复流形上行列式点过程能量的中心极限定理 I

Hao Wu

摘要。我们研究与紧黎曼曲面上的正线丛相关联的伯格曼行列式点过程。考虑由格林函数给出的U统计量，称为格林能量。对于由 N 个点组成的构型，格林能量的期望为 $\frac{1}{2}N\log N + O(N)$，方差为$(\log 2 - \pi^2/24)N + O(\log^2 N)$。我们结合伯格曼核的局部渐近性质与累积量展开式，证明了格林能量的中心极限定理。对于复流形上的伯格曼行列式点过程的对数能量，中心极限定理同样成立。

arXiv:2611.31229v1 [math.CV] 23 Nov 2026

2020年数学主题分类：32L10,32A25,32U35,58J52,60F05,60G55

关键词：全纯线丛，格林函数，伯格曼核，U统计量，中心极限定理

目录

1. 引言 1 2. 伯格曼核的辅助积分 4 3. 关于伯格曼核的预备知识 10 4. 期望与方差 20 5. 矩与累积量 26 6. 主要定理的证明 31 7. 关于复流形上对数能量的中心极限定理的注记 39 参考文献 39

1. 引言

行列式点过程理论是过去几十年中一个经典且发展成熟的课题。早期例子出现在随机矩阵理论中，由 Ginibre [36] 在研究复高斯矩阵的特征值时开创。早期的一般框架由 Macchi [49] 针对费米子过程给出。

给定空间 X 上的行列式点过程由空间 X^N上的一个概率测度定义，该空间是 X上 N 个粒子的构型空间，其密度可以写成

$$\rho^{(N)}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{N!} \det\left(K_N(x_j, x_k)\right)_{1\le j,k\le N},$$

其中 K_N 是到维数为 N的向量空间上的正交投影算子的积分核。读者可参阅综述 [37, 61] 以了解更多背景。

一个经典例子是复Ginibre系综。设 z_1、……、 z_N为一个 $N \times N$ 随机矩阵的特征值，并按均匀随机的顺序排列。该矩阵的元素为

相互独立的中心化复高斯变量，方差为 $1/N$。相对于 $\mathbb{C}^N$ 上的勒贝格测度，其联合密度为

$$\rho^{(N)}(z_1,\dots,z_N)=\frac{1}{N!}\det\big[K_N(z_j,z_k)\big]_{j,k=1}^{N}=\frac{N^{N(N+1)/2}}{\pi^N\prod_{j=1}^{N}j!}\,e^{-N\sum_{k=1}^{N}|z_k|^2}\prod_{1\le i<j\le N}|z_j-z_k|^2,$$

其中

$$K_N(z,w)=\frac{N}{\pi}\,e^{-\frac{N}{2}(|z|^2+|w|^2)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(Nz\overline{w})^k}{k!}.$$

因此，特征值构成一个核为 K_N 的行列式点过程。

在复几何中，Berman [14]研究了紧复流形上的 *Bergman*行列式点过程，其关联核是与正全纯线丛的幂相关联的伯格曼核。他基于伯格曼核的一些局部估计，证明了线性统计量的高斯涨落。

本文研究紧黎曼曲面上Bergman行列式点过程的格林能量。它是一个二阶U统计量，由对所有不同粒子的有序数对求和其格林函数得到。我们计算了其方差的首项系数，并证明中心化能量除以其标准差后依分布收敛于标准高斯。我们还将对高维情形作一些评论。

设 X 为紧黎曼曲面， $\mathcal{L}$ 为 X 上的正全纯线丛，且 $\deg(\mathcal{L})\ge 1$。在 $\mathcal{L}$ 上固定厄米度量 $\mathfrak{h}$，使得曲率形式 $c_1(\mathcal{L},\mathfrak{h})$ 严格正。归一化的 (1，1)-形式

$$\omega:=c_1(\mathcal{L},\mathfrak{h})/\deg(\mathcal{L})$$

是 X上的光滑概率测度。

对于每个 $n\in\mathbb{N}$，考虑 $\mathcal{L}^n$的整体全纯截面空间 $H^0(X,\mathcal{L}^n)$。其维数为

$$N_n:=\dim_{\mathbb{C}}H^0(X,\mathcal{L}^n)=n\cdot\deg(\mathcal{L})-g+1$$

根据黎曼-罗赫定理， g 为 X的亏格。对于每个元素 $s\in H^0(X,\mathcal{L}^n)$，由 $\mathfrak{h}$诱导的其在每个点 $x\in X$处的范数记为 $|s(x)|_{\mathfrak{h}}$。度量 $\mathfrak{h}$与ω共同在复向量空间 $H^0(X,\mathcal{L}^n)$上诱导出一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$；该空间由 $\mathcal{L}^n$的全纯截面构成：

$$\langle s_1,s_2\rangle_n:=\int_{x\in X}(s_1(x),s_2(x))\,\omega(x)\quad\text{for}\quad s_1,s_2\in H^0(X,\mathcal{L}^n).$$

令 $S_n:=(s_1,s_2,\dots,s_{N_n})$为 $H^0(X,\mathcal{L}^n)$的一组标准正交基。对于任意点$x_1,x_2,\dots,x_{N_n}\in X$，定义

$$\det S_n(x_1,x_2,\dots,x_{N_n}):=\det(s_j(x_\ell))_{1\le j,\ell\le N_n},$$

它是 X^{N_n}上$(\mathcal{L}^n)^{\boxtimes N_n}$ 的一个截面。度量 $\mathfrak{h}$以典范方式在$(\mathcal{L}^n)^{\boxtimes N_n}$上诱导出度量$(\mathfrak{h}^n)^{\boxtimes N_n}$。将此范数记为 $\big|\det S_n(x_1,\dots,x_{N_n})\big|_{\mathfrak{h}}$。

考虑 X 上的点过程，该过程由 X^{N_n} 上的以下概率测度诱导：

$$\rho^{N_n}(x_1,x_2,\dots,x_{N_n}):=\mathcal{Z}_{N_n}\big|\det S_n(x_1,\dots,x_{N_n})\big|_{\mathfrak{h}}^2\,\omega(x_1)\omega(x_2)\cdots\omega(x_{N_n})$$

其中 $\mathcal{Z}_{N_n} > 0$ 是某个归一化常数。稍后将在 (3.3) 中看到，该过程是行列式点过程。

对于 $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_{N_n}) \in X^{N_n}$，我们将格林能量 定义为

$$\mathscr{E}_{N_n}(\mathbf{x}) := \sum_{1 \le j,k \le N_n, j \ne k} G(x_j, x_k),$$

其中， G 是(X, ω)的格林函数 ，参见 (3.1)。按照这一约定，每个无序对都会出现两次。它也可以视为上述行列式点过程中的一个随机变量。格林能量在伯格曼行列式点过程理论中发挥着重要作用，因为它与大偏差原理中的速率函数相关 [13]。它也作为玻色化公式 [2, 40, 68]中的主导项出现。

为简化记号，本文中我们将始终用 N 代替 N_n 。我们的主要结果是以下中心极限定理。

定理 1.1。当 $N \to \infty$,

$$\frac{\mathscr{E}_N - \mathbf{E}(\mathscr{E}_N)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathscr{E}_N)}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \textit{in law},$$

with

$$\mathbf{E}(\mathscr{E}_N) = \frac{1}{2} N \log N + O(N)$$

and

$$\mathrm{Var}(\mathscr{E}_N) = \Big(\log 2 - \frac{\pi^2}{24}\Big) N + O(\log^2 N).$$

在 [14], 中证明中心极限定理时，窗口大小为 $1/\sqrt{N}$ 的伯格曼核局部估计起着关键作用。伯格曼核的应用可见
[4, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 31, 33, 48, 50, 51, 65, 66, 70] 以及
Ma-Marinescu 的标准著作 [46]。然而，针对线性统计量的方法不能应用于 U统计量。线性统计量的期望和方差可以很容易地从窗口大小为 $1/\sqrt{N}$的伯格曼核局部估计中得到。然而, 对于格林能量，当两个粒子相遇时会出现对数奇点。大小为$1/\sqrt{N}$ 的窗口不足以控制奇异积分。因此，我们将采用 Shiffman-Zelditch [58] 和 Lu-Shiffman [45]建立的、窗口大小为 $\sqrt{\log N}/N$ 的伯格曼核估计。此外，Berman 通过构建一种巧妙而简洁的方法，证明累积量生成函数收敛到 $t^2/2$，从而避免了对线性统计量的高阶矩和累积量进行冗长计算，并由此证明了中心极限定理。对于 U统计量，这种方法则行不通。为了控制格林能量的高阶累积量，我们必须逐项写出格林能量高阶累积量的展开式，并运用 Krishnapur-Yogeshwaran [41]中的一些组合技巧证明其上界。

遗憾的是，我们的证明不适用于度量 $\mathfrak{h}$在 $\mathcal{L}$上奇异的情形，因为格林函数在对角线之外的光滑性条件是必要的。

本工作受到 Michelen-Yakir [53], 的启发，他们研究了黎曼球面上 SU(2)高斯多项式零点的对数能量。他们证明了中心极限定理，并得到了关于期望和方差的不同渐近公式。由随机多项式或随机全纯截面的零点所诱导的点过程在复

流形在过去二十年中已被广泛研究，参见例如 [8, 15, 20, 21, 24, 26, 27, 28, 35, 54, 57, 58, 59, 60, 69, 71]以及综述 [7, 38, 52]。

行列式点过程的 U统计量中心极限定理已在若干情形下建立。Aguirre-Soshnikov-Sumpter [1] 证明了圆酉系综的光滑二点统计量的中心极限定理。随后，Soshnikov-Wu [64] 获得了圆酉系综成对计数统计量的高斯涨落。Feng-Götze-Yao [30] 证明了球面投影过程的有界对称二元核的中心极限定理。

关于行列式点过程线性统计量的中心极限定理已有许多研究。这里只列举其中几项 [3, 5, 6, 12, 22, 34, 39, 43, 44, 56, 63]。另请参阅综述[37] 及其中的参考文献。

当 $(X,\ \omega)$ 是维数为 $d \geq 1$ 的凯勒流形时，格林函数 (3.1) 未定义。相反，对于 $\mathbf{x}:=(x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_N) \in X^N$，我们可以考虑对数能量

$$\mathscr{E}_N^{\log}(\mathbf{x}) := \sum_{1\leq j,k\leq N, j\neq k} \log \operatorname{dist}(x_j, x_k),$$

其中，dist 是由凯勒形式 ω 诱导的距离函数。对于这一能量，也有类似的中心极限定理。为使本文篇幅适中，我们将其推迟到即将发表的工作 [67] 中，并在第 7 节作简短说明。

一些记号。符号 $\lesssim$ 和 $\gtrsim$ 表示相差一个正的乘法常数的大小关系。如果两者都成立，我们就记作 $\simeq$。如果 A_N 和 B_N 相差一个 $O(C_N)$ 阶的项，我们记作 $A_N \overset{C_N}{\simeq} B_N$，其中 $N \to \infty$。该常数是否依赖于某些参数，将由上下文明确说明。我们用 $\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘，用 $\mathbb{D}(a,\ r)$ 表示以 a 为中心、半径为 r的开圆盘。对于其他黎曼曲面或复流形，$\mathbb{B}(a,\ r)$ 表示以 a 为中心、半径为 r的球。随机变量或随机测度的期望记作 $\mathbf{E}(\cdot)$。回顾一下，$\mathrm{d}^{\mathrm{c}} := \frac{i}{2\pi}(\partial - \bar{\partial})$ 且 $\mathrm{dd}^{\mathrm{c}} = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}$。

致谢。 作者谨向 Duc-Viet VU 教授致以谢意，感谢他对托普利兹算子提出的宝贵意见，这加快了方差的计算。

AI 声明。 本工作独立于 AI 完成。

资助。 本工作获国家重点研发计划 2025YFA1018300 和江苏省基础研究计划 BK20251226 资助。

2. 伯格曼核的辅助积分

本节将对第 3 节所需的正规坐标中与伯格曼核相关的所有细节进行计算。

定义 $(0,\ \infty)$ 上的函数 E_1 和常数 γ_E，使得

$$E_1(a) = \int_a^\infty t^{-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad \gamma_E := -\int_0^\infty e^{-t}\log t\,\mathrm{d}t.$$

注意，$E_1(0)$ 未定义，并且由于 $a \to 0^+$，

$$E_1(a) = -\log a - \gamma_E + O(a).$$

引理 2.1. 对于 $a>0$，我们有

$$2\pi N^2\int_a^\infty re^{-\pi Nr^2}\log r\,\mathrm{d}r = Ne^{-\pi Na^2}\log a+\frac{N}{2}E_1(\pi Na^2)$$

and

$$2\pi N^2\int_0^\infty re^{-\pi Nr^2}\log r\,\mathrm{d}r = -\frac{N\log N}{2}-\frac{\log\pi+\gamma_E}{2}N.$$

证明。 代入 $t=\pi Nr^2$ 后，左边变为

$$\begin{aligned}
N\int_{\pi Na^2}^\infty e^{-t}\log\sqrt{\frac{t}{\pi N}}\,\mathrm{d}t &= \frac{N}{2}\int_{\pi Na^2}^\infty e^{-t}\log t\,\mathrm{d}t-\frac{N}{2}\log\pi N\int_{\pi Na^2}^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{N}{2}\big[-e^{-t}\log t\big]_{t=\pi Na^2}^\infty+\frac{N}{2}\int_{\pi Na^2}^\infty e^{-t}t^{-1}\,\mathrm{d}t-\frac{N}{2}\log(\pi N)e^{-\pi Na^2}\\
&= \frac{N}{2}\log(\pi Na^2)e^{-\pi Na^2}+\frac{N}{2}E_1(\pi Na^2)-\frac{N}{2}\log(\pi N)e^{-\pi Na^2}\\
&= Ne^{-\pi Na^2}\log a+\frac{N}{2}E_1(\pi Na^2).
\end{aligned}$$

当 $a=0$ 时，

$$\begin{aligned}
2N^2\pi\int_0^\infty re^{-\pi Nr^2}\log r\,\mathrm{d}r &= \frac{N}{2}\int_0^\infty e^{-t}\log t\,\mathrm{d}t-\frac{N}{2}\log\pi N\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{N}{2}\gamma_E-\frac{N}{2}\log(\pi N)=-\frac{N\log N}{2}-\frac{\log\pi+\gamma_E}{2}N.
\end{aligned}$$

证明到此结束。 □

对于 $x\in X$，如果 z 是关于 ω 以 x 为中心的局部正规坐标，则称其为

$$z(x)=0\quad\text{and}\quad\omega\big(z(w)\big)=\frac{i}{2}\big(1+O(|z(w)|^2)\big)\,\mathrm{d}z(w)\wedge\mathrm{d}\overline{z(w)} \tag{2.1}$$

对于接近 x 的 w。凯勒流形上总是存在这样的坐标。

设 z 为 以 x 为中心、包含 $\mathbb{B}(x,r_0)$的局部正规坐标，对固定的 $r_0>0$.

引理 2.2. 我们有

$$\int_{|z|<r_0}E_1(\pi N|z|^2)\,\omega(z)=N^{-1}+O(N^{-2}),$$

$$\int_{|z|<r_0}\big|\log|z|\big|E_1(\pi N|z|^2)\,\omega(z)=O(N^{-1}\log N),$$

and

$$\int_{|z|<r_0}\Big(E_1(\pi N|z|^2)\Big)^2\,\omega(z)=\frac{2\log 2}{N}+O(N^{-2}).$$

证明。 根据定义，

$$\begin{aligned}
\int_{|z|<r_0}E_1(\pi N|z|^2)\,\omega(z) &= \int_{|z|<r_0}\int_{\pi N|z|^2}^\infty t^{-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\,\frac{i}{2}\big(1+O(|z|^2)\big)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar z\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\int_{\pi Nr^2}^\infty t^{-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\,\big(1+O(r^2)\big)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&= 2\pi\int_0^{\pi Nr_0^2}\frac{1}{2\pi N}\int_u^\infty t^{-1}e^{-t}\big(1+O(N^{-1}u)\big)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$\overset{N^{-2}}{\asymp} \frac{1}{N}\int_0^\infty\int_u^\infty t^{-1}e^{-t}\big(1+O(N^{-1}u)\big)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{N}\int_0^\infty\int_0^t t^{-1}e^{-t}\big(1+O(N^{-1}u)\big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{N}\int_0^\infty\big(e^{-t}+O(N^{-1}te^{-t}/2)\big)\,\mathrm{d}t$$
$$=N^{-1}+O(N^{-2}).$$

这就证明了第一个恒等式。第二个恒等式的证明类似，只需在最后一次计算中加入一个 $\log|z|$ 因子，这会使积分多出一个 $\log N$ 因子。对于最后一个，

$$\int_{|w|<r_0}\Big(E_1(\pi N|w|^2)\Big)^2\omega(w)=\int_{|w|<r_0}\int_{\pi N|w|^2}^\infty\int_{\pi N|w|^2}^\infty t^{-1}e^{-t}s^{-1}e^{-s}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\,\omega(w)$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\int_{\pi Nr^2}^\infty\int_{\pi Nr^2}^\infty t^{-1}e^{-t}s^{-1}e^{-s}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\big(1+O(r^2)\big)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi\int_0^{\pi Nr_0^2}\frac{1}{2\pi N}\int_u^\infty\int_u^\infty t^{-1}e^{-t}s^{-1}e^{-s}\big(1+O(N^{-1}u)\big)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}u$$
$$\overset{N^{-2}}{\asymp}\frac{1}{N}\int_0^\infty\int_u^\infty\int_u^\infty t^{-1}e^{-t}s^{-1}e^{-s}\big(1+O(N^{-1}u)\big)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{N}\int_0^\infty\int_u^\infty\int_u^\infty t^{-1}e^{-t}s^{-1}e^{-s}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}u+O(N^{-2}).$$

该积分关于 t 和 s 对称。因此，它等于在子区域 $\{t\ge s\}$ 上积分的两倍，即

$$\frac{2}{N}\int_0^\infty\int_u^\infty\int_s^\infty t^{-1}e^{-t}s^{-1}e^{-s}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}u=\frac{2}{N}\int_0^\infty\int_0^t\int_0^s t^{-1}e^{-t}s^{-1}e^{-s}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2}{N}\int_0^\infty\int_0^t t^{-1}e^{-t}e^{-s}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\frac{2}{N}\int_0^\infty t^{-1}e^{-t}(1-e^{-t})\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2}{N}\int_0^\infty t^{-1}(e^{-t}-e^{-2t})\,\mathrm{d}t=\frac{2\log 2}{N}$$

由此得到最后一个等式。 □

我们需要径向函数的以下公式。

引理 2.3。 设 $\varphi(x,y)$ 是 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 上的径向函数，即对于 $x,y\in\mathbb{C}$，有 $\varphi(x,y)=\varphi(|x|,|y|)$。假设 $\varphi(x,y)e^{|xy|}$ 可积。那么

$$\int\varphi(x,y)e^{x\overline{y}}\frac{i}{2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\overline{x}\,\frac{i}{2}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}=4\pi^2\int_0^\infty\int_0^\infty\varphi(s,t)st\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

若 $\phi(x,y)$ 在 x 上是径向函数，即对于 $x,y\in\mathbb{C}$，有 $\phi(x,y)=\phi(|x|,y)$，并且对于某个固定的 y_0，$\phi(x,y_0)e^{|xy_0|}$ 可积，那么

$$\int\phi(x,y_0)e^{xy_0}\,\frac{i}{2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\overline{x}=2\pi\int_0^\infty\phi(s,y_0)s\,\mathrm{d}s.$$

证明。 使用极坐标，我们得到

$$\int\varphi(x,y)e^{x\overline{y}}\,\frac{i}{2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\overline{x}\,\frac{i}{2}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\varphi(|r_x|,|r_y|)e^{r_xr_ye^{i\theta_x-i\theta_y}}r_xr_y\,\mathrm{d}r_x\mathrm{d}r_y\mathrm{d}\theta_x\mathrm{d}\theta_y$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(|r_x|,|r_y|) r_x r_y \Big(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{r_x r_y e^{i\theta_x - i\theta_y}} \,\mathrm{d}\theta_x \mathrm{d}\theta_y \Big) \mathrm{d}r_x \mathrm{d}r_y.$$

写出函数

$$e^{r_x r_y e^{i\theta_x - i\theta_y}} = \sum_{k=0}^{\infty} r_x^k r_y^k \frac{e^{ik\theta_x - ik\theta_y}}{k!}.$$

注意，对于所有 $k \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r_x^k r_y^k \frac{e^{ik\theta_x - ik\theta_y}}{k!} \,\mathrm{d}\theta_x \mathrm{d}\theta_y = 0$$

因此， $\varphi(x,\ y)$ 的积分变为

$$4\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(|r_x|,|r_y|) r_x r_y \,\mathrm{d}r_x \mathrm{d}r_y.$$

这给出了第一个等式。第二个等式类似。 □

引理 2.4。 对于 a、b、c、d、s、$t \in \mathbb{N}$ 和 $N \geq 2$，我们有

$$\int |y|^a |w|^b \big|\log|y|\big|^c \big|\log|w|\big|^d N^3 \big| e^{-\pi N(|y|^2+|w|^2-y\overline{w})} \big| \,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} \lesssim_{a,b,c,d} N^{1-a/2-b/2} (\log N)^{c+d}$$

and

$$\int |y|^a |w|^b |z|^s \big|\log|y|\big|^c \big|\log|w|\big|^d \big|\log|z|\big|^t N^4 \big| e^{-\pi N(|y|^2+|w|^2+|z|^2-y\overline{w}-w\overline{z})} \big| \,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} \lesssim_{a,b,c,d,s,t} N^{1-a/2-b/2-s/2} (\log N)^{c+d+t}.$$

证明。 我们只证明第一个断言。第二个断言可以用类似的方法得到。利用 $\mathrm{Re}\big(|y|^2+|w|^2-yw\big) \geq 1/2\big(|y|^2+|w|^2\big)$，该积分的上界为

$$\begin{aligned}
&\int |y|^a |w|^b \big|\log|y|\big|^c \big|\log|w|\big|^d N^3 e^{-\frac{\pi N}{2}(|y|^2+|w|^2)} \,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} \\
&= \int \Big|\frac{y}{\sqrt{N}}\Big|^a \Big|\frac{w}{\sqrt{N}}\Big|^b \Big|\log\frac{|y|}{\sqrt{N}}\Big|^c \Big|\log\frac{|w|}{\sqrt{N}}\Big|^d N e^{-\frac{\pi}{2}(|y|^2+|w|^2)} \,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} \\
&\lesssim_{c,d} N^{1-a/2-b/2} \int |y|^a |w|^b \Big(\big|\log|y|\big|^c + \log^c\sqrt{N}\Big)\Big(\big|\log|w|\big|^d + \log^d\sqrt{N}\Big) \\
&\qquad\qquad e^{-\frac{\pi}{2}(|y|^2+|w|^2)} \frac{i}{2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w}.
\end{aligned}$$

我们需要证明，最后一个积分是 $\lesssim (\log\ N)^{c+d}$。事实上，对于任意 $0 \leq c' \leq c,\ 0 \leq d' \leq d$，函数 $|y|^a |w|^b (\log\ |y|)^{c'} (\log\ |w|)^{d'} e^{-\frac{\pi}{2}(|y|^2+|w|^2)}$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上可积。展开被积函数后，我们看到 $\log N$ 的指数为 $c+d$。 □

引理 2.5. 积分

$$\int \log|y| \big(\log|w| - \log|y|\big) N^3 e^{-\pi N(|y|^2+|w|^2-y\overline{w})} \,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} = -\frac{\pi^2}{24} N.$$

证明。 根据引理 2.3，该积分变为

$$4\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \log|s| (\log|t| - \log|s|) N^3 e^{-\pi N(s^2+t^2)} st \,\mathrm{d}s \mathrm{d}t.$$

对 $u=\sqrt{\pi N}\,s$、$v=\sqrt{\pi N}\,t$ 进行缩放，我们得到

$$4N\int_0^\infty\int_0^\infty uv(\log u-\log\sqrt{\pi N})(\log v-\log u)e^{-u^2-v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

由对称性，它等于

$$4N\left[\Big(\int_0^\infty ue^{-u^2}\log u\,du\Big)^2-\Big(\int_0^\infty ue^{-u^2}\log^2 u\,du\Big)\Big(\int_0^\infty ue^{-u^2}\,du\Big)\right].$$

利用分部积分，我们有

$$\int_0^\infty ue^{-u^2}\log u\,du=-\frac{\gamma_E}{4},\quad \int_0^\infty ue^{-u^2}\log^2 u\,du=\frac{1}{8}\Big(\gamma_E^2+\frac{\pi^2}{6}\Big).$$

因此，最终结果为

$$4N\left[\Big(\frac{\gamma_E}{4}\Big)^2-\frac{1}{8}\Big(\gamma_E^2+\frac{\pi^2}{6}\Big)\frac{1}{2}\right]=-\frac{\pi^2}{24}N.$$

□

引理 2.6. 设 $a>0$ 与 b、$c\in\mathbb{C}$，则

$$\int e^{-a|z|^2+bz+c\overline{z}}\,\frac{i}{2}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=\frac{\pi}{a}e^{bc/a}$$

and

$$\int\log|z|e^{-a|z|^2+bz+c\overline{z}}\,\frac{i}{2}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=\frac{\pi}{2a}\sum_{k=1}^\infty\frac{H_k}{k!}\Big(\frac{bc}{a}\Big)^k-\frac{\pi}{2a}(\gamma_E+\log a)e^{bc/a},$$

其中 $H_k:=\sum_{j=1}^k 1/j$ 是第 k 个调和数。

证明。使用极坐标，第一个积分变为

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-at^2+bte^{i\theta}+cte^{-i\theta}}t\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta=\int_0^\infty te^{-at^2}\int_0^{2\pi}e^{bte^{i\theta}+cte^{-i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t$$

写作

$$e^{bte^{i\theta}+cte^{-i\theta}}=\sum_{m=0}^\infty\frac{(bte^{i\theta}+cte^{-i\theta})^m}{m!}=\sum_{m=0}^\infty\frac{t^m}{m!}\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}b^kc^{m-k}e^{i(2k-m)\theta}.$$

利用

$$\int e^{i(2k-m)\theta}\,\mathrm{d}\theta=0\quad\text{for all}\quad 2k-m\neq 0,$$

我们看到，第一个积分等于

$$\int_0^\infty te^{-at^2}2\pi\sum_{k=0}^\infty\frac{t^{2k}}{(2k)!}\binom{2k}{k}b^kc^k\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty te^{-at^2}2\pi\sum_{k=0}^\infty\frac{t^{2k}}{(k)!(k)!}b^kc^k\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\sum_{k=0}^\infty\frac{b^kc^k}{(k)!(k)!}\int_0^\infty t^{2k+1}e^{-at^2}\,\mathrm{d}t=2\pi\sum_{k=0}^\infty\frac{b^kc^k}{(k)!(k)!}\frac{k!}{2a^{k+1}}=\frac{\pi}{a}\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}\Big(\frac{bc}{a}\Big)^k=\frac{\pi}{a}e^{bc/a}.$$

第二个积分多了一个 $\log|z|$ 因子。加入这个额外因子并令 $H_0=0$，重复上述计算，我们得到

$$2\pi\sum_{k=0}^\infty\frac{b^kc^k}{(k)!(k)!}\int_0^\infty t^{2k+1}e^{-at^2}\log t\,\mathrm{d}t=2\pi\sum_{k=0}^\infty\frac{b^kc^k}{(k)!(k)!}\frac{k!}{4a^{k+1}}(H_k-\gamma_E-\log a)$$

$$= \frac{\pi}{2a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\frac{bc}{a}\Big)^k(H_k-\gamma_E-\log a) = \frac{\pi}{2a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k!}\Big(\frac{bc}{a}\Big)^k - \frac{\pi}{2a}(\gamma_E+\log a)e^{bc/a}.$$

证明完成。 □

引理 2.7. 积分

$$\int \log|y|\big(\log|w-z|-\log|w|\big)N^4e^{-\pi N(|y|^2+|w|^2+|z|^2-w\overline{y}-y\overline{z})} \frac{i}{2}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z} = -\frac{\pi^2}{48}N.$$

证明. 我们首先使用引理 2.6 对 y 积分，得到

$$\int \log|y|e^{-\pi N(|y|^2-w\overline{y}-y\overline{z})}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y} = \frac{\pi}{2\pi N}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k!}(\pi N w\overline{z})^k - \frac{\pi}{2\pi N}\big(\gamma_E+\log(\pi N)\big)e^{\pi N w\overline{z}}.$$

由对称性,

$$\int (w\overline{z})^k\log|w|N^4e^{-\pi N(|w|^2+|z|^2)}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=0$$

对所有 $k>0$ 均成立。此外，由 (3.9),

$$\begin{aligned}&\int e^{\pi N w\overline{z}}(\log|w-z|-\log|w|)N^4e^{-\pi N(|w|^2+|z|^2)}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}\\ &=\int(\log|w-z|-\log|w|)N^4e^{-\pi N(|w|^2+|z|^2-w\overline{z})}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=0.\end{aligned}$$

因此剩下的唯一问题是

$$\begin{aligned}&\int\frac{\pi}{2\pi N}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k!}(\pi N w\overline{z})^k\log|w-z|N^4e^{-\pi N(|w|^2+|z|^2)}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k!}\int(\pi N w\overline{z})^k\log|w-z|N^3e^{-\pi N(|w|^2+|z|^2)}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}.\end{aligned}$$

由引理 2.8，最后一个求和为

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k!}\cdot\frac{N(k-1)!}{2^{k+1}} = -\frac{N}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k2^k} = -\frac{N}{4}\cdot\frac{\pi^2}{12} = -\frac{\pi^2}{48}N,$$

其中，求和 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k2^k}$ 通过使用展开式计算

$$-\frac{\log(1-x)}{(1-x)} = \sum_{k=1}^{\infty}H_kx^k \quad \text{for} \quad |x|<1.$$

至此，引理的证明结束。 □

引理 2.8。对于 $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\int(\pi N w\overline{z})^k\log|w-z|N^3e^{-\pi N(|w|^2+|z|^2)}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z} = -\frac{N(k-1)!}{2^{k+1}}.$$

证明。缩放 $u=\sqrt{\pi N w}$, $v=\sqrt{\pi N}z$ 后，积分变为

$$\frac{N}{\pi^2}\int (u\overline{v})^k \log\frac{|u-v|}{\sqrt{\pi N}} e^{-(|u|^2+|v|^2)}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}\overline{u}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}\overline{v}.$$

由对称性，由于 $k>0$,

$$\frac{N}{\pi^2}\int (u\overline{v})^k \log\sqrt{\pi N} e^{-(|u|^2+|v|^2)}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}\overline{u}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}\overline{v}=0.$$

因此，我们只需计算

$$\frac{N}{\pi^2}\int (u\overline{v})^k \log|u-v| e^{-(|u|^2+|v|^2)}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}\overline{u}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}\overline{v}$$

转换到极坐标后，得到

$$\begin{aligned}&\frac{N}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} s^{k+1}t^{k+1}e^{ik(\theta-\phi)}\log|se^{i\theta}-te^{i\phi}|\,e^{-s^2-t^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &=\frac{2N}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^s\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} s^{k+1}t^{k+1}e^{ik(\theta-\phi)}\log|se^{i\theta}-te^{i\phi}|\,e^{-s^2-t^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{2.2}$$

这里我们利用了积分关于 s, t 对称这一事实。利用 $|se^{i\theta}-te^{i\phi}|^2=s^2+t^2-2st\cos(\theta-\phi)$。当 $s>t$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\log|se^{i\theta}-te^{i\phi}| &= \frac{1}{2}\log\big(s^2+t^2-2st\cos(\theta-\phi)\big)\\ &=\log s+\frac{1}{2}\log\big(1+(t/s)^2-2t/s\cos(\theta-\phi)\big)\\ &=\log s+\frac{1}{2}\log\big((1-t/se^{i(\theta-\phi)})(1-t/se^{-i(\theta-\phi)})\big)\\ &=\log s-\sum_{m=1}^\infty\frac{t^m}{ms^m}\cos\big(m(\theta-\phi)\big).\end{aligned}$$

对于最后一个等式，我们利用了 $\log(1-z)$ 的泰勒展开，因为 $t<s$。将其代入 (2.2)，并利用

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik(\theta-\phi)}\cos\big(m(\theta-\phi)\big)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=0\quad\text{for}\quad m\neq k,$$

我们看到，只有含有 $m=k$ 的项保留下来。因此，(2.2) 变为

$$\begin{aligned}&-4N\int_0^\infty\int_0^s s^{k+1}t^{k+1}\frac{t^k}{ks^k}e^{-s^2-t^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s=-\frac{4N}{k}\int_0^\infty\int_0^s st^{2k+1}e^{-s^2-t^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\ &=-\frac{4N}{k}\int_0^\infty\int_t^\infty t^{2k+1}e^{-t^2}se^{-s^2}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t=-\frac{2N}{k}\int_0^\infty t^{2k+1}e^{-2t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

通过归纳法即可得到所需结果。 □

3. 伯格曼核的预备知识

本节中，我们引入与线丛 $\mathcal{L}^n$ 相关的格林函数和伯格曼核的概念，并陈述其对角公式和非对角公式。我们还将定义若干辅助函数，用于计算第 4 节中的期望和方差。

存在定义在 $X \times X$ 上的格林函数 $G(x,\ y)$，它在对角线之外光滑，并且对于每个 $x,\ y \in X$ （参见 [42]–定理 2.2），

$$G(x,y) = G(y,x), \qquad \int_X G(x,\cdot)\,\omega = 0 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{dd^c} G(x,\cdot) = \delta_x - \omega. \tag{3.1}$$

格林函数具有与对数函数相同的奇性。设 z 是 x 附近的一个局部正规坐标，其中 $z(x) = 0$。存在一个很小的 $r_0 > 0$以及一个光滑函数$\varrho(y,\ w)$，定义在 $\mathbb{D}(x,\ r_0)$上，使得 $\times\, \mathbb{D}(x,\ r_0)$

$$G(y,w) = \log|z(y) - z(w)| + \varrho(y,w). \tag{3.2}$$

为简化记号，在坐标 z中，我们仍将 $z(y)\ z(w)$记作 $y,\ w$ 。这不应造成任何混淆。对数函数的局部可积性给出以下估计。

引理 3.1。 对于 $x \in X$，我们有

$$\int_X \big|G(x,y)\big|^k\,\omega(y) \le C_k$$

其中 $C_k > 0$与 x无关。

回顾一下， $H^0(X,\ \mathcal{L}^n)$的伯格曼核定义为

$$K_N(x,y) := \sum_{j=1}^{N} s_j(x) \otimes \overline{s_j(y)}.$$

它是 $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^n$ 的一个截面。由于假设 S_n 是正交归一的，因此有

$$\rho^N(x_1,x_2,\dots,x_N) = \frac{1}{N!}\det\big(K_N(x_j,x_\ell)\big)_{1\le j,\ell\le N}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\cdots\omega(x_N). \tag{3.3}$$

伯格曼核的对角渐近展开是众所周知的，参见例如 [16,65, 70]。

引理 3.2。作为 $N \to \infty$,

$$K_N(x,x) = N + \mathfrak{b}(x) + O(N^{-1})$$

对于某个光滑函数 $\mathfrak{b}$，它与 N 无关。

关于非对角估计，Shiffman-Zelditch [58，定理 2.4] 证明，在以 x 为中心的正规坐标 z 中，对每个 $b > 0,\ \epsilon > 0$,

$$K_N\Big(\frac{z}{\sqrt{N}},\frac{w}{\sqrt{N}}\Big) = Ne^{-\frac{\pi}{2}(|z|^2+|w|^2-2z\overline{w})}\Big(1 + N^{-1/2}p_{1,x} + N^{-1}p_{2,x} + O_{b,\epsilon}(N^{-3/2+\epsilon})\Big)$$

对于 $|z|,\ |w| \le b\sqrt{\log N}$，其中 $p_{1,\ x},\ p_{2,\ x}$ 是关于 $z,\ z,\ \overline{w},\ \overline{w}$ 的多项式，次数至多为 10，且其系数关于 x 一致有界。此外，Lu-Shiffman [45，定理 2.1] 通过证明 $p_{1,\ x}$ 消失，改进了该公式。因此，我们得到伯格曼核的以下非对角公式。

命题 3.3. 设 z 是相对于 ω、以 x 为中心的 $x \in X$ 的正规局部坐标。那么在此坐标下，对于每个 $b > 0$ 和 $|z|,\ |w| \le b\sqrt{\text{对数}_N}$,

$$K_N(z,w) = Ne^{-\frac{\pi N}{2}(|z|^2+|w|^2-2z\overline{w})}\Big(1 + O_b\big(N^{-1} + N^4|z|^{10} + N^4|w|^{10}\big)\Big)$$

and

$$|K_N(z,w)|^2 = N^2 e^{-\pi N|z-w|^2}\Big(1+O_b\big(N^{-1}+N^4|z|^{10}+N^4|w|^{10}\big)\Big)$$

当 x, y 彼此相距较远时，我们有如下关于 $K_N(x,y)$ 的界（[58, 定理 2.4]）。

引理 3.4. 对于任意 $k>0$，存在依赖于 k 的 $b>0$，使得若 距离$(x,y) > b\sqrt{\frac{\log N}{N}}$，

$$|K_N(x,y)| \le N^{-k}.$$

我们还需要以下关于伯格曼核 [14, 的全局界定理 5.7]。

引理 3.5. 存在与 N 无关的正常数 C 和 c，使得

$$|K_N(x,y)| \le CNe^{-c\sqrt{N}\,\mathrm{dist}(x,y)} \quad \textit{for all} \quad x,y\in X.$$

从现在起，我们固定某个较大的 b，因此根据引理 3.4，对于下文涉及$K_N(x,y)$的积分，可以在距离$(x,y) \le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}$处截断，误差为 $O(N^{-2})$。

回顾伯格曼核的再生性质。

引理 3.6。 对于 $x_1\in X$，我们有

$$\int K_N(x_1,x_2)K_N(x_2,x_3)\cdots K_N(x_k,x_1)\prod_{j=2}^{k}\omega(x_j) = K_N(x_1,x_1).$$

特别地

$$\int |K_N(x,w)|^2\,\omega(w) = K_N(x,x).$$

固定一个以 x 为中心的局部正规坐标 z。假设它包含开球 $\mathbb{B}(x,\ r_0)$，其中 $0<r_0<1/2$。根据再生性质，我们得到以下误差估计。

引理 3.7。 对于此坐标 z 中满足 $0<|w|\le r_0$ 的任意点 w，我们有

$$\int_{|z|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \log|w-z||K_N(z,0)|^2\,\omega(z) = N\log|w| + \frac{N}{2}E_1(\pi N|w|^2) + O\big(-\log|w|\big).$$

此外，

$$\int_{|z|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \log|z||K_N(z,0)|^2\,\omega(z) = -\frac{N\log N}{2} - \frac{\log\pi+\gamma_E}{2}N + O(\log N).$$

证明。 根据命题 3.3 和 (2.1)，左边为

$$\int_{|z|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \log|w-z|N^2e^{-\pi N|z|^2}\Big(1+O\big(N^{-1}+N^4|z|^{10}\big)\Big)\frac{i}{2}\Big(1+O(|z|^2)\Big)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}. \tag{3.4}$$

上面的主导项为

$$\begin{aligned}\int_{|z|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \log|w-z|N^2e^{-\pi N|z|^2}\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \log|w-re^{i\theta}|N^2e^{-\pi Nr^2}r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} rN^2e^{-\pi Nr^2}\int_0^{2\pi}\log|w-re^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^{b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} rN^2 e^{-\pi N r^2} \log\big(\max(r,|w|)\big)\,\mathrm{d}r.\\
&\overset{N^{-2}}{\asymp} 2\pi \int_0^{\infty} rN^2 e^{-\pi N r^2} \log\big(\max(r,|w|)\big)\,\mathrm{d}r.\\
&= 2\pi \int_0^{|w|} rN^2 e^{-\pi N r^2} \log|w|\,\mathrm{d}r + 2\pi \int_{|w|}^{\infty} rN^2 e^{-\pi N r^2} \log r\,\mathrm{d}r\\
&= N\log|w|(1-e^{-\pi N|w|^2}) + Ne^{-\pi N|w|^2}\log|w| + \frac{N}{2}E_1(\pi N|w|^2)\\
&= N\log|w| + \frac{N}{2}E_1(\pi N|w|^2),
\end{aligned}
$$

其中我们用到了引理 2.1。

现在我们对 (3.4) 中的误差项进行估计。注意，误差项的被积函数多出一个 N^{-1}、$N^4|z|^{10}$ 或 $|z|^2$ 因子。取足够大的 N，使得 $\log|w-z|<0$。通过与上文类似的步骤，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{|z|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \big(N^{-1}+N^4|z|^{10}+|z|^2\big)\log|w-z| N^2 e^{-\pi N|z|^2}\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}\right|\\
&= 2\pi\int_0^{b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} -\big(N^{-1}+N^4|z|^{10}+|z|^2\big) rN^2 e^{-\pi N r^2}\log\big(\max(r,|w|)\big)\,\mathrm{d}r\\
&\le -\log|w| 2\pi\int_0^{b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \big(N^{-1}+N^4|z|^{10}+|z|^2\big) rN^2 e^{-\pi N r^2}\,\mathrm{d}r \lesssim -\log|w|.
\end{aligned}
$$

这证明了第一个断言。利用引理 2.1 中的第二个等式，可以类似地证明第二个断言。□

引理 3.8. 对于每个 $x\in X$，在 x 上一致地有：

$$\int G(x,y)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y) = -\frac{N\log N}{2} + O(N)$$

and

$$\int G(x,y)^2|K_N(x,y)|^2\,\omega(y) = O(N\log^2 N).$$

证明。对于第一个积分，固定一个以 x 为中心的局部正规坐标，由引理 3.4 和 3.7 可得：

$$
\begin{aligned}
&\int G(x,y)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y) \overset{N^{-2}}{\asymp} \int_{\mathrm{dist}(x,y)\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} G(x,y)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y)\\
&= \int_{|z|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \log|z||K_N(z,0)|^2\,\omega(z) + \int_{\mathrm{dist}(x,y)\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \varrho(x,y)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y)\\
&= -\frac{N\log N}{2} + O(N).
\end{aligned}
$$

第二个积分类似，它是以下结果的推论：

$$\int_{|z|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \log^2|z| N^2 e^{-\pi N|z|^2}\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z} \lesssim N\log^2 N.$$

证明完毕。 □

对于以 x为中心的局部正规坐标 z，由泰勒公式可得，

$$\varrho(w,z)-\varrho(w,0)=c_{w,x}z+\overline{c_{w,x}z}+O(|z|^2). \tag{3.5}$$

对某个常数$c_{w,\ x}\in\mathbb{C}$。若 w 也在此坐标中，则

$$\varrho(w,z)-\varrho(w,0)=c_x z+\overline{c_x z}+O(|z|^2)+O(|w|^2) \tag{3.6}$$

对某个常数 $c_x\in\mathbb{C}$。

对 $w\neq x\in X$，定义

$$F_N(w,x):=\int G(w,y)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y)-G(w,x)K_N(x,x).$$

将 G 替换为光滑函数时，F_N 与托普利兹算子 和贝雷津变换 有关（参见 [32, 33, 47]），而 F_N 的性质已为人所知。然而，在此处，$G(x,\ \cdot)$ 在 x处有一个对数奇点，伯格曼核的局部估计使我们能够计算该积分。由于奇点的存在，窗口大小为$1/\sqrt{N}$ 时的伯格曼核公式已不再适用。必须将窗口大小扩大到 $\sqrt{\log\ N/N}$，以消除奇点。下面的引理对我们计算方差至关重要。

引理 3.9。当 w 位于坐标 z 且 $|w|<r_0$时，

$$F_N(w,x)=\frac{N}{2}E_1(\pi N|w|^2)+O\big(-\log|w|\big).$$

否则，$F_N(w,x)=O(1)$。

证明。我们利用引理 3.6 写出

$$F_N(w,x)=\int\big(G(w,y)-G(w,x)\big)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y)$$

再由引理 3.4，我们有

$$\Big|\int_{\mathrm{dist}(x,y)>b\sqrt{\frac{\log N}{N}}}\big(G(w,y)-G(w,x)\big)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y)\Big|\lesssim N^{-2}\big(1+|G(w,x)|\big). \tag{3.7}$$

情形 1： w 位于坐标 z 与 $|w|<r_0$中。由 (3.2) 回顾

$$G(w,y)-G(w,x)=\log|w-y|+\varrho(w,y)-\log|w|-\varrho(w,x)$$

在坐标 z中。由 (3.5) 并利用命题 3.3，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{dist}(x,y)\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}}\big(\varrho(w,y)-\varrho(w,x)\big)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y)\\&=\int_{|y|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}}\big(c_{w,x}y+\overline{c_{w,x}y}+O(|y|^2)\big)N^2e^{-\pi N|y|^2}\Big(1+O\big(N^{-1}+N^4|y|^{10}\big)\Big)\\&\qquad\qquad\frac{i}{2}\big(1+O(|y|^2)\big)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}.\end{aligned}$$

由对称性可知，主导项

$$\int_{|y|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}}\big(c_{w,x}y+\overline{c_{w,x}y}\big)N^2e^{-\pi N|y|^2}\,\frac{i}{2}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}=0.$$

对于误差项，我们有

$$\int_{|y|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} |y|^2 N^2 e^{-\pi N|y|^2}\,\frac{i}{2}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y} \overset{N^{-2}}{\asymp} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^3 N^2 e^{-\pi N r^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{|y|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \big(N^{-1}+N^4|y|^{10}\big)N^2 e^{-\pi N|y|^2}\,\frac{i}{2}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}\\ &\overset{N^{-2}}{\asymp} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(N^{-1}+N^4 r^{10})N^2 e^{-\pi N r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = O(1).\end{aligned}$$

另一方面，利用 $\int_{|y|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} |K_N(0,y)|^2\,\omega(y) = N+O(1)$，由引理 3.7 可得，

$$\int_{|y|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \big(\log|w-y|-\log|w|\big)|K_N(0,y)|^2\,\omega(y) = \frac{N}{2}E_1(\pi N|w|^2)+O\big(-\log|w|\big).$$

因此，将此结果与 (3.7) 结合，其中 $|G(w,x)|\lesssim\big|\log|w|\big|$，我们得出，在这种情况下，

$$\int \big(G(w,y)-G(w,x)\big)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y) = \frac{N}{2}E_1(\pi N|w|^2)+O\big(-\log|w|\big).$$

情形2： 否则，我们可以找到某个 $r_1<r_0$，使得 $\mathrm{dist}(w,x)>r_1$。回顾一下，格林函数 G 在对角线之外是光滑的。在这种情况下，函数 $G(w,\cdot)$ 的 $\mathscr{C}^2$ 范数有界。在情形1的证明中，可以用 G 替换 ϱ，从而得到

$$\int_{\mathrm{dist}(x,y)\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} \big(G(w,y)-G(w,x)\big)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y) = O(1).$$

结合 (3.7)，其中在这种情况下 $|G(w,x)|$ 有界，我们便完成了该引理的证明。□

引理 3.10。 对于任意 $x\in X$，我们有

$$\int\big|F_N(w,x)\big|\,\omega(w) = O(1) \quad \textit{and} \quad \int F_N(w,x)^2\,\omega(w) = \frac{\log 2}{2}N+O(\log N).$$

证明。 根据引理 3.9,

$$\begin{aligned}\int|F_N(w,x)|\,\omega(w) &= \int_{\mathrm{dist}(w,x)<r_0}|F_N(w,x)|\,\omega(w)+O(1)\\ &= \int_{|w|<r_0}\Big|\frac{N}{2}E_1(\pi N|w|^2)+O\big(-\log|w|\big)\Big|\,\omega(w)+O(1)\\ &= \frac{N}{2}\int_{|w|<r_0}E_1(\pi N|w|^2)\,\omega(w)+O(1)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\int F_N(w,x)^2\,\omega(w) = \int_{\mathrm{dist}(w,x)<r_0}F_N(w,x)^2\,\omega(w)+O(1)\\ &= \int_{|w|<r_0}\Big(\frac{N}{2}E_1(\pi N|w|^2)\Big)^2+O\big(\log^2|w|\big)+O\Big(\frac{N}{2}\big|\log|w|\big|E_1(\pi N|w|^2)\Big)\,\omega(w).\end{aligned}$$

引理 2.2给出了该引理。 □

引理 3.11。我们有

$$\int F_N(w,x)F_N(x,w)\,\omega(w)\omega(x) = \frac{\log 2}{2}N + O(\log N).$$

证明。我们首先估计 $E_1(\pi N|w|^2)$ 与 $E_1\big(\pi N\operatorname{dist}(w,\ x)^2\big)$ 之间的差，其中 w 位于正规坐标 z 中，且有 $\operatorname{dist}(w,\ x)^2 = |w|^2 + O(|w|^4)$。由中值定理，

$$N\big|E_1(\pi N|w|^2) - E_1\big(\pi N\operatorname{dist}(w,x)^2\big)\big| \lesssim N(\pi N|w|^2)^{-1}e^{-\pi N|w|^2}\cdot N|w|^4 \lesssim N|w|^2e^{-\pi N|w|^2},$$

它有界。由引理 3.9 可得

$$\big|F_N(w,x) - F_N(x,w)\big| \lesssim \big|\log|\operatorname{dist}(w,x)|\big| + E_1(\pi N|\operatorname{dist}(w,x)|^2). \tag{3.8}$$

改写

$$F_N(w,x)F_N(x,w) = \frac{1}{2}F_N(w,x)^2 + \frac{1}{2}F_N(x,w)^2 - \frac{1}{2}\big(F_N(w,x) - F_N(x,w)\big)^2.$$

引理 3.10 给出

$$\frac{1}{2}\int F_N(w,x)^2\,\omega(w)\omega(x) + \frac{1}{2}\int F_N(x,w)^2\,\omega(w)\omega(x) = \frac{\log 2}{2}N + O(\log N).$$

剩下只需估计 $\int \big(F_N(w,\ x)\ - F_N(x,\ w)\big)^2\,\omega(w)\omega(x)$。由引理 3.9，我们只需考虑 $\operatorname{dist}(w,\ x)\ < r_0$ 时的积分。根据 (3.8)，该积分为

$$\begin{aligned}
&\lesssim \int_{\operatorname{dist}(w,x)<r_0} \Big(\big|\log|\operatorname{dist}(w,x)|\big| + E_1(\pi N\operatorname{dist}(w,x)^2)\Big)^2\,\omega(w)\omega(x)\\
&\lesssim \int_{|w|<r_0} \Big(\big|\log|w|\big| + E_1(\pi N|w|^2)\Big)^2\,\omega(w)\omega(x).
\end{aligned}$$

该量为 $O(1)$，由引理 2.2 可知。引理的证明至此完成。 □

对于 $x\in X$，定义

$$\begin{aligned}
H_N(x) := &\int G(x,y)G(x,w)K_N(x,y)K_N(y,w)K_N(w,x)\,\omega(y)\omega(w)\\
&- \int G^2(x,y)|K_N(x,y)|^2\,\omega(y).
\end{aligned}$$

引理 3.12。我们有

$$H_N(x) = -\frac{\pi^2}{24}N + O(\log^2 N).$$

证明。我们利用引理 3.6 将其改写为

$$H_N(x) = \int G(x,y)\big(G(x,w) - G(x,y)\big)K_N(x,y)K_N(y,w)K_N(w,x)\,\omega(y)\omega(w).$$

根据引理 3.4，我们只需考虑 $\operatorname{dist}(x,y),\operatorname{dist}(y,w)\ \le b\sqrt{\log N}/N$ 的积分。由 (3.2)、(3.6) 并应用命题 3.3，

$$\begin{aligned}
H_N(x) \overset{N^{-2}}{\asymp} \int_{|y|,|w|\le 2b\sqrt{\frac{\log N}{N}}} &\big(\log|y| + \varrho(x,x) + c_xy + \overline{c_xy} + O(|y|^2)\big)\\
&\big(\log|w| - \log|y| + c_xw + \overline{c_xw} - c_xy - \overline{c_xy} + O(|w|^2) + O(|y|^2)\big)\\
&Ne^{-\frac{\pi}{2}N|y|^2}\big(1 + O(N^{-1} + N^4|y|^{10})\big)
\end{aligned}$$

$$Ne^{-\frac{\pi}{2}N(|y|^2+|w|^2-2y\overline{w})}\big(1+O(N^{-1}+N^4|y|^{10}+N^4|w|^{10})\big)$$
$$Ne^{-\frac{\pi}{2}N|w|^2}\big(1+O(N^{-1}+N^4|w|^{10})\big)$$
$$\frac{i}{2}\big(1+O(|y|^2)\big)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\big(1+O(|w|^2)\big)\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}.$$

再应用一次引理 3.4，误差为 $O(N^{-2})$，我们可以将积分域扩大到 $y,w\in\mathbb{C}$。之后，主导项为

$$\int\big(\log|y|+\varrho(x,x)+c_xy+\overline{c_xy}\big)\big(\log|w|-\log|y|+c_xw+\overline{c_xw}-c_xy-\overline{c_xy}\big)$$
$$N^3e^{-\pi N(|y|^2+|w|^2-y\overline{w})}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}.$$

展开这两个括号的乘积后，由引理 2.3 和对称性可知，.....的积分

$$(c_xy+\overline{c_xy})\log|w|,\quad(c_xy+\overline{c_xy})\log|y|,\quad\log|y|(c_xw+\overline{c_xw}),\quad\log|y|(y+\overline{y})$$

为零。由对称性，.....的积分

$$\varrho(x,x)\big(\log|w|-\log|y|\big),\quad\varrho(x,x)(c_xw+\overline{c_xw}-c_xy-\overline{c_xy})$$

也为零。引理 2.4 表明 $(c_xy+c_xy)(c_xw+c_xw-c_xy-c_xy)$ 的积分为$O(1)$。剩下需要计算

$$\int\log|y|\big(\log|w|-\log|y|\big)N^3e^{-\pi N(|y|^2+|w|^2-y\overline{w})}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w},$$

由引理 2.5，其为 $-\pi^2N/24$。

现在我们估计误差项。注意到所有误差积分项都属于引理 2.4 中的类型，该引理表明它们至多为 $O(\log^2N)$。□

对于 $w\in X$，定义

$$I_N(w):=\int G(x,y)K_N(x,y)K_N(y,w)K_N(w,x)\,\omega(x)\omega(y)-\int G(x,w)|K_N(x,w)|^2\,\omega(x).$$

引理 3.13. 我们有

$$I_N(w)=O(\log N).$$

证明。 我们利用引理 3.6 重写

$$I_N(w)=\int\big(G(x,y)-G(x,w)\big)K_N(x,y)K_N(y,w)K_N(w,x)\,\omega(x)\omega(y).$$

根据引理 3.4，我们只需将积分限制在距离(x,w),距离(y,w)至多为 $b\sqrt{\log N/N}$ 的区域。我们固定一个以 w 为中心的局部正规坐标。由 (3.2)、(3.6) 并应用命题 3.3，我们得到

$$I_N(w)\overset{N^{-2}}{\asymp}\int_{|x|,|y|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}}\big(\log|x-y|-\log|x|+c_wy+\overline{c_wy}+O(|x|^2)+O(|y|^2)\big)$$
$$Ne^{-\frac{\pi}{2}N(|x|^2+|y|^2-2x\overline{y})}\big(1+O(N^{-1}+N^4|x|^{10}+N^4|y|^{10})\big)$$
$$Ne^{-\frac{\pi}{2}N|y|^2}\big(1+O(N^{-1}+N^4|y|^{10})\big)$$
$$Ne^{-\frac{\pi}{2}N|x|^2}\big(1+O(N^{-1}+N^4|x|^{10})\big)$$

$$\frac{i}{2}\big(1+O(|x|^2)\big)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\overline{x}\,\frac{i}{2}\big(1+O(|y|^2)\big)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}.$$

再次使用引理 3.4，在 $O(N^{-2})$ 误差下，我们可以将积分域扩大到 $x,y\in\mathbb{C}$。对于主导项，我们作变量替换 $z=x-y$ 并应用引理 2.3，得到

$$\begin{aligned}(3.9)\qquad &\int\big(\log|x-y|-\log|x|\big)N^3e^{-\pi N(|x|^2+|y|^2-x\overline{y})}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\overline{x}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}\\&=\int\big(\log|z|-\log|x|\big)N^3e^{-\pi N(|x|^2+|x-z|^2-x\overline{x-z})}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\overline{x}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}\\&=\int\big(\log|z|-\log|x|\big)N^3e^{-\pi N(|x|^2+|z|^2-z\overline{x})}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\overline{x}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=0.\end{aligned}$$

M此外，根据对称性和引理 2.3，c_wy+c_wy 的积分也消失 $\overline{\qquad}$.

剩下的工作是估计误差项。根据引理 2.4，在像 (3.9) 中那样作变量替换 $z=x-y$ 后，这些误差项全都是 $O(\log N)$。至此，引理得证。□

对于 $x\in X$，定义

$$\begin{aligned}J_N(x):=&\int G(x,y)G(w,z)K_N(x,y)K_N(y,w)K_N(w,z)K_N(z,x)\,\omega(y)\omega(w)\omega(z)\\&-\int G(x,y)G(x,w)K_N(x,y)K_N(y,w)K_N(w,x)\,\omega(y)\omega(w).\end{aligned}$$

引理 3.14。我们有

$$J_N(x)=O(\log^2N).$$

证明。我们利用引理 3.6 将其改写为

$$J_N(x)=\int G(x,y)\big(G(w,z)-G(x,w)\big)K_N(x,y)K_N(y,w)K_N(w,z)K_N(z,x)\,\omega(y)\omega(w)\omega(z).$$

由引理 3.4，我们只需将积分限制在满足距离(x,y)、距离(x,w)、距离(x,z) 均不超过 $b\sqrt{\log_N N}$ 的区域内。我们固定一个以 x 为中心的局部正规坐标。由 (3.2) 、 (3.5) 、 (3.6) 并应用命题 3.3，可得

$$\begin{aligned}J_N(x)\overset{N^{-2}}{\asymp}&\int_{|y|,|w|,|z|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}}\big(\log|y|+\varrho(x,x)+c_xy+\overline{c_xy}+O(|y|^2)\big)\\&\big(\log|w-z|-\log|w|+c_xz+\overline{c_xz}+O(|w|^2)+O(|z|^2)\big)\\&Ne^{-\frac{\pi}{2}N|y|^2}\big(1+O(N^{-1}+N^4|y|^{10})\big)\\&Ne^{-\frac{\pi}{2}N(|y|^2+|w|^2-2y\overline{w})}\big(1+O(N^{-1}+N^4|y|^{10}+N^4|w|^{10})\big)\\&Ne^{-\frac{\pi}{2}N(|w|^2+|z|^2-2w\overline{z})}\big(1+O(N^{-1}+N^4|w|^{10}+N^4|z|^{10})\big)\\&Ne^{-\frac{\pi}{2}N|z|^2}\big(1+O(N^{-1}+N^4|z|^{10})\big)\\&\frac{i}{2}\big(1+O(|y|^2)\big)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\big(1+O(|w|^2)\big)\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\big(1+O(|z|^2)\big)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}.\end{aligned}$$

再使用一次引理 3.4，误差为 $O(N^{-2})$，我们可以将积分域扩大到 $y,w,z\in\mathbb{C}$。主导项为

$$\int\big(\log|y|+\varrho(x,x)+c_xy+\overline{c_xy}\big)\big(\log|w-z|-\log|w|+c_xz+\overline{c_xz}\big)$$

$$N^4 e^{-\pi N(|y|^2+|w|^2+|z|^2-y\overline{w}-w\overline{z})}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}.$$

与 (3.9) 中一样，经过变量替换为 $w-z$ 并使用引理 2.3 后，可以看到.....的积分

$\log|y|(c_xz+\overline{c_x}z)$ $\varrho(x,x)\big(\log|w-z|-\log|w|\big)$, $\varrho(x,x)(c_xz+\overline{c_x}z)$ $c_xy\big(\log|w-z|-\log|w|\big)$均为零。引理 2.4 表明 $(c_xy+c_xy)(c_xz+c_xz)$ 的积分为 $O(1)$。主导项中我们需要计算的唯一剩余积分为

$$\int\log|y|\big(\log|w-z|-\log|w|\big)N^4e^{-\pi N(|y|^2+|w|^2+|z|^2-y\overline{w}-w\overline{z})}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}.$$

我们先用引理 2.3 对 y 积分，得到一个依赖于 N 的常数乘以

$$\int\big(\log|w-z|-\log|w|\big)N^4e^{-\pi N(|w|^2+|z|^2-w\overline{z})}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=0$$

理由与 (3.9) 相同。我们得出主导项为 $O(1)$。

最后，在作变量替换$s=w-z$后，由引理 2.4 可知误差积分项为 $O(\log^2 N)$。至此本引理的证明结束。□

对于 $x\in X$，定义

$$L_N(x):=\int G(x,y)G(w,z)K_N(x,w)K_N(w,y)K_N(y,z)K_N(z,x)\,\omega(y)\omega(w)\omega(z)$$
$$-\int G(x,y)G(x,w)K_N(x,y)K_N(y,w)K_N(w,x)\,\omega(y)\omega(w).$$

引理 3.15. 我们有

$$L_N(x)=-\frac{\pi^2}{48}N+O(\log^2 N).$$

证明. 对于 $L_N(x)$ 中的第二项，我们交换 y 和 w，并利用引理 3.6 将其改写为

$$L_N(x)=\int G(x,y)\big(G(w,z)-G(x,w)\big)K_N(x,w)K_N(w,y)K_N(y,z)K_N(z,x)\,\omega(y)\omega(w)\omega(z).$$

由引理 3.4 可知，我们只需考虑满足距离(x,y),距离(x,w),距离(x,z) $\le_b\sqrt{\log N}$ 的积分。我们固定一个以 x 为中心的局部正规坐标。根据 (3.2)、(3.5)、(3.6)，并应用命题 3.3，可得

$$\begin{aligned}L_N(x)\overset{N^{-2}}{\asymp}\int_{|y|,|w|,|z|\le b\sqrt{\frac{\log N}{N}}}&\big(\log|y|+\varrho(x,x)+c_xy+\overline{c_xy}+O(|y|^2)\big)\\&\big(\log|w-z|-\log|w|+c_xz+\overline{c_xz}+O(|w|^2)+O(|z|^2)\big)\\&Ne^{-\frac{\pi}{2}N|w|^2}\big(1+O(N^{-1}+N^4|w|^{10})\big)\\&Ne^{-\frac{\pi}{2}N(|w|^2+|y|^2-2w\overline{y})}\big(1+O(N^{-1}+N^4|w|^{10}+N^4|y|^{10})\big)\\&Ne^{-\frac{\pi}{2}N(|y|^2+|z|^2-2y\overline{z})}\big(1+O(N^{-1}+N^4|y|^{10}+N^4|z|^{10})\big)\\&Ne^{-\frac{\pi}{2}N|z|^2}\big(1+O(N^{-1}+N^4|z|^{10})\big)\\&\frac{i}{2}\big(1+O(|y|^2)\big)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}\overline{y}\,\frac{i}{2}\big(1+O(|w|^2)\big)\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w}\,\frac{i}{2}\big(1+O(|z|^2)\big)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}.\end{aligned}$$

再次使用引理 3.4，并允许一个 $O(N^{-2})$ 误差，我们可以将积分域扩大到 $y, w, z \in \mathbb{C}$。主导项为

$$\int \big(\log|y| + \varrho(x,x) + c_x y + \overline{c_x y}\big)\big(\log|w-z| - \log|w| + c_x z + \overline{c_x z}\big) \\ N^4 e^{-\pi N(|y|^2+|w|^2+|z|^2 - w\overline{y} - y\overline{z})} \frac{i}{2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}\overline{y} \frac{i}{2}\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} \frac{i}{2}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}.$$

如同 (3.9) 中那样，作变量替换为 $w - z$ 并使用引理 2.3 后，可以看出以下积分

$\log|y|(c_x z + \overline{c_x z})$ $\varrho(x,x)(\log|w-z| - \log|w|)$ $\varrho(x,x)(c_x z + \overline{c_x z})$ $c_x y\big(\log|w-z| - \log|w|\big)$均为零。根据引理 2.4，$(c_x y + \overline{c_x y})(c_x z + \overline{c_x z})$ 的积分为 $O(1)$。主导项中唯一尚待计算的积分为

$$\int \log|y|\big(\log|w-z| - \log|w|\big) N^4 e^{-\pi N(|y|^2+|w|^2+|z|^2 - w\overline{y} - y\overline{z})} \frac{i}{2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}\overline{y} \frac{i}{2}\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} \frac{i}{2}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z},$$

根据引理 2.7，该积分为 $-\pi^2 N/48$。

作变量替换 $s = w - z$ 后，根据引理 2.4，误差项为 $O(\log^2 N)$。引理的证明至此结束。□

4. 期望与方差

在本节中，我们计算 $\mathscr{E}_N$的期望和方差。对于期望，主导项来自 G 在 $1/\sqrt{N}$ 尺度上的对数奇点，$|K_N(x,y)|^2$ 在该处集中。

二阶矩涉及二阶、三阶和四阶相关函数，具体取决于两个Green函数的乘积中出现多少个不同的点。我们利用 K_N的再生性质、对 F_N的估计以及上一节中计算的局部积分来求相应的积分。减去$\big(\mathbf{E}(\mathscr{E}_N)\big)^2$之后，大于 N阶的项相互抵消，留下阶为 N的方差。

定理 4.1. 当 $N \to \infty$,

$$\mathbf{E}(\mathscr{E}_N) = \frac{1}{2} N \log N + O(N).$$

证明。 根据定义及(3.3),

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathscr{E}_N) &= \int \sum_{j \neq k} G(x_j, x_k) \frac{1}{N!} \det\big(K_N(x_j, x_\ell)\big)_{1 \le j,\ell \le N} \omega(x_1)\omega(x_2)\cdots\omega(x_N) \\
&= \int N(N-1) G(x_1, x_2) \frac{1}{N!} \det\big(K_N(x_j, x_\ell)\big)_{1 \le j,\ell \le N} \omega(x_1)\omega(x_2)\cdots\omega(x_N) \\
&= \int N(N-1) G(x_1, x_2) \frac{(N-2)!}{N!} \det\big(K_N(x_j, x_\ell)\big)_{1 \le j,\ell \le 2} \omega(x_1)\omega(x_2) \\
&= \int G(x_1, x_2)\big(K_N(x_1,x_1)K_N(x_2,x_2) - |K_N(x_1,x_2)|^2\big)\,\omega(x_1)\omega(x_2).
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $G(x,y) = G(y,x)$。根据引理 3.2，并利用 $\int_X G(x,\cdot)\,\omega = 0$，第一个积分为

$$\int G(x_1, x_2)\big(N + O(1)\big)\big(N + O(1)\big)\,\omega(x_1)\omega(x_2) = O(1).$$

将此估计与引理 3.8 结合，即得所述关于期望的渐近公式。□

要计算方差，似乎没有捷径。必须展开能量和的平方，并逐项计算。原因之一是，高阶项（例如 $O(N^2\log N)$ $O(N^2)$ $O(N\log N)$）会相互抵消。但它们确实会出现在中间计算过程中。

定理 4.2。当 $N\to\infty$,

$$\mathrm{Var}(\mathscr{E}_N)=\Big(\log 2-\frac{\pi^2}{24}\Big)N+O(\log^2 N).$$

证明。 根据定义和 (3.3),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathscr{E}_N^2)&=\int\Big(\sum_{j\neq k}G(x_j,x_k)\Big)^2\frac{1}{N!}\det\big(K_N(x_j,x_\ell)\big)_{1\le j,\ell\le N}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\cdots\omega(x_N)\\&=\int\Big(\sum_{j\neq k,s\neq t}G(x_j,x_k)G(x_s,x_t)\Big)\frac{1}{N!}\det\big(K_N(x_j,x_\ell)\big)_{1\le j,\ell\le N}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\cdots\omega(x_N).\end{aligned}$$

集合 $\{j\neq k,s\neq t\}$ 可分为以下几个集合

$$\{j,k,s,t\text{ are all distinct}\},\quad\{j=s,k\neq t\},\quad\{j=t,k\neq s\},$$

$$\{j\neq s,k=t\},\quad\{j\neq t,k=s\},\quad\{j=s,k=t\},\quad\{j=t,k=s\}.$$

第一类数对的数量为 $N!/(N-4)!$。接下来的四类各包含 $N!/(N-3)!$个数对。最后两类各包含 $N-(N-1)$ 个数对。根据这种分类，并利用 $G(x,y)=G(y,x)$，我们得到

$$\mathbf{E}(\mathscr{E}_N^2)=2A_2+4A_3+A_4,$$

其中

$$\begin{aligned}A_2&=\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_2)\det\big(K_N(x_j,x_\ell)\big)_{1\le j,\ell\le 2}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\\A_3&=\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_3)\det\big(K_N(x_j,x_\ell)\big)_{1\le j,\ell\le 3}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\\A_4&=\int G(x_1,x_2)G(x_3,x_4)\det\big(K_N(x_j,x_\ell)\big)_{1\le j,\ell\le 4}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_4).\end{aligned}$$

由下文的命题 4.3、4.4、4.9 可得

$$2A_2=2\int G(x,y)^2K_N(x,x)K_N(y,y)\,\omega(x)\omega(y)-2\int G(x,y)^2|K_N(x,y)|^2\,\omega(x)\omega(y).$$

$$\begin{aligned}4A_3=4\int\bigg(\int G(x,y)\big(K_N(y,y)-N\big)\,\omega(y)\bigg)^2K_N(x,x)\,\omega(x)\\-8\int G(x,y)|K_N(x,y)|^2G(x,w)\mathfrak{b}(w)\,\omega(x)\omega(y)\omega(w)\\-4\int G(x,y)^2K_N(x,x)K_N(y,y)\,\omega(x)\omega(y)\\-4\int G(x,y)F_N(x,y)K_N(x,x)\,\omega(x)\omega(y)\end{aligned}$$

$$+8\int G(x,y)^2|K_N(x,y)|^2\,\omega(x)\omega(y)-\frac{\pi^2}{3}N+O(\log^2 N)$$

$$\begin{aligned}A_4=\big(\mathbf{E}(\mathscr{E}_N)\big)^2&-4\int\bigg(\int G(x,y)\big(|K_N(y,y)|-N\big)\,\omega(y)\bigg)^2K_N(x,x)\,\omega(x)\\&+2\int G(x,y)^2K_N(x,x)K_N(y,y)\,\omega(x)\omega(y)\\&+4\int G(x,y)F_N(x,y)K_N(x,x)\,\omega(x)\omega(y)+\log 2\cdot N\\&+8\int G(x,y)|K_N(x,y)|^2G(y,w)\mathfrak{b}(w)\,\omega(x)\omega(y)\omega(w)\\&-6\int G(x,y)^2|K_N(x,y)|^2\,\omega(x)\omega(y)+\frac{7\pi^2}{24}N+O(\log^2 N).\end{aligned}$$

所有项彼此抵消，除了 N 和 $O(\log^2 N)$ 项。 □

本节余下部分旨在计算所有的 A_2, A_3, A_4。

命题 4.3. 当 $N\to\infty$,

$$A_2=\int G(x,y)^2K_N(x,x)K_N(y,y)\,\omega(x)\omega(y)-\int G(x,y)^2|K_N(x,y)|^2\,\omega(x)\omega(y)$$

证明。 使用定义。 □

命题 4.4. 当 $N\to\infty$,

$$\begin{aligned}A_3=&\int\bigg(\int G(x,y)\big(K_N(y,y)-N\big)\,\omega(y)\bigg)^2K_N(x,x)\,\omega(x)\\&-2\int G(x,y)|K_N(x,y)|^2G(x,w)\mathfrak{b}(w)\,\omega(x)\omega(y)\omega(w)\\&-\int G(x,y)^2K_N(x,x)K_N(y,y)\,\omega(x)\omega(y)-\int G(x,y)F_N(x,y)K_N(x,x)\,\omega(x)\omega(y)\\&+2\int G(x,y)^2|K_N(x,y)|^2\,\omega(x)\omega(y)-\frac{\pi^2}{12}N+O(\log^2 N)\end{aligned}$$

证明。 展开行列式 $\det\big(K_N(x_j,\ x_\ell)\big)_{1\le j,\ \ell\le 3}$ 得到

$$K_{11}K_{22}K_{33}+K_{12}K_{23}K_{31}+K_{13}K_{21}K_{32}-K_{13}K_{22}K_{31}-K_{12}K_{21}K_{33}-K_{11}K_{23}K_{32},$$

其中，我们将 $K_N(x_j,\ x_\ell)$ 简记为 $K_{j\ell}$。该命题将由下文的引理 4.5–4.8 推出。□

引理 4.5. 由于 $N\to\infty$,

$$\begin{aligned}&\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_3)K_{11}K_{22}K_{33}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\\&\qquad=\int\bigg(\int G(x,y)\big(K_N(y,y)-N\big)\,\omega(y)\bigg)^2K_N(x,x)\,\omega(x).\end{aligned}$$

证明。 由引理 3.2，并利用 $\int_X G(x,\cdot)\,\omega = 0$，左边为

$$\begin{aligned}&\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_3)K_{11}\big(N+\mathfrak{b}(x_2)+O(N^{-1})\big)\big(N+\mathfrak{b}(x_3)+O(N^{-1})\big)\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\\ &=\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_3)K_{11}\big(K_N(x_2,x_2)-N\big)\big(K_N(x_3,x_3)-N\big)\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3),\end{aligned}$$

从而得到该引理。 □

引理 4.6. 由于 $N\to\infty$,

$$\begin{aligned}&\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_3)K_{12}K_{21}K_{33}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\\ &=\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_3)K_{13}K_{22}K_{31}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\\ &=\int G(x,y)|K_N(x,y)|^2G(x,w)\mathfrak{b}(w)\,\omega(x)\omega(y)\omega(w)+O(\log N).\end{aligned}$$

证明。 第一个等式由对称性得到。根据引理 3.2、3.7，并利用 $\int_X G(x,\ \cdot)\,\omega = 0$，可得积分为

$$\begin{aligned}&\int G(x_1,x_2)|K_N(x_1,x_2)|^2\,\omega(x_2)\int G(x_1,x_3)\big(N+\mathfrak{b}(x_3)+O_{x_3}(N^{-1})\big)\,\omega(x_3)\omega(x_1)\\ &=\int G(x_1,x_2)|K_N(x_1,x_2)|^2\,\omega(x_2)\int G(x_1,x_3)\big(\mathfrak{b}(x_3)+O_{x_3}(N^{-1})\big)\,\omega(x_3)\omega(x_1)\\ &=\int G(x_1,x_2)|K_N(x_1,x_2)|^2G(x_1,x_3)\mathfrak{b}(x_3)\,\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_1)\\ &\quad+\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_3)|K_N(x_1,x_2)|^2O_{x_3}(N^{-1})\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3).\end{aligned}$$

接下来只需估计第二个积分。我们先对 x_2 积分，应用引理 3.8，得到所需的界 $O(\log N)$，因为 $G(x_1,\ x_3)$ 在 $\omega\otimes\omega$ 上可积。□

引理 4.7. 由于 $N\to\infty$,

$$\begin{aligned}&\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_3)K_{11}K_{23}K_{32}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)=\\ &\qquad\int G(x,y)^2K_N(x,x)K_N(y,y)\,\omega(x)\omega(y)+\int G(x,y)F_N(x,y)K_N(x,x)\,\omega(x)\omega(y).\end{aligned}$$

证明。 根据 F_N的定义。 □

引理 4.8. 由于 $N\to\infty$,

$$\begin{aligned}&\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_3)K_{12}K_{23}K_{31}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\\ &=\int G(x_1,x_2)G(x_1,x_3)K_{13}K_{32}K_{21}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\\ &=\int G(x,y)^2|K_N(x,y)|^2\,\omega(x)\omega(y)-\frac{\pi^2}{24}N+O(\log^2 N).\end{aligned}$$

证明。 第一个等式由对称性得出。第二个等式由引理 3.12 得出。 □

命题 4.9. 由于 $N \to \infty$,

$$\begin{aligned} A_4 = \big(\mathbf{E}(\mathscr{E}_N)\big)^2 &- 4\int \left(\int G(x,y)\big(|K_N(y,y)| - N\big)\,\omega(y)\right)^2 K_N(x,x)\,\omega(x) \\ &+ 2\int G(x,y)^2 K_N(x,x)K_N(y,y)\,\omega(x)\omega(y) \\ &+ 4\int G(x,y)F_N(x,y)K_N(x,x)\,\omega(x)\omega(y) + \log 2 \cdot N \\ &+ 8\int G(x,y)|K_N(x,y)|^2 G(y,w)\mathfrak{b}(w)\,\omega(x)\omega(y)\omega(w) \\ &- 6\int G(x,y)^2|K_N(x,y)|^2\,\omega(x)\omega(y) + \frac{7\pi^2}{24}N + O(\log^2 N). \end{aligned}$$

证明。 对于 $\sigma \in$Sym(4)，定义

$$A_\sigma := \int G(x_1,x_2)G(x_3,x_4)\prod_{j=1}^{4} K(x_j, x_{\sigma(j)})\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_4).$$

根据定义,

$$A_4 = \sum_{\sigma\in \mathrm{Sym}(4)} \mathrm{sgn}(\sigma) A_\sigma.$$

注意到

$$\begin{aligned} \big(\mathbf{E}(\mathscr{E}_N)\big)^2 &= \left(\int G(x_1,x_2)\big(K_N(x_1,x_1)K_N(x_2,x_2) - |K_N(x_1,x_2)|^2\big)\,\omega(x_1)\omega(x_2)\right)^2 \\ &= \int G(x_1,x_2)\big(K_{11}K_{22} - |K_{12}|^2\big)\,\omega(x_1)\omega(x_2)\int G(x_3,x_4)\big(K_{33}K_{44} - |K_{34}|^2\big)\,\omega(x_3)\omega(x_4) \\ &= A_{\mathrm{id}} - A_{(3,4)} - A_{(1,2)} + A_{(1,2)(3,4)}. \end{aligned}$$

因此，我们无需计算这四项，因为在计算方差时，它们会与 $\big(\mathbf{E}(\mathscr{E}_N)\big)^2$ 抵消。由下文的引理 4.10–4.14 即可推出该命题。□

引理 4.10。当 $N \to \infty$,

$$\begin{aligned} A_{(1,3)} = A_{(1,4)} &= A_{(2,3)} = A_{(2,4)} \\ &= \int \left(\int G(x,y)\big(|K_N(y,y)| - N\big)\,\omega(y)\right)^2 K_N(x,x)\,\omega(x) + O(1). \end{aligned}$$

证明。 由对称性，我们只需计算 $A_{(1,3)}$。根据定义,

$$A_{(1,3)} = \int G(x_1,x_2)G(x_3,x_4)|K_{13}|^2 K_{22}K_{44}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_4).$$

对于每个固定的 x_1, x_3，根据引理 3.2，并利用 $\int_X G(x,\cdot)\,\omega = 0$，上面的被积函数等于

$$|K_{13}|^2 \int G(x_1,x_2)\big(K_N(x_2,x_2) - N\big)\,\omega(x_2)\int G(x_3,x_4)\big(K_N(x_4,x_4) - N\big)\,\omega(x_4).$$

我们用 F_N 表示

$$\int G(x_1,x_2)|K_{13}|^2\,\omega(x_1) = G(x_2,x_3)K_{33} + F_N(x_2,x_3).$$

由此可得， $A_{(1,3)}$ 为

$$\int G(x_2,x_3)K_{33}\big(K_N(x_2,x_2)-N\big)G(x_3,x_4)\big(K_N(x_4,x_4)-N\big)\,\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_4)$$
$$+\int F_N(x_2,x_3)\big(K_N(x_2,x_2)-N\big)G(x_3,x_4)\big(K_N(x_4,x_4)-N\big)\,\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_4).$$

第一个积分是我们所需的主项，第二个积分由引理 3.10 得出，为 $O(1)$。□

引理 4.11。当 $N\to\infty$,

$$A_{(1,3)(2,4)}=A_{(1,4)(2,3)}=\int G(x,y)^2K_N(x,x)K_N(y,y)\,\omega(x)\omega(y)$$
$$+2\int G(x,y)F_N(x,y)K_N(x,x)\,\omega(x)\omega(y)+\frac{\log 2}{2}N+O(\log N).$$

证明。 由对称性，我们只需计算 $A_{(1,4)(2,3)}$，根据定义，它等于

$$\int G(x_1,x_2)G(x_3,x_4)|K_{14}|^2|K_{23}|^2\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_4).$$

我们使用 F_N 来写出

$$\int G(x_1,x_2)|K_{23}|^2\,\omega(x_2)=G(x_1,x_3)K_{33}+F_N(x_1,x_3)$$

and

$$\int G(x_3,x_4)|K_{14}|^2\,\omega(x_4)=G(x_3,x_1)K_{11}+F_N(x_3,x_1).$$

因此， $A_{(1,4)(2,3)}$ 为

$$\int G(x_1,x_3)^2K_{11}K_{33}\,\omega(x_1)\omega(x_3)+\int G(x_1,x_3)F_N(x_1,x_3)K_N(x_1,x_1)\,\omega(x_1)\omega(x_3)+$$
$$\int G(x_1,x_3)F_N(x_3,x_1)K_N(x_3,x_3)\,\omega(x_1)\omega(x_3)+\int F_N(x_1,x_3)F_N(x_3,x_1)\,\omega(x_1)\omega(x_3).$$

根据 F_N 的定义，并利用 $G(x_1,\ x_3)=G(x_3,\ x_1)$，我们可以看出第二个和第三个积分相同。由引理 3.11 即可推出该引理。□

引理 4.12. 如果 σ 包含一个3-循环，那么当 $N\to\infty$时，

$$A_\sigma=\int G(x,y)|K_N(x,y)|^2G(y,w)\mathfrak{b}(w)\,\omega(x)\omega(y)\omega(w)+O(\log N).$$

证明。 我们只给出 $\sigma=(1,\ 2,\ 3)$ 的证明。其余情况可用同样的方法处理。根据定义和引理 3.2， $A_{(1,2,3)}$ 是

$$=\int G(x_1,x_2)G(x_3,x_4)K_{12}K_{23}K_{31}K_{44}\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_4)$$
$$=\int G(x_1,x_2)K_{12}K_{23}K_{31}\Big(\int G(x_3,x_4)K_{44}\,\omega(x_4)\Big)\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)$$
$$=\int G(x_1,x_2)K_{12}K_{23}K_{31}\Big(\int G(x_3,x_4)\big(\mathfrak{b}(x_4)+O_{x_4}(N^{-1})\big)\,\omega(x_4)\Big)\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)$$
$$=\int G(x_1,x_2)K_{12}K_{23}K_{31}G(x_3,w)\mathfrak{b}(w)\omega(w)\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)$$

$$+\int G(x_1,x_2)K_{12}K_{23}K_{31}\,O_{x_3}(N^{-1})\,\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3).$$

根据引理 3.13，对于每个 x_3,

$$\int G(x_1,x_2)K_{12}K_{23}K_{31}\,\omega(x_1)\omega(x_2)=\int G(x_1,x_3)|K_{13}|^2\omega(x_1)+O(\log N).$$

由引理 3.8，我们得出

$$A_{(1,2,3)}=\int G(x_1,x_3)|K_{13}|^2G(x_3,x_4)\mathfrak{b}(x_4)\,\omega(x_1)\omega(x_3)\omega(x_4)+O(\log N),$$

从而得到该引理。 □

引理 4.13。当 $N\to\infty$时，

$$\begin{aligned}A_{(1,2,3,4)}=A_{(1,2,4,3)}&=A_{(1,3,4,2)}=A_{(1,4,3,2)}\\&=\int G(x,y)^2|K_N(x,y)|^2\,\omega(x)\omega(y)-\frac{\pi^2}{24}N+O(\log^2 N).\end{aligned}$$

证明。 利用引理 3.12 和引理 3.14。 □

引理 4.14。当 $N\to\infty$时，

$$A_{(1,3,2,4)}=A_{(1,4,2,3)}=\int G(x,y)^2|K_N(x,y)|^2\,\omega(x)\omega(y)-\frac{\pi^2}{16}N+O(\log^2 N).$$

证明。 利用引理 3.12 和 3.15。 □

5. 矩与累积量

本节回顾概率论中联合累积量的概念，并推导格林能量累积量的公式。读者可参阅综述[29, 55] 了解详情。

设 Y_1，Y_2，…，Y_r为实随机变量，且它们的乘积可积。其联合累积量 定义为

$$\kappa(Y_1,Y_2,\dots,Y_r):=\sum_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}([r])}(-1)^{|\mathcal{Q}|-1}(|\mathcal{Q}|-1)!\prod_{I\in\mathcal{Q}}\mathbf{E}\Big(\prod_{s\in I}Y_s\Big).\tag{5.1}$$

这里，$[r]:=\{1,2,\dots,r\}$, $\mathcal{P}([r])$表示集合 $[r]$ 的所有划分，$|\mathcal{Q}|$ 表示 $\mathcal{Q}$中的元素个数。对于单个随机变量 Y，我们将其第 r阶累积量定义为

$$\kappa_r(Y):=\kappa(Y,Y,\dots,Y)\quad\text{with } r \text{ copies},$$

由此可得

$$\kappa_r(Y):=\sum_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}([r])}(-1)^{|\mathcal{Q}|-1}(|\mathcal{Q}|-1)!\prod_{I\in\mathcal{Q}}\mathbf{E}(Y^{|I|}).\tag{5.2}$$

逆公式为

$$\mathbf{E}\Big(\prod_{j=1}^{r}Y_j\Big)=\sum_{\mathcal{Q}\in\mathcal{P}([r])}\prod_{I\in\mathcal{Q}}\kappa(Y_s:\ s\in I),$$

其中，$\kappa(Y_s:\ s\in I)$ 表示 Y_s 关于 $s\in I$的联合累积量。由于联合累积量对其参数具有对称性，因此该定义良好。

有限集合 Q的划分 是指集合 $\mathscr{Q}$，其元素是 Q 的两两不交的非空子集，且这些子集的并集为 Q。设 $\mathscr{Q}$ 是 Q的一个划分。对于 $s \in Q$，令 $\mathscr{Q}(s)$ 表示 $\mathscr{Q}$ 中包含 s的元素。

对于 Q 的两个划分 $\mathscr{Q}_1$ 和 $\mathscr{Q}_2$，我们定义如下的序关系： $\mathscr{Q}_1 \le \mathscr{Q}_2$ 若对任意 $A \in \mathscr{Q}_1$，都有 $A \subset B$，其中某个 $B \in \mathscr{Q}_2$。这意味着 $\mathscr{Q}_1$ 是 $\mathscr{Q}_2$ 的加细。用 $\mathscr{Q}_1 \vee \mathscr{Q}_2$ 表示 Q 的最小划分，使得 $\mathscr{Q}_1 \le \mathscr{Q}_1 \vee \mathscr{Q}_2$ 且 $\mathscr{Q}_2 \le \mathscr{Q}_1 \vee \mathscr{Q}_2$。例如，设 $\mathscr{Q}_1 = \big\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\},\{6\}\big\}$ 且 $\mathscr{Q}_2 = \big\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\},\{6\}\big\}$。则 $\mathscr{Q}_1 \vee \mathscr{Q}_2 = \big\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6\}\big\}$。

假设 $\mathscr{Q}$ 和 $\mathscr{L}$ 分别是互不相交集合 Q 和 L 的划分。那么 $\mathscr{Q} \cup \mathscr{L} := \{A : A \in \mathscr{Q}$ 或 $A \in \mathscr{L}\}$ 将是 $Q \cup L$的一个划分。若 $F \subset Q$, $\mathscr{Q}|_F := \{A \cap F : A \in \mathscr{Q},\ A \cap F \neq \varnothing\}$ 是 F的一个划分。

对于每个 $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathscr{Q})$，记 $\mathscr{Q} \otimes \sigma$ 为通过合并属于 σ同一循环的集合$A \in \mathscr{Q}$ 而得到的新划分。换言之， $\mathscr{Q} \otimes \sigma$ 是最小划分，其中每个元素在 σ下保持不变。例如，若 $\mathscr{Q} = \big\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\},\{6\}\big\}$，则它是 $[6]$的一个划分。设 σ 交换 $\{1,2\}$ 和 $\{3\}$，并固定 $\{4,5\}$ 和 $\{6\}$，则$\mathscr{Q} \otimes \sigma = \big\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6\}\big\}$。

固定划分

$$\mathscr{R}_k := \big\{\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2k-1,2k\}\big\}$$

of $[2k]$and the trivial partition $\{[2k]\}$of $[2k]$。

由于 G 在对角线上未定义，我们通过定义一个新函数将其值设为零

$$\widetilde{G}(x,x) := 0 \quad \text{and} \quad \widetilde{G}(x,y) := G(x,y) \quad \text{for} \quad x \neq y \in X.$$

Put

$$\widetilde{\mathscr{E}}_N := \sum_{j \neq k} \widetilde{G}(x_j, x_k) = \sum_{j,k} \widetilde{G}(x_j, x_k).$$

关于格林能量的矩和累积量，我们有以下两个结果，另见 [55, 命题3.1]。

引理 5.1。 对于每个 $k \ge 1, N \ge 2k$，我们有

$$\mathbf{E}(\mathscr{E}_N^k) = \sum_{\mathscr{Q} \in \mathcal{P}([2k])} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathscr{Q})} \mathrm{sgn}(\sigma) \int_{X^{\mathscr{Q}}} \prod_{j=1}^{k} \widetilde{G}\big(x_{\mathscr{Q}(2j-1)}, x_{\mathscr{Q}(2j)}\big) \prod_{A \in \mathscr{Q}} K_N(x_A, x_{\sigma(A)}) \prod_{A \in \mathscr{Q}} \omega(x_A).$$

~证明。 根据定义，对于每个 k，$\mathbf{E}(\mathscr{E}_N^k) = \mathbf{E}(\mathscr{E}_N^k)$，其中我们可以写成

$$\widetilde{\mathscr{E}}_N^k = \sum_{\eta:[2k] \to [N]} \prod_{j=1}^{k} \widetilde{G}\big(x_{\eta(2j-1)}, x_{\eta(2j)}\big)$$

利用 (3.3)，我们得到

$$\mathbf{E}(\widetilde{\mathscr{E}}_N^k) = \sum_{\eta:[2k] \to [N]} \int_{X^N} \prod_{j=1}^{k} \widetilde{G}\big(x_{\eta(2j-1)}, x_{\eta(2j)}\big) \frac{1}{N!} \det\big(K_N(x_j, x_\ell)\big)_{1 \le j,\ell \le N} \prod_{\ell=1}^{N} \omega(x_\ell), \tag{5.3}$$

其中， η 遍历所有从 $[2k]$ 到 $[N]$的映射。每个 η 都会根据 $s \in [2k]$对应的值 $\eta(s)$，诱导出 $[2k]$的一个划分 $\mathscr{Q}_\eta$；我们将具有相同η值的 s 归为一组。注意，对于 $\eta_1 \neq \eta_2$， $\mathscr{Q}_{\eta_1}$ 可能等于 $\mathscr{Q}_{\eta_2}$，而给定相同

划分 $\mathscr{Q}_\eta$的数量为 $N(N-1)\cdots(N-|\mathscr{Q}_\eta|+1)$。此外，同一个划分在求和式（5.3）中会贡献相同的积分。因此

$$\mathbf{E}(\widetilde{\mathscr{E}}_N^k) = \sum_{\mathscr{Q}\in\mathcal{P}([2k])} \frac{N!}{(N-|\mathscr{Q}|)!}\int_{X^N}\prod_{j=1}^{k}\widetilde{G}\big(x_{\mathscr{Q}(2j-1)},x_{\mathscr{Q}(2j)}\big)\frac{1}{N!}\det\big(K_N(x_j,x_\ell)\big)_{1\le j,\ell\le N}\prod_{\ell=1}^{N}\omega(x_\ell)$$

$$= \sum_{\mathscr{Q}\in\mathcal{P}([2k])} \frac{N!}{(N-|\mathscr{Q}|)!}\int_{X^{|\mathscr{Q}|}}\prod_{j=1}^{k}\widetilde{G}\big(x_{\mathscr{Q}(2j-1)},x_{\mathscr{Q}(2j)}\big)\frac{(N-|\mathscr{Q}|)!}{N!}\det\big(K_N(x_j,x_\ell)\big)_{1\le j,\ell\le|\mathscr{Q}|}\prod_{\ell=1}^{|\mathscr{Q}|}\omega(x_\ell)$$

$$= \sum_{\mathscr{Q}\in\mathcal{P}([2k])} \int_{X^{|\mathscr{Q}|}}\prod_{j=1}^{k}\widetilde{G}\big(x_{\mathscr{Q}(2j-1)},x_{\mathscr{Q}(2j)}\big)\det\big(K_N(x_j,x_\ell)\big)_{1\le j,\ell\le|\mathscr{Q}|}\prod_{\ell=1}^{|\mathscr{Q}|}\omega(x_\ell).$$

展开行列式后即可得到该结果。 □

对于 $I\subset[k]$，令 $2I:=\cup_{j\in I}\{2j-1,2j\}$。这 $2I$并不意味着通常意义下将I 中的元素加倍。对于每个划分 $\mathscr{Q}$ of $2I$ 以及 $\sigma\in$Sym($\mathscr{Q}$)，定义积分

$$\mathcal{J}(\mathscr{Q},\sigma) := \operatorname{sgn}(\sigma)\int_{X^{\mathscr{Q}}}\prod_{j\in I}\widetilde{G}\big(x_{\mathscr{Q}(2j-1)},x_{\mathscr{Q}(2j)}\big)\prod_{A\in\mathscr{Q}}K_N(x_A,x_{\sigma(A)})\prod_{A\in\mathscr{Q}}\omega(x_A).$$

命题 5.2。 对于每个 $k\ge 2$、$N\ge 2k$，有

$$\kappa_k(\mathscr{E}_N) = \sum_{\mathscr{Q}\in\mathcal{P}([2k])}\ \sum_{\substack{\sigma\in\mathrm{Sym}(\mathscr{Q})\\(\mathscr{Q}\otimes\sigma)\vee\mathscr{R}_k=\{[2k]\}}}\mathcal{J}(\mathscr{Q},\sigma).$$

证明。 根据引理 5.1，对于每个 $I\subset[k]$,

$$\mathbf{E}(\mathscr{E}_N^{|I|}) = \sum_{\mathscr{L}\in\mathcal{P}(2I)}\ \sum_{\tau\in\mathrm{Sym}(\mathscr{L})}\mathcal{J}(\mathscr{L},\tau).$$

因此，由（5.2）可得

$$\kappa_k(\mathscr{E}_N) = \sum_{\mathscr{G}\in\mathcal{P}([k])}(-1)^{|\mathscr{G}|-1}\big(|\mathscr{G}|-1\big)!\prod_{I\in\mathscr{G}}\Big(\sum_{\mathscr{L}\in\mathcal{P}(2I)}\ \sum_{\tau\in\mathrm{Sym}(\mathscr{L})}\mathcal{J}(\mathscr{L},\tau)\Big) \tag{5.4}$$

固定一个 $\mathscr{G}\in\mathcal{P}([k])$。对每个 $\mathcal{I}_j\in\mathscr{G}$，取 $\mathscr{L}_j\in\mathcal{P}(2I_j)$ $\tau_j\in$Sym($\mathscr{L}_j$) 并将它们粘合，将得到 $[2k]$ 的一个划分 $\mathscr{Q}=\cup\mathscr{L}_j$ 以及一个置换 $\sigma=\prod\tau_j\in$Sym($\mathscr{Q}$)。注意 sgn(σ) $=\prod$sgn(τ_j)。由富比尼定理，我们有

$$\mathcal{J}(\mathscr{Q},\sigma) = \prod\mathcal{J}(\mathscr{L}_j,\tau_j). \tag{5.5}$$

剩下的是计算有多少不同的 $\mathscr{G}$ 会以上述方式产生相同的 ($\mathscr{Q},\sigma$)。更确切地说，对于一个固定的对 ($\mathscr{Q},\sigma$)，其中 $\mathscr{Q}$ 是 $[2k]$ 的一个划分，且 $\sigma\in$Sym($\mathscr{Q}$)，我们需要找出所有 $\mathscr{G}\in\mathcal{P}([k])$，使得对每个 $I_j\in\mathscr{G}$ 都存在 $\mathscr{L}_j\in\mathcal{P}(2I_j)$ 和 $\tau_j\in$Sym($\mathscr{L}_j$)，使得

$$\mathscr{Q}=\bigcup\mathscr{L}_j \quad\text{and}\quad \sigma=\prod\tau_j\in\mathrm{Sym}(\mathscr{Q}). \tag{5.6}$$

容易验证，一个必要条件是：对每个 $A\in\mathscr{Q}$，它应包含在某个 $I\in\mathscr{G}$ 的 $2I$ 中，并且 $\sigma(A)$ 也应包含在这个 $2I$ 中。该条件也是充分的，因为 $[2k]$ 分别是 $A\in\mathscr{Q}$ 与 $2I_j$ 的不交并。

断言： $\mathscr{G}$当且仅当对于任意 $B\in(\mathscr{Q}\otimes\sigma)\vee\mathscr{R}_k$，$B\subset 2I$对某个 $I\in\mathscr{G}$ 生成 ($\mathscr{Q},\sigma$)。

断言证明。假设 $\mathscr{G}$生成 $(\mathscr{Q},\sigma)$，那么对于每个 $I_j\in\mathscr{G}$，我们都可以找到 $\mathscr{L}_j\in\mathcal{P}(2I_j)$ $\tau_j\in\mathrm{Sym}(\mathscr{L}_j)$，使得 (5.6) 成立。要得到划分 $(\mathscr{Q}\otimes\sigma)\vee\mathscr{R}_k$，需要分两步进行。第一步是按照 σ 的作用合并 $\cup\mathscr{L}_j$ 的元素。之后，我们进一步合并元素，使 $2j-1$ 和 $2j$ 成为一个单独的元素。这两步都不会将 $[2k]\setminus 2I$ 中的元素移入任何$I\in\mathscr{G}$的 $2I$ 划分中。对于 $B\in(\mathscr{Q}\otimes\sigma)\vee\mathscr{R}_k$，所有合并到 B 的元素都应包含在某个 $I_j\in\mathscr{G}$ 对应的同一个 $2I_j$ 中，这意味着对某个 $I\in\mathscr{G}$，$B\subset 2I$。

反过来，假设对任意 $B\in(\mathscr{Q}\otimes\sigma)\vee\mathscr{R}_k$, $B\subset 2I$对于某个 $I\in\mathscr{G}$。对每个 $I\in\mathscr{G}$，定义 $\mathscr{L}_I:=\{A\in\mathscr{Q}:\ A\subset 2I\}$。该假设意味着对所有 $A\in\mathscr{L}_I$，$\sigma(A)\in\mathscr{L}_I$，因此 $\tau_I:=\sigma|_{\mathscr{L}_I}$定义良好。可以验证（$\mathscr{L}_I$，$\tau_I$）满足条件 (5.6)。至此，命题得证。□

根据该命题可知，若 $\mathscr{G}$产生（$\mathscr{Q}$，σ），则 $(\mathscr{Q}\otimes\sigma)\vee\mathscr{R}_k\le 2\mathscr{G}$，其中 $2\mathscr{G}$是通过对 $I_j\in\mathscr{G}$ 的 $2I_j$所得到的 $[2k]$ 的划分。因此，利用 $|\mathscr{G}|=|2\mathscr{G}|$，由 (5.4) 和 (5.5) 可得

$$\kappa_k(\mathscr{E}_N)=\sum_{\mathscr{Q}\in\mathcal{P}([2k])}\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(\mathscr{Q})}\sum_{\substack{\mathscr{F}\in\mathcal{P}([2k])\\(\mathscr{Q}\otimes\sigma)\vee\mathscr{R}_k\le\mathscr{F}}}(-1)^{|\mathscr{F}|-1}(|\mathscr{F}|-1)!\mathcal{J}(\mathscr{Q},\sigma).$$

令 $n_{\mathscr{Q},\sigma}$ 表示 $(\mathscr{Q}\otimes\sigma)\vee\mathscr{R}_k$中的元素个数。$\mathscr{F}$ 的选择数恰好为 $|\mathcal{P}([n_{\mathscr{Q},\sigma}])|$。因此，

$$\sum_{\substack{\mathscr{F}\in\mathcal{P}([2k])\\(\mathscr{Q}\otimes\sigma)\vee\mathscr{R}_k\le\mathscr{F}}}(-1)^{|\mathscr{F}|-1}(|\mathscr{F}|-1)!=\sum_{\mathscr{T}\in\mathcal{P}([n_{\mathscr{Q},\sigma}])}(-1)^{|\mathscr{T}|-1}(|\mathscr{T}|-1)!,$$

其值在$n_{\mathscr{Q},\sigma}=1$时为 1，否则为 0（[55, (3.12)]）。因此，唯一留下的项对应于 $(\mathscr{Q}\otimes\sigma)\vee\mathscr{R}_k=\{[2k]\}$。至此，命题的证明完成。□

令 f 为 X^r 上的一个复值函数，使得

$$\int_{X^{\mathscr{L}}}\bigl|f(x_{\mathscr{L}(1)},x_{\mathscr{L}(2)},\dots,x_{\mathscr{L}(r)})\bigr|\prod_{A\in\mathscr{L}}\omega(x_A)<+\infty$$

对任意 $\mathscr{L}\in\mathcal{P}([r])$ 均成立。记 $\mathrm{Cyc}(\mathscr{L})$ 为 $\mathrm{Sym}(\mathscr{L})$ 中所有长度为 $|\mathscr{L}|$的单循环置换构成的集合。我们有如下累积量约化结果，它与 [41,命题 4.12],类似；另见 [62,(2.7)]和 [30,引理 1]。

命题 5.3。对于 $r\ge 2$，有

$$\sum_{\mathscr{L}\in\mathcal{P}([r])}\sum_{\tau\in\mathrm{Cyc}(\mathscr{L})}(-1)^{|\mathscr{L}|-1}\int_{X^{\mathscr{L}}}f(x_{\mathscr{L}(1)},x_{\mathscr{L}(2)},\dots,x_{\mathscr{L}(r)})\prod_{A\in\mathscr{L}}K_N(x_A,x_{\tau(A)})\prod_{A\in\mathscr{L}}\omega(x_A)$$
$$=\sum_{\eta:[r]\to[r]\setminus\{1\}}c_\eta\int_{X^r}\mathsf{K}_{N,r}\sum_{B\subset[r]}(-1)^{r-|B|}f\bigl(x_1^{B,\eta},x_2^{B,\eta},\dots,x_r^{B,\eta}\bigr)\prod_{\ell=1}^{r}\omega(x_\ell),$$

其中

$$\mathsf{K}_{N,r}:=\prod_{1\le j\le r}K_N(x_j,x_{j+1})\quad\textit{with}\quad x_{r+1}=x_1,$$

$$c_\eta:=(-1)^{|\eta([r])|-1}\bigl|\eta([r])\bigr|^{-1}\binom{r}{\bigl|\eta([r])\bigr|}^{-1},$$

$$x_j^{B,\eta}:=x_{\eta(j)}\quad\textit{for } j\in B,\qquad x_j^{B,\eta}:=x_1\quad\textit{for } j\notin B.$$

证明。我们从映射 η 开始：$[r]\to[r]$，并令 $\eta([r])=\{q_1,q_2,\dots,q_t\}$，其中 $q_1<q_2<\cdots<q_t$。设 $A_j=\eta^{-1}(q_j)$。引理 3.6 中 K_N 的再生性质给出

$$\int_{X^{[r]\setminus\eta([r])}}\mathsf{K}_{N,r}\prod_{\ell\in[r]\setminus\eta([r])}\omega(x_\ell)=\prod_{\ell=1}^{t}K_N(x_{q_\ell},x_{q_{\ell+1}})\quad\text{with}\quad x_{q_{t+1}}=x_{q_1}. \tag{5.7}$$

注意，$\mathscr{L}:=\{A_j:\ 1\le j\le t\}$ 是 $[r]$的一个划分，并且我们用单循环 $A_1\mapsto A_2\mapsto\cdots\mapsto A_t\mapsto A_1$ 定义 $\tau\in\mathsf{Sym}(\mathscr{L})$。将 f和 $\omega(x_\ell)$（其中 $\ell\in\eta([r])$）加到 (5.7) 中的被积函数后，我们得到

$$\int_{X^r}\mathsf{K}_{N,r}f\big(x_{\eta(1)},x_{\eta(2)},\dots,x_{\eta(r)}\big)\prod_{\ell=1}^{r}\omega(x_\ell)=\int_{X^{\mathscr{L}}}f\big(x_{\mathscr{L}(1)},x_{\mathscr{L}(2)},\dots,x_{\mathscr{L}(r)}\big)\prod_{A\in\mathscr{L}}K_N(x_A,x_{\tau(A)})\prod_{A\in\mathscr{L}}\omega(x_A).$$

现在我们来计算有多少个不同的 η会给出相同的 $(\mathscr{L},\ \tau)$。第一步，需要固定 η的像，共有 $\binom{r}{t}$ 种选择。之后，为 $\eta(1)$赋值，共有 t种选择。此时，实际上 η 的所有取值都已由 τ 和 $\eta(1)$确定，因为τ是一个单循环。因此，对于每个固定的 $(\mathscr{L},\ \tau)$，总共有 $t\binom{r}{t}=(-1)^{t-1}c_\eta^{-1}$种选择。因此，我们得出

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathscr{L}\in\mathcal{P}([r])}\sum_{\tau\in\mathrm{Cyc}(\mathscr{L})}(-1)^{|\mathscr{L}|-1}\int_{X^{\mathscr{L}}}f(x_{\mathscr{L}(1)},x_{\mathscr{L}(2)},\dots,x_{\mathscr{L}(r)})\prod_{A\in\mathscr{L}}K_N(x_A,x_{\tau(A)})\prod_{A\in\mathscr{L}}\omega(x_A)\\&\qquad=\sum_{\eta:[r]\to[r]}c_\eta\int_{X^r}\mathsf{K}_{N,r}f\big(x_{\eta(1)},x_{\eta(2)},\dots,x_{\eta(r)}\big)\prod_{j=1}^{r}\omega(x_j).\end{aligned}\tag{5.8}$$

断言：我们有

$$\sum_{\eta:[r]\to[r]}c_\eta f\big(x_{\eta(1)},x_{\eta(2)},\dots,x_{\eta(r)}\big)=\sum_{\eta:[r]\to[r]}c_\eta\sum_{B\subset[r]}(-1)^{r-|B|}f\big(x_1^{B,\eta},x_2^{B,\eta},\dots,x_r^{B,\eta}\big).\tag{5.9}$$

断言证明。注意，(5.9) 的左边就是 $B=[r]$时右边的那一项。因此，我们需要证明 $B\neq[r]$ 对应的各项彼此抵消。取 $[r]$的一个真子集 B。固定 $j_0\in[r]\setminus B$。对于任意映射 $\widetilde{\eta}:\ [r]\setminus\{j_0\}\to[r]$，我们为每个 $\ell=1$，2，.....，r定义扩展 η_ℓ，如下所示：

$$\eta_\ell(j):=\widetilde{\eta}(j)\quad\text{for } j\neq j_0\quad\text{and}\quad\eta_\ell(j_0):=\ell.$$

注意，对于所有 ℓ,

$$f\big(x_1^{B,\eta_\ell},x_2^{B,\eta_\ell},\dots,x_r^{B,\eta_\ell}\big)=f\big(x_1^{B,\eta_1},x_2^{B,\eta_1},\dots,x_r^{B,\eta_1}\big).$$

另一方面，令 $t:=\big|\widetilde{\eta}([r]\setminus\{j_0\})\big|$。那么，在这些 ℓ 中有 t 个满足 $\big|\eta_\ell([r])\big|=t$，并且有 $r-t$ 个 ℓ 满足 $\big|\eta_\ell([r])\big|=t+1$。由此可得

$$\sum_{1\le\ell\le r}c_{\eta_\ell}=t(-1)^{t-1}t^{-1}\binom{r}{t}^{-1}+(r-t)(-1)^t(t+1)^{-1}\binom{r}{t+1}^{-1}=0.$$

这就证明了该断言。 □

对于映射 $\eta:\ [r]\to[r]$。若 $s\in\eta^{-1}$(1)，则对于任意不包含 s 的集合 $B\subset[r]$，根据 $x^{B,}_{s}{}^{\eta}$ 的定义，我们有

$$f\big(x_1^{B,\eta},x_2^{B,\eta},\dots,x_r^{B,\eta}\big)=f\big(x_1^{B\cup\{s\},\eta},x_2^{B\cup\{s\},\eta},\dots,x_r^{B\cup\{s\},\eta}\big).$$

此外，系数 $(-1)^{r-|B|}$ 与 $(-1)^{r-|B\cup\{s\}|}$ 抵消。这表明，以这些映射为指标的项在 (5.9) 右侧的求和中相互抵消。结合 (5.8)，我们便完成了该命题的证明。□

下面，我们将在命题 5.2 和命题 5.3 中的两个不同求和公式之间建立对应关系。

固定 $[2k]$ 的一个划分 $\mathscr{F}:=\{F_1,F_2,\dots,F_m\}$。定义两个集合

$$\mathcal{A}_{\mathscr{F}}:=\big\{(\mathscr{Q},\sigma):\ \mathscr{Q}\in\mathcal{P}([2k]),\,\sigma\in\mathrm{Sym}(\mathscr{Q}),\,\mathscr{Q}\otimes\sigma=\mathscr{F}\big\}$$

and

$$\mathcal{B}_{\mathscr{F}}:=\Big\{\big((\mathscr{L}_1,\tau_1),(\mathscr{L}_2,\tau_2),\dots,(\mathscr{L}_m,\tau_m)\big):\ \mathscr{L}_j\in\mathcal{P}(F_j),\,\tau_j\in\mathrm{Cyc}(\mathscr{L}_j)\Big\}.$$

取一个 $(\mathscr{Q},\sigma)\in\mathcal{A}_{\mathscr{F}}$。条件 $\mathscr{Q}\otimes\sigma=\mathscr{F}$ 意味着 σ 在每个 F_j 上保持不变；也就是说，对于所有满足 $A\subset F_j$ 的 $A\in\mathscr{Q}$，都有 $\sigma(A)\subset F_j$。因此，我们可以定义

$$\mathscr{L}_j:=\{A\in\mathscr{Q}:\ A\subset F_j\},\quad \tau_j:=\sigma|_{\mathscr{L}_j}.$$

显然，τ_j 是一个单循环，因此它给出 $\mathcal{B}_{\mathscr{F}}$ 中的一个元素。由此我们得到了一个从 $\mathcal{A}_{\mathscr{F}}\to\mathcal{B}_{\mathscr{F}}$ 出发的映射:

$$(\mathscr{Q},\sigma)\mapsto\big((\mathscr{L}_1,\tau_1),(\mathscr{L}_2,\tau_2),\dots,(\mathscr{L}_m,\tau_m)\big).\tag{5.10}$$

这并不难　　验证该映射是双射，且符号满足如下恒等式

$$\prod_{1\le j\le m}\mathrm{sgn}(\tau_j)=\mathrm{sgn}(\sigma).\tag{5.11}$$

6. 主要定理的证明

定理 4.2 表明，$\mathscr{E}_N$ 的标准差的阶为 $\sqrt{N}$。因此，为证明定理 1.1 中的高斯极限，只需证明对每个固定的 $k\ge3$，有 $\kappa_k(\mathscr{E}_N)=o(N^{k/2})$。

命题 5.2 中的累积量展开仅留下连通构型。应用命题 5.3 的单循环恒等式，可将格林函数因子改写为有限差分。G 的零均值归一化抵消了划分中单元素块的主要贡献，而伯格曼核的非对角衰减控制了划分中每个剩余块内的变量。

定理 6.1。对于 $k\ge3$与 $N\ge2k$，我们有

$$\big|\kappa_k(\mathscr{E}_N)\big|\le C_kN\log^kN$$

对于某个与 N 无关的常数 $C_k>0$。

定理 6.1 的证明略长。我们先介绍本节中用到的一些记号。对于满足 $\mathscr{F}\vee\mathscr{R}_k=\{[2k]\}$ 的 $[2k]$ 的每个划分 $\mathscr{F}:=\{F_1,F_2,\dots,F_m\}$，令

$$S_{\mathscr{F}}:=\big\{s\in[2k]:\ \{s\}\in\mathscr{F}\big\}$$

是 $\mathscr{F}$ 中的单元素集，并将其他至少包含两个元素的集合列为 $\mathscr{F}$ 中的 B_1、B_2、.....、B_t。令 $R_j:=\{2j-1,2j\}$，并令 $\mathscr{R}_k$ 为 $[2k]$ 的划分 $\{R_j:\ j\in[k]\}$。

引理 6.2。 不存在这样的 $j \in [k]$，使得 $R_j \subset S_{\mathscr{F}}$ 且 $S_{\mathscr{F}} \neq [2k]$。特别地， $t \geq 1$。

证明。 如果 $R_j \subset S_{\mathscr{F}}$ 对某个 j成立，根据 $\vee$的定义， $R_j \in \mathscr{F} \vee \mathscr{R}_k$。这就产生了矛盾，从而证明了第一个断言。

如果 $S_{\mathscr{F}} = [2k]$，划分 $\mathscr{F}$ 中的每个元素都是单元素块。那么 $\mathscr{F} \vee \mathscr{R}_k = \mathscr{R}_k$。这同样产生矛盾。□

不失一般性，假设 $F_1, F_2, \dots, F_t$ 至少包含两个元素，并令 $F_{t+1}, \dots, F_m$ 为单元素块。对每个 $1 \leq \ell \leq t$，我们列出 $F_\ell = \{u_{\ell,1}, u_{\ell,2}, \dots, u_{\ell,r_\ell}\}$中的元素，并假设 $u_{\ell,1} < u_{\ell,2} < \cdots < u_{\ell,r_\ell}$。令 $u_{\ell,r_\ell+1} := u_{\ell,1}$。

Let

$$J_{\mathscr{F}} := \{j \in [k] : R_j \subset [2k] \setminus S_{\mathscr{F}}\}.$$

根据引理 6.2， $|J_{\mathscr{F}}| + |S_{\mathscr{F}}| = k$。定义函数

$$\varphi : [2k] \setminus S_{\mathscr{F}} \to [t] \quad \text{by} \quad \varphi(s) := \ell \quad \text{if} \quad s \in F_\ell.$$

以及映射组的集合

$$\mathcal{V}_{\mathscr{F}} := \big\{(\eta_1, \dots, \eta_t) : \eta_\ell \textit{ is a map } F_\ell \to F_\ell \setminus \{u_{\ell,1}\}\big\}.$$

为简便起见，对于某些记号，我们省略对 $\mathscr{F}$ 的依赖，因为最终我们只关注一个 $\mathscr{F}$，这已足以完成证明。

我们有如下关于 $\mathscr{E}_N$ 的累积量公式。

命题 6.3. 对于每个 $k \geq 2$、 $N \geq 2k$，我们有

$$\kappa_k(\mathscr{E}_N) = \sum_{\substack{\mathscr{F} \in \mathcal{P}([2k]) \\ \mathscr{F} \vee \mathscr{R}_k = [2k]}} \sum_{(\eta_1,\dots,\eta_t) \in \mathcal{V}_{\mathscr{F}}} \Big(\prod_{\ell=1}^{t} c_{\eta_\ell}\Big) \int_{X^{2k}} \prod_{\ell=1}^{t} \prod_{j=1}^{r_\ell} K_N(x_{u_{\ell,j}}, x_{u_{\ell,j+1}}) \prod_{q \in S_{\mathscr{F}}} K_N(x_q, x_q)$$
$$\prod_{j=1}^{k} \mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t} \prod_{\ell=1}^{t} \prod_{j=1}^{r_\ell} \omega(x_{u_{\ell,j}}) \prod_{q \in S_{\mathscr{F}}} \omega(x_q),$$

其中

$$\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t} := \widetilde{G}\big(x_{\eta_{\varphi(2j-1)}(2j-1)}, x_{\eta_{\varphi(2j)}(2j)}\big) - \widetilde{G}\big(x_{\eta_{\varphi(2j-1)}(2j-1)}, x_{u_{\varphi(2j),1}}\big)$$
$$- \widetilde{G}\big(x_{u_{\varphi(2j-1),1}}, x_{\eta_{\varphi(2j)}(2j)}\big) + \widetilde{G}\big(x_{u_{\varphi(2j-1),1}}, x_{u_{\varphi(2j),1}}\big) \quad \textit{if } j \in J_{\mathscr{F}}, \tag{6.1}$$

$$\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t} := \widetilde{G}\big(x_{2j-1}, x_{\eta_{\varphi(2j)}(2j)}\big) - \widetilde{G}\big(x_{2j-1}, x_{u_{\varphi(2j),1}}\big) \quad \textit{if } 2j-1 \in S_{\mathscr{F}} \tag{6.2}$$

$$\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t} := \widetilde{G}\big(x_{\eta_{\varphi(2j-1)}(2j-1)}, x_{2j}\big) - \widetilde{G}\big(x_{u_{\varphi(2j-1),1}}, x_{2j}\big) \quad \textit{if } 2j \in S_{\mathscr{F}}.$$

证明. 根据命题 5.2，我们需要对这些积分求和

$$\mathcal{J}(\mathcal{Q}, \sigma) := \operatorname{sgn}(\sigma) \int_{X^{\mathcal{Q}}} \prod_{j=1}^{k} \widetilde{G}\big(x_{\mathcal{Q}(2j-1)}, x_{\mathcal{Q}(2j)}\big) \prod_{A \in \mathcal{Q}} K_N(x_A, x_{\sigma(A)}) \prod_{A \in \mathcal{Q}} \omega(x_A)$$

对所有满足 $(\mathcal{Q} \otimes \sigma) \vee \mathscr{R}_k = \{[2k]\}$ 的 $(\mathcal{Q}, \sigma)$ 求和，其中 $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}([2k])$ 且 $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathcal{Q})$。我们可以重新排列求和顺序，得到

$$\kappa_k(\mathscr{E}_N) = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{P}([2k])} \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathcal{Q}) \\ (\mathcal{Q} \otimes \sigma) \vee \mathscr{R}_k = \{[2k]\}}} \mathcal{J}(\mathcal{Q}, \sigma) = \sum_{\substack{\mathscr{F} \in \mathcal{P}([2k]) \\ \mathscr{F} \vee \mathscr{R}_k = \{[2k]\}}} \sum_{\substack{\mathcal{Q} \in \mathcal{P}([2k]), \sigma \in \mathrm{Sym}(\mathcal{Q}) \\ \mathcal{Q} \otimes \sigma = \mathscr{F}}} \mathcal{J}(\mathcal{Q}, \sigma).$$

回忆一下式 (5.10) 中给出的双射映射 $\mathcal{A}_{\mathscr{F}} \to \mathcal{B}_{\mathscr{F}}$。对于每个 $\mathscr{F}$，我们利用式 (5.11) 将其改写为

$$\mathcal{J}(\mathscr{Q},\sigma) = \prod_{j=1}^{m} \operatorname{sgn}(\tau_j) \int_{X^{\mathscr{Q}}} \prod_{j=1}^{k} \widetilde{G}\big(x_{\mathscr{Q}(2j-1)}, x_{\mathscr{Q}(2j)}\big) \prod_{j=1}^{m} \prod_{A\in\mathscr{L}_j} K_N(x_A, x_{\tau_j(A)}) \prod_{j=1}^{m} \prod_{A\in\mathscr{L}_j} \omega(x_A).$$

由于 (5.10) 是双射，对所有 $(\mathscr{Q},\sigma)$ 求和 $\mathcal{J}(\mathscr{Q},\sigma)$，可写成对 $\mathcal{B}$ 求和，如下

$$\sum_{\mathscr{L}_j\in\mathcal{P}(F_j),\,\tau_j\in\mathrm{Cyc}(\mathscr{L}_j)} \prod_{j=1}^{m} (-1)^{|\mathscr{L}_j|-1} \int_{X^{\mathscr{L}}} \prod_{j=1}^{k} \widetilde{G}\big(x_{\mathscr{L}(2j-1)}, x_{\mathscr{L}(2j)}\big) \prod_{j=1}^{m} \prod_{A\in\mathscr{L}_j} K_N(x_A, x_{\tau_j(A)}) \prod_{j=1}^{m} \prod_{A\in\mathscr{L}_j} \omega(x_A), \tag{6.3}$$

其中 $\mathscr{L} := \cup \mathscr{L}_j$。我们将应用命题 5.3。在此之前，我们先取出所有单元素集 $F_{t+1}\ldots, F_m$。此时，$\tau_j = \mathrm{id}$ 和 $K_N(x_A, x_{\tau_j(A)}) = K_N(x_A, x_A)$，因此得到因子 $\prod_{q\in S_{\mathscr{F}}} K_N(x_q, x_q)$。

根据富比尼定理，我们可以按 $1 \le \ell \le t$ 的顺序对 $x_s, s \in F_\ell$ 进行积分。更具体地说，在第 ℓ 步，我们对变量 $x_{u_{\ell,1}}, x_{u_{\ell,2}}, \ldots, x_{u_{\ell,r_\ell}}$ 进行积分。因此，将命题 5.3 归纳应用 t 次，并以 $r_\ell, \mathscr{L}_\ell, \tau_\ell$ 代替 $r, \mathscr{L}, \tau$，我们得到 (6.3) 为

$$\sum_{(\eta_1,\ldots,\eta_t)\in\mathcal{V}_{\mathscr{F}}} \Big(\prod_{\ell=1}^{t} c_{\eta_\ell}\Big) \int_{X^{2k}} \prod_{\ell=1}^{t} \prod_{j=1}^{r_\ell} K_N(x_{u_{\ell,j}}, x_{u_{\ell,j+1}}) \prod_{q\in S_{\mathscr{F}}} K_N(x_q, x_q)$$
$$\Phi_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t} \prod_{\ell=1}^{t} \prod_{j=1}^{r_\ell} \omega(x_{u_{\ell,j}}) \prod_{q\in S_{\mathscr{F}}} \omega(x_q)$$

对于 X^{2k} 上的某个函数 $\Phi_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t}$。这里，我们令 $x_{u_{\ell,r_\ell+1}} := x_{u_{\ell,1}}$。

剩下的工作是确定函数 $\Phi_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t}$。固定一个向量 $(\eta_1,\ldots,\eta_t) \in \mathcal{V}_{\mathscr{F}}$。我们对 ℓ 归纳应用命题 5.3，共 t 次。在第 ℓ 步中，我们应用命题 5.3，且不影响 $x_{u_{\ell',j}}$ 对于 $\ell' \ne \ell$。此外，映射 $(B_1, B_2, \ldots, B_t) \mapsto \cup_{1\le\ell\le t} B_\ell$ 给出了从 F_ℓ 的子集的笛卡尔积到 $[2k]\setminus S_{\mathscr{F}}$ 的子集的一个双射。因此，

$$\Phi_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t} = \sum_{B\subset[2k]\setminus S_{\mathscr{F}}} (-1)^{2k-|S_{\mathscr{F}}|-|B|} \prod_{j=1}^{k} \widetilde{G}\big(y^B_{2j-1}, y^B_{2j}\big)$$

其中，对于每个 $1 \le s \le 2k$,

$$y^B_s := x_s \text{ if } s \in S_{\mathscr{F}}, \quad y^B_s = x_{\eta_{\varphi(s)}(s)} \text{ if } s \in B, \quad y^B_s = x_{u_{\varphi(s),1}} \text{ if } s \notin S_{\mathscr{F}} \cup B.$$

对于 $s \in R_j$，条件 $s \in B$ 等价于 $s \in A_j := B \cap R_j$。由此可得$y^B_s = y^{A_j}_s$。利用 $2k - |S_{\mathscr{F}}| - |B| = \sum_{1\le j\le k} |R_j \setminus S_{\mathscr{F}}| - |A_j|$，我们有

$$\Phi_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t} = \sum_{\substack{B\subset[2k]\setminus S_{\mathscr{F}}, A_j\subset R_j\setminus S_{\mathscr{F}} \\ \cup A_j = B}} (-1)^{2k-|S_{\mathscr{F}}|-|B|} \prod_{j=1}^{k} \widetilde{G}\big(y^{A_j}_{2j-1}, y^{A_j}_{2j}\big)$$
$$= \prod_{j=1}^{k} \Big(\sum_{A_j\subset R_j\setminus S_{\mathscr{F}}} (-1)^{|R_j\setminus S_{\mathscr{F}}|-|A_j|} \widetilde{G}\big(y^{A_j}_{2j-1}, y^{A_j}_{2j}\big)\Big).$$

我们现在计算最后一个乘积中的因子。根据引理 6.2，要么 $2j-1, 2j$都不在 $S_{\mathscr{F}}$中，要么它们中恰好有一个在 $S_{\mathscr{F}}$中。在第一种情形下， $R_j \setminus S_{\mathscr{F}} = R_j$ 以及我们可以取的 A_j为 $R_j, \{2j\}, \{2j-1\}, \varnothing$。于是

$$\sum_{A_j \subset R_j \setminus S_{\mathscr{F}}} (-1)^{|R_j|-|A_j|} \widetilde{G}\big(y_{2j-1}^{A_j}, y_{2j}^{A_j}\big) = \widetilde{G}\big(x_{\eta_{\varphi(2j-1)}(2j-1)}, x_{\eta_{\varphi(2j)}(2j)}\big) - \widetilde{G}\big(x_{\eta_{\varphi(2j-1)}(2j-1)}, x_{u_{\varphi(2j),1}}\big)$$
$$-\widetilde{G}\big(x_{u_{\varphi(2j-1),1}}, x_{\eta_{\varphi(2j)}(2j)}\big) + \widetilde{G}\big(x_{u_{\varphi(2j-1),1}}, x_{u_{\varphi(2j),1}}\big).$$

在第二种情况下，当 $(2j-1) \in S_{\mathscr{F}}$。我们可以选取两个 A_j： $\{2j\}$和 $\varnothing$。于是

$$\sum_{A_j \subset R_j \setminus S_{\mathscr{F}}} (-1)^{1-|A_j|} \widetilde{G}\big(y_{2j-1}^{A_j}, y_{2j}^{A_j}\big) = \widetilde{G}\big(x_{2j-1}, x_{\eta_{\varphi(2j)}(2j)}\big) - \widetilde{G}\big(x_{2j-1}, x_{u_{\varphi(2j),1}}\big).$$

类似地，当 $2j \in S_{\mathscr{F}}$ 时，

$$\sum_{A_j \subset R_j \setminus S_{\mathscr{F}}} (-1)^{1-|A_j|} \widetilde{G}\big(y_{2j-1}^{A_j}, y_{2j}^{A_j}\big) = \widetilde{G}\big(x_{\eta_{\varphi(2j-1)}(2j-1)}, x_{2j}\big) - \widetilde{G}\big(x_{u_{\varphi(2j-1),1}}, x_{2j}\big).$$

我们完成了该命题的证明。 □

在命题 6.3 的公式求和中，对每个固定的 $\mathscr{F}$ 和 $(\eta_1, \dots, \eta_t) \in \mathcal{V}_{\mathscr{F}}$，利用引理 3.2、命题 3.3 和引理 2.4，可得积分的朴素上界为 $O(N^t(\log N)^{|J_{\mathscr{F}}|})$。接下来，我们将从 $J_{\mathscr{F}}$ 中选取 $t-1$ 个指标，以构造一个$O_k(N^{1-t})$ 因子。

引理 6.4。可以对集合 F_1、F_2、…、F_t 重新排序，并找出互不相同的整数 $\mathsf{e}_\ell \in J_{\mathscr{F}}$、$1 \le \ell \le t-1$，使得对所有 $1 \le \ell \le t-1$,

$$\varphi(2\mathsf{e}_\ell - 1) \neq \varphi(2\mathsf{e}_\ell), \quad \min\big(\varphi(2\mathsf{e}_\ell - 1), \varphi(2\mathsf{e}_\ell)\big) = \ell.$$

证明。取 $\mathscr{F}$ 中任意一个至少含有两个元素的集合，记为 F_t。现在我们归纳地定义F_{t-1}，…，F_1。假设已选取 F_t，$F_{t-1}, \dots, F_{\ell+1}$ 和 $\mathsf{e}_{t-1}, \dots, \mathsf{e}_{\ell+1}$，其中 $\ell \ge 1$。我们将从 $\mathscr{F}$ 中选取 F_ℓ。令 $B := \cup_{\ell+1 \le q \le t} F_q$。

我们首先证明存在某个 $j \in [k]$，使得 $2j-1$，$2j \notin S_{\mathscr{F}}$ 且 $|R_j \cap B| = 1$。反之，假设不存在。则 $|R_j \cap B| = 1$ 将意味着 R_j 中的另一个元素属于 $S_{\mathscr{F}}$。考虑$A := \cup_{R_j \cap B \neq \varnothing} R_j$。于是 $B \subset A \subset B \cup S_{\mathscr{F}} \neq [2k]$ 且 $A \setminus B \subset S_{\mathscr{F}}$。这意味着 A 也是 $\mathscr{F}$ 中元素的并集，这与 $\mathscr{F} \vee \mathscr{R}_k = \{[2k]\}$ 矛盾。

因此，我们将这个 j取为 e_ℓ。$2\mathsf{e}_\ell - 1$、$2\mathsf{e}_\ell$ 中一个属于 B，另一个属于某个未出现在 F_t、F_{t-1}、……、$F_{\ell+1}$中的 $F \in \mathscr{F}$，我们将其记为 F_ℓ。由此得到所需的三个条件。□

我们将所选指标集记为

$$L_{\mathscr{F}} := \{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \dots, \mathsf{e}_{t-1}\}$$

在引理 6.4 中选取。重新排序的目的是：注意，(6.1) 中的 $\mathcal{G}_{\mathscr{F}}^{[j_\ell]}$、$\eta_1$……、$\eta_t$ 依赖于变量 x_u，其中 $u \in F_{\varphi(2j_\ell - 1)} \cup F_{\varphi(2j_\ell)}$。引理 6.4 允许我们在对 $u \in \cup_{q=1}^{\ell-1} F_q$ 对应的 x_u 积分时，将其视为常数。

对于每个 $1 \le \ell \le t, 2 \le j \le r_\ell$，我们定义

$$d_{\ell,j} := \operatorname{dist}(x_{u_{\ell,1}}, x_{u_{\ell,j}}) \quad \text{and} \quad d_\ell := \max_{2 \le j \le r_\ell} d_{\ell,j}.$$

引理 6.5. 存在与 N 无关的常数 C、 $c_k>0$ ，使得对 $1\le \ell\le t$,

$$\prod_{1\le j\le r_\ell}\left|K_N(x_{u_{\ell,j}},x_{u_{\ell,j+1}})\right|\le CN^{r_\ell}e^{-c_k\sqrt{N}d_\ell}\prod_{2\le j\le r_\ell}e^{-c_k\sqrt{N}d_{\ell,j}}.$$

证明。令

$$D_\ell:=\sum_{1\le j\le r_\ell}\operatorname{dist}(x_{u_{\ell,j}},x_{u_{\ell,j+1}}).$$

由三角不等式可得

$$d_\ell\le D_\ell\quad\text{and}\quad\sum_{2\le j\le r_\ell}d_{\ell,j}\le (r_\ell-1)D_\ell,$$

这意味着 $d_\ell+\sum_{2\le j\le r_\ell}d_{\ell,\,j}\le r_\ell D_\ell\le 2kD_\ell^{2}$。结合引理 3.5，可得

$$\prod_{1\le j\le r_\ell}\left|K_N(x_{u_{\ell,j}},x_{u_{\ell,j+1}})\right|\le CN^{r_\ell}e^{-c\sqrt{N}D_\ell}\le CN^{r_\ell}e^{-c\sqrt{N}(2k)^{-1}(d_\ell+\sum_{2\le j\le r_\ell}d_{\ell,j})},$$

从而证明了所需的不等式。 □

对于 $j\in J_{\mathscr{F}}$，设

$$v_{2j-1}:=\eta_{\varphi(2j-1)}(2j-1),\quad v_{2j}:=\eta_{\varphi(2j)}(2j).$$

取一个较大的 $a_k>0$，且与 N 无关。令 $\Omega_{k,\,N}$为 $X^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}$的子集，其中对所有$j\in J_{\mathscr{F}}$,

(6.4) $$\operatorname{dist}\left(x_{v_{2j-1}},x_{v_{2j}}\right),\operatorname{dist}\left(x_{v_{2j-1}},x_{u_{\varphi(2j),1}}\right),\operatorname{dist}\left(x_{u_{\varphi(2j-1),1}},x_{v_{2j}}\right),\operatorname{dist}\left(x_{u_{\varphi(2j-1),1}},x_{u_{\varphi(2j),1}}\right)$$

只要它们不恒等于零（当两个变量重合时便会出现这种情况），它们都大于 N^{-a_k}。根据 $\mathcal{G}_{\mathscr{F}}^{[j]}$ 的定义，$\eta_1,\ldots,\eta_t$ 对于 (6.1) 中的 $j\in J_{\mathscr{F}}$ 以及 (3.2)，我们立即得到（回想 $G(x,\,x)=0$）

(6.5) $$\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t}\right|\lesssim -\log N^{-a_k}=a_k\log N\quad\text{on}\quad\Omega_{k,N}.$$

对于 $\Omega_{k,\,N}$之外的 $\prod\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F}},\eta_1,\ldots,\eta_t\right|$的积分，我们有如下显然的估计。

引理 6.6。我们有

$$\int_{X^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}\setminus\Omega_{k,N}}\prod_{\ell=1}^{t}\prod_{j=1}^{r_\ell}\left|K_N(x_{u_{\ell,j}},x_{u_{\ell,j+1}})\right|\prod_{j\in J_{\mathscr{F}}}\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t}\right|\prod_{\ell=1}^{t}\prod_{j=1}^{r_\ell}\omega(x_{u_{\ell,j}})\lesssim_k N^{-2}.$$

证明。 取一个 $j\in J_{\mathscr{F}}$。我们有 $v_{2j-1}\ne u_{\varphi(2j),\,1}$。由于 $|K_N(x,\,y)|\lesssim N$且 $\prod|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F}},\eta_1,\ldots,\eta_t|^2$可积，根据柯西–施瓦茨不等式，左边为

$$\begin{aligned}
&\lesssim_k N^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}\omega^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}\left(X^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}\setminus\Omega_{k,N}\right)^{1/2}\\
&\le N^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}\omega^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}\Big(\{\operatorname{dist}(x_{v_{2j-1}},x_{u_{\varphi(2j),1}})\le N^{-a_k}\}\times X^{2k-|S_{\mathscr{F}}|-1}\Big)^{1/2}\\
&=N^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}\omega\Big(\{\operatorname{dist}(x_{v_{2j-1}},x_{v_{2j}})\le N^{-a_k}\}\Big)^{1/2}\lesssim N^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}N^{-a_k}.
\end{aligned}$$

取 $a_k\ge 2k+2$后，我们得到所需的不等式。 □

要估计 $\Omega_{k,\,N}$ 内的积分并不简单。令

$$\mathsf{D}_j:=\operatorname{dist}(x_{u_{\varphi(2j-1),1}},x_{u_{\varphi(2j),1}}).$$

我们对 $\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F}},\eta_1,\ldots,\eta_t$ 有如下更精细的上界。

引理 6.7. 存在一个与 k、N 无关的常数 $C>0$，使得

$$\big|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t}\big| \le C\big(d^2_{\varphi(2j-1)}+d^2_{\varphi(2j)}\big)\mathsf{D}_j^{-2} \quad \textit{on} \quad \Omega_{k,N}$$

当 $\mathsf{D}_j > 9(d_{\varphi(2j-1)}+d_{\varphi(2j)})$。

证明。关于 D_j 的假设给出 $\varphi(2j-1)\neq\varphi(2j)$，因此 (6.4) 中的所有量均非零。根据定义，

$$\operatorname{dist}\big(x_{u_{\varphi(2j-1),1}}, x_{v_{2j-1}}\big) \le d_{\varphi(2j-1)} \quad \text{and} \quad \operatorname{dist}\big(x_{u_{\varphi(2j),1}}, x_{v_{2j}}\big) \le d_{\varphi(2j)}.$$

由 $\mathsf{D}_j > 9(d_{\varphi(2j-1)}+d_{\varphi(2j)})$ 可知，(6.4) 中的所有量都是 $\ge \mathsf{D}_j/2$。因此，$|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t}| \lesssim |\log \mathsf{D}_j|$，只需假设 D_j 足够小。在这种情况下，定义 $\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t}$ 的所有变量都位于以 $x_{u_{\varphi(2j-1),1}}$ 为中心的局部正规坐标中。利用 (3.2)，并注意到 ϱ 在该坐标中是光滑的，只需证明

$$\big|\log|\xi-\zeta| - \log|z-\zeta| - \log|\xi| + \log|z|\big| \lesssim \big(d^2_{\varphi(2j-1)}+d^2_{\varphi(2j)}\big)\mathsf{D}_j^{-2} \tag{6.6}$$

其中，z,ξ,ζ 分别是 $x_{u_{\varphi(2j),1}}, x_{v_{2j}}, x_{v_{2j-1}}$ 的坐标。由于正规坐标中的距离与 X 中的距离可比，我们有

$$|\zeta| \le 1.1 d_{\varphi(2j-1)}, \quad |\xi-z| \le 1.1 d_{\varphi(2j)}, \quad |z| \ge 0.9\mathsf{D}_j.$$

于是不难看出，对于 $w\in[\xi,z]$，

$$|w| \ge 0.77\mathsf{D}_j \quad \text{and} \quad |w-\zeta| \ge 0.64\mathsf{D}_j,$$

考虑函数 $f(w) := \log|w-\zeta| - \log|w|$。由中值定理 m,

$$|f(\xi)-f(z)| \le |\xi-z| \sup_{w\in[\xi,z]} |\nabla f(w)| = |\xi-z| \sup_{w\in[\xi,z]} \Big|\frac{w-\zeta}{|w-\zeta|^2} - \frac{w}{|w|^2}\Big| \lesssim |\xi-z|\frac{|\zeta|}{\mathsf{D}_j^2}.$$

这就得到 (6.6)，引理得证。 □

引理 6.8. 对于与 N 无关的 $j\in L_{\mathscr{F}}$ 和 $c_k>0$，在 $\Omega_{k,N}$ 上，我们有

$$\big|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t}\big| e^{-c_k\sqrt{N}(d_{\varphi(2j-1)}+d_{\varphi(2j)})} \lesssim_k \big(\log N e^{-c_k\sqrt{N}\mathsf{D}_j/9} + N^{-1}\mathsf{D}_j^{-2}\big).$$

证明. 对于 $j\in L_{\mathscr{F}}$，引理 6.4 表明 $\varphi(2j-1)\neq\varphi(2j)$，因此 D_j 不恒为零。当 $\mathsf{D}_j \le 9(d_{\varphi(2j-1)}+d_{\varphi(2j)})$ 时，我们利用 (6.5) 得到左边为

$$\lesssim_k \log N e^{-c_k\sqrt{N}\mathsf{D}_j/9}.$$

当 $\mathsf{D}_j > 9(d_{\varphi(2j-1)}+d_{\varphi(2j)})$ 时，引理 6.7 给出左边为

$$\lesssim \big(d^2_{\varphi(2j-1)}+d^2_{\varphi(2j)}\big)\mathsf{D}_j^{-2} e^{-c_k\sqrt{N}(d_{\varphi(2j-1)}+d_{\varphi(2j)})} \lesssim_k N^{-1}\mathsf{D}_j^{-2}.$$

引理得证。 □

回顾引理 6.4，D_j，$j\in L_{\mathscr{F}}$ 依赖于 $x_{u_{\ell,1}}$，$1\le\ell\le t$。对于 $1\le s\le t-1$，定义

$$\Gamma_s := \big\{(x_{u_{s,1}}, x_{u_{s+1,1}}, \dots, x_{u_{t,1}}) \in X^{t-s+1} : \mathsf{D}_j > N^{-a_k} \text{ for } j = \mathsf{e}_s, \mathsf{e}_{s+1}, \dots, \mathsf{e}_{t-1}\big\}.$$

引理 6.9。 对于与 N 无关的 $c_k'>0$，我们有

$$\int_{\Gamma_1} \prod_{j\in L_{\mathscr{F}}} \big(\log N e^{-c_k'\sqrt{N}\mathsf{D}_j} + N^{-1}\mathsf{D}_j^{-2}\big) \prod_{1\le\ell\le t} \omega(x_{u_{\ell,1}}) \lesssim_k N^{-t+1}\log^{t-1} N.$$

证明。引理 6.4 表明，对于每个 $1 \le s \le t-1$，存在某个 $\ell' > s$，使得 $\mathsf{D}_{\mathsf{e}_s} = $ 距离$(x_{u_{s,1}}, x_{u_{\ell',1}})$，且 $\mathsf{D}_{\mathsf{e}_\ell}$ 与 $x_{u_{s,1}}$ 无关，对所有 $\ell > s$ 都成立。因此，根据富比尼定理，并利用

$$\sup_{x\in X}\int e^{-c_k'\sqrt{N}\,\mathrm{dist}(x,y)}\,\omega(y) \lesssim_k N^{-1}, \quad \sup_{x\in X}\int_{\mathrm{dist}(x,y)>N^{-a_k}} \mathrm{dist}(x,y)^{-2}\,\omega(y) \lesssim_k \log N, \tag{6.7}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_s}\prod_{\ell=s}^{t-1}\left(\log N e^{-c_k'\sqrt{N}\mathsf{D}_{\mathsf{e}_\ell}} + N^{-1}\mathsf{D}_{\mathsf{e}_\ell}^{-2}\right)\prod_{\ell=s}^{t}\omega(x_{u_{\ell,1}})\\
&= \int_{\Gamma_{s+1}}\prod_{\ell=s+1}^{t-1}\left(\log N e^{-c_k'\sqrt{N}\mathsf{D}_{\mathsf{e}_\ell}} + N^{-1}\mathsf{D}_{\mathsf{e}_\ell}^{-2}\right)\\
&\qquad\int_{\mathsf{D}_{\mathsf{e}_s}>N^{-a_k}}\left(\log N e^{-c_k'\sqrt{N}\mathsf{D}_{\mathsf{e}_s}} + N^{-1}\mathsf{D}_{\mathsf{e}_s}^{-2}\right)\omega(x_{u_{s,1}})\prod_{\ell=s+1}^{t}\omega(x_{u_{\ell,1}})\\
&\lesssim_k N^{-1}\log N\int_{\Gamma_{s+1}}\prod_{\ell=s+1}^{t-1}\left(\log N e^{-c_k'\sqrt{N}\mathsf{D}_{\mathsf{e}_\ell}} + N^{-1}\mathsf{D}_{\mathsf{e}_\ell}^{-2}\right)\prod_{\ell=s+1}^{t}\omega(x_{u_{\ell,1}}).
\end{aligned}$$

根据归纳法，引理中的积分为 $O_k(N^{-t+1}\log^{t-1} N)$。 □

我们现在可以估计 $\Omega_{k,N}$ 上 $\prod\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_t}\right|$ 的积分。

引理 6.10. 存在一个常数 $C_k > 0$，与 N 无关，使得

$$\int_{\Omega_{k,N}}\prod_{\ell=1}^{t}\prod_{j=1}^{r_\ell}\left|K_N(x_{u_{\ell,j}}, x_{u_{\ell,j+1}})\right|\prod_{j\in J_{\mathscr{F}}}\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t}\right|\prod_{\ell=1}^{t}\prod_{j=1}^{r_\ell}\omega(x_{u_{\ell,j}}) \le C_k N(\log N)^{|J_{\mathscr{F}}|}.$$

证明。将引理 6.5 应用于 K_N 的乘积，并对$j \in J_{\mathscr{F}} \setminus L_{\mathscr{F}}$使用 (6.5) 处理 $\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_t}$，被积函数为

$$\begin{aligned}
&\lesssim_k \prod_{1\le\ell\le t}\left(CN^{r_\ell}e^{-c_k\sqrt{N}d_\ell}\prod_{2\le j\le r_\ell}e^{-c_k\sqrt{N}d_{\ell,j}}\right)\prod_{j\in J_{\mathscr{F}}\setminus L_{\mathscr{F}}}(\log N)\prod_{j\in L_{\mathscr{F}}}\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t}\right|\\
&\lesssim_k N^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}\prod_{1\le\ell\le t}e^{-c_k\sqrt{N}d_\ell}\prod_{\substack{1\le\ell\le t\\ 2\le j\le r_\ell}}e^{-c_k\sqrt{N}d_{\ell,j}}(\log N)^{|J_{\mathscr{F}}|-|L_{\mathscr{F}}|}\prod_{j\in L_{\mathscr{F}}}\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t}\right|.
\end{aligned}$$

由于 $|L_{\mathscr{F}}| = t-1$，且对 $j \in L_{\mathscr{F}}$ 有 $\varphi(2j-1) \ne \varphi(2j)$，我们得到

$$\sum_{j\in L_{\mathscr{F}}}(d_{\varphi(2j-1)} + d_{\varphi(2j)}) \le (t-1)\sum_{1\le\ell\le t} d_\ell \le k\sum_{1\le\ell\le t} d_\ell.$$

因此由引理 6.8,

$$\begin{aligned}
&\prod_{1\le\ell\le t}e^{-c_k\sqrt{N}d_\ell}\prod_{j\in L_{\mathscr{F}}}\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t}\right| \le e^{-c_k\sqrt{N}k^{-1}\sum_{j\in L_{\mathscr{F}}}(d_{\varphi(2j-1)}+d_{\varphi(2j)})}\prod_{j\in L_{\mathscr{F}}}\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t}\right|\\
&= \prod_{j\in L_{\mathscr{F}}}\left(\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\ldots,\eta_t}\right|e^{-c_k\sqrt{N}k^{-1}(d_{\varphi(2j-1)}+d_{\varphi(2j)})}\right) \lesssim_k \prod_{j\in L_{\mathscr{F}}}\left(\log N e^{-c_k'\sqrt{N}\mathsf{D}_j} + N^{-1}\mathsf{D}_j^{-2}\right).
\end{aligned}$$

我们推得，引理中的积分为

$$\lesssim_k N^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}(\log N)^{|J_{\mathscr{F}}|-t+1}\int_{\Omega_{k,N}}\prod_{\substack{1\le\ell\le t\\ 2\le j\le r_\ell}}e^{-c_k\sqrt{N}d_{\ell,j}}$$

(6.8) $$\prod_{j\in L_{\mathscr{F}}}\left(\log N e^{-c_k'\sqrt{N}\mathsf{D}_j}+N^{-1}\mathsf{D}_j^{-2}\right)\prod_{\substack{1\le\ell\le t\\ 1\le j\le r_\ell}}\omega(x_{u_{\ell,j}}).$$

由于 D_j 只依赖于 $x_{u_{\varphi(2j-1),\,1}}$，$x_{u_{\varphi(2j),\,1}}$，而且 $x_{u_{\ell,\,j}}$，$2\le j\le r_\ell$ 在 $d_{\ell,\,j}$ 中只出现一次。利用富比尼定理，我们可以分别对 $x_{u_{\ell,\,j}}$ 和 $2\le j\le r_\ell$ 积分。利用 (6.7)，我们看到，$e^{-c_k\sqrt{N}d_{\ell,\,j}}$ 的乘积将对积分贡献 $O_k(N^{-\sum_{1\le\ell\le t}(r_\ell-1)})=O_k(N^{-2k+|S_{\mathscr{F}}|+t})$。另一方面，$\Omega_{k,\,N}$ 在变量 $x_{u_{\ell,\,1}}$，$1\le\ell\le t$ 上的投影包含于 Γ_1 中。因此，(6.8) 为

$$\lesssim_k N^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}(\log N)^{|J_{\mathscr{F}}|-t+1}N^{-2k+|S_{\mathscr{F}}|+t}\int_{\Gamma_1}\prod_{j\in L_{\mathscr{F}}}\left(\log N e^{-c_k'\sqrt{N}\mathsf{D}_j}+N^{-1}\mathsf{D}_j^{-2}\right)\prod_{1\le\ell\le t}\omega(x_{u_{\ell,1}}).$$

结合引理 6.9，我们得出 (6.8) 为

$$\lesssim_k N^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}(\log N)^{|J_{\mathscr{F}}|-t+1}N^{-2k+|S_{\mathscr{F}}|+t}N^{-t+1}\log^{t-1}N=N(\log N)^{|J_{\mathscr{F}}|}.$$

引理的证明完成。 □

现在我们可以完成本节主要结果的证明。

定理 *6.1* 的证明结束。 根据命题 6.3，我们只需估计

(6.9) $$\left|\int_{X^{2k}}\prod_{\ell=1}^{t}\prod_{j=1}^{r_\ell}K_N(x_{u_{\ell,j}},x_{u_{\ell,j+1}})\prod_{q\in S_{\mathscr{F}}}K_N(x_q,x_q)\prod_{j=1}^{k}\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t}\prod_{\ell=1}^{t}\prod_{j=1}^{r_\ell}\omega(x_{u_{\ell,j}})\prod_{q\in S_{\mathscr{F}}}\omega(x_q)\right|$$

对于固定的 $\mathscr{F}$ 以及 $(\eta_1,\dots,\eta_t)$，因为选择的总数仅依赖于 k。

首先，对于 $q\in S_{\mathscr{F}}$，我们对测度 $\prod_{q\in S_{\mathscr{F}}}K_N(x_q,x_q)\,\omega(x_q)$ 上的 x_q 进行积分。若 $2j-1\in S_{\mathscr{F}}$，由引理 3.2，利用公式 (6.2) 以及 $\int_X G(x,\cdot)\,\omega=0$，可得

$$\int_X\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t}K_N(x_{2j-1},x_{2j-1})\,\omega(x_{2j-1})=\int_X\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t}O(1)\,\omega(x_{2j-1})=O(1).$$

当 $2j\in S_{\mathscr{F}}$ 时的情形类似。因此，(6.9) 为

(6.10) $$\lesssim_k\int_{X^{2k-|S_{\mathscr{F}}|}}\prod_{\ell=1}^{t}\prod_{j=1}^{r_\ell}\left|K_N(x_{u_{\ell,j}},x_{u_{\ell,j+1}})\right|\prod_{j\in J_{\mathscr{F}}}\left|\mathcal{G}^{[j]}_{\mathscr{F},\eta_1,\dots,\eta_t}\right|\prod_{\ell=1}^{t}\prod_{j=1}^{r_\ell}\omega(x_{u_{\ell,j}}),$$

由引理 6.10 和引理 6.6，这等于 $\lesssim_k N(\log N)^{|J_{\mathscr{F}}|}$。利用 $|J_{\mathscr{F}}|\le k$ 这一事实，我们完成了定理 6.1 的证明。□

现在我们写出主定理的证明。

定理 *1.1* 的证明。令

$$Y_N:=\frac{\mathscr{E}_N-\mathbf{E}(\mathscr{E}_N)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathscr{E}_N)}}.$$

则对所有 N，$\mathbf{E}(Y_N)=0$，且 $\mathrm{Var}(Y_N)=1$。由定理 4.2 和定理 6.1，当 $k\ge 3$ 和 N 足够大时，我们有

$$\left|\kappa_k(Y_N)\right|=\mathrm{Var}(\mathscr{E}_N)^{-k/2}\left|\kappa_k(\mathscr{E}_N)\right|\lesssim_k N^{-k/2}N\log^k N=N^{1-k/2}\log^k N.$$

右侧在 $N\to\infty$ 时趋于零。这表明 $Y_N\to\mathcal{N}(0,1)$ 依分布收敛。 □

7. 关于复流形上对数能量中心极限定理的评述

在本节中，设 X 是一个维数为 $d \geq 1$ 的紧凯勒流形，并配备一个正全纯线丛 $\mathcal{L}$。在 $\mathcal{L}$ 上固定一个厄米度量 $\mathfrak{h}$，使其曲率形式 $c_1(\mathcal{L}, \mathfrak{h})$ 严格正定，由此诱导出一个凯勒形式 ω，满足 $\int_X \omega^d = 1$。根据黎曼-罗赫-赫希布鲁赫定理（参见 [46, 定理 1.4.6]）

$$N := \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{L}^n) = V_{\mathcal{L}} n^d + O(n^{d-1}) \quad \text{where} \quad V_{\mathcal{L}} := \frac{1}{d!} \int_X c_1(\mathcal{L}, \mathfrak{h})^d.$$

设 $S_n := (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ 是关于 Hermitian 内积的 $H^0(X, \mathcal{L}^n)$ 的标准正交基

$$\langle s_1, s_2 \rangle_n := \int_{x \in X} (s_1(x), s_2(x))\, \omega^d(x) \quad \text{for} \quad s_1, s_2 \in H^0(X, \mathcal{L}^n).$$

$H^0(X, \mathcal{L}^n)$ 的伯格曼核，仍记为 $K_N(x, y)$，具有如下田–卡特林–泽尔迪奇展开式 [16, 65, 70]

$$K_N(x, x) = V_{\mathcal{L}}\big(n^d + \mathfrak{b}_1(x) n^{d-1} + \mathfrak{b}_2(x) n^{d-2} + \cdots + \mathfrak{b}_d(x) + O(n^{-1})\big),$$

其中 $\mathfrak{b}_j$ 是与 n 无关的光滑实值函数。

考虑由下式给出的行列式点过程

$$\rho^N(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{N!} \det\big(K_N(x_j, x_\ell)\big)_{1 \leq j, \ell \leq N} \omega^d(x_1) \omega^d(x_2) \cdots \omega^d(x_N)$$

以及对数能量

$$\mathscr{E}_N^{\log}(\mathbf{x}) := \sum_{1 \leq j, k \leq N, j \neq k} \log \operatorname{dist}(x_j, x_k).$$

$\mathscr{E}_N^{\log}$ 的方差将取决于使函数（设为 $\mathfrak{b}_0 = \mathbf{1}$）非常数所需的最小 j

$$H_j(x) := \int_X \log \operatorname{dist}(x, y) \mathfrak{b}_j(y)\, \omega^d(y)$$

此外，距离函数的几何性质也会影响方差的阶，因为它在对角线之外并不光滑。因此，与黎曼曲面的情形相比，这里需要进行更长时间的计算。

当 $N \to \infty$ 时，中心化对数能量除以其标准差后，也依分布收敛到标准高斯；证明和方差估计将发表于我们即将发表的工作中 [67]。

参考文献

[1] Ander Aguirre、Alexander Soshnikov 和 Joshua Sumpter。CβE 的成对依赖线性统计量。*Random Matrices: Theory andApplications*，10(4):2150035，2021。[2] Luis Alvarez-Gaumé、Jean-Benoît Bost、Gregory Moore、Philip Nelson 和 Cumrun Vafa。高亏格黎曼曲面上的玻色化。*Comm.Math. Phys.*，112(3):503–552，1987。[3] Yacin Ameur、Hå kan Hedenmalm 和 Nikolai Makarov。随机正规矩阵特征值的涨落。*DukeMath. J.*，159(1):31–81，2011。[4] Hugues Auvray、Xiaonan Ma 和 George Marinescu。带 puncture 的黎曼曲面上的伯格曼核。*Math. Ann.*，379(3-4):951–1002，2021。[5] Jinho Baik 和 Dong Wang。带尖峰外源的厄米随机矩阵模型的最大特征值 I：秩一情形。*Int. Math. Res.Not. IMRN*，(22):5164–5240，2011。

[6] Jinho Baik 和 Dong Wang。带尖峰外源的厄米随机矩阵模型的最大特征值 II：高秩情形。Int. Math. Res. Not. IMRN，(14):3304–3370，2013。[7] Turgay Bayraktar、Dan Coman、Hendrik Herrmann 和 George Marinescu。随机全纯截面零点综述。Dolomites Res. Notes Approx.，11:1–19，2018。[8]Turgay Bayraktar、Dan Coman 和 George Marinescu。随机全纯截面零点的普适性结果。Trans. Amer. Math. Soc.，373(6):3765–3791，2020。[9] Robert Berman 和 Sébastien Boucksom。全纯截面球的增长与平衡态能量。Invent. Math.，181(2):337–394，2010。[10] Robert Berman、Sébastien Boucksom 和 David Witt Nyström。复流形上的费克特点及其向平衡测度的收敛。Acta Math.，207(1):1–27，2011。[11]Robert J. Berman。射影流形上线丛的伯格曼核与平衡测度。Amer. J. Math.，131(5):1485–1524，2009。[12] Robert J. Berman。托普利茨行列式的精确渐近式及其向黎曼曲面上的高斯自由场收敛。International Mathematics Research Notices，2012(22):5031–5062，2012。[13] Robert J. Berman。复流形上的行列式点过程与费米子：大偏差与玻色化。Comm. Math. Phys.，327(1):1–47，2014。[14] Robert J. Berman。极化复流形上的行列式点过程与费米子：体普适性。载于《代数与解析微局部分析》，Springer Proc. Math. Stat. 第269卷，第341–393页。Springer，Cham，2018。[15] Jeremiah Buckley、Alon Nishry、Ron Peled 和 Mikhail Sodin。具有有限收敛半径的高斯泰勒级数零点的空穴概率。Probab. Theory Related Fields，171(1-2):377–430，2018。[16] David Catlin。伯格曼核与田刚定理。载于《多复变函数分析与几何》（片田，1997），Trends Math.，第1–23页。Birkhäuser Boston，Boston, MA，1999。[17] Dan Coman、Semyon Klevtsov 和 George Marinescu。带 puncture 的黎曼曲面上奇异度量的伯格曼核渐近展开。Indiana Univ. Math. J.，68(2):593–628，2019。[18] Dan Coman、Wen Lu、Xiaonan Ma 和 George Marinescu。凯勒流形上线丛序列的伯格曼核与等分布。Adv. Math.，414:论文编号108854，共34页，2023。[19] Dan Coman、Wen Lu、Xiaonan Ma 和 George Marinescu。凯勒流形上线丛序列的伯格曼核与等分布。Adv. Math.，414:论文编号108854，共34页，2023。[20] Dan Coman、George Marinescu 和 Viêt-Anh Nguyên。沿子簇消失的线丛全纯截面。Indiana Univ. Math. J.，73(2):493–536，2024。[21] Dan Coman、George Marinescu 和 Viêt-Anh Nguyên。沿子簇消失的全纯截面限制空间。Math. Z.，310(1):论文编号9，2025。[22] Ovidiu Costin 和 Joel L. Lebowitz。随机矩阵中的高斯涨落。Physical Review Letters，75(1):69–72，1995。[23]Xianzhe Dai、Kefeng Liu 和 Xiaonan Ma。伯格曼核的渐近展开。J. Differential Geom.，72(1):1–41，2006。[24] Tien-Cuong Dinh、Xiaonan Ma 和 George Marinescu。奇异厄米线丛的全纯截面零点的等分布与收敛速度。J. Funct. Anal.，271(11):3082–3110，2016。[25]Tien-Cuong Dinh、Xiaonan Ma 和 Viêt-Anh Nguyên。与丰线丛相关的费克特点的等分布速度。Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)，50(3):545–578，2017。[26] Tien-Cuong Dinh、George Marinescu 和 Viktoria Schmidt。非紧情形下全纯截面零点的等分布。J. Stat. Phys.，148(1):113–136，2012。[27] Tien-Cuong Dinh 和 Nessim Sibony。亚纯变换值的分布及其应用。Comment. Math. Helv.，81(1):221–258，2006。[28]Alexander Drewitz、Bingxiao Liu 和 George Marinescu。非紧复流形上的高斯全纯截面。J. Inst. Math. Jussieu，24(4):1197–1262，2025。[29]Hanna Döring、Sabine Jansen 和 Kristina Schubert。正态逼近的累积量方法。arXiv:2102.01459，2021。[30] Renjie Feng、Friedrich Götze 和 Dong Yao。球面上的行列式点过程：多元线性统计量。arXiv:2301.09216，2023。

[31] Siarhei Finski. 托普利兹算子的小特征值、Lebesgue包络与Mabuchi几何。arXiv:2502.01554, 2025.[32]Siarhei Finski. 复嵌入、Toeplitz算子与最优全纯扩张的传递性。Comment. Math. Helv., 101(3):487–553, 2026.[33] Siarhei Finski. 关于伯格曼核的局部化及其在Toeplitz理论中的应用。Math. Ann., 394(4):Paper No. 102, 46, 2026.[34] P. J. Forrester. 复随机矩阵的涨落公式。J. Phys. A, 32(13):L159–L163, 1999.[35] Subhroshekhar Ghosh and Alon Nishry. 空穴事件中的高斯复零点：禁区的出现。Comm. Pure Appl. Math., 72(1):3–62, 2019.[36] Jean Ginibre. 复矩阵、四元数矩阵与实矩阵的统计系综。J. Mathematical Phys., 6:440–449, 1965.[37] J. Ben Hough, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres, and Bálint Virág. 行列式过程与独立性。Probability Surveys, 3:206–229, 2006.[38] J. Ben Hough, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres, and Bálint Virág. 高斯解析函数的零点与行列式点过程，第51卷，University Lecture Series。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009.[39]Kurt Johansson. 随机厄米矩阵特征值的涨落。Duke Math. J., 91(1):151–204, 1998.[40] Semyon Klevtsov. 高亏格黎曼曲面上的Laughlin态。Comm. Math. Phys., 367(3):837–871, 2019.[41] Manjunath Krishnapur and D. Yogeshwaran. 平稳随机测度：协方差渐近、方差界与中心极限定理。arXiv:2411.08848, 2024.[42] Serge Lang. Arakelov理论导论。Springer-Verlag，纽约，1988.[43] Thomas Leblé and Sylvia Serfaty. 二维库仑气体的涨落。Geom. Funct. Anal., 28(2):443–508, 2018.[44] Yiting Li and Yuanyuan Xu. 广义Wigner矩阵整体及介观线性统计量的涨落。Bernoulli, 27(2):1057–1076, 2021.[45] Zhiqin Lu and Bernard Shiffman. 紧Kähler流形上非对角Bergman核的渐近展开。J. Geom. Anal., 25(2):761–782, 2015.[46] Xiaonan Ma and George Marinescu. 全纯Morse不等式与伯格曼核，第254卷，Progress in Mathematics。Birkhäuser Verlag，巴塞尔，2007.[47] Xiaonan Ma and George Marinescu. 凯勒流形上的Berezin–Toeplitz量子化。J. Reine Angew. Math., 662:1–56, 2012.[48] Xiaonan Ma and George Marinescu. 伯格曼核渐近展开的指数估计。Math. Ann., 362(3-4):1327–1347, 2015.[49] Odile Macchi. 随机点过程的重合方法。Advances in Appl. Probability, 7:83–122, 1975.[50] George Marinescu and Nikhil Savale. 黎曼曲面上半正线丛的Bochner拉普拉斯算子与伯格曼核展开。Math. Ann., 389(4):4083–4124, 2024.[51] George Marinescu and Duc-Viet Vu. 与支撑于全实子流形上的测度相关联的伯格曼核函数。J. Reine Angew. Math., 810:217–251, 2024.[52] George Marinescu and Duc-Viet Vu. 随机全纯截面零点渐近平衡分布综述。arXiv:2504.15083, 2025.[53]Marcus Michelen and Oren Yakir. 球面上随机多项式零点对数能量的涨落。Probab. Theory Related Fields, 191(1-2):569–626, 2025.[54] Alon Nishry and Aron Wennman. 随机零点的禁区：求积域的出现。Comm. Pure Appl. Math., 77(3):1766–1849, 2024.[55] Giovanni Peccati and Murad S. Taqqu. 随机测度非线性泛函的矩、累积量与图式公式。arXiv:0811.1726, 2008.[56] Brian Rider and Bálint Virág. 圆律中的噪声与高斯自由场。Int. Math. Res. Not. IMRN, (2):Art. ID rnm006, 33, 2007.[57] Bernard Shiffman and Steve Zelditch. 正线丛随机截面与量子混沌截面零点的分布。Comm. Math. Phys., 200(3):661–683, 1999.

[58] Bernard Shiffman and Steve Zelditch. 复流形上随机零点的数目方差。*Geom.Funct. Anal.*, 18(4):1422–1475, 2008.[59] Bernard Shiffman, Steve Zelditch, and Scott Zrebiec. 复流形上随机零点的过度拥挤与空穴概率。*Indiana Univ. Math.J.*, 57(5):1977–1997, 2008.[60] Mikhail Sodin and Boris Tsirelson. 随机复零点。I. 渐近正态性。*Israel J.Math.*, 144:125–149, 2004.[61] A. Soshnikov. 行列式随机点场。*UspekhiMat.Nauk*, 55(5(335)):107–160, 2000.[62] Alexander Soshnikov. 经典紧群中局部线性统计量的中心极限定理及相关组合恒等式。*Ann. Probab.*, 28(3):1353–1370, 2000.[63] Alexander Sosh nikov. 行列式随机点场的高斯极限。*The Annals of Probability*, 30(1):171–187, 2002.[64] Alexander Soshnikov and Chutong Wu. 随机矩阵理论中累积量方法札记。《熵》, 25(5):Paper No. 725, 16, 2023.[65] Gang Tian. 关于代数流形上一类极化凯勒度量。*J. Differential Geom.*, 32(1):99–130, 1990.[66] Duc-Viet Vu. 某些实流形上费克特点的等分布速率。*Amer. J. Math.*, 140(5):1311–1355, 2018.[67] Hao Wu. 复流形上行列式点过程能量的中心极限定理 II。准备中。[68]Hao Wu. 紧黎曼曲面上全纯截面球体的增长率。arXiv:2604.12333, 2026.[69]Ofer Zeitouni and Steve Zelditch. 随机多项式零点经验测度的大偏差。*Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2010(20):3935–3992, 2010.[70] Steve Zelditch. Szeg˝o核与田刚定理。*Internat. Math. Res.Notices*, 1998(6):317–331, 1998.[71] Steve Zelditch. 黎曼曲面上零点经验测度的大偏差。*Int.Math. Res.Not. IMRN*, 2013(3):592–664, 2013.

南京大学数学学院 - 南京 - 中国 210093电子邮箱：haowu@nju.edu.cn