi=2^n-1$ 同时是一个小覆盖和一个拟环面流形的轨道空间；在定向情形下，对于每个$n\geq 4$，我们得到锐上界 2^{n-1}。

关键词：小覆盖；拟托里克流形；特征映射；简单多面体；色数；循环多胞体。

美国数学学会学科分类编号：57S12, 05C15,52B11

1. INTRODUCTION

小覆盖和拟环面流形由 Davis 和 Januszkiewicz [10]作为实与复光滑射影环面簇的拓扑推广而引入。小覆盖的轨道空间是一个简单多面体 P^n。该流形由一个特征映射确定，该映射为 P^n 的每个刻面指定一个非零向量 $\mathbb{Z}_2^n$，使得在一个顶点处相交的 n 个刻面所对应的向量构成 $\mathbb{Z}_2^n$的一组基，参见 [5]。

特征映射尤其是一种对刻面的正常着色，即任意两个共享顶点的刻面颜色均不同。因此，存在特征映射的多胞体的色数 $\chi(P^n)$ 满足 [10]（这里 $\chi(P)$ 是轨道多面体 P 的色数）。

$$n\leq \chi(P^n)\leq 2^n-1.$$

该上界对于 $n=2$ 由奇数边形达到，而对于 $n=1$，一个区间有两个不相交的面，因此 $\chi=1=2^1-1$。对于 $n=3$，四色定理给出$\chi(P^3)\leq 4<7$，因此该界未达到（另见 [8]）。

在 [1] 中构造了一个具有特征映射且 $\chi=15$ 的简单4-多胞体，因此该界对于 $n=4$达到。该构造从循环多胞体 $C^4(15)$的对偶出发，并通过截断修复奇异顶点和边。文中指出

在 [1] 中，该方法不易推广到高维，因为可能存在一个坏的二维面，它可以是一个边数很多的多边形。该界对于 $n\geq 5$ 是否达到的问题被作为 [1, 问题3.5]提出。

本文证明，对于每个 $n\geq 4$，答案都是肯定的。全文中，顶点 v 是多胞体中的一个点，而 $I(v)$ 是包含该点的刻面集合。因此，

对于一个简单的 n-多胞体， $|I(v)| = n$ 且 $\{v\} = \bigcap_{F\in I(v)} F$。对于更高维的面及其定义刻面集，我们也保留这种区分。

定理 1. 对于每个 $n \geq 4$，都存在一个简单 n-多面体 P，它在 $\mathbb{Z}_2$ 上具有特征映射，且满足 $\chi(P) = 2^n - 1.$。多面体 P 可通过截断余维至少为 3 的面，由 $C^n(2^n-1)^*$ 得到；起始标记可以是将$C^n(2^n-1)^*$ 的刻面任意双射到 $\mathbb{Z}_2^n \setminus \{0\}$。

主要工具是定理 5。它指出，可以通过截断不满足非奇异条件的面，将简单多面体刻面的任意标记（用 $\mathbb{Z}_2^n$ 中的向量进行）转化为特征映射。新标签可以取自任意给定的张成集。

Choi 和 Jang [9, 引理 2.5] 用恒星剖分的对偶语言证明了这类结果。他们在不同的背景下运用了该结果：构造一个不存在模 3 特征映射的多胞体球面，从而对托里提升问题给出了否定答案。我们给出一个适用于任意域的自足证明，因为我们需要确保只截断余维至少为 3 的面，并且新标签可以取自给定集合。后一条件给出了定向情形。对于恰当的起始标记，将他们的技巧应用于循环多胞体的边界，已经可以得到界 $2^n - 1$ 可达到这一不加限制的结论，因此我们不声称这一步是独立的。

此外，我们构造了一个简单的 n-多胞体，其 $\chi = 2^n - 1$ 同时是一个小覆盖和一个拟环面流形的轨道空间，并且对于每个 $n \geq 4$，都得到了定向小覆盖的尖锐界 2^{n-1}。对于 $n = 4$，5，6，我们还报告了经计算机验证的例子。

2. Preliminaries

所有多胞体均视为组合等价意义下的对象。维数为n 的多胞体称为简单多面体，当且仅当每个顶点恰属于 n 个面。我们将 $I(v) = \{F : v \in F\}$ 记作这一集合，因此，$\{v\} = \bigcap_{F\in I(v)} F$ 且 $|I(v)| = n$。简单多面体的两个不同面相交，当且仅当它们共享一个顶点；此时它们的交集是一个余维为 2 的面。 P 的超面图以其各面为顶点，当两个面相交时将它们连接； $\chi(P)$表示其色数。

对于一族面标签，我们保留面指标： $\nu(S)$ 表示指标族 $(\nu(F))_{F\in S}$，即使某些标签重合。我们仅将 $\bigcap S$用作 $\bigcap_{F\in S} F$ 的简写；它是几何交集，而 S 是一组面。

对于满足 $\bigcap_{F\in S} F \neq \emptyset$ 的互异面的集合 S，简单多面体 P 的面 $\bigcap_{F\in S} F$ 具有余维 $|S|$，并且包含它的 P 的面恰好是 S 的元素。这样的面 H 的面是与 H 相交的面 $F \notin S$ 所对应的集合 $H \cap F$，并且互不相同的此类 F 给出 H 的互不相同的面。

回顾一下，循环多胞体 $C^n(m)$ 是矩曲线上 m 个点的凸包。它是单纯的，并且对于 $n \geq 4$，其任意两个顶点构成一条边，见 [14, 17]。因此，对于 $n \geq 4$，简单多面体 $C^n(m)^*$ 的任意两个面相交。

对余维为 $s = |S| \geq 2$ 的面 $L = \bigcap_{F\in S} F$ 进行截断，即用一个将 L 的顶点与 P 的其他顶点分隔开的超平面进行切割。由于 L 是一个面，这样的超平面确实存在。以下结论是标准结果，参见 [5, 11]。

结果是一个简单多面体 P'（凸多面体，因为它是由一个超平面切割而成），它具有 P 的面以及一个新面 $F' \cong L \times \Delta^{s-1}$。 L 的顶点被替换为

小覆盖的轨道多面体的色数上界 2^n-1 得到取等，当

顶点 v_F，每个顶点 v 对应 L 的一个顶点，以及每个 $F \in S$，由以下方式确定

$$I(v_F) = (I(v) \setminus \{F\}) \cup \{F'\}.$$

这些顶点互不相同，因此新顶点总数为 $sf_0(L)$，其中 $f_0(L)$ 是 L 的顶点数。 L 以外的所有顶点均保持不变。对偶地，这相当于对单纯多面体 P^* 的边界复形中对应的面进行恒星剖分。

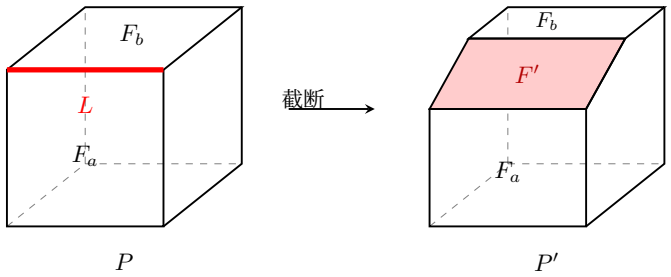

FIGURE 1. 立方体 P 的边 $L = F_a \cap F_b$ 的截断（一个余维为 $s = 2$ 的面）。新面 $F' \cong L \times \Delta^1$ 是一个矩形， L 的两个顶点被具有关联集 $(I(v) \setminus \{F\}) \cup \{F'\}$ 的四个顶点取代，其中 $F \in \{F_a, F_b\}$，其余所有顶点均保持不变。

对于 $s = 1$，当 L 是一个刻面 F 时，我们采用如下约定：对 L 进行截断是指用同一位置上的新面 F' 替换 F。多胞体保持不变，只改变刻面的标记。

引理 2。 设 L 是简单多面体 P 的一个余维至少为2 的面，并设F_a、 F_b 是不同且相交的刻面。当且仅当 $L = F_a \cap F_b$时，截断 L 会破坏它们的交集。特别地，余维至少为3 的截断会保留任意两个原始超面的交集。

证明。 面 $F_a \cap F_b$ 的维数为 $n-2$。若它包含于 L中，则余维条件意味着 $L = F_a \cap F_b$。否则，它有一个位于 L之外的顶点，该顶点在截断后仍然存在，并且仍属于两个刻面。若 $L = F_a \cap F_b$，则它的所有顶点都会被移除，而每个新顶点都不属于 F_a、 F_b中的一个，因此它们的交集会被破坏。□

3. RESOLUTION OF A LABELLING

设 P 是一个简单的 d-多胞体， U 是域F 上的一个维数为 d 的向量空间（在主要应用中， $F = \mathbb{Z}_2$）。标记 是一个任意映射 ν，其定义域为 P 的面集，值域为 U，其中允许出现零和重复标号。若 $\nu(I(v))$ 是 U 的一个基，则称顶点 v 为非奇异；若所有顶点均为非奇异，则称 ν 为特征映射。

一个回路是向量的极小相关多重集。大小为1的回路是零标号，大小为2的回路是一对成比例标号（若 $F = \mathbb{Z}_2$则为相等的标签），并且回路 c的张成空间维数为 $|c| - 1$。由互异的面组成的集合$C = \{F_{i_1}, \ldots, F_{i_c}\}$ 称为回路面，如果

$$H = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_c} \neq \emptyset \quad \text{and} \quad (\nu(F_{i_1}), \ldots, \nu(F_{i_c})) \text{ is a circuit.}$$

因此， C 表示定义面集，其几何交集为 H，余维为c。

注意， ν 是特征映射，当且仅当不存在回路面。也就是说，若 $\bigcap C \neq \emptyset$，则面 $\bigcap C$的每个顶点 v都满足 $C \subseteq I(v)$，并且是奇异的。反过来，奇异顶点处的索引标号包含一个回路。另请注意，回路面至多有 d 个元素，因此 $A =$span$(\nu(C))$是 U 的一个维数为 $|C| - 1$的真子空间。

带有新标签 $\mu \in U$ 的面 L 的截断，如果对于 L的每个顶点 v 都有 $\mu \notin$span$(\nu(I(v)))$，则称为允许的。在一个满足 $I(w) = (I(v) \setminus \{F\}) \cup \{F'\}$的新顶点 w 处，新面 F' 是一个余环：其标签不在 w处其他标签的张成空间中。特别地， w 处没有回路使用 F'。

引理 3。设 P' 由 P 经过一次允许的截断得到。那么， P' 的每个回路面都由旧刻面组成，并且它也是 P 的回路面。此外，由允许的截断产生的面不包含于任何回路面中，即使经过任意进一步的允许截断后也是如此。

证明。设 C' 是 P' 的一个回路面，并选取一个顶点 $w \in \bigcap_{F \in C'} F$。如果 w 未改变，则其关联集已经在 P 中包含了 C'。否则，对于截断面上的一个顶点 v，有 $I(w) = (I(v) \setminus \{F\}) \cup \{F'\}$。由于 F' 是 w 处的余环，因此有 $C' \subseteq I(v) \setminus \{F\}$。于是 $v \in \bigcap_{G \in C'} G$ 属于 P，并且同一指标族的标签在截断之前就是一个回路。

为保持该性质，设 F_a 是顶点 w处的一个余环。进行一次标记为 μ' 的进一步允许的截断后， w 要么保持不变，要么被具有关联集 $I(w') = (I(w) \setminus \{F_b\}) \cup \{F''\}$的顶点所替代。只有在 $w' \in F_a$时， $F_b \neq F_a$ 才是相关的。若 F_a 在那里不是余环，则

$$\nu(F_a) = a\mu' + r, \qquad r \in \operatorname{span}(\nu(I(w) \setminus \{F_a, F_b\})).$$

对于 $a = 0$，这与 w处的余环性质矛盾；对于 $a \neq 0$，它意味着 $\mu' = a^{-1}(\nu(F_a) - r) \in$张成空间$(\nu(I(w)))$，这与容许性相悖。一个存留刻面的每个顶点都源自该刻面的一个顶点，因此该性质在所有进一步的允许的截断下均保持不变。□

我们引入商的记号。设 C 是一个回路面， $A =$张成空间$(\nu(C))$， $H = \bigcap_{F \in C} F$以及 $u \in U \setminus A$.。于是 H是一个维数为 $h = d - |C|$.的面。我们置$U_H = U/(A + \langle u \rangle)$，其维数为 h，并将标记称为

$$\nu_H(H \cap F) = \nu(F) + (A + \langle u \rangle) \in U_H$$

H 的商标记的面。这里 $F \notin C$ 是与 H相交的一个面；其值是 U_H中的一个陪集。面 H 由C中各面的公共交集确定，而其顶点对应于关联集 $I(w) \supseteq C$。对于这样的顶点，span$(\nu(I(w))) = A +$span$(\nu(I(w) \setminus C))$。

此外，如果$\mu \in U_H$ 是 H中某个截断的标记，那么类 μ 中的每个 $\mu \in U$ 都称为 μ.的提升 $\bar{\ }$

引理4。在上述记号下，以下结论成立。

(i) 包含于 H 中的 P 的顶点就是 H的顶点。若 H是 L 的非空真面，则在 P 中对 L 进行截断，会在 H 中诱导出对 L 的截断（对于 H 的刻面 L，采用 $s = 1$的约定），且集合 C 仍为回路面。(ii) 若带有标记 μ 的非空真面 $L \subset H$ 的截断对于 ν_H是允许的，则在 P 中对 L 进行带有 μ 的任意提升 μ 的截断，对于 ν.也是允许的。(iii) 若 ν_H 是 H 的特征映射，则对 H 自身进行带有标记 u的截断对于 ν.是允许的。

证明。 (i) 将 $L=\bigcap_{F\in S}F$ 写作 $S\supsetneq C$。在 L的顶点 v 处，关联集为（I（v）$\setminus\{F\}$）$\cup\{F'\}$的新顶点属于存留面 H，当且仅当 $F\in S\setminus C$。这些恰好是 H中诱导截断的顶点。由于 $S\setminus C$ 非空， H 得以存留，且 C 仍为回路面。

(ii) 若对于多胞体 L 的顶点 w，有 $\mu\in$张成空间(ν(I(w)))，则它在 U_H 中的像属于 w 处 H 各刻面的商标记的张成空间，因为 C 的标记的像均为零。这与 H 中 μ 的容许性矛盾。

(iii) 在多胞体 H 的顶点 w 处，以 I(w) 为索引的 h 个商标记构成 U_H 的一个基。因此，$A+\langle u\rangle+$张成空间(ν(I(w) $\setminus C$)) $=U$。若 $u\in$张成空间(ν(I(w)))，则左侧将等于张成空间(ν(I(w)))。这是不可能的，因为 ν(C) 线性相关，所以 d 个标记在 w 处张成的空间维数小于 d。□

由取自 $X\subseteq U$ 、带有标记 ν 的标记的一种消解 是一个容许截断的有限序列，使得每个被截断的面都包含在当前多胞体中的 $\bigcap C$ 内，其中 C 是 ν 的一个回路面，由原始 刻面组成；所有新标记均取自 X，且所得标记是一个特征映射。如果 ν 的标记均不为零，则不会发生余维一截断，因此所有原始标记都保留。

定理 5. 设 P 是一个简单的 d-多胞体， ν 是其刻面的标记，标记向量取自 U，且 $X\subseteq U$ 是张成 U 的集合。那么 ν 存在一个标记取自 X. 的消解

证明。 我们对 d 使用归纳法；对于固定的 d，再对回路面的数量 c 使用归纳法。当 $d=0$ 时，无需证明；当 $c=0$ 时，该标记已经是一个特征映射。因此，设 $c\geq 1$. 。我们先固定这些数据。设 C 是一个回路面， $A=$ = span(ν(C))，且 $H=\bigcap C$.。由于 A 是一个真子空间，而 X 张成 U，因此存在 $u\in X\setminus A$.。设 ν_H 是 H. 的商标记。 X 在 U_H 中的像 X_H 张成 U_H，且 dim(H) $<d$.

接下来，我们消解 H. 上的标记。根据归纳假设，将其应用于 H 、标记 ν_H 和集合 X_H，可得一系列对 H 的真面进行的容许截断，其标签取自 X_H（若 H 是一个点，则该序列为空）；经过这些截断后， ν_H 成为一个特征映射。根据引理4 (i) 和 (ii)，这些截断中的每一个都可提升为 P 中对一个包含于 H 的面的容许截断（ H 中一个余维为 1 的步骤会提升为 P 中一个余维为 $|C|+1$ 的截断）。标记的提升可以选在 X 中，因为 X_H 是 X 的像。在最后一次截断之后， ν_H 在当前的 H. 上是非奇异的

现在我们截断 H 本身。根据引理4 (iii)，对带有标记 $u\in X$的 H 进行截断是允许的。注意，经过这次截断后，没有顶点的关联集包含C。也就是说，旧 H 的顶点被移除，而新顶点的关联集为(I(v) $\setminus\{F\})\cup\{F'\}$，其中包含 $F\in C$；这些关联集均不包含 C。

现在我们来数回路面。根据引理 3，这些截断都没有产生回路面，而现在存在的每个回路面在截断前也都是回路面。此外，它不同于 C. 。因此，回路面的数量小于 c.

最后，根据关于 c 的归纳，经过进一步截断包含在由当前多胞体的回路面 C所定义的交集 $\bigcap_{F\in C}F$ 中的面，可以将标记补全为一个特征映射。这些集合 C 根据引理 3 是原多胞体的回路面，并且所有标记都来自 X. □

命题 6. 设 ν 不含零标号，并设 P 由 P_0 通过对 ν的消解得到。设 S 为一组原始超面，且 $\bigcap S\neq\emptyset$ 属于 P_0。则 $\bigcap S\neq\emptyset$ 属于 P 当且仅当 $\nu(S)$线性无关。

证明. 原始超面连同其标签一并保留。若 $\bigcap S \neq \emptyset$ 属于 P，则对 P的一个顶点 v 有 $S \subseteq I(v)$，其标签构成一个基，因此 $\nu(S)$线性无关。反之，设 $\nu(S)$线性无关，并设 $L = \bigcap S_L$ 为一个截断面，其中对一个原始回路面 C有 $S_L \supseteq C$ 。则 $S_L \not\subseteq S$，因为 S 不含回路。选取当前多胞体的一个顶点 v ，使得 $S \subseteq I(v)$。若 $v \notin L$，则它得以保留。否则 $S_L \subseteq I(v)$，并且对于 $F \in S_L \setminus S$，一个新顶点 w满足 $I(w) = (I(v) \setminus \{F\}) \cup \{F'\} \supseteq S$。因此每次截断后 $\bigcap S$仍非空。□

引理 5 的证明中计数的回路面是由实际刻面组成的集合，而不是由向量值组成的集合。不同的刻面集合可能具有相同的带指数向量值，并且会被分别计数。即使标签重复，引理 3 也排除了新的回路面。不使用标记的全局单射性。

对于 $|S| = 2$ ，这是关于消解的引理 2：两个相交的原始超面保持相交，当且仅当它们的标签不成比例。

定理 1 的证明。令 $n \geq 4$、$m = 2^n - 1$、$P_0 = C^n(m)^*$ 以及 $U = \mathbb{Z}_2^n$. 令 ν 为从 P_0 的面到 $U \setminus \{0\}$. 的任意双射。所有标签均非零且两两不同，因此每个回路至少包含 3 个元素。因此，由回路面定义的交集的余维至少为 3。

我们应用定理 5 和 $X = U \setminus \{0\}$，并将所得多胞体记为 P。每个截断面都包含在 $\bigcap_{F \in C} F$ 中，其中 C 是 P_0 的一个回路面，因此其余维至少为 3。由引理 2，m 个原始超面两两相交于 P_0，因为 $C^n(m)$ 是 2-邻接的；它们两两相交于 P.

这些面需要使用互不相同的颜色，因此 $\chi(P) \geq 2^n - 1$. 。最终的标记是一个特征映射，因此是一个至多使用 $2^n - 1$ 种颜色的正常着色，所以$\chi(P) = 2^n - 1$. □

证明中没有用到 $F = \mathbb{Z}_2$，因此同样的论证适用于任意域。设 q 是一个素数幂。在这里，域 $\mathbb{F}_q$ 上的特征映射是指在每个顶点处都取 $\mathbb{F}_q^n$ 的一个基的标记；我们在此将其作为纯代数概念使用。共享一个顶点的两个面具有不成比例的标号，因此这些面可以用射影空间中的点进行正常着色，并且 $\chi \leq N_q(n) = (q^n - 1)/(q - 1)$。

推论 7。对于每个素数幂 q 和 $n \geq 4$，带有关于 $\mathbb{F}_q$ 的特征映射的简单 n-多胞体的最大色数为 $N_q(n)$，并且 n 与 $N_q(n)$ 之间的每个整数都可以达到。

证明。取 X 中每个射影点的一个代表元，并取 $C^n(N_q(n))^*$ 的刻面与 X 之间的一个双射。没有标签为零，也没有两个标签成比例，因此每个回路至少包含 3 个元素，定理 1 的证明可以原样适用。对于 $n+1 \leq k \leq N_q(n)$，取包含一个基的 k 个代表元，并以 $C^n(k)^*$ 作为初始多面体；对于 $k = n$，取立方体，并将标签 $e_1, \ldots, e_n$ 放在每对相对刻面上。□

特别地，对于每个 $n \geq 4$ 和素数幂 $q > r$，存在一个带有关于 $\mathbb{F}_q$ 的特征映射的简单 n-多胞体，而不存在关于 $\mathbb{F}_r$ 的特征映射，因为 $N_q(n) > N_r(n)$。

这可以用 Barali´c、Vavpeti˘c 和 Vu˘ci´c [3, 4]研究的泛复形来表述。记 $X(\mathbb{F}_q^\ell)$ 为这样一个单纯复形：其顶点是非零向量，其单形是线性无关集。若一个单纯映射在每个单形上都是单射，则称其非退化 。P 上的特征映射等价于一个非退化单纯映射 $K = \partial P^* \longrightarrow X(\mathbb{F}_q^n)$。用这种语言来说，定理 5

将顶点标号延拓为这样的映射，并通过恒星剖分实现，同时指定新的标记。

对于素数 p，一个具有 m 个顶点的复形 K 的模 p Buchstaber不变量为 $s_p(K)$ $=m-\ell_p(K)$，其中 $\ell_p(K)$ 是可非退化映射到 $X(\mathbb{F}_p^\ell)$ [4] 的最小 ℓ 。我们的构造表明，对于每一对素数 $p>r$ 和任意 $n\geq 4$，都存在一个多胞体（$n-1$）球面 K，使得

$$s_p(K)=m-n>s_r(K).$$

事实上，取自推论 7 的 P，其中 $q=p$ 且 $\chi(P)=N_p(n)$。其对偶球面可非退化地映射到 $X(\mathbb{F}_p^n)$，且其维数迫使 $\ell_p(K)=n$。映射到 $X(\mathbb{F}_r^n)$ 将会用至多 $N_r(n)$ 个射影点为刻面着色，这就产生了矛盾。因此 $\ell_r(K)\geq n+1$，从而证明了严格不等式。这表明在每个至少为 3 的维数上，多胞体球面之间都存在这种分离。

以下细分不需要完整的起始图。

定理 8. 设 Q 是一个简单的 n-多胞体，具有 $\chi(Q)=k$，并设 q 是一个素数幂，满足 $k\leq N_q(n)$。则存在一个简单的 n-多胞体 P，由 Q 通过对余维至少为 3 的面进行截断而得到，并带有一个在 $\mathbb{F}_q$ 上的特征映射以及 $\chi(P)=k$。原始超面在 P 中诱导出与在 Q中相同的交图。

证明. 由于 n 个面交于一个顶点，$k\geq n$。设 X 是一组包含一个基的 k 个射影代表元，并按照使用 k种颜色的正常着色，用 X 标记 Q 的面。不存在零标号，且大小为 2 的回路将是两个具有成比例、因而相等的标签的相交刻面，而这被该着色所排除。因此每个回路面至少有 3 个面。带有 X 的定理 5 仅截断余维至少为 3 的面，并且由引理 2，原始超面的任何交集都不会丢失。一次截断不会在两个原先不相交的旧刻面之间产生交集，因为一个新顶点由一个旧顶点的子集连同该新面组成。因此旧刻面诱导出Q的交图，故 $\chi(P)\geq k$，且所有标签都位于 X中，故 $\chi(P)\leq k$。□

对于 $q=2$，这表明每一个具有 $\chi\leq 2^n-1$ 的简单多面体都有一个色数相同的小覆盖细分，并且下界并不需要极大团。

注9. 在定理 *5*的证明中，新面的标签仅根据条件 $u\in X\setminus A$ 从一个真子空间 A及其提升中选取。这就是它们可以从任意张成集中选取的原因。用对偶的语言来说，对于 $F=\mathbb{Z}_2$ 和 $X=U$，定理 *5*是 [9,引理 2.5]的一种形式。

4. The quasitoric case

非零整数向量称为本原的，如果其坐标的最大公约数为 1；等价地说，它不是整数倍数 ku，其中 $k>1$ 且 $u\in\mathbb{Z}^n$。定义在 $\mathbb{Z}$ 上的特征映射为各个刻面赋予本原向量，使得每个顶点处的向量构成一个格基，或者等价地说，行列式为 ± 1。在域上，n向量的线性无关性已足以保证它们构成一个基。在 $\mathbb{Z}$上，非零行列式仅能得到一个有限指数的子格。因此，我们先在 $\mathbb{Q}$ 上应用域上的消解，然后将这些指数降至 1。由此得到一个拟环面流形，其模 2 约化是定义在 $\mathbb{Z}_2$上的特征映射。请注意，给定的 $\mathbb{Z}_2$ 特征映射并不总能提升到 $\mathbb{Z}$ [9]。这里我们将整映射与多胞体一同构造；通过行列式

利用基本平行多面体中的格点进行细分，是环簇解消中的标准方法，见 [12, §2.6] 和 [6], ；这里需要保护旧刻面的交集；允许进行余维 2 的截断，但不能移除两个旧刻面的任何交集。所得多胞体通常不同于定理 1 中的多胞体。

引理 10. 设 $a \neq b$ 为 $\{0,1\}^n \subseteq \mathbb{Z}^n$. 的非零向量，则 a、b 可扩张为 $\mathbb{Z}^n$的一个基。特别地，$(\mathbb{Q}a + \mathbb{Q}b) \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$.

证明。 两个不同的非零 $0/1$ 向量不平行，因此矩阵（a, b）的某个 2×2 子式非零。它们每一个都属于 $\{-1, 0, 1\}$，因此这些 2×2 子式的最大公约数为1。 根据史密斯标准型，这正是一对向量可扩张为 $\mathbb{Z}^n$的一个基的判别准则。□

定理11. 设 P_0 为一个简单 n-多胞体，并设 V 将 P_0 的面映为 $\{0,1\}^n$ 的非零向量，且相交刻面得到互不相同的向量。则存在一个多胞体P，它由 P_0 通过对余维至少为2的面进行截断而得到，并且存在 P 上关于 $\mathbb{Z}$ 的特征映射 Λ，它扩张 V，使得 P_0 的两个面在 P 中相交当且仅当它们在 P_0中相交。特别地，对每一个 $n \geq 4$，存在一个简单 n-多胞体 P，满足$\chi(P) = 2^n - 1$，它既是一个拟环面流形的轨道空间，也是一个小覆盖的轨道空间。

证明。 P_0 的面称为原始。我们保留它们的标签，用 V表示当前标记，并用 $V(S)$表示由面的集合 S 索引的列向量族。下面选取的所有标签都是本原整向量。我们遵循域上的消解，然后执行额外的格步骤。

断言 A。余维至少为3 的截断给出在每个顶点处行列式非零的标记。

在 $\mathbb{Q}$ 上应用定理 5，所用张成集 X 由 $\mathbb{Z}^n$的所有本原向量组成。相交的原始超面的标签是互异的非零 $0/1$ 向量，因此在 $\mathbb{Q}$上不成比例。于是每个原始 $\mathbb{Q}$-回路面 C 至少有三个面。消解中被截断的每个面都位于这样一个 C的几何面 $\bigcap_{F \in C} F$ 中，因此余维至少为 3。所得标签在每个顶点处构成 $\mathbb{Q}$上的一个基，从而具有非零整数行列式。所有原始标签均被保留。这就确立了断言 A。

断言 B。进一步截断后，所有行列式都等于 ± 1，同时保留原始超面的交集。

对于顶点 v，令 $D(v) = |\det V(I(v))|$。根据断言 A，这些都是正整数。若某个$D(v) > 1$，则选取使 $D(v)$ 最大的 v，并写成 $I(v) = \{F_1, \ldots, F_n\}$。子格$L_v = \sum_{j=1}^n \mathbb{Z}V(F_j)$ 在 $\mathbb{Z}^n$ 中的指数为 $D(v)$。其半开基本平行多面体为

$$\Pi_v = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j V(F_j) : 0 \leq c_j < 1 \right\}.$$

我们使用如下标准事实（参见例如 [6]）；并给出简短的证明。每一个关于 L_v 在 $\mathbb{Z}^n$ 中的陪集在 Π_v 中恰有一个代表元。事实上，设 $x \in \mathbb{Z}^n$，并写成 $x = \sum_j a_j V(F_j)$；诸 a_j 被唯一确定且为有理数，因为 $V(I(v))$ 是可逆整数矩阵。于是 $x^* = x - \sum_j \lfloor a_j \rfloor V(F_j)$ 既在 $x + L_v$ 中也在 Π_v 中，其系数为诸 a_j 的小数部分。若 x^*，$x^{**} \in \Pi_v$ 属于同一陪集，则它们的差位于L_v，故具有整数系数，且这些系数位于 $(-1, 1)$ 中；因此该差为 0。由于

$[\mathbb{Z}^n:\ L_v] = D(v) > 1$，存在一个不同于 L_v 的陪集，且其代表元 $w_0 \in \Pi_v$ 是一个非零整数向量（0 的陪集就是 L_v 本身）。

令 $k \geq 1$ 为 w_0 各坐标的最大公约数，并设 $w = w_0/k$。根据上文对本原向量的定义，$w \in \mathbb{Z}^n$ 是非零本原向量。它关于 $V(F_1)\ldots, V(F_n)$ 的系数为 $c_j = c_j^0/k \in [0,1)$，因此 $w \in \Pi_v$ 也成立。（我们不需要 w 属于 w_0 的陪集；我们只用到 w 是 Π_v 中的非零本原整数向量。）

设 $T = \{F_j:\ c_j > 0\}$，一个刻面集合；设 $H = \bigcap_{F\in T} F$ 是包含 v 的非空几何面。集合 T 至少有两个元素：否则，一个整数向量将是某个本原向量的 $c_jV(F_j)$ 倍，且满足 $0 < c_j < 1$。这是不可能的，因为本原向量的坐标存在整数线性组合等于 1。此外，T 不可能由两个原始超面 F_a，F_b 组成。它们相交于 v，由引理 10 可得

$$(\mathbb{Q}V(F_a) + \mathbb{Q}V(F_b)) \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}V(F_a) + \mathbb{Z}V(F_b).$$

有理系数的唯一性将迫使 c_a, c_b 为整数，这与 $0 < c_a, c_b < 1$矛盾。

截去 H，并将新面 F'标记为 w。对于 H和 $F_i \in T$的一个顶点 z，相应的新顶点 z_i 具有 $I(z_i) = (I(z) \setminus \{F_i\}) \cup \{F'\}$。令 M_z 为矩阵，其列依固定顺序为 $V(F)$、$F \in I(z)$；令 M_{z_i} 由 M_z 替换列 $V(F_i)$ 为 w得到。回顾一下，$w = \sum_{F_j\in T} c_jV(F_j)$，其中系数 c_j 是在顶点 v 处确定的，且不依赖于 z。由于 $T \subseteq I(z)$，每个满足 $F_j \in T$ 的列 $V(F_j)$ 都是 M_z的一列。由行列式对被替换列的线性性，

$$\det M_{z_i} = \sum_{F_j\in T} c_j \det M_z^{(i\to j)},$$

其中 $M_{(i\to j)z}$是将列 $V(F_i)$ 替换为 $V(F_j)$ 后的 M_z。对于 $j \neq i$，矩阵 $M_z^{(i\to j)}$ 有两列相同（列 $V(F_j)$ 已出现在 M_z 中），因此其行列式为 0，而对于 $j = i$，它为 M_z。因此

$$\det M_{z_i} = c_i \det M_z, \qquad \text{so} \qquad D(z_i) = c_iD(z), \quad 0 < D(z_i) < D(z),$$

因为 $0 < c_i < 1$ 对于 $F_i \in T$ 以及 $D(z) \geq 1$。新的行列式是整数，因为所有列都是整数向量，并且 $D(z_i) \geq 1$。H 之外的所有顶点保持不变。

该过程会终止。在行列式最大值为 $M > 1$ 的一步中，至少有一个行列式为 M 的顶点消失，且不会产生这样的顶点。在该最大值下经过有限步后，它会减小。该最大值是正整数，因此最终所有行列式均为 1。

根据引理 2，一次截断只有通过恰好截断该交集，才能破坏两个原始超面的交集。断言 A 使用至少为 3 的余维，而在断言 B 中，这将意味着 T 是一对原始超面，而这已被排除。截断也不会产生原先不相交的面的交集。这就确立了断言 B 以及该定理的第一个陈述。

对于第二个陈述，取 $P_0 = C^n(2^n-1)^*$，其中 $n \geq 4$，并取其面到 $\{0,1\}^n$ 的非零向量的一个双射。其 2^n-1 原始超面仍两两相交，因此$\chi(P) \geq 2^n-1$。将整数示性映射模 2 化所得的映射是特征映射，因为每个行列式都是 ±1，因此 $\chi(P) \leq 2^n-1$。□

推论12。 一个简单的 n-多胞体 Q 有一个细分 P，其上定义了一个特征映射$\mathbb{Z}$，并且两个原始超面相交，当且仅当它们在 Q 中相交，当且仅当$\chi(Q) \leq 2^n - 1$。

证明。 如果 $\chi(Q) \leq 2^n - 1$，则给正常着色的各色类分配不同的非零向量（取自 $\{0,1\}^n$），并应用定理11。反过来， P 上的整数示性映射模 2 约化后，会给 P 着色，因而也给原始超面着色，且至多使用 $2^n - 1$ 种颜色。□

这并不意味着 $\chi(P) = \chi(Q)$，因为新的整数标记可能需要更多颜色。

对于 $n = 5$，也可以直接求得该提升。对于一个有 174 个刻面和 1636 个顶点的多胞体，存在一个映射 Λ，使得 $\Lambda \equiv \lambda$ （模 2）成立，且所有顶点处的行列式均为 ± 1。我们为 $\mathbb{Z}_2^5$ 的 31 个非零向量各分配一个整数向量，于是顶点处出现了 1358 个不同的基；通过搜索各项的符号，便能得到一个解。我们用精确整数运算对其进行了验证。

5. The oriented case

当且仅当对于 $\mathbb{Z}_2^n$ 的某个基，特征映射的所有取值都具有奇数个非零坐标 [15] 时，小覆盖才是可定向的。奇重量向量张成 $\mathbb{Z}_2^n$，因为它们包含基向量，且共有 2^{n-1} 个。因此，在定向情形下 $\chi \leq 2^{n-1}$.

命题13. 对于每个 $n \geq 4$，都存在一个简单的 n 维多胞体 P，其 $\chi(P) = 2^{n-1}$ 是某个定向小覆盖的轨道空间。 n 与 2^{n-1} 之间的每个整数都能作为这样的色数出现。

证明。令 X 为 $\mathbb{Z}_2^n$ 中奇重量向量的集合，因此 $|X| = 2^{n-1}$；取 $P_0 = C^n(2^{n-1})^*$，并任取其各刻面到 X. 的一个双射 ν。我们对这个 X. 应用定理 5。

所有标记均非零且两两不同，因此回路面至少包含 3 个元素。此外，奇数个奇重量向量之和仍为奇重量，因此不为零；而回路包含偶数个元素，故至少有 4 个元素，所以所有截断的余维至少为 4。根据定理 1 的证明中相同的论证，旧刻面在最终多胞体 P 中两两相交，因此 $\chi(P) \geq 2^{n-1}$.

特征映射的所有标记均来自 X，因此根据 [15],和 $\chi(P)$ $\leq |X| = 2^{n-1}$. □，小覆盖是可定向的

对于 $n = 4$ 和 $n = 5$，这重新证明了 [1, 定理 3.6、3.7],，而 $n \geq 6$ 的情形是新的。经计算机验证的例子存在于 $n = 4$，5，6，7；对于 $n = 7$，该多胞体有 13391 个面和 340374 个顶点，而 $\chi = 64$.

同样的论证可以得到完整的谱。对于 $n \leq k \leq 2^{n-1}$，取 k 个包含标准基的奇重量向量；若 $k \geq n+1$，则使用初始多面体 $C^n(k)^*$；若 $k = n$，则使用立方体，并在相对的面上标记为 e_1、.....、 e_n。所得的定向小覆盖具有 $\chi = k$。在不受限制的情形下，取任意张成集$X \subseteq \mathbb{Z}_2^n \setminus \{0\}$，其中有 $|X| \geq n+1$，并使用初始多面体 $C^n(|X|)^*$，我们得到一个像为 X 且 $\chi = |X|$的特征映射；因此，对于$n \geq 4$，介于 n 和 $2^n - 1$ 之间的 χ 的每个取值都能实现（立方体对应的取值为 n）。

更一般地，设 Q 是任意一个满足 $\chi(Q) = k \le 2^{n-1}$ 的简单 n-多胞体。根据一种使用 k 种颜色的正常着色，将其各个刻面标记为 k 个包含标准基的奇重量向量。任意两个相交刻面的标记都不相同，而奇数个奇重量向量之和非零，因此每个回路面的刻面数都是偶数，故至少为 4。定理 5 给出通过余维至少为 4 的截断对 Q 进行细分 P，从而得到一个可定向小覆盖，并且 $\chi(P) = k$；其中，原始超面诱导出 Q 的交图，如定理 8 所述。

6. 结论

我们证明了，对于每个 $n \ge 4$，Davis 和 Januszkiewicz 的上界 $\chi(P^n) \le 2^n-1$ 均可达到，从而回答了 [1, 问题 3.5]。结合 $n = 1$，2 以及 $n = 3$ 中的失败情形，这就解决了所有维数下的问题。这些多胞体由 $C^n(2^n-1)^*$ 通过截断余维至少为 3 的面得到。此外，存在一个具有 $\chi = 2^n - 1$ 的多胞体，它既是某个小覆盖的轨道空间，也是某个拟环面流形的轨道空间（定理11）；在定向情形下，对于每个 $n \ge 4$，尖锐上界 2^{n-1} 均可达到。

$C^n(2^n - 1)^*$ 的面的标记可以具有余秩至少为 2 的奇异顶点，因此仅修复单个顶点是不够的，这就是定理 5 中的回路面被递归修复的原因。

让我们解释为何直接截断一个坏面可能会失败。设 $G = F_a \cap F_b \cap F_c$ 是五维中的一个坏二维面，其标签构成一个回路，因此 $W =$ 张成空间$\{\nu(F_a)\ \nu(F_b)\ \nu(F_c)\}$的维数为 2，假设 G 是一个多边形，并设 $\mu_1, \dots, \mu_k$ 是其各边标签在 $\mathbb{Z}_2^5/W \cong \mathbb{Z}_2^3$中的类，即 Fano 平面上的点，且相邻的类互不相同且非零。用标记 u 对 G 进行截断是允许的，当且仅当 u 的类不位于任何直线张成空间(μ_j, μ_{j+1})上。这些直线可以覆盖整个 Fano 平面，如图 2 所示，因此直接截断是不可能的。这就是 [1], 中指出的障碍，而定理 5 中的递归通过先截断 G 内部的面来修复它。

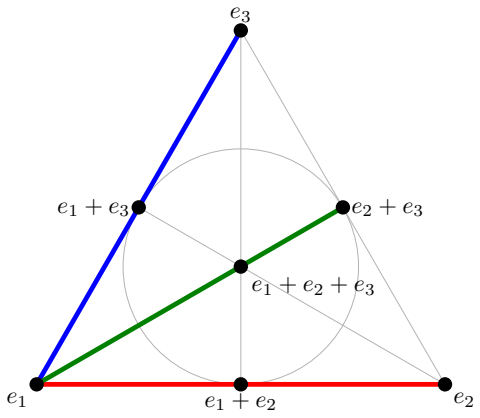

FIGURE 2. Fano 平面 $\mathbb{Z}_2^3 \setminus \{0\}$。对于一个边的类为 $e_1, e_2, e_1, e_3, e_1, e_2+e_3$ 的六边形，张成空间 span(μ_j, μ_{j+1}) 中的直线是经过 e_1 的三条粗体直线。它们覆盖全部七个点，因此没有任何标记 u 允许用于对该六边形进行直接截断。

我们还注意到，由于标记e_4, $e_2 + e_4$ 和 e_2 之和为零， $F_3 \cap F_6 \cap F_7$ Example 3.2], 中缺少一条坏边 [1, 。因此，该例有 14 条坏边，且所得多胞体的面向量为

(197, 394,243, 46)，而非 (193, 386, 228, 45)，后者不满足欧拉关系。这不影响 [1] 的定理 3.1。

该构造也由多个独立程序在计算机上实现，下面的例子均以这种方式获得，并通过重放截断过程进行了检查。采用循环初始多胞体，定理 5 中的强可容递归为 $n = 4$ 构造出具有 38 个面的例子，为 $n = 5$ 构造出具有 164 个面的例子（面向量为 (1636，4090，3596，1304，164)），并为 $n = 6$ 构造出具有 6681 个面的例子。更灵活的修正规则为 $n = 5$ 给出了一个具有 146 个面的多胞体，其面向量为 (1578，3945，3444，1221，146)。对于 $n = 4$，从一个具有 15 个顶点的非循环邻接 4-多胞体出发进行搜索，得到一个具有 20 个面的简单多面体，它有 110 个顶点，$\chi = 15$并且其特征映射的 $0/1$提升是整数的（全部 110 个行列式均为 ± 1），因此它既是一个小覆盖的轨道空间，也是一个拟环面流形的轨道空间。这些数值是上界，尚不知是否为最小值。这些例子由计算机找到，我们不提供其证书。

注 14. 对于 $n \geq 4$，令 $f_{\mathbb{Z}_2}(n)$ 和 $f_{\mathbb{Z}}(n)$ 分别表示具有 $\chi = 2^n - 1$ 且特征映射取值于 $\mathbb{Z}_2$、以及取值于 $\mathbb{Z}$ 的简单n-多胞体的最少刻面数。这些函数统计所有刻面，包括截断引入的刻面，而不只是回路面或不同的标记值。模2 约化得到 $f_{\mathbb{Z}_2}(n) \leq f_{\mathbb{Z}}(n)$。对于 $n = 4$，我们有 $15 \leq f_{\mathbb{Z}_2}(4) = f_{\mathbb{Z}}(4) \leq 20$。具体而言，根据具有20个刻面的例子，$\mathbb{Z}_2$ 的极小化对象至多有20 个刻面，因此其对偶边界是一个至多有20 个顶点的单纯3-球面，而该球面上的每个模 2 特征映射都能依据 [7,定理 3.1]提升至 $\mathbb{Z}$ 。

恰有 $N = 2^n - 1$ 个两两相交刻面的例子必须满足一个必要条件：每个模 2 特征映射都必须将它们双射标记为非零向量。因此，在其对偶边界中，标记为 $a, b, a+b$ 的每个三元组都是一个缺失三角形：它的所有边都存在，但由于线性相关，三角形本身不存在。这样的三元组有 $N(N-1)/6$ 个，因为每一对不同的非零向量都确定其中一个，而每个三元组会被三对向量重复计数。这限制了二邻接候选对象，但并不要求它们是邻接的；这并不能确定其是否存在。

AI声明。 本文稿的撰写使用了Anthropic Claude.ai。它协助了论证及其阐述，以及证明的核验。所有结果均经作者核实，作者对内容承担全部责任。

致谢。 DjordjeBarali´c部分得到塞尔维亚科学、技术发展与创新部通过塞尔维亚科学与艺术学院数学研究所提供的资助。R. Skrekovski感谢斯洛文尼亚研究与创新局项目P1–0383的部分资助。

References

[1] Dj. Barali´c，《关于在一个15-可着色简单四维多胞体上存在小覆盖》，《韩国数学会通报》**62** (2025) 1139–1147。[2] Dj. Barali´c，L. Milenkovi´c，《邻接多面体上的小覆盖与拟托里克流形》，《地中海数学杂志》**19**(2022)，论文编号87。[3] Dj. Barali´c，A. Vavpeti˘c，A. Vu˘ci´c，《托里克拓扑中的泛复形》，《数学成果》**78** (2023)，论文编号218。[4] Dj. Barali´c，A. Vavpeti˘c，A. Vu˘ci´c，《模 Buchstaber 不变量》，《斯捷克洛夫数学研究所学报》**326**(2024) 21–36。[5] V. M. Buchstaber，T. E. Panov，《托里克拓扑》，《数学调查与专著》**204**，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年。

[6] W. Bruns，M. von Thaden，《由短向量构造单纯锥的幺模三角剖分》，组合理论杂志 *A* 辑 **150** (2017) 137–151。[7]S. Choi，Y. Guan，H. Jang，Z. L¨u，《关于单纯 3-球面的环面提升性质》，arXiv:2607.18706 (2026)。[8] S. Choi，R. Kim，《小覆盖与四色定理》，arXiv:2610.29131 (2026)。[9] S. Choi，H. Jang，《Buchstaber 不变量的有限几何障碍与多面体分离》，arXiv:2610.07631 (2026)。[10] M. W. Davis，T. Januszkiewicz，《凸多面体、Coxeter 轨形与环面作用》，杜克数学杂志**62** (1991) 417–451。[11] G. Ewald，G. C. Shephard，《凸多胞体边界复形的恒星剖分》，《数学年刊》**210**(1974) 7–16。[12] W. Fulton，《环面簇导论》，《数学年刊研究》**131**，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993年。[13] S. Hasui，《对偶循环多面体上拟环面流形的分类》，《代数几何与拓扑》**15** (2015) 1387–1437，doi:10.2140/agt.2015.15.1387。[14] D. Gale，《邻接多面体与循环多面体》，《纯数学专题讨论会论文集》**VII**，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1963年，225–232。[15] H. Nakayama，Y. Nishimura，《小覆盖的可定向性与简单多面体的着色》，大阪数学杂志**42**(2005) 243–256。[16] J. Oxley，《拟阵理论》，第2版，牛津数学研究生教材**21**，牛津大学出版社，2011年。[17] G. M. Ziegler，《多面体讲义》，《数学研究生教材》**152**，施普林格，纽约，1995年。

Mathematical Institute SANU, Knez Mihailova 36, p.f. 367, 11001 Belgrade, Serbia
电子邮箱地址： djbaralic@mi.sanu.ac.rsFaculty of Information Studies,
Ljubljanska cesta 31a, 8000 Novo Mesto, Slovenia

Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, Jadranska 19, 1000 Ljubljana, Slovenia电子邮箱地址： skrekovski@gmail.com