反应-平流-扩散方程一般界面问题的解析解

Andreas Chatziafratis [1,2,3]*、Guenbo Hwang [4]、Georgia Karali [2,3]

[1] 早稻田大学理工学研究所，早稻田大学，日本东京 [2] 雅典国立卡波迪斯特里亚大学数学系，希腊 [3] 希腊研究与技术基金会应用与计算数学研究所，克里特岛 [4] 大邱大学数学系，韩国庆尚北道庆山

2025年11月

摘要。我们针对经典反应-对流-扩散（RAD）方程的完全非齐次界面问题，得到了新的积分表示。这些表示是在复傅里叶平面上以围道积分形式给出的，适用于定义在线上的任意初始数据，以及原点处的一般界面条件。此类应用数学问题广泛出现在数理物理、化学、连续介质力学、生物学、药代动力学以及数理金融等领域的各种物理现象中。本文采用了恰当的 Fokas 统一变换法，特别需要应对模型中包含低阶项以及所研究界面问题具有一般性所带来的挑战。据我们所知，迄今发表的文献中尚未出现过这类细致分析（也无法轻易从中推导出来）。我们给出的显式公式可直接用于探究解的定性性质，例如正则性、渐近行为和适定性。本研究也有助于考察非线性对应问题，以及研究相变现象、移动界面和弥散界面问题。关于 RAD 方程和高阶偏微分方程的此类结果即将在一系列独立论文中发表。

1. 引言

当不同介质中发生不同的物理过程，并通过其共同边界上的传输定律相互耦合时，就会出现偏微分方程（PDE）界面问题。控制方程在各个子区域中分别建立，而界面条件则施加由守恒原理导出的连续性或平衡关系。根据建模框架的不同，这些条件可能要求解及其通量连续，也可能采用更一般的线性传输关系。

这类模型的典型示例包括热传导问题：不同介质连接在一起，其边界处的热行为必须得到恰当描述。一个经典示例是复合壁热传导问题 [1,2]。在这种情况下，每一层均处于完全热接触状态，材料性质为常数，并沿平行于壁面的方向无限延伸。在界面处，要求温度和热通量连续；在外边界上，则可施加狄利克雷、诺伊曼或罗宾条件。这一框架也可自然扩展到相互热接触的一维杆。从物理角度看，另一个相关情形是摩擦生热热传导问题，它发生在运动物体相互热接触时 [3,4]。在此情形下，界面即发生摩擦的接触面，摩擦会产生局部热通量；由此产生的热流分布于各接触表面，其总和等于摩擦比功率。

此类界面问题有广泛的应用，包括分层含水层中的污染物输运、复合条带中的热传导、层状生物组织中的反应-扩散过程、非均相催化剂中的化学输运等 [4-12]。在这些情形下，系数的不连续性反映了材料性质的变化，而界面条件则规定了物质在材料边界处的传输规则。

多年来，人们发展了多种方法来研究相邻介质中的热传导界面问题。在某些情况下，尤其是在传输条件较为简单时，可以利用积分变换方法（如拉普拉斯变换和傅里叶分析）获得解的表示式 [1,2,4]。近年来，Fokas 提出的著名统一变换法已成功应用于分析

日期。2025年11月（正文，第2–4节，见下文），2026年11月（修订参考文献）2020 数学学科分类号。35A09, 35A22, 35C05, 35C15, 35G05, 35K10, 35K57, 35Q49, 44A15, 76R05, 76R50, 76V05, 82C24, 91B24, 91G20。关键词与短语。Fokas统一变换方法，反应-平流-扩散方程，界面问题，半有界区域，围道积分表示，谱复平面，布莱克-斯科尔斯方程，数学生物学。* 通讯作者，电子邮箱：chatziafrati@math.uoa.gr

界面与接触问题，参见例如 [5-10,13]。该方法为线性偏微分方程中的边界问题和界面问题提供了系统框架，并在广泛条件下给出显式解公式。然而，现有研究大多集中于齐次方程或受限类别的界面条件，而热传导中的一般非齐次界面问题仍相对缺乏研究。这凸显了建立一种更广泛框架的必要性，以便处理一般热传导中的界面问题。

本文研究存在外部源项时线性反应-对流-扩散（lRAD）方程的界面问题，即研究以下问题：

问题求解

$$(1.1)_R \qquad \begin{cases} u_t^R = \sigma_R^2 u_{xx}^R + \gamma_R u_x^R + \delta_R u^R + f_R \\ u^R(x,0) = u_0^R(x) \end{cases}$$

对于 $),(txu^R$ ，其中 $>0x$ 、$>0t$ ，且

$$(1.1)_L \qquad \begin{cases} u_t^L = \sigma_L^2 u_{xx}^L + \gamma_L u_x^L + \delta_L u^L + f_L \\ u^L(x,0) = u_0^L(x) \end{cases}$$

对于 $),(txu^L$ ，其中 $<0x$ 、$>0t$ ，给定一般接触约束：

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \alpha_{11} u_x^R(0,t) + \alpha_{12} u^R(0,t) + \alpha_{13} u_x^L(0,t) + \alpha_{14} u^L(0,t) = I_1(t) \\ \alpha_{21} u_x^R(0,t) + \alpha_{22} u^R(0,t) + \alpha_{23} u_x^L(0,t) + \alpha_{24} u^L(0,t) = I_2(t) \end{cases}$$

对于 $>0t$ ，

其中，(1.2) 中的系数为实常数（我们在命题的陈述中将进一步对这些系数作出假设）；上标和下标 R 与 L 分别对应于右侧和左侧的半无限区间；方程 (1.1) 中的系数分别表示两个半无限子域中的扩散、对流和反应速率，而非齐次项表示外部强迫。我们假设初始条件和外部强迫项属于施瓦茨类。更具体地说，有：

数据 已知初始值 $)(_0 xu^R$ $(\geq 0x)$ 和 $)(_0 xu^L$ $(\leq 0x)$，以及强迫函数 $),(txf_R(\geq 0x$ $,\geq 0t$ $)$ 和 $),(txf_L$ $,(\leq 0x$ $,\geq 0t$ $)$，满足以下假设：

$_1)3.1(\ )),_0^R \in \mathcal{S}\ [0\ \infty(u$ $,])0,((_0^L \in \mathcal{S}\ -\infty u$ $,_2)3.1(\ )),0([),(\cdot$ $\in \mathcal{S}$ ∞tf_R ,
$,0])(),(\cdot$ $\in \mathcal{S}\ -\infty tf_L$, 对于 t 属于 $),[0\ \infty$ 的紧子集时一致。

参数 我们对给定参数作出以下假设：

$_1)4.1(\ \sigma_R > 0,\ \sigma_L > 0,_2)4.1($ 要么 $\gamma_R \geq 0$ 和 $\delta_R \in \mathbb{R}$ ，要么 $\gamma_R < 0$ 和 $\delta_R < 0$,$_3)4.1($ 要么 $\gamma_L \geq 0$ 和 $\delta_L \leq 0$ ，要么 $\gamma_L < 0$ 和 $\delta_L \in \mathbb{R}$,$_4)4.1($ 无论哪种情况，我们都假设 $_{RRR}$ $\gamma^2 > 4\sigma^2\delta$ 和 $_{LLL}$ $\gamma^2 > 4\sigma^2\delta$,$_5)4.1(\ \alpha_{jk} \in \mathbb{R}$。

lRAD 方程描述定向输运、扩散以及局部反应动力学。齐次 lRAD 方程被广泛认为是对流（或对流）-扩散方程，用于描述物理学、化学和生物学中的扩散输运现象 [14-17]。此外，布莱克-斯科尔斯方程虽然起源于金融市场，但与 lRAD 方程具有相同的数学结构：波动率诱导扩散，无风险增长导致漂移，而贴现则表现为反应项 [18]。因此，针对一维、二维和三维 lRAD 方程，人们已经发展出众多解析解和数值解；例如参见 [19-21] 及其中的参考文献。相比之下，非齐次 lRAD 方程的解析理论，尤其是涉及一般非齐次界面问题的理论，仍有待探索。

本文借助 Fokas统一变换方法（UTM），推导出包含外部强迫和界面传输效应的方程（1.1）解的显式解析表示。UTM 是作为逆散射变换的扩展而发展起来的，是分析线性和非线性边值问题的有力工具（按时间顺序参见 [22-34], ），与传统变换法相比具有已确立的解析和数值优势。该方法不仅成功应用于演化型与椭圆型偏微分方程，而且最近也应用于双曲型问题 [35], ，同时还得到扩展，可用于处理控制问题 [36,37]。本文旨在将这些发展推广到具有一般界面条件的非齐次 lRAD 方程，给出同时考虑非齐次强迫与界面传输效应的显式解表示，从而建立分析多区域lRAD系统的系统框架。

此外，该框架自然地与移动界面问题相联系，例如经典的 Stefan问题，其中界面依据能量平衡定律动态演化；参见 [38] 及其中引用的文献。这一联系凸显了我们的方法在相变现象研究中的广泛适用性。为求完整并惠及读者，我们指出，关于 Fokas UTM 方法论（本研究中的核心工具）的更多应用、最新进展及相关文献，例如可见 [39-68], ，这些文献按字母顺序排列。

本文组织如下。第 2 节中，我们利用 UTM 推导 x > 0时 lRAD 方程解的积分表示；第 3 节中，我们给出 x < 0时解的类似公式。同样众所周知，实施 UTM 的关键环节是<正文 id='3'>全局</正文>关系，这是一种通常涉及初值与边值的积分代数方程；在本文中，它可用于根据给定的界面条件刻画未知边界值。第 4 节中，我们通过分析分别针对 x > 0 和 x < 0得到的全局关系，确定并消去未知边界值，从而推导出式 (1.1) 所述界面问题的闭式解析解。最后，我们对本文作出若干评述，并陈述定理。

2. $>0x$ 情形下解的推导

设

$$\hat{u}^R(\lambda,t)=(u^R\hat{)}(\lambda,t)=\int_{x=0}^{\infty}e^{-i\lambda x}u^R(x,t)dx \text{ and } \hat{f}_R(\lambda,t)=\int_{x=0}^{\infty}e^{-i\lambda x}f_R(x,t)dx, \text{ for } \mathrm{Im}\lambda\le 0,$$

我们有

$$\frac{\partial\hat{u}^R(\lambda,t)}{\partial t}=\sigma_R^2\int_0^{\infty}e^{-i\lambda x}u_{xx}^R(x,t)dx+\gamma_R\int_0^{\infty}e^{-i\lambda x}u_x^R(x,t)dx+\delta_R\int_0^{\infty}e^{-i\lambda x}u^R(x,t)dx+\int_0^{\infty}e^{-i\lambda x}f_R(x,t)dx.$$

分部积分后可得

$$\frac{\partial\hat{u}^R(\lambda,t)}{\partial t}=-\sigma_R^2g_1^R(t)+\sigma_R^2i\lambda\int_0^{\infty}e^{-i\lambda x}u_x^R(x,t)dx-\gamma_Rg_0^R(t)+\gamma_Ri\lambda\int_0^{\infty}e^{-i\lambda x}u^R(x,t)dx+\delta_R\hat{u}^R(\lambda,t)+\hat{f}_R(\lambda,t)$$

and

$$\frac{\partial\hat{u}^R(\lambda,t)}{\partial t}=-\sigma_R^2g_1^R(t)-\sigma_R^2i\lambda g_0^R(t)-\sigma_R^2\lambda^2\hat{u}^R(\lambda,t)-\gamma_Rg_0^R(t)+\gamma_Ri\lambda\hat{u}^R(\lambda,t)+\delta_R\hat{u}^R(\lambda,t)+\hat{f}_R(\lambda,t).$$

因此,

$$\frac{\partial\hat{u}^R(\lambda,t)}{\partial t}=-\omega_R(\lambda)\hat{u}^R(\lambda,t)-[\sigma_R^2g_1^R(t)+\sigma_R^2i\lambda g_0^R(t)+\gamma_Rg_0^R(t)]+\hat{f}_R(\lambda,t) \text{ and } \hat{u}^R(\lambda,0)=\hat{u}_0^R(\lambda), \tag{2.1}$$

其中我们已设

$$\omega_R(\lambda)=\sigma_R^2\lambda^2-i\gamma_R\lambda-\delta_R.$$

求解常微分方程 (2.1)，得到全局 r elation

$$\hat{u}^R(\lambda,t)=e^{-\omega_R(\lambda)t}\hat{u}_0^R(\lambda)-e^{-\omega_R(\lambda)t}[\sigma_R^2\tilde{g}_1^R(\omega_R,t)+(\sigma_R^2i\lambda+\gamma_R)\tilde{g}_0^R(\omega_R,t)]+e^{-\omega_R(\lambda)t}\tilde{\hat{f}}_R(\lambda,\omega_R,t),\ \mathrm{Im}\lambda\le 0, \tag{2.2}$$

其中),0(:)(1 tutg RxR= ,),0(:)(0 tutg RxR = ，以及

$$\widetilde{g}_1^R(\omega_R,t)=\int_{\tau=0}^{t}e^{\omega_R(\lambda)\tau}g_1^R(\tau)d\tau\ ,\ \widetilde{g}_0^R(\omega_R,t)=\int_{\tau=0}^{t}e^{\omega_R(\lambda)\tau}g_0^R(\tau)d\tau\ \text{ and }\ \widetilde{\hat{f}}_R(\lambda,\omega_R,t)=\int_{\tau=0}^{t}e^{\omega_R(\lambda)\tau}\hat{f}_R(\lambda,\tau)d\tau\ .$$

注释 求得一般关系式 (2.2) 的另一种方法基于格林定理以及以散度形式写出的方程，即,

$$\left(e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}u\right)_t=\left\{e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}[(i\sigma_R^2\lambda+\gamma_R)u^R+\sigma_R^2u_x^R]\right\}_x+e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}f_R(x,t)\ .$$

上述方程形式与齐次问题对应的 Lax 对直接相关，即当 $f_R\equiv 0$ ：

$$\mathcal{L}_x-i\lambda\mathcal{L}=u^R\ ,\ \mathcal{L}_t-\omega_R(\lambda)\mathcal{L}=(i\sigma_R^2\lambda+\gamma_R)u^R+\sigma_R^2u_x^R\ .$$

根据傅里叶反演公式,

$$(2.3)\quad u^R(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\hat{u}_0^R(\lambda)d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}[\sigma_R^2\widetilde{g}_1^R(\omega_R,t)+(\sigma_R^2i\lambda+\gamma_R)\widetilde{g}_0^R(\omega_R,t)]d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\widetilde{\hat{f}}_R(\lambda,\omega_R,t)d\lambda\ ,\ \text{for}\ x>0\ ,\ t>0\ .$$

变形 ming the contour, we write equation (2.3) in the following way:

$$(2.4)\quad u^R(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\hat{u}_0^R(\lambda)d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_{\lambda\in C_R^+}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}[\sigma_R^2\widetilde{g}_1^R(\omega_R,t)+(\sigma_R^2i\lambda+\gamma_R)\widetilde{g}_0^R(\omega_R,t)]d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\widetilde{\hat{f}}_R(\lambda,\omega_R,t)d\lambda\ ,\ \text{for}\ x>0\ ,\ t>0\ ,$$

其中 ^+RC 是围道（图 1）

$$C_R^+=\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\lambda\geq 0\ \textit{and}\ \mathrm{Re}[\omega_R(\lambda)]=\mathrm{Re}[\sigma_R^2\lambda^2-i\gamma_R\lambda-\delta_R]=0\}\ .$$

令 $\lambda=\xi+\eta\ i$，其中 $\xi\ \eta\in$ ，$\mathbb{R}$围道 ^+RC 是函数的图像

$$\eta=\frac{\gamma_R}{2\sigma_R^2}+\sqrt{\xi^2+\frac{\gamma_R^2-4\sigma_R^2\delta_R}{4\sigma_R^4}}\ ,\ \xi\in\mathbb{R}\ ,$$

在 $\xi\eta$ –平面中。

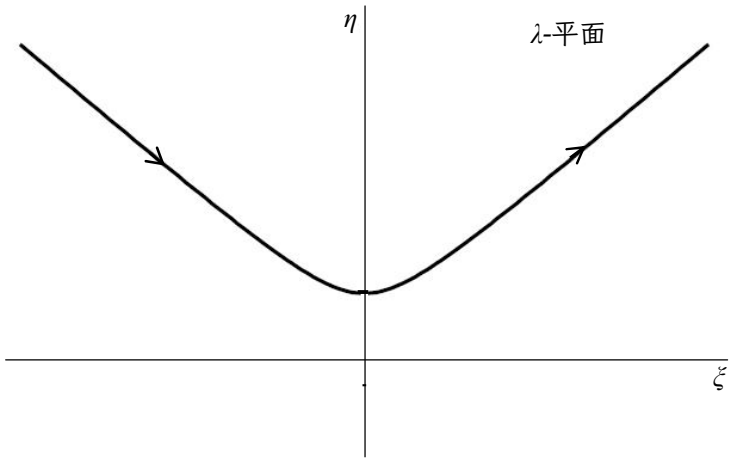

图 1 围道 ^+RC。根据假设 *(1.4)*，$\eta>0,\ \forall\ \xi\ \eta\ \in\ ^+RC$),(。

此外，（2.4）可写为：对于每个 $>0T$,

$$(2.5)\quad u^R(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\hat{u}_0^R(\lambda)d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_{\lambda\in C_R^+}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}[\sigma_R^2\tilde{g}_1^R(\omega_R,T)+(\sigma_R^2 i\lambda+\gamma_R)\tilde{g}_0^R(\omega_R,T)]d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\tilde{\hat{f}}_R(\lambda,\omega_R,t)d\lambda\text{, for } x>0\text{, } 0<t<T\text{.}$$

Indeed, this is a consequence of Cauchy's theorem and Jordan's lemma.

由于)() (ω −λ + γ/σ² =ω λ Ri R RR, （2.2）给出

$$(2.6)\quad e^{\omega_R(\lambda)t}\hat{u}^R(-\lambda+\frac{i\gamma_R}{\sigma_R^2},t)=\hat{u}_0^R(-\lambda+\frac{i\gamma_R}{\sigma_R^2})-\sigma_R^2[\tilde{g}_1^R(\omega_R,t)-i\lambda\tilde{g}_0^R(\omega_R,t)]+\tilde{\hat{f}}_R(-\lambda+\frac{i\gamma_R}{\sigma_R^2},\omega_R,t)\text{, } \mathrm{Im}\lambda\ge\frac{\gamma_R}{\sigma_R^2}\text{, } t>0\text{.}$$

我们也将上述方程写成如下形式

$$(2.7)\quad e^{\omega_R(\lambda)T}\hat{u}^R(-\lambda+\frac{i\gamma_R}{\sigma_R^2},T)=\hat{u}_0^R(-\lambda+\frac{i\gamma_R}{\sigma_R^2})-\sigma_R^2[\tilde{g}_1^R(\omega_R,T)-i\lambda\tilde{g}_0^R(\omega_R,T)]$$

$$+\tilde{\hat{f}}_R(-\lambda+\frac{i\gamma_R}{\sigma_R^2},\omega_R,T)\text{, } \mathrm{Im}\lambda\ge\frac{\gamma_R}{\sigma_R^2}\text{, } T>0\text{.}$$

接下来，我们通过考虑函数来求解方程 ² ² ²)(ω λ =σ λ − γ λ −δ =μ RRRR i ,
其中 λ

$$\lambda=\varphi_R(\mu):=\frac{i\gamma_R}{2\sigma_R^2}+\frac{1}{\sigma_R}\sqrt[R]{\mu^2-\varepsilon_R^2}\text{, } \mu\in\mathbb{C}-[-\varepsilon_R,\varepsilon_R]\text{,}$$

其中 ε =、√(γ² − 4σ²δ 4σ² > 0)/() (RRRRR ，且 $-R$ 平方根函数 $\sqrt[R]{R\mu^2-\varepsilon^2}$ 定义如下：如果

$$\mu-\varepsilon_R=|\mu-\varepsilon_R|e^{i\theta_R^+(\mu)}\text{ and }\mu-(-\varepsilon_R)=|\mu-(-\varepsilon_R)|e^{i\theta_R^-(\mu)}\text{, } 0\le\theta_R^+(\mu),\theta_R^-(\mu)<2\pi\ \text{(fig 2),}$$

then

$$\sqrt[R]{\mu^2-\varepsilon_R^2}:=\sqrt{|\mu^2-\varepsilon_R^2|}\exp\left(i\frac{\theta_R^+(\mu)+\theta_R^-(\mu)}{2}\right).$$

注。R 在符号 $R\,R\mu^2-\varepsilon^2$ √中表示“右侧”。此外，采用角)(θ⁺ R μ 和)(θ⁻ R μ 时，R R R R
²√ ² ² √²)(−μ −ε =−、μ −ε，尽管存在项 "" μ²。

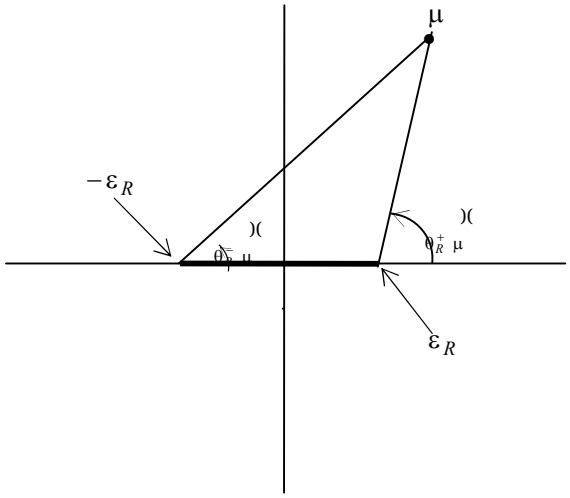

图2 函数 $R\,R\mu^2-\varepsilon^2$定义中的角)(θ⁺ R μ 和)(θ⁻ R μ 。 √

我们指出，函数)(φ$_R$ μ 在 μ∈ℂ−[−ε ,ε] $_{RR}$ 上是解析（全纯）的，并且可连续延拓至半平面 } 0Im:{ μ∈ℂ μ≥。此外，该延拓在 },{}μ∈ℂ μ≥0 − −ε ε Im:{ $_{RR}$ 中为 $^{\infty}C$ 。令 Δ^+ 为集合 } $\Delta^+ =$ μ∈ℂ μ≥0 [μ^2]≤0Re Im:{ *and* ，而 Γ^+ 为其边界，即围道

$$\Gamma^+ = \partial\Delta^+ = \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,\mu \geq 0 \ \textit{and} \ \mathrm{Re}[\mu^2] = 0\} \,. \text{ (Fig.3)}$$

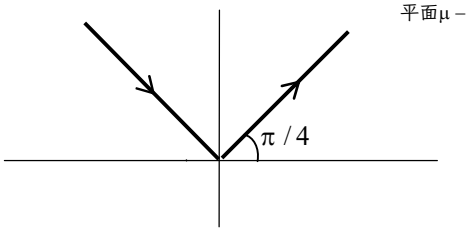

图 3 围道 Γ^+

对积分中的变量进行替换 在 (2.5) 中对 $^+{}_RC$ 上的积分，将 λ∈ $^+$ $_RC$ 替换为 μ∈Γ^+ ， 令)(λ =φ μ $_R$，我们得到

$$(2.8)\ u^R(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \omega_R(\lambda)t}\hat{u}_0^R(\lambda)d\lambda$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\mu\in\Gamma^+} e^{i\varphi_R(\mu)x-\mu^2 t}\{\sigma_R^2\widetilde{g}_1^R(\mu^2,T)+[\sigma_R^2 i\varphi_R(\mu)+\gamma_R]\widetilde{g}_0^R(\mu^2,T)\}\frac{d\varphi_R(\mu)}{d\mu}d\mu$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\widetilde{\hat{f}}_R(\lambda,\omega_R,t)d\lambda \text{ , for } x>0\,,\ 0<t<T\,.$$

Remark Let as keep in mind that

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{d\varphi_R(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma_R}\frac{\mu}{\sqrt[R]{\mu^2-\varepsilon_R^2}}\,,\ \lim_{\substack{\mu\to 0\\ \mathrm{Im}\,\mu>0}}\frac{d\varphi_R(\mu)}{d\mu}=0 \text{ and } \frac{d\varphi_R(\mu)}{d\mu}=\mathrm{O}(1)\text{, as } \mu\to\infty\,.$$

此外，(2.6) 给出 es

$$(2.9)\quad e^{\mu^2 T}\hat{u}^R(-\varphi_R(\mu)+\tfrac{i\gamma_R}{\sigma_R^2},T) = \hat{u}_0^R(-\varphi_R(\mu)+\tfrac{i\gamma_R}{\sigma_R^2}) - \sigma_R^2[\widetilde{g}_1^R(\mu^2,T) - i\varphi_R(\mu)\widetilde{g}_0^R(\mu^2,T)]$$
$$+\widetilde{\hat{f}}_R(-\varphi_R(\mu)+\tfrac{i\gamma_R}{\sigma_R^2},\mu^2,T),\ \mathrm{Im}\varphi_R(\mu)\geq\tfrac{\gamma_R}{\sigma_R^2}\,.$$

特别地，(2.9) 对 μ∈Δ^+ 成立。

3. < 0x的解的推导

与第 *2* 节一样，令

$$\hat{u}^L(\lambda,t) = (u^L\hat{)}(\lambda,t) = \int_{x=-\infty}^{0} e^{-i\lambda x}u^L(x,t)dx \text{ and } \hat{f}_L(\lambda,t) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-i\lambda x}f_L(x,t)dx\text{, for } \mathrm{Im}\,\lambda\geq 0\,,$$

我们有

$$\frac{\partial\hat{u}^L(\lambda,t)}{\partial t} = \sigma_L^2\int_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda x}u_{xx}^L(x,t)dx + \gamma_L\int_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda x}u_x^L(x,t)dx + \delta_L\int_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda x}u^L(x,t)dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda x}f_L(x,t)dx\,.$$

像之前一样分部积分，得到

$$(3.1)\qquad \frac{\partial\hat{u}^L(\lambda,t)}{\partial t} = -\omega_L(\lambda)\hat{u}^L(\lambda,t) + [\sigma_L^2 g_1^L(t) + \sigma_L^2 i\lambda g_0^L(t) + \gamma_L g_0^L(t)] + \hat{f}_L(\lambda,t) \text{ and } \hat{u}^L(\lambda,0) = \hat{u}_0^L(\lambda)\,,$$

其中我们令

$$\omega_L(\lambda)=\sigma_L^2\lambda^2-i\gamma_L\lambda-\delta_L\,.$$

求解常微分方程 (3.1)，得

(3.2) $\hat{u}^L(\lambda,t)=e^{-\omega_L(\lambda)t}\hat{u}_0^L(\lambda)+e^{-\omega_R(\lambda)t}[\sigma_L^2\widetilde{g}_1^L(\omega_L,t)+(\sigma_L^2 i\lambda+\gamma_L)\widetilde{g}_0^L(\omega_L,t)]+e^{-\omega_L(\lambda)t}\widetilde{\hat{f}}_L(\lambda,\omega_L,t)$， $\mathrm{Im}\lambda\geq 0$，

其中),0(:)(1 tutg LxL = ,),0(:)(0 tutg LxL= ，以及

$$\widetilde{g}_1^L(\omega_L,t)=\int_{\tau=0}^{t}e^{-\omega_L(\lambda)\tau}g_1^L(\tau)d\tau\ ,\ \widetilde{g}_0^L(\omega_L,t)=\int_{\tau=0}^{t}e^{-\omega_L(\lambda)\tau}g_0^L(\tau)d\tau\ \text{ and }\ \widetilde{\hat{f}}_L(\lambda,\omega_L,t)=\int_{\tau=0}^{t}e^{-\omega_L(\lambda)\tau}\hat{f}_L(\lambda,\tau)d\tau\ .$$

由傅里叶反演公式，(3.2) 给出

(3.3) $u^L(x,t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\hat{u}_0^L(\lambda)d\lambda+\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}[\sigma_L^2\widetilde{g}_1^L(\omega_L,t)+(\sigma_L^2 i\lambda+\gamma_L)\widetilde{g}_0^L(\omega_L,t)]d\lambda$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\widetilde{\hat{f}}_L(\lambda,\omega_L,t)d\lambda\ ,\ \text{for}\ x<0\ ,\ t>0\,,$$

Also (3.3) can be written as follows:

(3.4) $u^L(x,t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\hat{u}_0^L(\lambda)d\lambda+\dfrac{1}{2\pi}\int_{\lambda\in C_L^-}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}[\sigma_L^2\widetilde{g}_1^L(\omega_L,t)+(\sigma_L^2 i\lambda+\gamma_L)\widetilde{g}_0^L(\omega_L,t)]d\lambda$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\widetilde{\hat{f}}_L(\lambda,\omega_L,t)d\lambda\ ,\ \text{for}\ x<0\ ,\ t>0\,,$$

其中 ^{-}LC 是围道（图 4）

$$C_L^-=\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\lambda\leq 0\ \textit{and}\ \mathrm{Re}[\omega_L(\lambda)]=\mathrm{Re}[\sigma_L^2\lambda^2-i\gamma_L\lambda-\delta_L]=0\}\,.$$

记 $\lambda=\xi+\eta\,i$，其中 $\xi\,\eta\in$，围道 ^{-}LC 是该函数的图像

$$\eta=\frac{\gamma_L}{2\sigma_L^2}-\sqrt{\xi^2+\frac{\gamma_L^2-4\sigma_L^2\delta_L}{4\sigma_L^4}}\,,\ \xi\in\mathbb{R}\,,$$

在$\xi\eta$ –平面内。

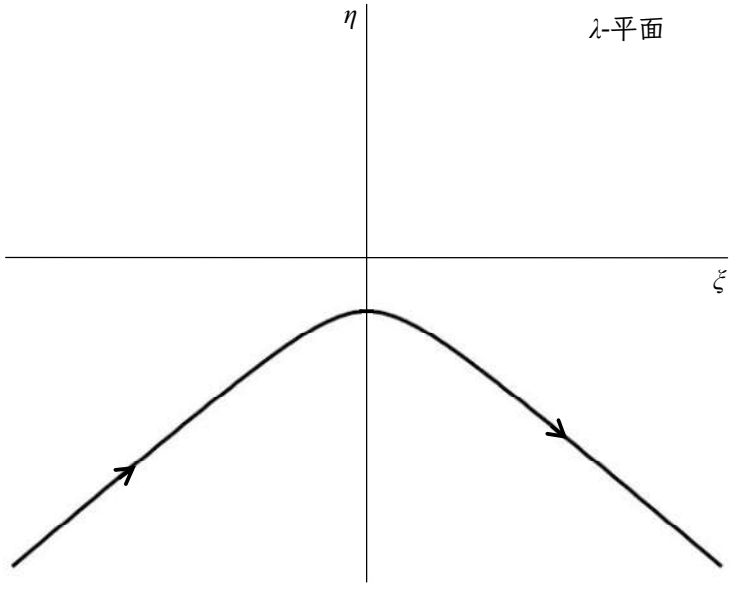

图 4 围道 ^{-}LC。根据假设 *(1.4)*，$\eta<0,\ \forall\ \xi\ \eta\ \in\ ^{-}LC$),(　。

此外，对每一个$>0T$，(3.4)可以写成如下形式：

(3.5) $$u^L(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\hat{u}_0^L(\lambda)d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{\lambda\in C_L^-}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}[\sigma_L^2\tilde{g}_1^L(\omega_L,T)+(\sigma_L^2 i\lambda-\gamma_L)\tilde{g}_0^L(\omega_L,T)]d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\tilde{\tilde{f}}_L(\lambda,\omega_L,t)d\lambda\text{ , for }x<0\text{ , }0<t<T\text{ .}$$

由于)0 (ω −λ + σ² i̇γω λ L L LL，(3.2) 给出

(3.6) $$e^{\omega_L(\lambda)t}\hat{u}^L(-\lambda+\frac{i\dot{\gamma}_L}{\sigma_L^2},t)=\hat{u}_0^L(-\lambda+\frac{i\dot{\gamma}_L}{\sigma_L^2})+\sigma_L^2[\tilde{g}_1^L(\omega_L,t)-i\lambda\tilde{g}_0^L(\omega_L,t)]+\tilde{\tilde{f}}_L(-\lambda+\frac{i\dot{\gamma}_L}{\sigma_L^2},\omega_L,t),\ \mathrm{Im}\lambda\le\frac{\gamma_L}{\sigma_L^2},\ t>0.$$

此外，我们有

(3.7) $$e^{\omega_L(\lambda)T}\hat{u}^L(-\lambda+\frac{i\dot{\gamma}_L}{\sigma_L^2},T)=\hat{u}_0^L(-\lambda+\frac{i\dot{\gamma}_L}{\sigma_L^2})+\sigma_L^2[\tilde{g}_1^L(\omega_L,T)-i\lambda\tilde{g}_0^L(\omega_L,T)]$$
$$+\tilde{\tilde{f}}_L(-\lambda+\frac{i\dot{\gamma}_L}{\sigma_L^2},\omega_L,T),\ \mathrm{Im}\lambda\le\frac{\gamma_L}{\sigma_L^2},\ T>0.$$

接下来，我们通过考虑函数，求解关于 λ 的方程 ² ² ²)(ω λ =σ λ − γ λ −δ =μ LLLL i

$$\lambda=\varphi_L(\mu):=\frac{i\dot{\gamma}_L}{2\sigma_L^2}+\frac{1}{\sigma_L}\sqrt[L]{\mu^2-\varepsilon_L^2},\ \mu\in\mathbb{C}-[-\varepsilon_L,\varepsilon_L],$$

其中 ε =、$\sqrt{\gamma^2-4\sigma^2\delta\quad 4\sigma^2}>0$)/() (LLLLL ，且 −L 平方根函数$\sqrt{\ L\mu^2-\varepsilon^2}$ 在这一次定义如下：如果

$$\mu-\varepsilon_L=|\mu-\varepsilon_L|e^{i\theta_L^+(\mu)}\text{ and }\mu-(-\varepsilon_L)=|\mu-(-\varepsilon_L)|e^{i\theta_L^-(\mu)},\ -2\pi<\theta_L^+(\mu),\theta_L^-(\mu)\le 0\text{ (fig 5),}$$

then

$$\sqrt[L]{\mu^2-\varepsilon_L^2}:=\sqrt{|\mu^2-\varepsilon_L^2|}\exp\left(i\frac{\theta_L^+(\mu)+\theta_L^-(\mu)}{2}\right).$$

注。L，在 sym 中bol$\sqrt{\ L\mu^2-\varepsilon^2}$，表示“左”。此外，采用这一角度选择)($\theta_L^+$ μ 和)(θ_L^- μ ，

$$\sqrt[L]{(-\mu)^2-\varepsilon_L^2}=-\sqrt[L]{\mu^2-\varepsilon_L^2},$$

尽管存在项"" μ^2。因此，

$$\varphi_L(-\mu)=\frac{i\dot{\gamma}_L}{2\sigma_L^2}-\frac{1}{\sigma_L}\sqrt[L]{\mu^2-\varepsilon_L^2}.$$

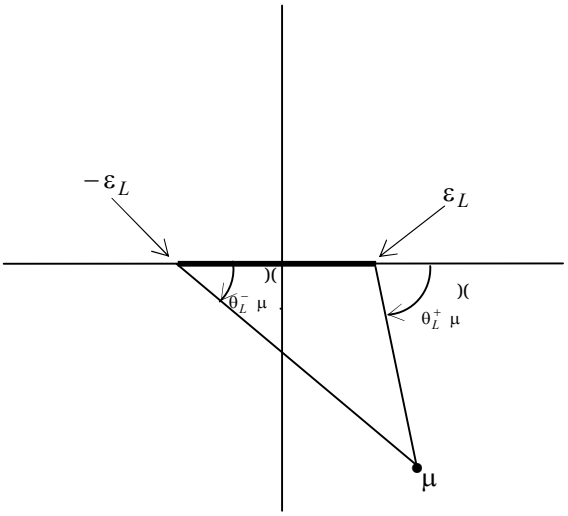

图5 定义函数 L $L\mu^2-\varepsilon^2$时所用的角 $)(\theta_L^+$ μ 和$)(\theta_L^-$ μ 。 $\sqrt{\quad}$

函数$)(\varphi_L$ μ 在 $\mu\in\mathbb{C}-[-\varepsilon$,ε] LL 上是解析的，且可连续延拓到半平面$\}0\mathrm{Im}:\{\mu\in\mathbb{C}$ $\mu\le$。此外，该延拓是$^{\infty}C$ 的，于$\},\{\}\mu\in\mathbb{C}$ $\mu\le 0$ $-$ $-\varepsilon$ ε Im:{ LL中。设Γ^- 为围道（图6）}
$\Gamma^-=$ $\mu\in\mathbb{C}$ $\mu\le 0$ $[\mu^2]=0$Re Im:{ 且 。

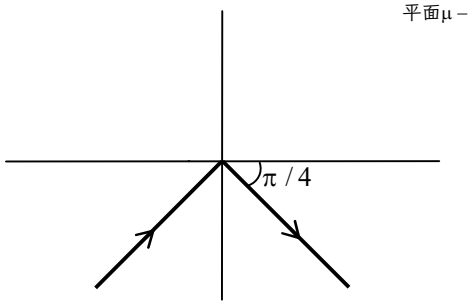

图6 围道 Γ^-

改变变量 在 (3.5) 中对 ^-LC 的积分里，通过令 $)(\lambda=\varphi$ μ L，将 $\lambda\in$ $^-$ LC变为 $\mu\in\Gamma^-$ ，我们得到

$$u^L(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\hat{u}_0^L(\lambda)d\lambda+\frac{\sigma_L^2}{2\pi}\int_{\mu\in\Gamma^-}e^{i\varphi_L(\mu)x-\mu^2t}\{\tilde{g}_1^L(\mu^2,T)-[i\varphi_L(\mu)+\gamma_L]\tilde{g}_0^L(\mu^2,T)\}\frac{d\varphi_L(\mu)}{d\mu}d\mu$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\tilde{\tilde{f}}_L(\lambda,\omega_L,t)d\lambda\text{ , for }x<0\text{ , }0<t<T\text{ .}$$

We can write the above equation as follows:

$$(3.8)\ u^L(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\hat{u}_0^L(\lambda)d\lambda$$
$$+\frac{\sigma_L^2}{2\pi}\int_{\mu\in\Gamma^+}e^{i\varphi_L(-\mu)x-\mu^2t}\{\tilde{g}_1^L(\mu^2,T)+[i\varphi_L(-\mu)+\gamma_L]\tilde{g}_0^L(\mu^2,T)\}\left\{-\frac{d[\varphi_L(-\mu)]}{d\mu}\right\}d\mu$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\tilde{\tilde{f}}_L(\lambda,\omega_L,t)d\lambda\text{ , for }x<0\text{ , }0<t<T\text{ .}$$

Moreover, (3.7) gives

$$(3.9)\ e^{\mu^2T}\hat{u}^L(-\varphi_L(\mu)+\tfrac{i\gamma_L}{\sigma_L^2},T)=\hat{u}_0^L(-\varphi_L(\mu)+\tfrac{i\gamma_L}{\sigma_L^2})-\sigma_L^2[\tilde{g}_1^L(\mu^2,T)-i\varphi_L(\mu)\tilde{g}_0^L(\mu^2,T)]$$

$$+\widetilde{\hat{f}}_L(-\varphi_L(\mu)+\tfrac{i\gamma_L}{\sigma_L^2},\mu^2,T),\ \mathrm{Im}\varphi_L(\mu)\le\tfrac{\gamma_L}{\sigma_L^2}.$$

特别是　　上式对 $\mu\in\Gamma^-$ 成立。现在，若 $\mu\in\Gamma^+$，则 $-\mu\in\Gamma^-$，因此 (3.9) 给出

$$(3.10)\ e^{\mu^2T}\hat{u}^L(-\varphi_L(-\mu)+\tfrac{i\gamma_L}{\sigma_L^2},T)=\hat{u}_0^L(-\varphi_L(-\mu)+\tfrac{i\gamma_L}{\sigma_L^2})-\sigma_L^2[\widetilde{g}_1^L(\mu^2,T)-i\varphi_L(-\mu)\widetilde{g}_0^L(\mu^2,T)]$$
$$+\widetilde{\hat{f}}_L(-\varphi_L(-\mu)+\tfrac{i\gamma_L}{\sigma_L^2},\mu^2,T)\ (\text{for }\mu\in\Delta^+).$$

4. 计算含有未知量的积分

方程 (2.9) 和 (3.10) 可写成如下形式：

$$(4.1)_R\quad \widetilde{g}_1^R(\mu^2,T)-i\varphi_R(\mu)\widetilde{g}_0^R(\mu^2,T)=J_R^*(\mu,T)+J_R(\mu,T),\ \mu\in\Delta^+,$$
$$(4.1)_L\quad \widetilde{g}_1^L(\mu^2,T)-i\varphi_L(-\mu)\widetilde{g}_0^L(\mu^2,T)=J_L^*(\mu,T)+J_L(\mu,T),\ \mu\in\Delta^+,$$

其中我们设

$$J_R^*(\mu,T)=-\frac{1}{\sigma_R^2}e^{\mu^2T}\hat{u}^R(-\varphi_R(\mu)+\tfrac{i\gamma_R}{\sigma_R^2},T)$$
$$J_L^*(\mu,T)=-\frac{1}{\sigma_L^2}e^{\mu^2T}\hat{u}^L(-\varphi_L(-\mu)+\tfrac{i\gamma_L}{\sigma_L^2},T)$$
$$J_R(\mu,T)=\frac{1}{\sigma_R^2}\hat{u}_0^R(-\varphi_R(\mu)+\tfrac{i\gamma_R}{\sigma_R^2})+\frac{1}{\sigma_R^2}\widetilde{\hat{f}}_R(-\varphi_R(\mu)+\tfrac{i\gamma_R}{\sigma_R^2},\mu^2,T)$$
$$J_L(\mu,T)=\frac{1}{\sigma_L^2}\hat{u}_0^L(-\varphi_L(-\mu)+\tfrac{i\gamma_L}{\sigma_L^2})+\frac{1}{\sigma_L^2}\widetilde{\hat{f}}_L(-\varphi_L(-\mu)+\tfrac{i\gamma_L}{\sigma_L^2},\mu^2,T).$$

另一方面，界面条件 (1.2) 给出以下方程：

$$(4.2)_1\quad \alpha_{11}\widetilde{g}_1^R(\mu^2,T)+\alpha_{12}\widetilde{g}_0^R(\mu^2,T)+\alpha_{13}\widetilde{g}_1^L(\mu^2,T)+\alpha_{14}\widetilde{g}_0^L(\mu^2,T)=\widetilde{I}_1(\mu^2,T),\ \mu\in\mathbb{C},$$
$$(4.2)_2\quad \alpha_{21}\widetilde{g}_1^R(\mu^2,T)+\alpha_{22}\widetilde{g}_0^R(\mu^2,T)+\alpha_{23}\widetilde{g}_1^L(\mu^2,T)+\alpha_{24}\widetilde{g}_0^L(\mu^2,T)=\widetilde{I}_2(\mu^2,T),\ \mu\in\mathbb{C}.$$

Now 我们求解方程组 $_R$)1.4(、$_L$)1.4(、1)2.4(、2)2.4(，以求出未知量　　es

$$\widetilde{g}_1^R(\mu^2,T),\ \widetilde{g}_0^R(\mu^2,T),\ \widetilde{g}_1^L(\mu^2,T),\ \widetilde{g}_0^L(\mu^2,T),\ \text{with }\mu\in\Delta^+\ (\text{fig 7}).$$

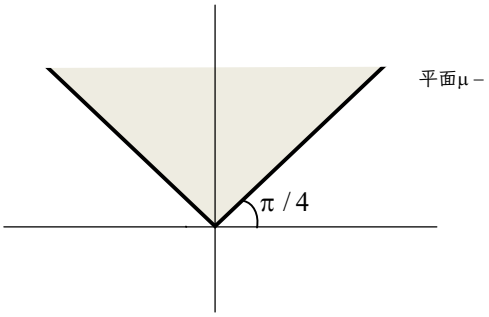

图 7 集合 Δ^+。求解方程组 *(4.1)* 和 *(4.2)*，得到 $\mu\in\Delta^+$。

未知数的系数的行列式为

$$\mathfrak{D}(\mu)=\det\begin{bmatrix}1 & -i\varphi_R(\mu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -i\varphi_L(-\mu)\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\end{bmatrix}.$$

根据克拉默法则，对于 $\mu\in\Delta^{+}$，我们得到，

$$\widetilde{g}_1^R(\mu^2,T)=\frac{\mathfrak{D}_1^{R,*}(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)},\ \widetilde{g}_0^R(\mu^2,T)=\frac{\mathfrak{D}_0^{R,*}(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)},\ \widetilde{g}_1^L(\mu^2,T)=\frac{\mathfrak{D}_0^{L,*}(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)},\ \widetilde{g}_0^L(\mu^2,T)=\frac{\mathfrak{D}_0^{L,*}(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)},$$

其中

$$\mathfrak{D}_1^{R,*}(\mu,T)=\det\begin{bmatrix}J_R^{*}(\mu,T)+J_R(\mu,T) & -i\varphi_R(\mu) & 0 & 0\\ J_L^{*}(\mu,T)+J_L(\mu,T) & 0 & 1 & -i\varphi_L(-\mu)\\ \widetilde{I}_1(\mu^2,T) & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \widetilde{I}_2(\mu^2,T) & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{D}_0^{R,*}(\mu,T)=\det\begin{bmatrix}1 & J_R^{*}(\mu,T)+J_R(\mu,T) & 0 & 0\\ 0 & J_L^{*}(\mu,T)+J_L(\mu,T) & 1 & -i\varphi_L(-\mu)\\ \alpha_{11} & \widetilde{I}_1(\mu^2,T) & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \widetilde{I}_2(\mu^2,T) & \alpha_{23} & \alpha_{24}\end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{D}_1^{L,*}(\mu,T)=\det\begin{bmatrix}1 & -i\varphi_R(\mu) & J_R^{*}(\mu,T)+J_R(\mu,T) & 0\\ 0 & 0 & J_L^{*}(\mu,T)+J_L(\mu,T) & -i\varphi_L(-\mu)\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \widetilde{I}_1(\mu^2,T) & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \widetilde{I}_2(\mu^2,T) & \alpha_{24}\end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{D}_0^{L,*}(\mu,T)=\det\begin{bmatrix}1 & -i\varphi_R(\mu) & 0 & J_R^{*}(\mu,T)+J_R(\mu,T)\\ 0 & 0 & 1 & J_L^{*}(\mu,T)+J_L(\mu,T)\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \widetilde{I}_1(\mu^2,T)\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \widetilde{I}_2(\mu^2,T)\end{bmatrix}.$$

我们定义

$$G_1^R(\mu,T)=\frac{\mathfrak{D}_1^R(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)},\ G_0^R(\mu,T)=\frac{\mathfrak{D}_0^R(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)},\ G_1^L(\mu,T)=\frac{\mathfrak{D}_1^L(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)},\ G_0^L(\mu,T)=\frac{\mathfrak{D}_0^L(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)},$$

其中 $\mathfrak{D}_1^R(\mu,T)$，$\mathfrak{D}_0^R(\mu,T)$，$\mathfrak{D}_1^L(\mu,T)$，$\mathfrak{D}_0^L(\mu,T)$ 是由相应的行列式 $\mathfrak{D}_1^{R,*}(\mu,T)$，$\mathfrak{D}_0^{R,*}(\mu,T)$，$\mathfrak{D}_1^{L,*}(\mu,T)$，$\mathfrak{D}_0^{L,*}(\mu,T)$ 通过消去项 $J_R^{*}(\mu,T)+J_R(\mu,T)$ 和 $J_L^{*}(\mu,T)+J_L(\mu,T)$ 而得到的行列式，即将它们替换为零。因此，

$$\mathfrak{D}_1^{R,*}(\mu,T)-\mathfrak{D}_1^R(\mu,T)=\mathfrak{U}_1^R(\mu,T),\ \mathfrak{D}_0^{R,*}(\mu,T)-\mathfrak{D}_0^R(\mu,T)=\mathfrak{U}_0^R(\mu,T),$$

$$\mathfrak{D}_1^{L,*}(\mu,T)-\mathfrak{D}_1^L(\mu,T)=\mathfrak{U}_1^L(\mu,T),\ \mathfrak{D}_0^{L,*}(\mu,T)-\mathfrak{D}_0^L(\mu,T)=\mathfrak{U}_0^L(\mu,T),$$

其中

$$\mathfrak{U}_1^R(\mu,T)=\det\begin{bmatrix} J_R^*(\mu,T) & -i\varphi_R(\mu) & 0 & 0\\ J_L^*(\mu,T) & 0 & 1 & -i\varphi_L(-\mu)\\ 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{U}_0^R(\mu,T)=\det\begin{bmatrix} 1 & J_R^*(\mu,T) & 0 & 0\\ 0 & J_L^*(\mu,T) & 1 & -i\varphi_L(-\mu)\\ \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24}\end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{U}_1^L(\mu,T)=\det\begin{bmatrix} 1 & -i\varphi_R(\mu) & J_R^*(\mu,T) & 0\\ 0 & 0 & J_L^*(\mu,T) & -i\varphi_L(-\mu)\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24}\end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{U}_0^L(\mu,T)=\det\begin{bmatrix} 1 & -i\varphi_R(\mu) & 0 & J_R^*(\mu,T)\\ 0 & 0 & 1 & J_L^*(\mu,T)\\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0\end{bmatrix}.$$

计算结果表明

$$\mathfrak{D}(\mu)=\mathrm{A}_{13}\varphi_R(\mu)\varphi_L(-\mu)-i\mathrm{A}_{14}\varphi_R(\mu)-i\mathrm{A}_{23}\varphi_L(-\mu)-\mathrm{A}_{24},$$

$$\mathfrak{U}_1^R(\mu,T)=i\varphi_R(\mu)\mathrm{A}_{34}J_L^*(\mu,T)-i\varphi_L(-\mu)\mathrm{A}_{23}J_R^*(\mu,T)-\mathrm{A}_{24}J_R^*(\mu,T),$$

$$\mathfrak{U}_0^R(\mu,T)=i\varphi_L(-\mu)\mathrm{A}_{13}J_R^*(\mu,T)+\mathrm{A}_{14}J_R^*(\mu,T)+\mathrm{A}_{34}J_L^*(\mu,T),$$

$$\mathfrak{U}_1^L(\mu,T)=-i\varphi_R(\mu)\mathrm{A}_{14}J_L^*(\mu,T)-i\varphi_L(-\mu)\mathrm{A}_{12}J_R^*(\mu,T)-\mathrm{A}_{24}J_L^*(\mu,T),$$

$$\mathfrak{U}_0^L(\mu,T)=i\varphi_R(\mu)\mathrm{A}_{13}J_L^*(\mu,T)-\mathrm{A}_{12}J_R^*(\mu,T)+\mathrm{A}_{23}J_L^*(\mu,T),$$

其中

$$\mathrm{A}_{13}:=\det\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{23}\end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{14}:=\det\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{24}\end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{23}:=\det\begin{bmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{A}_{24}:=\det\begin{bmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{14}\\ \alpha_{22} & \alpha_{24}\end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{12}:=\det\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}\ \textit{and}\ \mathrm{A}_{34}:=\det\begin{bmatrix}\alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{23} & \alpha_{24}\end{bmatrix}.$$

保证μ ≠0)(当 μ 时成立的假设。我们声称，存在一个非零多项式)(zP ，使得如果μ =0)(对某个 μ∈ℂ 成立，那么 0)(μ ℑP 。事实上，如果 μ =0)(，那么 $\mathfrak{D}$

$$\mathrm{A}_{13}\varphi_R(\mu)\varphi_L(-\mu)-i\mathrm{A}_{14}\varphi_R(\mu)-i\mathrm{A}_{23}\varphi_L(-\mu)-\mathrm{A}_{24}=0$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{A}_{13}[2\sigma_R^2\varphi_R(\mu)][2\sigma_L^2\varphi_L(-\mu)]-2i\mathrm{A}_{14}\sigma_L^2[2\sigma_R^2\varphi_R(\mu)]-2i\mathrm{A}_{23}\sigma_R^2[2\sigma_L^2\varphi_L(-\mu)]-4\sigma_R^2\sigma_L^2\mathrm{A}_{24}=0$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{A}_{13}[i\gamma_R+2\sigma_R\sqrt[R]{\mu^2-\varepsilon_R^2}][i\gamma_L-2\sigma_L\sqrt[L]{\mu^2-\varepsilon_L^2}]$$

$$-2i\mathrm{A}_{14}\sigma_L^2[i\gamma_R+2\sigma_R\sqrt[R]{\mu^2-\varepsilon_R^2}]-2i\mathrm{A}_{23}\sigma_R^2[i\gamma_L-2\sigma_L\sqrt[L]{\mu^2-\varepsilon_L^2}]-4\sigma_R^2\sigma_L^2\mathrm{A}_{24}=0$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_1\sqrt[R]{\mu^2-\varepsilon_R^2}\sqrt[L]{\mu^2-\varepsilon_L^2}+\mathcal{B}_2\sqrt[L]{\mu^2-\varepsilon_L^2}=\mathcal{B}_3\sqrt[R]{\mu^2-\varepsilon_R^2}+\mathcal{B}_4,$$

其中

$$\mathcal{B}_1=-4A_{13}\sigma_R\sigma_L,$$

$$\mathcal{B}_2=-2iA_{13}\sigma_L\gamma_R+4iA_{23}\sigma_L\sigma_R^2,$$

$$\mathcal{B}_3=-2iA_{13}\sigma_R\gamma_L+4iA_{14}\sigma_R\sigma_L^2,$$

$$\mathcal{B}_4=A_{13}\gamma_R\gamma_L-2A_{14}\gamma_R\sigma_L^2-2A_{23}\gamma_L\sigma_R^2+4A_{24}\sigma_R^2\sigma_L^2.$$

Thus $\mathfrak{D}(\mu)=0 \Rightarrow \mathcal{B}_1^2(\mu^2-\varepsilon_R^2)(\mu^2-\varepsilon_L^2)+\mathcal{B}_2^2(\mu^2-\varepsilon_L^2)+2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2(\mu^2-\varepsilon_L^2)\sqrt[R]{\mu^2-\varepsilon_R^2}$

$$=\mathcal{B}_3^2(\mu^2-\varepsilon_R^2)+2\mathcal{B}_3\mathcal{B}_4\sqrt[R]{\mu^2-\varepsilon_R^2}+\mathcal{B}_4^2 \Rightarrow P(\mu)=0,$$

where we have set

$$P(\mu):=[\mathcal{B}_1^2(\mu^2-\varepsilon_R^2)(\mu^2-\varepsilon_L^2)+\mathcal{B}_2^2(\mu^2-\varepsilon_L^2)-\mathcal{B}_3^2(\mu^2-\varepsilon_R^2)-\mathcal{B}_4^2]^2-4(\mu^2-\varepsilon_R^2)[\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2(\mu^2-\varepsilon_L^2)+\mathcal{B}_3\mathcal{B}_4]^2.$$

备注 (1) 注意，如果 $A_{13}\neq 0$，那么多项式 $P(\mu)$ 的次数为 8，特别地，$P(\mu)\neq 0$。
(2) 类似地，如果 $A_{13}=0$ 且 $A_{23}\sigma_L\sigma_R\neq\pm A_{14}\sigma_L\sigma_R$，那么多项式 $P(\mu)$ 的次数为 4。(3) 在 $A_{12}=A_{34}=0$ 和 $A_{24}\neq 0$ 的情况下，界面问题 [1.1]。(1.1), (1.2)] 在某种意义上是“可分离的”
它可化为两个相互独立的热方程半直线问题。

定理 假设 $P(\mu)\neq 0$。则函数 $P(\mu)$ 只有有限个零点，特别地，存在 $\rho>0$，使得对于每个 $\mu\in$，都有 $P(\mu)\neq 0$，其中 $|\mu|\geq\rho$。
对于这样的 ρ，*UTM* 解

$$\{[u^R(x,t),x>0,t>0],[u^L(x,t),x<0,t>0]\},$$

界面问题 {[1.1], [1.2)}，由 *(2.8)* 和 *(3.8)* 给出，可写成如下形式：

$$(4.3)\quad u^R(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\hat{u}_0^R(\lambda)d\lambda$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\mu\in\partial E_\rho^+}e^{i\varphi_R(\mu)x-\mu^2t}\{\sigma_R^2G_1^R(\mu,T)+[\sigma_R^2i\varphi_R(\mu)+\gamma_R]G_0^R(\mu,T)\}\frac{d\varphi_R(\mu)}{d\mu}d\mu$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\tilde{f}_R(\lambda,\omega_R,t)d\lambda,\ \text{for } x>0,\ 0<t<T,$$

$$(4.4)\quad u^L(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\hat{u}_0^L(\lambda)d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mu\in\partial E_\rho^+}e^{i\varphi_L(-\mu)x-\mu^2t}\{\sigma_L^2G_1^L(\mu,T)+[\sigma_L^2i\varphi_L(-\mu)+\gamma_L]G_0^L(\mu,T)\}\left\{-\frac{d[\varphi_L(-\mu)]}{d\mu}\right\}d\mu$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\tilde{f}_L(\lambda,\omega_L,t)d\lambda,\ \text{for } x<0,\ 0<t<T,$$

where (fig 8)

$$E_\rho^+:=\{\mu\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}\,\mu\geq 0,\ \mathrm{Re}(\mu^2)\geq 0\ \textit{and}\ |\mu|\geq\rho\}.$$

此外，我们有

$$(4.5)\ u^R(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\hat{u}_0^R(\lambda)d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\lambda\in\partial\mathcal{Z}^{+}_{\rho 0}} e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\{\sigma_R^2 G_1^R(\psi_R(\lambda),T)+[\sigma_R^2 i\lambda+\gamma_R]G_0^R(\psi_R(\lambda),T)\}d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\widetilde{f}_R(\lambda,\omega_R,t)d\lambda\,,\ for\ x>0\,,\ 0<t<T\,,$$

and

$$(4.6)\ u^L(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\hat{u}_0^L(\lambda)d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\lambda\in\partial\mathcal{Z}^{-}_{\rho 0}} e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\{\sigma_L^2 G_1^L(-\psi_L(\lambda),T)+[\sigma_L^2 i\lambda+\gamma_L]G_0^L(-\psi_R(\lambda),T)\}d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\widetilde{f}_L(\lambda,\omega_L,t)d\lambda\,,\ \text{for}\ x<0\,,\ 0<t<T\,,$$

where (fig. 9 and fig. 10)

$$\mathcal{Z}^{+}_{\rho_0}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,\lambda\geq 0,\ \mathrm{Re}[\omega_R(\lambda)]\geq 0\ \ and\ \ |\lambda|\geq\rho_0\}$$

and

$$\mathcal{Z}^{-}_{\rho_0}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,\lambda\leq 0,\ \mathrm{Re}[\omega_L(\lambda)]\geq 0\ \ and\ \ |\lambda|\geq\rho_0\}\,,$$

前提是 $\rho_0>0$ 足够大。

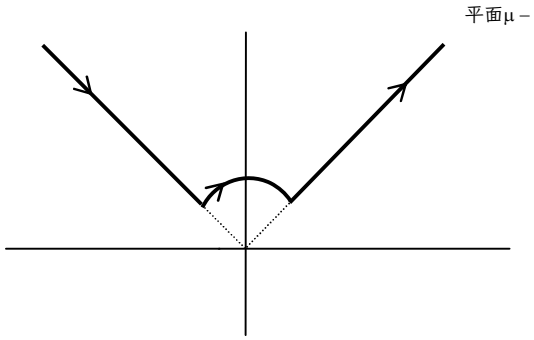

图8 围道 $\partial\mathrm{E}^{+}_{\rho}$

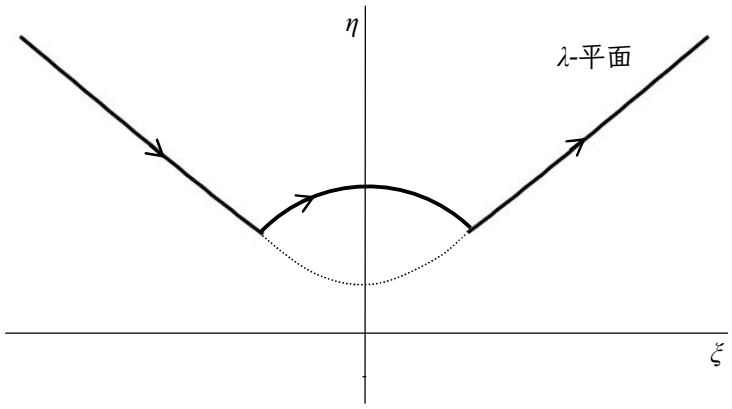

图9 围道 $\partial\mathcal{Z}^{+}_{\rho_0}$

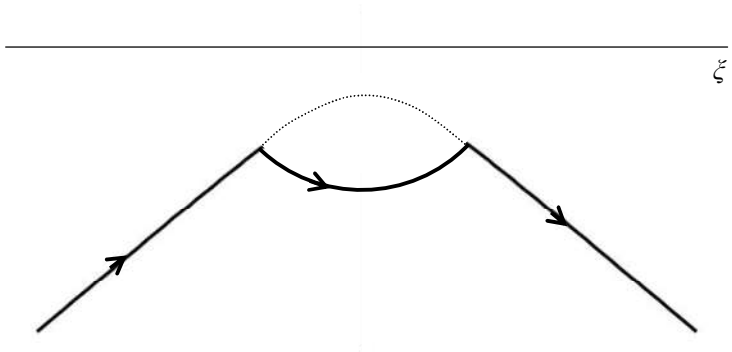

图 10 围道 $\partial\mathcal{Z}_{\rho_0}^{-}$

证明 将),(~1 μ2 ~0 μ2 ~1 μ2 ~0 μ2),,(),,(),,(*TgTgTgTg L LRR* 代入 (2.8) 和 (3.8)，并将围道 Γ^{+}变形为围道 $\partial\mathrm{E}_{\rho}^{+}$，以避开函数)(det μ 的零点，我们得到以下公式:

$$(4.7)\quad u^{R}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\hat{u}_0^{R}(\lambda)d\lambda$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\mu\in\partial\mathrm{E}_{\rho}^{+}}e^{i\varphi_R(\mu)x-\mu^2t}\left\{\sigma_R^2\frac{\mathfrak{D}_1^{R,*}(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)}+[\sigma_R^2 i\varphi_R(\mu)+\gamma_R]\frac{\mathfrak{D}_0^{R,*}(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)}\right\}\frac{d\varphi_R(\mu)}{d\mu}d\mu$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_R(\lambda)t}\widetilde{f}_R(\lambda,\omega_R,t)d\lambda\text{, for } x>0\text{, } 0<t<T\text{,}$$

and

$$(4.8)\quad u^{L}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\hat{u}_0^{L}(\lambda)d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mu\in\partial\mathrm{E}_{\rho}^{+}}e^{i\varphi_L(-\mu)x-\mu^2t}\left\{\sigma_L^2\frac{\mathfrak{D}_1^{L,*}(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)}+[\sigma_L^2 i\varphi_L(-\mu)+\gamma_L]\frac{\mathfrak{D}_0^{L,*}(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)}\right\}\left\{-\frac{d[\varphi_L(-\mu)]}{d\mu}\right\}d\mu$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x-\omega_L(\lambda)t}\widetilde{f}_L(\lambda,\omega_L,t)d\lambda\text{, for } x<0\text{, } 0<t<T\text{.}$$

由于行列式),(1 T^R μ ,),(0 T^R μ ,),(1 T^L μ ,),(0 T^L μ 中，量),(* TJ_Rμ 、),(* TJ_Lμ 的系数为)(O μ，且 μ→∞ with 0Im μ ≥ ，因此

$$\mathfrak{U}_1^{R}(\mu,T)=\mathrm{O}(e^{\mu^2T})\text{, }\mathfrak{U}_0^{R}(\mu,T)=\mathrm{O}(e^{\mu^2T})\text{, }\mathfrak{U}_1^{L}(\mu,T)=\mathrm{O}(e^{\mu^2T})\text{, }\mathfrak{U}_0^{L}(\mu,T)=\mathrm{O}(e^{\mu^2T})\text{.}$$

此外，)()(μ =O μ2 ，因此，

$$(4.9)\quad \widetilde{g}_0^{R}(\mu^2,T)-G_0^{R}(\mu,T)=\mathrm{O}(e^{\mu^2T})\text{, }\widetilde{g}_1^{R}(\mu^2,T)-G_1^{R}(\mu,T)=\mathrm{O}(e^{\mu^2T})$$

and

$$(4.10)\quad \widetilde{g}_0^{L}(\mu^2,T)-G_0^{L}(\mu,T)=\mathrm{O}(e^{\mu^2T})\text{, }\widetilde{g}_1^{L}(\mu^2,T)-G_1^{L}(\mu,T)=\mathrm{O}(e^{\mu^2T})\text{.}$$

此外，注意到

$$\frac{d\varphi_R(\mu)}{d\mu}=\mathrm{O}(1)\text{, }\frac{d\varphi_L(-\mu)}{d\mu}=\mathrm{O}(1)\text{,}$$

我们得到

$$\int\limits_{\mu\in\partial \mathrm{E}_{\rho}^{+}} e^{i\varphi_R(\mu)x-\mu^2 t}\left\{\sigma_R^2\frac{\mathfrak{U}_1^R(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)}+[\sigma_R^2 i\varphi_R(\mu)+\gamma_R]\frac{\mathfrak{U}_0^R(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)}\right\}\frac{d\varphi_R(\mu)}{d\mu}d\mu=0\,,\ \text{for}\ x>0\,, \tag{4.11}$$

and

$$\int\limits_{\mu\in\partial \mathrm{E}_{\rho}^{+}} e^{i\varphi_L(-\mu)x-\mu^2 t}\left\{\sigma_L^2\frac{\mathfrak{U}_1^L(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)}+[\sigma_L^2 i\varphi_L(-\mu)+\gamma_L]\frac{\mathfrak{U}_0^L(\mu,T)}{\mathfrak{D}(\mu)}\right\}\left\{-\frac{d[\varphi_L(-\mu)]}{d\mu}\right\}d\mu=0\,,\ \text{for}\ x<0\,. \tag{4.12}$$

事实上，上述方程由 (4.9)、(4.10)、柯西定理以及以下形式的若尔当引理推出：

$$\lim_{\mathrm{B}\to+\infty}\int_{\{\mu\,:\,|\mu|=\mathrm{B}\}\cap \mathrm{E}_{\rho}^{+}} e^{i\varphi_R(\mu)x+\mu^2(T-t)}\mu^N d\mu=0\,,\ \text{for}\ x>0\ \text{and}\ N\in\mathbb{N}\,.$$

定理证明的完成鉴于方程 (4.11) 和 (4.12)，公式 (4.3) 和 (4.4) 由 (4.7) 和 (4.8) 得出。最后，将变量由 μ 改为 λ，我们得到 (4.5) 和 (4.6)。

注若以 T 代替 t，即如果我们替换这些量，公式 (4.5) 和 (4.6) 同样成立

$$G_1^R(\psi_R(\lambda),T)\,,\ G_0^R(\psi_R(\lambda),T)\,,\ G_1^L(\neg\psi_L(\lambda),T)\,,\ G_0^L(\neg\psi_L(\lambda),T)$$

by

$$G_1^R(\psi_R(\lambda),t)\,,\ G_0^R(\psi_R(\lambda),t)\,,\ G_1^L(\neg\psi_L(\lambda),t)\,,\ G_0^L(\neg\psi_L(\lambda),t)\,.$$

总之，本文的主要目的是首次为一大类与 lRAD 方程相关的一维（表示高维构型中的一种对称性）界面问题（具有间断系数以及相当任意的界面条件）导出显式解公式。我们的方法将Fokas统一变换方法与复解析技术相结合，以便直接依据所给定的初始数据、界面数据与外力项数据得到解的积分表示。特别地，该分析给出了解算子的精确刻画，这些刻画有望阐明界面条件在决定相关演化的定性行为方面所起的作用。lRAD算子中低阶项的存在（相对于传统热方程），连同我们所处理的界面条件的一般形式，引入了现有文献中所不具备的结构特征与分析复杂性。

本文所建立的一般解析框架为系统研究一类极为广泛的非均质输运现象开辟了道路，其范围远超经典扩散与理想接触界面模型。在后续工作中，我们将通过涉及不完全透射、界面渗透性与反应活性以及非均质对流-扩散-反应动力学的物理驱动示例，并结合与已有基于变换的方法的比较，展示当前解表示的通用性与解析能力。我们将特别着重于对界面通量、透射与反射机制以及渐近区制的显式刻画，从而阐明本方法更广泛的适用性与优势。

致谢

本研究工作在希腊研究与创新基金会征集项目“基础研究资助（所有学科横向支持）”框架内开展，该项目属于国家复苏与韧性计划“希腊2.0”，由欧盟—下一代欧盟资助（希腊研究与创新基金会项目编号：14910）。AC（资助至2025年11月）和GK对此谨致谢意。AC目前获得日本科学技术振兴机构[登月研究开发][资助，项目编号为JPMJMS25A5]。

参考文献

[1] H. S. Carslaw 和 J. C. Jaeger，《固体中的热传导》，第2版。纽约，纽约州：牛津大学出版社（1959）。[2] D. Hahn 和 M. Ozisik，《热传导》，第3版。霍博肯，新泽西州：JohnWiley & Sons, Inc.（2012）[3] Yu. Pyryev 和 A. Yevtushenko，制动器摩擦元件厚度对接触温度和磨损的影响，《传热与传质》，36(4)（2000）319–323。[4] A. Yevtushenko 和 M. Kuciej，对流冷却对摩擦加热条带和基底温度的影响，《国际传热传质杂志》，36（2009）129–136。[5] M. Asvestas、A. G. Sifalakis、E. P. Papadopoulou 和 Y. G. Saridakis，采用Fokas方法求解扩散率不连续的多区域线性反应扩散方程，《物理学会议系列杂志》，490（2014）012143。[6] Chatziafratis, A., Rukolaine, S. A., & Aifantis, E. C.（2026）。Barenblatt–Sobolev–Galpern伪抛物方程的积分表示：无界区间和有限区间上的边值问题与界面问题。《俄罗斯数学物理杂志》，33(3)，465-491。[7] B. Deconinck、B. Pelloni、N.E. Sheils，复合墙体中的非稳态热传导，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》，470（2014）1471–2946。[8] B. Deconinck 和 M. Farkas，利用Fokas方法求解变系数演化问题：耗散情形，《应用数学研究》（2025）。[9] E. Luca、J.G. Marshall、A. Chatziafratis，具有任意形状绝热裂隙的两相介质中的热接触电阻，预印本（2026），即将发表。[10] Sheils, N. E., & Smith, D. A.（2015）。利用Fokas方法求解网络上的热方程。《物理学杂志A：数学与理论》，48(33)，335001。[11] Saadatian, S., & Wong, H.（2023）。具有多孔吸液芯的扁平热管中传热传质的解析解。《国际传热传质杂志》，205，123870。[12] Zhang, J., Watson, S. J., & Wong, H.（2007）。双润湿微型热管中的流体流动与传热。《流体力学杂志》，589，1–31。[13] A. Chatziafratis、T. Ozawa，线性BBM方程的非标准初边值问题与界面问题，《离散与连续动力系统－系列S》（2026）。[14] G. Dagan，地下水溶质运移理论，《流体力学年度评论》，19（1987）183–215。[15] A. Mojtabi 和 M. O. Deville，一维线性平流扩散方程：解析解与有限元解，《计算流体》，107（2015）189–195。[16] J. S. Perez Guerrero、E. M. Pontedeiro、M. Th. van Genuchten 和 T. H. Skaggs，具有时变边界条件的一维平流弥散溶质运移方程的解析解，《化学工程杂志》，221（2013）487–491。[17] J. Zhong、C. Zeng、Y. Yuan、Yuzhe 和 Ye Zhang，基于改进谱 Galerkin方法的非稳态扩散-对流-反应方程数值解，《AIP进展》，8（2018）045314。[18] A. S. Fokas 和 E. Kaxiras，《科学家与工程师的现代数学方法：实用入门》，世界科技出版社（2023）。[19] G. Hwang，具有衰减项的一维线性平流弥散方程的初边值问题，《自然科学研究杂志 A 辑》，75（2020）713–725。[20] G. Hwang，有限区域柱坐标下二维线性平流弥散方程的统一求解方法，《国际传热传质杂志》，164（2021）120569。[21] J. S. Perez Guerrero、L. C. G. Pimentel、T. H. Skaggs 和 M. Th. van Genuchten，利用变量替换和积分变换法求解平流扩散运移方程的解析解，《国际传热传质杂志》，52（2009）3297–3304。[22] A. S. Fokas，一种求解线性及某些非线性偏微分方程的统一变换法，伦敦皇家学会会刊 A 辑，453（1997）1411–1443。[23] A.S. Fokas，“关于某些线性和非线性偏微分方程的可积性”，《数学物理杂志》41，4188–4237（2000）；[24] Fokas, A. S.（2001）。凸多边形上的二维线性偏微分方程。伦敦皇家学会会刊 A 辑，371-393。[25] A.S. Fokas，“一种用于演化偏微分方程的新变换法”，《IMA应用数学杂志》67，559-590（2002）。[26] A. S. Fokas，半直线上的可积非线性演化方程，《数学物理通讯》，230（2002）1–39。[27] Fokas, A. S., Pelloni, B.,“有限区间上线性演化偏微分方程的变换法。”《IMA应用数学杂志》70.4（2005）：564-587。[28] A. S. Fokas，“从Green到Lax：经由Fourier”，载于：《非线性偏微分方程及其应用的最新进展》，应用数学专题讨论会论文集65（献给P.D. Lax和L. Nirenberg），美国数学会（2007）。

[29] Flyer, N., & Fokas, A. S. (2008). 求解演化偏微分方程的混合解析数值方法。I. 半直线。伦敦皇家学会会刊 A 辑，1823-1849。[30] A. S. Fokas，《边值问题的统一方法》（CBMS-NSF 应用数学区域会议丛书），费城：工业与应用数学学会；（2008）。[31] A. S. Fokas，“Lax 对：一种新颖的可分离性类型”（特邀论文），《反问题》25，1-44（2009）。[32] A. S. Fokas, E. A. Spence，变量的综合而非分离，《SIAM评论》54（2012）。[33] Chatziafratis, A., Fokas, A. S., & Aifantis, E. C. (2024). 通过 Fokas方法研究半直线上的热方程变体（特邀综述论文）。《应用科学中的数学方法》，47(16)，12541-12566。[34] A Chatziafratis, AS Fokas, K Kalimeris，演化偏微分方程的 Fokas方法，《偏微分方程与应用》(2025)。[35] Chatziafratis, A., Giorgi, C., Miranville, A., & Zullo, F. (2026). 关于四分之一平面上阻尼波方程的广义达朗贝尔型积分表示。arXiv 预印本 arXiv:2608.06355。[36] G. Hwang，利用 Fokas方法研究弥散参数对平流-弥散方程零可控性的影响，《国际控制杂志》，97(12) (2024) 2755–2764。[37] M. M. Cavalcanti, A. Chatziafratis, and L. Rosier. 四分之一平面上线性演化方程不可控性的统一方法。预印本（2025），即将发表。[38] Chatziafratis, A., & Hwang, G. (2027). 关于一个含对流与反应的单相 Stefan 型自由边界问题：A. Chatziafratis, G. Hwang。《计算与应用数学》，46(1)，6。[39] J. L. Bona, A. Chatziafratis, H. Chen, S. Kamvissis，半直线上的线性化 BBM 方程再研究，《数学物理快报》114 (2024)。[40] A. Chatziafratis 等，四分之一平面上狄拉克系统的严格分析，预印本，2026。[41] Chatziafratis, A., & Aifantis, E. C. (2025). 半带状区域和四分之一平面上 Sobolev–Barenblatt 模型与 Rubinshtein–Aifantis 系统的显式 Ehrenpreis–Palamodov–Fokas 表示。《罗巴切夫斯基数学杂志》，46(2)，594-612。[42] A. Chatziafratis, E.C. Aifantis, A. Carbery, A.S. Fokas，半直线上双扩散系统的积分表示，《应用数学与物理杂志》75 (2024)。[43] Chatziafratis, A., Fokas, A.S., Aifantis, E.C. (2024). 通过 Fokas方法研究半直线上带外力项的 Barenblatt 伪抛物方程。《应用数学与力学杂志》104(3)，e202300614。[44] A. Chatziafratis, L. Grafakos, S. Kamvissis，半有界区域上线性演化偏微分方程的长程不稳定性，《动力学与偏微分方程》21 (2024)。[45] A. Chatziafratis, S. Kamvissis, I. G. Stratis，半直线上线性 KdV 方程解的边界行为，《应用数学研究》（2023）。[46] Chatziafratis, A., & Kamvissis, S.，四分之一平面上线性演化偏微分方程的适定性理论。arXiv 预印本 arXiv:2401.08531 (2024)，即将发表。[47] A. Chatziafratis, S. Kamvissis，半无限区间上线性常系数演化偏微分方程初边值问题的无穷多个解，《伦敦数学学会通报》（2025）。[48] A. Chatziafratis, S. Kamvissis, G. Karali, A. Stavrianidi，“通过统一变换法研究半直线上带布朗数据的随机 KdV 方程”，预印本（2026年5月），即将发表。[49] Chatziafratis, A., Kamvissis, S., Miranville, A., & Ozawa, T.，“非自治线性演化方程的统一变换法：严格分析与定性理论”，arXiv 预印本 arXiv:2610.39698 (2026)。[50] Chatziafratis, A., Kamvissis, S., & Slavík, A. (2026). 线性格点微分方程的初边值问题。arXiv 预印本 arXiv:2610.31057。[51] A. Chatziafratis, G. Karali, C. E. Synolakis (2026). 半直线上线性化 Whitham–Broer–Kaup 系统的严格解析解。《应用数学研究》，156(6)。[52] A. Chatziafratis, E. Luca, T. Ozawa，半直线和有限区间上带扩散与反应的非自治线性 BBM 方程，预印本。[53] A. Chatziafratis, E. Luca and S. L. Waters，生物流体力学与再生医学中具有时变系数的 Milne–Barenblatt 伪抛物方程，《离散与连续动力系统－S》（2026）。[54] Chatziafratis, A., & Mantzavinos, D. (2022). 半直线上热方程的边界行为。《应用科学中的数学方法》，45(12)，7364-7393。[55] A. Chatziafratis, A. Miranville, G. Karali, A.S. Fokas, E.C. Aifantis，半直线上高阶扩散与 Cahn–Hilliard 型模型再研究，《数学模型与应用数学方法》（2025）。[56] Chatziafratis, A., Miranville, A., & Ozawa, T. (2026). 带界面的线性 Cahn–Hilliard 方程。arXiv 预印本 arXiv:2605.20130。[57] A. Chatziafratis, T. Ozawa，Sobolev 型演化偏微分方程中的新型不稳定性、爆破与崩解效应：四分之一平面上经典伪抛物模型的渐近分析。《偏微分方程与应用》，5(5)，30（2024）。

[58] A. Chatziafratis, T. Ozawa, S.-F. Tian，四分之一平面上非齐次含时薛定谔方程的统一变换法严格分析与长程不稳定性，《数学年刊》 389 (2023)。[59] M. J. Colbrook, N. Flyer and B. Fornberg，关于Fokas方法在凸与非凸多边形区域椭圆型问题求解中的应用，《计算物理学杂志》，374 (2018) 996–1016。[60] Crowdy, D. G., & Luca, E. (2014). 无需核因子分解求解维纳-霍普夫问题。伦敦皇家学会会刊 *A* 辑，*470*(20140304)，10-1098。[61] A. S. Fokas, D. T. Papageorgiou，半直线上演化偏微分方程的绝对不稳定性与对流不稳定性。《应用数学研究》，114(1)，95-114（2005）。[62] A. A. Himonas (2022). 非线性演化方程初边值问题与 Fokas方法的研究进展。载于复杂系统与应用国际会议网络暑期学校（第275-288页）。Cham：施普林格国际出版公司。[63] Hulse, J. J., Lanzani, L., Llewellyn S mith, S. G., & Luca, E. (2024). 在凸平面区域上求解边值问题的变换法技术。《IMA应用数学杂志》，89(3)，574-597。[64] Hulse, J. J., Lanzani, L., Llewellyn Smith, S. G., & Luca, E. (2025). 统一变换法：超越圆形或凸区域。伦敦皇家学会会刊 *A* 辑，*481*(2319)，20250313。[65] Ji, X., Wilson, H. J., & Luca, E. (2026). 尖角十字槽道中的斯托克斯流理论分析。《流体力学杂志》，*1026*，A9。[66] J.M. Lee, J. Lenells，满足齐次罗宾边界条件的半直线上非线性薛定谔方程，伦敦数学学会会刊 126，334-89 (2023)。[67] Luca, E., & Llewellyn Smith, S. G. (2018). 具有线性扩张的二维通道中的斯托克斯流。《力学与应用数学季刊》，*71*(4)，441-462。[68] Tian, S. F. (2016). 通过 Fokas方法研究半直线上的混合耦合非线性薛定谔方程。《数学、物理与工程科学会刊》，*472*(2195)，20160588。