arXiv:2611.31230v1 [quant-ph] 23 Nov 2026

有限数据下量子计量自适应协议的简易设计

Ricard Ravell Rodríguez [1] * 和 Jesús Rubio [2] †

[1]*ICFO-Institut de Ciències Fotòniques*，巴塞罗那科学技术研究所，*08860* 卡斯特尔德费尔斯（巴塞罗那），西班牙[2]物理与天文学系，埃克塞特大学，*Stocker Road*，埃克塞特 *EX4 4QL*，英国（日期：2026年11月24日）

近期传感实验采用贝叶斯精度增益概念，为固定测量调整控制参数。本文提出一种基于 Personick 最小均方损失形式体系的简易设计原则，以扩展这一流程，将测量优化纳入其中，为每种探针确定最优测量，并提供依赖先验的精度增益，以优化探针本身。这为基于费舍尔信息的协议设计提供了贝叶斯对应方法，其代数结构相似，但纳入了完整先验。我们将这一原则应用于使用单模高斯探针的自适应相位估计，结果表明，联合优化优于自适应零差探测，也优于针对初始先验优化的固定探针策略；与零差探测相比，平均后验方差最多降低 32% 。我们的结果展现了在可控制测量基的情况下，简单贝叶斯设计应用于有限数据量子计量学的潜力。

I. 引言

量子计量学传统上侧重于最大化费 Fisher 信息（费舍尔信息） [3]。费舍尔信息量化邻近态的局域可区分性，并决定克拉美–罗（CR）精度界 [1, 2]。然而，局域可区分性并不总能决定在有限次观测下对参数的估计效果。例如，在相位估计中，具有较大费舍尔信息的态可能产生若干不可区分的候选相位，N00N 态即属此类；若缺乏充分的先验信息，其表观灵敏度便难以加以利用 [4–6]。当可用数据不仅有限，而且受限 [7–10]时，这一问题会变得尤为突出。

与此相关的困难出现在一些表面上提供次海森堡精度的协议中 [11]。这些问题促使人们开展非渐近分析，以考察计入有限先验信息的精度极限 [12–16], ，以及费 Fisher 信息优化协议的实际精度和接近其渐近区域所需的重复次数 [17]。事实上，早在20世纪90年代就已考察过渐近近似的有效性 [18]。后来又找到一种互补解释：将平均光子数用作资源度量并不恰当，这可能掩盖真正导致灵敏度的光子，并暗示虚假的次海森堡标度 [19, 20]。对费舍尔信息局限性的重新关注，也促使人们重新审视其中一些问题 [21]。

针对有限数据的计量学已发展出若干方法。一条研究路线寻求超越克拉美–罗界的精度界。这些包括贝叶斯 Ziv-Zakai [15], 、Weiss-Weinstein [22], 和van Trees [23]界，以及基于Bhattacharyya界和巴兰金界 [24–27] 的频率学派方法，以及其他克拉美–罗界的推广 [28]。有限样本精度也已通过在给定误差内估计参数的概率加以刻画，其界源自假设检验，见文献 [29]；该工作对一系列有限数据量子计量学方法提供了有用的综述。

表 I. 局域（对称对数导数）与贝叶斯（单次测量，单次测量）探针及测量设计之间的对应关系。局域框架遵循参考文献 [1–3], ，而贝叶斯框架在章节 II 和 III 中讨论。

	局域（对称对数导数）	贝叶斯（单次测量）
先验信息	θ_0处的局域化	任意 $p(\theta)$
算符方程	$\rho_{\theta_0}L + L\rho_{\theta_0} = 2\partial_\theta\rho_\theta\vert_{\theta_0}$	$\rho_0 S + S\rho_0 = 2\bar{\rho}$
最优测量	L的本征基	S的本征基
评价指标	$\mathcal{I} = \mathrm{Tr}(\rho_{\theta_0}L^2)$	$\tilde{\mathcal{G}} = \mathrm{Tr}(\rho_0 S^2)$
精度界	$\mathrm{Var} \geq 1/(\mu\mathcal{I})$	$\mathcal{L}_{\mathrm{MSL}} \geq \lambda - \mathrm{Tr}(\rho_0 S^2)$
探针设计	$\max_y \mathcal{I}$	$\max_y \tilde{\mathcal{G}}$

另一种研究方向则着重于针对可用数据直接优化估计协议。贝叶斯推断天然适用于这一任务，因为它从一开始便纳入先验信息，直接给出最优估计器，并且即使在单次测量的层面，也赋予概率直观的操作意义 [30]——而这正是数据有限时所需要的。

在此背景下，Personick 确定了单次测量下的最小均方损失（MSL），以及其特征基定义最优测量的算符 [1, 31], ；现代文献有时将其称为对称后验均值（SPM） [32]。文献 [33] 将这一结果应用于联合优化——探针的优化以及频率估计中的测量。它还提出了两个关键见解：使用投影测量并不会导致最优性损失——这是 Personick 原始推导中缺失的一步；对于高斯先验，最小均方损失可用先验平均态的量子费舍尔信息表示。类似地，通过围绕先验均值 [19]对状态进行线性化，也可以建立最小均方损失与费舍尔信息之间的联系。

该框架随后通过重复干涉运行，被应用于有限数量的单次观测，揭示了量子费舍尔信息 [9, 34] 未能刻画的量子探针相对性能差异。它还被推广，以纳入由

* ricard.ra.ro@gmail.com

† jesus@rubiojimenez.com

参数对称性与信息几何 [35], 所启发、且闭式优化方法仍在研究之中的损失函数[36]。连同近期基于半定规划的数值进展 [37], , 这些进展允许针对任意损失函数优化探针、测量与估计量，上述方法覆盖了广泛的有限数据计量问题，并且这些问题可以构造性地求解。

尤其值得关注的是自适应策略 [38–42], , 即利用先前的测量结果指导后续的设计选择。这类策略已在实验中得到应用，例如在光学相位估计 [7, 8, 43] 和单离子显微术中使用库尔贝克-莱布勒散度作为信息度量 [44, 45]。最近，冷原子实验尝试通过最大化贝叶斯精度增益概念来设定控制参数的取值，该概念根据给定的测量方案定义 [46–48]。这些进展促使人们采用贪心自适应策略，将每次实验运行视为优化的基本单位。尽管这类策略未必是全局最优的 [42], , 但在可用数据有限时，它们为实验设计提供了一种实用方法。

鉴于目前的情况，对于能够调整测量基的实验而言，直接优化的灵活性与通用数值方法的计算复杂度之间，或许需要一种折中方案。Personick 框架提供了一条简单的设计原则，由此可解析地确定最优测量，并得到可通过优化探针参数来最大化的贝叶斯精度增益。在方法上，这与局域估计中最大化量子费舍尔信息并在对称对数导数（SLD）的本征基中进行测量 [1, 2]（表I）相似，同时还纳入了任意先验信息。

在此，我们利用这一并行性构建贪心自适应协议，将参考文献 [46–48]中针对固定测量优化控制参数的实验方案加以拓展。具体而言，我们针对单模高斯探针 [49], 的相位估计，开发了一种简单的自适应协议，其中探针及其最优量子测量均在每次观测后重新优化。在每一轮中，后验分布（即融合了此前测量结果所获信息的分布）作为下一次运行的先验分布。通过在所有测量结果条件下使用最优贝叶斯估计量评估其均方损失，来衡量完整实验的性能。我们表明，在所考察的策略中，联合优化能够实现最低的估计不确定性：在进行17次测量时，相较于自适应零差探测，最大相对改进约为 32%；相较于固定探针策略，改进幅度为 50% 。因此，我们的研究具体展示了如何在标准量子计量学场景中实施所提出的贝叶斯设计原理。

II. 部分知情相位估计

在本节中，我们概述一种简单的相位估计协议，作为所讨论的自适应策略的试验平台见第III节。

A. 单次测量协议

设 Θ 为一个未知参数， $\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ 为其一个候选值。我们将 θ 称为Θ [30]的假设。该假设被假定通过幺正变换编码到初始纯探针态 $|\psi_{\boldsymbol{y}}^{\text{in}}\rangle$ 中

$$|\psi_{\boldsymbol{y}}(\theta)\rangle = \mathrm{e}^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}|\psi_{\boldsymbol{y}}^{\text{in}}\rangle. \tag{1}$$

这里， $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 表示玻色子系统的湮灭算符与产生算符，$\boldsymbol{y}$ 是定义初始态族的参数向量。我们将 $\boldsymbol{y}$ 称为控制参数——这些参数随后将用于探针优化。

该态 $|\psi_{\boldsymbol{y}}^{\text{in}}\rangle$ 进一步被假定为高斯的。因此，式（1）中的参数化态完全由一阶矩向量表征 [50–54]

$$\bar{\mathbf{r}} = \sqrt{2}|\alpha| \begin{pmatrix} \cos(\tau-\theta) \\ \sin(\tau-\theta) \end{pmatrix} \tag{2}$$

以及协方差矩阵

$$V = \begin{pmatrix} V_{qq} & V_{qp} \\ V_{qp} & V_{pp} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中各分量为

$$\begin{aligned} 2V_{qq\,(pp)} &= \left[\cosh(2r) \mp \cos(2\theta-\varphi)\sinh(2r)\right], \\ 2V_{qp} &= \sin(2\theta-\varphi)\sinh(2r), \end{aligned} \tag{4}$$

其中，上（下）号分别对应于 V_{qq} (V_{pp})。高斯态的简要回顾见附录 A。

在这一态族中，位移参数为 $\alpha = |\alpha|e^{i\tau}$，其中 $\tau \in [0, 2\pi)$；压缩参数为 $\xi = re^{i\varphi}$，其中 $\varphi \in [0, 2\pi)$。我们还定义 $\boldsymbol{y} := (|\alpha|, \tau, \varphi)$，同时通过以下方式固定 r

$$r = \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{E - |\alpha|^2}\right), \tag{5}$$

其中 E 表示探针能量，假设其已知且固定，遵循文献 [41], 和 $|\alpha| \in [0, \sqrt{E}]$。在数值计算中，我们选择 $E = 2$，这足以产生非平凡结果，同时保持较低的福克空间截断 [9, 41]。

为提取关于 Θ的信息，对 $|\psi_{\boldsymbol{y}}(\theta)\rangle$进行测量。该操作由正算子值测度（POVM）描述，记为 $\{M(x)\}$，其结果为 $\{x\}$。获得特定结果的概率由 $p(x|\theta, \boldsymbol{y}) = \langle\psi_{\boldsymbol{y}}(\theta)|M(x)|\psi_{\boldsymbol{y}}(\theta)\rangle$给出，即玻恩定则。接着，若我们从先验分布 $p(\theta)$ 出发，该分布编码了关于 Θ的先验信息（或缺乏此类信息），并根据单次测量所提供的信息对其进行更新，则关于 Θ 的整体信息由后验分布给出

$$p(\theta|x, \boldsymbol{y}) \propto p(\theta)\,\langle\psi_{\boldsymbol{y}}(\theta)|M(x)|\psi_{\boldsymbol{y}}(\theta)\rangle, \tag{6}$$

根据贝叶斯定理。

˜点估计量 $\theta(x)$将结果 x 映射为对 Θ的估计值，可定义为式（6）中后验分布的一个泛函 [3, 30]。该估计器代表了我们对真实值最有依据的猜测，因此是协议的最终输出，尽管还需要计算依赖于结果的不确定性量化指标，例如误差棒或可信区间 [35, 55, 56]，但本文不考虑这些指标。

B. 最优性准则

一个直接的问题是，如何选择 POVM $M(x)$˜ 和估计器 $\theta(x)$，以及如何调整控制参数 $\boldsymbol{y}$。答案是针对合适的评价指标构建一个优化问题。

由于协议设计先于数据采集，因此这样的评价指标不能取决于测量结果，也不能取决于对未知值 Θ[10] 的特定假设。因此，我们考虑对这两者取平均的不确定性量度，即平均损失

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{y}, M(x), \tilde{\theta}(x)] := \int \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}x\; p(\theta)p(x|\theta,\boldsymbol{y})\ell[\tilde{\theta}(x),\theta], \quad (7)$$

˜其中，损失函数 $\ell(\theta,\theta)$ 量化了当 θ 为真实值时，˜估计器 θ 所产生的代价。

损失函数必须符合问题的对称性 [57]。由于式（1）在 $\theta \to \theta + 2\pi$ 下保持不变，因此一个自然的选择是正弦损失 $\ell(\tilde{\theta},\theta) = 4\sin^2[(\tilde{\theta}-\theta)/2]$（见附录 B），其最小平均损失已有闭式解 [58]。然而，对于本文采用的 $p(\theta) = 2/\pi$ 上的 $[0,\pi/2]$ 均匀先验，正弦损失可以用平方损失近似 $\ell(\tilde{\theta},\theta) = (\tilde{\theta}-\theta)^2$ [9, 49]。于是，式（7）就变成熟悉的均方损失（MSL）。

接下来，为了便于优化均方损失（MSL），我们将在下一节讨论，将其改写为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{MSL}} = \lambda + \mathrm{Tr}(\rho_0 M_2 - 2\bar{\rho}M_1), \quad (8)$$

其中 $\lambda = \int \mathrm{d}\theta p(\theta)\theta^2$。这里，我们定义测量的$k$阶矩

$$M_k := \int \mathrm{d}x\, M(x)\tilde{\theta}(x)^k \quad (9)$$

并且在我们基于纯态的特定情形下，态的零阶矩和一阶矩

$$\rho_0 := \int \mathrm{d}\theta\; p(\theta)\,|\psi_{\boldsymbol{y}}(\theta)\rangle\langle\psi_{\boldsymbol{y}}(\theta)|, \quad (10a)$$

$$\bar{\rho} := \int \mathrm{d}\theta\; p(\theta)\,|\psi_{\boldsymbol{y}}(\theta)\rangle\langle\psi_{\boldsymbol{y}}(\theta)|\,\theta, \quad (10b)$$

分别。因此，我们将最优估计˜策略定义为使 $(M,\theta,\boldsymbol{y})$ 最小化 $\mathcal{L}_{\mathrm{MSL}}$的三元组，即在第*II A*节定义的高斯态族中，联合优化探针和测量。请注意，与局域估计不同，根据式（10a），纯态在贝叶斯情形下通常会变为混态。

用平方损失近似周期损失，会使原本属于全局估计的问题带有局域化特征。尽管如此，优化仍然是贝叶斯的，因为损失仍需对相关参数区域内所有可能的假设取平均。我们将这种方法称为部分信息相位估计 [10]。

C. 最优单次测量策略

Personick [31]通过变分计算（后续作者对其进行了改进 [33, 59],）证明，最小均方损失为

$$\mathcal{L}_{\min} = \lambda - \mathrm{Tr}(\rho_0 S^2) \quad (11)$$

对于单次测量，其中 S 是通过求解西尔维斯特方程得到的SPM算符 [32]

$$S\rho_0 + \rho_0 S = 2\bar{\rho}. \quad (12)$$

该结果也可以按照文献 [60]的方法，通过Braunstein–Caves不等式的贝叶斯类比 [2], 推导得到。

使均方损失最小的最优策略由SPM算符确定，如下所示。给定其本征分解

$$S = \int \mathrm{d}s\mathcal{P}(s)s, \quad (13)$$

其中 $\mathcal{P}(s)\mathcal{P}(s') = \delta(s-s')\mathcal{P}(s')$，最优POVM通过投影到其本征基上获得，即

$$M_{\mathrm{opt}}(s) = \mathcal{P}(s). \quad (14)$$

此外，最优估计器由相应的˜本征值 $\theta_{\mathrm{opt}}(s) = s$给出，可以证明其等价于后验均值估计量 [59],

$$\tilde{\theta}_{\mathrm{opt}}(s) = \int \mathrm{d}\theta p(\theta|s,\boldsymbol{y})\theta, \quad (15)$$

后者是在平方损失准则 [30]下的经典贝叶斯估计器。这种等价性正是SPM算符名称的由来。

公式（11）也可以写成 $\mathcal{L}_{\min} = \sigma_0^2 - \mathcal{G}$，其中 $\sigma_0^2 = \lambda - m_0^2$ 是先验方差，$m_0 = \int \mathrm{d}\theta\, p(\theta)\theta$ 是先验均值，且

$$\mathcal{G} := \mathrm{Tr}(\rho_0 S^2) - m_0^2 \quad (16)$$

是精度增益，用于量化最优测量所带来的不确定性降低。

由于 m_0 与控制参数无关，对探针参数最小化 $\mathcal{L}_{\min}$ 等价于最大化伪增益 [32]，即

$$\tilde{\mathcal{G}} := \mathrm{Tr}(\rho_0 S^2), \quad \boldsymbol{y}_{\mathrm{opt}} = \underset{\boldsymbol{y}}{\mathrm{argmax}}\,\tilde{\mathcal{G}}. \quad (17)$$

这类似于局域估计中对量子费舍尔信息的最大化，同时纳入了完整的先验分布。

对于固定的 POVM，相应的经典伪增益为

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\mathrm{cl}} := \int \mathrm{d}x\, p(x|\boldsymbol{y})\tilde{\theta}_{\mathrm{opt}}(x)^2, \tag{18}$$

其中 $p(x|\boldsymbol{y}) = \int \mathrm{d}\theta\, p(\theta)p(x|\theta,\boldsymbol{y})$ 且 $\tilde{\theta}_{\mathrm{opt}}(x)$ 是式（15）中的后验均值。这是参考文献 [46–48], 中通过实验优化的量，并针对所讨论的估计问题的对称性作了适当修改 [57]。与经典费舍尔信息和量子费舍尔信息的区别类似，SPM构造优化的是测量本身。此前，研究者已针对全局测温和尺度估计中的精度增益探讨过这一区别 [59, 61]。

式（14）、（15）和（17）在贝叶斯框架下定义了单次测量的最优量子策略。在下一节中，我们将把这一策略纳入自适应多次测量协议。

III. 自适应多次测量估计

本节将介绍本文所讨论的自适应协议，然后在第IV节展示结果。

A. 最优估计器与损失

假设进行 μ 次测量，得到结果向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_\mu)$，同时允许控制参数和 POVM 在各次测量之间变化。式（6）中的后验分布可推广为

$$p(\theta|\boldsymbol{x},\{\boldsymbol{y}\}) \propto p(\theta)\prod_{i=1}^{\mu}\langle\psi_{\boldsymbol{y}_i}(\theta)|M_i(x_i)|\psi_{\boldsymbol{y}_i}(\theta)\rangle, \tag{19}$$

其中 $\{\boldsymbol{y}\}$ 表示控制向量的集合，其第 i 个元素为 $\boldsymbol{y}_i = (|\alpha|_i, \tau_i, \varphi_i)$。

对于多次测量均方损失，经典贝叶斯估计器为后验均值 [30],

$$\tilde{\theta}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}\theta p(\theta|\boldsymbol{x},\{\boldsymbol{y}\})\theta, \tag{20}$$

这是式（15）的多次测量推广。该估计器允许采用任意 POVM 序列和控制参数值。相应的均方损失为平均后验方差（MPV）

$$\mathcal{L}_{\mathrm{MPV}} = \lambda - \int \mathrm{d}\boldsymbol{x} p(\boldsymbol{x}|\{\boldsymbol{y}\})\tilde{\theta}_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{x})^2, \tag{21}$$

其中 $p(\boldsymbol{x}|\{\boldsymbol{y}\}) = \int \mathrm{d}\theta p(\theta)p(\boldsymbol{x}|\theta,\{\boldsymbol{y}\})$。

我们将通过数值方法对其进行评估，其中参数积分采用确定性方法计算，与结果相关的平均值则通过 1000 次蒙特卡罗运行估算。我们的实现见参考文献 [62]。

B. 有限样本策略

现在，我们说明本研究考虑的三种自适应策略。它们的区别在于，每次观测后是否重新优化测量、探针，或两者都重新优化。在每种情况下，探针优化都采用第 IIC 节中定义的相应经典或量子伪增益。对于所有策略，令

$$\boldsymbol{x}_{j-1} := (x_1, \ldots, x_{j-1}), \quad \{\boldsymbol{y}\}_{j-1} := (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{j-1}) \tag{22}$$

并写为

$$p_{j-1}(\theta) := p(\theta|\boldsymbol{x}_{j-1},\{\boldsymbol{y}\}_{j-1}), \tag{23}$$

其中 $p_0(\theta) \equiv p(\theta)$。在测量 j时，该分布将作为下一次优化的先验分布。生成完整的结果、测量和控制参数序列后，使用式（19）中的后验分布来评估式（21）中的 MPV。

第一种策略保持探针不变，并对测量进行自适应调整。我们针对初始均匀先验分布，在满足式（17）中的能量约束（见式（5））的条件下，通过最大化量子伪增益来选择探针，并在整个协议中保持其不变。在第 j轮，我们使用当前先验分布 $p_{j-1}(\theta)$ 得到 $\rho_{0,\,j}$ 以及 $\bar{\rho}_j$，具体见式（10），进而根据式（S_j 12）得到 SPM 算符。随后，我们按照式（14）在其本征基中进行测量，并在每次观测后重新优化测量。这将参考文献 [9], 中的逐次测量方法扩展为一种有限样本协议：重复执行最优单次测量策略（冷原子实验中也采用了这种方法 [46, 47]）。

第二种策略则将这些角色对调：固定测量方式为零差探测，同时调整控制高斯探针形状的参数。每次测量时，我们测量位置正交分量 q，使通用 POVM $M(x)$ 变为 $M(q) = |q\rangle\langle q|$。作出这一选择的原因是，当压缩角设为合适的工作点 [63–65]时，零差探测能够达到第IIA 节所述高斯协议可实现的最终局部精度。这种精度由量子费舍尔信息量化。对于式（1）中的纯态幺正变换，其计算公式为

$$\mathcal{I} = 4[\langle(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2\rangle - \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle^2], \tag{24}$$

最大值为

$$\mathcal{I}_{\max} = 2\sinh^2(2r) = 8E(E+1) \tag{25}$$

由压缩真空探针 $|\alpha| = 0$实现，且$E = \sinh^2 r$。测量方式固定后，每一轮都通过最大化式（18）中的经典伪增益来调整探针参数，并使用当前先验分布$p_{j-1}(\theta)$进行计算。这扩展了文献 [41] 的工作：我们在每一轮直接对完整后验分布进行优化，而不是依赖高斯近似及该文献提出的相关高不确定性和低不确定性策略。

第三种策略同时调整探针参数和测量。在第 j轮，我们使用当前先验分布$p_{j-1}(\theta)$，根据式 S_j (12) 为每个候选探针构造 SPM 算符

。随后，根据式 y_j (17) 通过最大化量子伪增益来选择控制参数，并在相应 SPM 算符的本征基中进行测量。每次获得结果后，都会更新后验分布并重复这一过程。该策略结合了第二种策略的自适应探针优化与第一种策略的自适应贝叶斯测量。

对于涉及 SPM 算符的两种策略，POVM 通常是非高斯的，因此我们在数值计算中引入了 100 的有限福克空间截断。对于平均能量为 $E = 2$ [17] 的情况，这一截断是合理的。零差策略则不需要进行此类截断，因为其统计特性完全由高斯探针的一阶和二阶矩决定。

C. 相对改进与渐近基准

我们通过式（21）中的 MPV 比较有限样本策略。为了量化在测量次数为 μ时一种策略相较于另一种策略的改进，我们定义

$$R_{A|B}(\mu) := 100\left[1 - \frac{\mathcal{L}^{A}_{\mathrm{MPV}}(\mu)}{\mathcal{L}^{B}_{\mathrm{MPV}}(\mu)}\right]\%, \tag{26}$$

其中， A 和 B 分别表示所关注的策略和参考策略。正值表示估计不确定性有所降低。我们将使用这一量来确定，在所考察的范围内，联合优化相较于自适应零差探测实现最大相对改进时所需的测量次数。

为完整起见，我们也考察渐近误差。对于独立同分布（i.i.d.）的测量，在满足伯恩斯坦–冯·米塞斯定理的正则性条件时， [66], 后验分布渐近趋于高斯分布，从而得到 [17, 附录 B]

$$\lim_{\mu\to\infty} \mu\mathcal{L}_{\mathrm{MPV}} = \int \mathrm{d}\theta\, \frac{p(\theta)}{\mathcal{I}(\theta)}. \tag{27}$$

对于此处所考察的酉相位估计问题，最大量子费舍尔信息与 θ [方程（25）], 无关，由此得到渐近量子克拉美-罗下界基准

$$\mathcal{L}_{\mathrm{CR}} := \frac{1}{\mu\mathcal{I}_{\max}}. \tag{28}$$

尽管我们的自适应协议不涉及独立同分布统计，但这一基准为评估其渐近精度提供了启发式参考。

IV. 自适应高斯计量的性能

现在，我们对第 III 节中介绍的三种自适应策略进行模拟，并评估它们的性能。图1 展示了 MPV [公式 (21)] 随测量次数 μ的变化，同时给出了渐近量子 CR 基准 公式 (28)]。由于所有策略使用相同的先验分布和

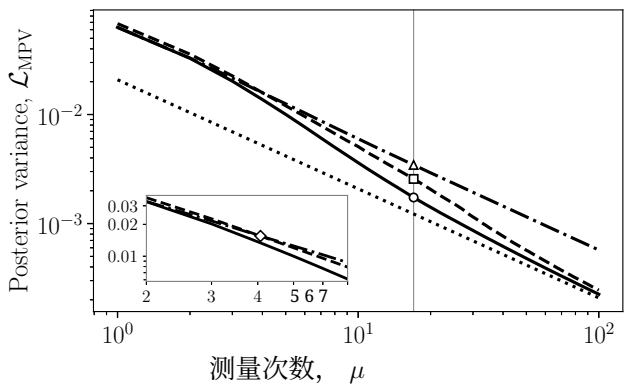

图 1. 固定能量单模高斯探针的自适应相位估计

$E = 2$ $\mathcal{L}_{\mathrm{MPV}}$。[21] μ

图中显示平均后验方差（式（ ））随测量次数 的变化，分别对应自适应零差探测（虚线）、采用自适应最优测量的固定探针（点划线），以及对探针和测量进行联合自适应优化（实线）。点线表示渐近量子克拉美-罗下界基准 $\mathcal{L}_{\mathrm{CR}}$ [式（28）]。插图突出显示了最初几次测量：采用最优量子测量的两种策略在第一次测量时重合；固定探针策略起初优于零差探测，但在 $\mu = 4$处两者的优劣顺序反转，图中以菱形标出。竖直灰线和标记标出了 $\mu = 17$，此时联合优化相较于自适应零差探测的相对改进达到最大（约为 32%），相较于固定探针策略则提升了 50%。先验分布在 $[0, \pi/2]$上均匀分布。自适应策略定义见第 III节。结果基于 1000 次蒙特卡罗运行；对于采用 SPM 测量的策略，使用福克空间截断 100。

能量约束 $E = 2$，它们的性能差异源于探针和测量的选择。

首先，我们观察到相对性能会随测量次数而变化，这与先前贝叶斯干涉测量中的结果一致 [9]。在第一次测量时，两种采用最优量子测量的策略表现一致，并优于自适应零差探测。固定探针策略起初相对于零差探测仍保持优势，但二者的排序在 $\mu = 4$处发生逆转，如插图中所突出显示。联合优化始终给出最低的MPV，并在第一次测量之后具有严格优势。

为量化这一优势，我们采用式（26）中定义的相对改进。其相对于自适应零差探测的最大值出现在 $\mu = 17$，此时联合优化将MPV降低约 32%，而相对于固定探针策略则为 50% 。随后，完全自适应协议与零差探测协议均趋近渐近量子克拉美-罗下界基准，而固定探针策略则不然。

这些结果量化了在两种情况下均充分自适应高斯探针时，最优量子测量相较于实验上可实现的零差探测所具有的精度优势。在数据有限的情况下，即使探针已经针对零差探测进行了优化，精度提升仍可能十分显著。因此，这一比较表明——

实施要求更高的量子测量可能带来的精度收益。

V. 讨论与结论

我们已经证明，联合调整高斯探针与量子测量，能够在有限数据条件下提升对部分信息已知的相位估计精度。在参考文献 [9, 41], 的基础上，我们发现，在所考虑的范围内，联合优化可使不确定度最低；在 32% 次测量时，相较于自适应零差探测，其相对改进最高约为17次测量时，相应的改进为 50%，优于固定探针策略。

除这些具体结果外，本工作的主要贡献在于方法论层面。在量子计量学的大部分领域中，费舍尔信息仍是默认的设计指标 [3],，部分原因是基于对称对数导数的方法简单易行。Personick 形式体系的构成要素早已为人所知 [31, 33], 但其应用远不充分；该体系提供了一种在贝叶斯框架内复现这一思路的方法。具体而言，方程（12）中的西尔维斯特方程发挥着对称对数导数方程的作用，而对控制参数上的量子费舍尔信息进行最大化，则由对方程（17）中依赖先验分布的伪增益进行最大化所取代。虽然还存在更一般的方法，包括参考文献 [33] 中的交替优化，以及参考文献 [37], 中的半定规划方法，但这一构造的简洁性或有助于贝叶斯实验设计得到更广泛的应用，并与参考文献 [46–48] 中的流程保持一致。SPM 测量的实现仍是一项独立的挑战。

该框架的另一个特点是，对先验分布进行平均后，纯探针会形成一种有效的混合态，这表明——先验不确定性与物理噪声之间存在一种形式上的联系，正如文献 [33, 41] 中所指出的。类似的观察或许也适用于缺少外部参考时的相位平均 [19, 67]。这表明，贝叶斯范式可以为描述量子计量学中不同来源的不确定性提供一种通用语言。

更具体地说，我们计算中的最优测量通常是非高斯的，并且需要进行福克空间截断。采用参考文献 [36] 中的变分方法可以降低其计算成本。进一步的应用还可包括非高斯探针和多模探针，以及多参数估计；在后者中，测量不相容性会带来额外的限制 [32]。

作者贡献。两位作者共同提出研究问题、阐释结果并撰写论文。R.R.R. 使用高斯态进行了计算。J.R. 开发了贝叶斯框架和协议设计方法。作者使用 ChatGPT (OpenAI) 和 Claude (Anthropic) 优化其编写代码的计算效率，从而将生成图 1所示图表所需的时间缩短至几小时（使用消费级笔记本电脑）。作者已核实最终结果，并对其负责。

致谢。我们衷心感谢 S. Morelli、D. Branford 和 E. Gandar 提供的宝贵讨论。R. R. R. 感谢西班牙政府（Severo Ochoa CEX2019-000910-S 和 FUNQIP）、Fundació Cellex、Fundació Mir-Puig 以及加泰罗尼亚政府（CERCA计划）的支持。J. R. 感谢萨里大学提供的萨里未来奖学金，本研究即在此期间启动。J. R. 还感谢英国研究与创新署的资助，项目编号 UKRI3702，项目名称“量子控制与传感（QCS）”。

[1] C. W. Helstrom，量子探测与估计理论 （学术出版社，纽约，1976）。[2] S. L. Braunstein 和 C. M. Caves，统计距离与量子态几何，《物理评论快报》**72**，3439（1994）。[3] R. Demkowicz-Dobrzański、M. Jarzyna 和 J. Kołodyński，《光学干涉测量中的量子极限》，载于光学进展，第60卷，E. Wolf 编（爱思唯尔，2015），第345–435页。[4] G. A. Durkin 和 J. P. Dowling，量子干涉测量中的局部与全局可区分性，《物理评论快报》**99**，070801（2007）。[5] D. W. Berry、B. L. Higgins、S. D. Bartlett、M. W. Mitchell、G. J. Pryde 和 H. M. Wiseman，如何实现尽可能精确的相位测量，《物理评论A》**80**，052114（2009）。[6] M. Hayashi，受光子数约束的相位估计，信息学进展**8**，81（2011）。[7] A. Lumino、E. Polino、A. S. Rab、G. Milani、N. Spagnolo、N. Wiebe 和 F. Sciarrino，机器学习增强的实验相位估计，《物理评论应用》**10**，044033（2018）。[8] M. Valeri、E. Polino、D. Poderini、I. Gianani、G. Corrielli、A. Crespi、R. Osellame、N. Spagnolo 和 F. Sciarrino，实验性自适应贝叶斯多相位估计与有限数据，npj Quantum Inf. 6, 92 (2020). [9] J. Rubio and J. Dunningham，《有限数据条件下的量子计量学》，New J. Phys. 21, 043037 (2019). [10] J. Rubio Jiménez，《非渐近量子计量学：从有限数据中提取最大信息》，博士论文，萨塞克斯大学 (2020). [11] Á. Rivas and A. Luis，非随机相移的次海森堡估计，New J. Phys. 14, 093052 (2012). [12] M. J. W. Hall, D. W. Berry, M. Zwierz, and H. M. Wiseman，随机相移估计中海森堡极限的普适性，《物理评论A》85, 041802 (2012). [13] M. J. W. Hall and H. M. Wiseman，非线性计量学能否提高分辨率？量子信息理论给出的答案，《物理评论X》2, 041006 (2012). [14] D. W. Berry, M. J. W. Hall, M. Zwierz, and H. M. Wiseman，任意相位估计平均性能的最优海森堡型界，《物理评论A》86, 053813 (2012). [15] M. Tsang，量子参数估计的Ziv-Zakai误差界，《物理评论快报》108, 230401 (2012). [16] A. Luis，突破弱海森堡极限，《物理评论A》95, 032113 2017( ). [17] J. Rubio, P. A. Knott, and J. A. Dunningham，非渐近

对超越克拉美–罗界的量子计量协议进行分析，J. Phys. Commun. 2, 015027 (2018). [18] S. L. Braunstein，需要多大的样本才能使最大似然估计器近似服从高斯分布？，J. Phys. A: Math. Gen. 25, 3813 (1992). [19] D. Branford and J. Rubio，平均数不足以作为干涉测量的指标，New J. Phys. 23, 123041 (2021). [20] V. Izquierdo and J. Lalueza-Puértolas，制备约束下光学相位估计的精度极限与非高斯优势 (2026)，arXiv:2611.06645. [21] Z. Hradil and J. Řeháček，有限资源条件下量子传感的现实框架 (2026)，arXiv:2603.08306. [22] X.-M. Lu and M. Tsang，量子计量学的量子魏斯-温斯坦界，Quantum Sci. Technol. 1, 015002 (2016). [23] E. Martínez-Vargas, C. Pineda, and P. Barberis-Blostein，通过将测量分解为极端测量来优化量子测量，Sci. Rep. 10, 9375 (2020). [24] M. Gessner and A. Smerzi，量子计量学的频率学派界层级：从克拉美–罗界到巴兰金界，《物理评论快报》130, 260801 (2023). [25] V. Gebhart, M. Gessner, and A. Smerzi，少量测量下参数估计的基本界，Phys. Rev. Res. 6, 043261 (2024). [26] J. Navarro, R. Ravell Rodríguez, and M. Sanz，离散量子系统中无偏估计器的存在性，Phys. Rev. Res. 7, 023060 (2025). [27] M. Reichert, J. Navarro, G. Adesso, M. Gessner, and M. Sanz，超越局部无偏性的量子巴兰金界：基于右除框架的高斯态解析结果 (2026)，arXiv:2609.10157. [28] I. García-Martínez and M. Gessner，广义计量灵敏度的压缩型下界 (2026)，arXiv:2610.26319.[29] J. J. Meyer, S. Khatri, D. Stilck França, J. Eisert, and P. Faist，有限样本区间的量子计量学，PRX Quantum 6, 030336 (2025). [30] E. T. Jaynes，《概率论：科学的逻辑》，G. L. Bretthorst 编 (剑桥大学出版社, 2003). [31] S. Personick，量子估计理论在量子信道模拟通信中的应用，IEEE Trans. Inf. Theory 17, 240 (1971). [32] F. Albarelli, D. Branford, and J. Rubio，贝叶斯多参数量子估计中的测量不相容性，Quantum 10, 2192 (2026). [33] K. Macieszczak, M. Fraas, and R. Demkowicz-Dobrzański，集体退相干条件下的贝叶斯量子频率估计，New J. Phys. 16, 113002 (2014). [34] R. Nichols, L. Mineh, J. Rubio, J. C. F. Matthews, and P. A. Knott，使用遗传算法设计量子实验，Quantum Sci. Technol. 4, 045012 (2019). [35] J. Boeyens, J. Glatthard, E. Gandar, S. Nimmrichter, L. A. Correa, and J. Rubio，全局量子传感中对称性与几何的作用，Quantum Sci. Technol. 10, 045053 (2025). [36] E. Gandar and J. Rubio，高斯态的贝叶斯量子估计闭式解 (2026)，arXiv:2605.16978. [37] J. Bavaresco, P. Lipka-Bartosik, P. Sekatski, and M. Mehboudi，利用高阶操作设计贝叶斯量子参数估计的最优协议，Phys. Rev. Res. 6, 023305 2024( ). [38] D. W. Berry and H. M. Wiseman，量子干涉测量的最优态与近乎最优的自适应测量，《物理评论快报》85, 5098 (2000). [39] D. W. Berry, H. M. Wiseman, and J. K. Breslin，最优输入用于干涉相位估计的状态与反馈，《物理评论A》63, 053804 (2001)。[40] M. A. Rodríguez-García 和 F. E. Becerra，利用压缩真空实现逼近量子极限的自适应相位估计，Quantum 8, 1480 (2024)。[41] R. R. Rodríguez 和 S. Morelli，面向相位估计的知识依赖型最优高斯策略，SciPost Phys. 18, 167 (2025)。[42] E. L. André、J. Bavaresco 和 M. Mehboudi，有限副本下贝叶斯量子参数估计的策略优化：自适应贪心、并行、顺序及一般策略，Quantum Sci. Technol. 11, 035040 (2026)。[43] S. Paesani、A. A. Gentile、R. Santagati、J. Wang、N. Wiebe、D. P. Tew、J. L. O'Brien 和 M. G. Thompson，在硅光子芯片上进行贝叶斯量子相位估计实验，《物理评论快报》118, 100503 (2017)。[44] G. Jacob、K. Groot-Berning、S. Wolf、S. Ulm、L. Couturier、S. T. Dawkins、U. G. Poschinger、F. Schmidt-Kaler 和 K. Singer，利用确定性单离子源进行显微成像，《物理评论快报》117, 043001 (2016)。[45] G. Jacob、K. Groot-Berning、U. G. Poschinger、F. Schmidt-Kaler 和 K. Singer，利用贝叶斯实验设计最大化单离子显微镜的信息增益，载于《量子光学》，SPIE 会议录，第9900卷（2016），第99001A页。[46] J. Glatthard、J. Rubio、R. Sawant、T. Hewitt、G. Barontini 和 L. A. Correa，利用自适应贝叶斯策略实现最优冷原子测温，PRX Quantum 3, 040330 (2022)。[47] M. Overton、J. Rubio、N. Cooper、D. Baldolini、D. Johnson、J. Anders 和 L. Hackermüller，用于精确量子技术测量的自适应对称性知情贝叶斯计量，《物理评论快报》136, 140801 (2026)。[48] J. Feß、L. Granert、S. Burgardt、S. Hiebel、A. Guthmann、M. Mehboudi、M. Perarnau-Llobet 和 A. Widera，利用非平衡单原子探针对超冷气体进行贝叶斯量子测温（2026），arXiv:2611.27584。[49] S. Morelli、A. Usui、E. Agudelo 和 N. Friis，利用高斯态与测量进行贝叶斯参数估计，Quantum Sci. Technol. 6, 025018 (2021)。[50] R. Loudon，《光的量子理论》（OUP Oxford，2000）。[51] S. L. Braunstein 和 P. van Loock，利用连续变量实现量子信息，《现代物理评论》77, 513 (2005)。[52] C. Weedbrook、S. Pirandola、R. García-Patrón、N. J. Cerf、T. C. Ralph、J. H. Shapiro 和 S. Lloyd，高斯量子信息，《现代物理评论》84, 621 (2012)。[53] A. Serafini，《量子连续变量：理论方法入门》（CRC Press，2017）。[54] J. B. Brask，《高斯态与操作——快速参考》（2022），arXiv:2102.05748。[55] E. T. Jaynes 和 O. Kempthorne，置信区间与贝叶斯区间，载于《概率论、统计推断与科学统计理论基础》，第2卷，W. L. Harper 和 C. A. Hooker 编（Springer Netherlands，Dordrecht，1976），第175–257页。[56] J. Boeyens、S. Seah 和 S. Nimmrichter，无信息贝叶斯量子测温，《物理评论A》104, 052214 (2021)。[57] J. Rubio，对称性知情量子计量学的第一性原理构建，《物理评论A》110, L030401 (2024)。[58] R. Demkowicz-Dobrzański，具有任意先验知识的最优相位估计，《物理评论A》83, 061802 (2011)。[59] J. Rubio，量子尺度估计，Quantum Sci. Technol. 8, 015009 2022( )。[60] J. Rubio 和 J. Dunningham，有限数据下的贝叶斯多参数量子计量，《物理评论A》101, 032114 (2020)。

[61] J. Rubio、J. Anders 和 L. A. Correa，《全球量子测温》，《物理评论快报》**127**, 190402 (2021)。[62] R. R. Rodríguez 和 J. Rubio，《有限数据下量子计量学自适应协议的简易设计》，https://doi.org/10.5281/zenodo.23878092 2026 ()。

[63] A. Monras，《纯高斯态的最优相位测量》，《物理评论A》**73**, 033821 (2006)。[64] S. Olivares 和 M. G. A. Paris，《同频干涉测量中的贝叶斯估计》，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》**42**, 055506 (2009)。[65] R. Gaiba 和 M. G. Paris，《压缩真空作为通用量子探针》，《物理快报A辑》**373**, 934–939 (2009)。[66] A. W. van der Vaart，《渐近统计学》（剑桥大学出版社，1998）。[67] M. Jarzyna 和 R. Demkowicz-Dobrzański，《有外部相位参考和无外部相位参考的量子干涉测量》，《物理评论A》**85**, 011801 (2012)。

附录 A：高斯探针

此处我们回顾正文中高斯态的制备方法；详情参见参考文献[50–54]。

纯单模高斯态可通过施加一个压缩算符来制备

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2})\right], \tag{A1}$$

以及一个位移算符

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}), \tag{A2}$$

至真空态 $|0\rangle$ [53]。这里，$\xi = re^{i\varphi}$ 和 $\alpha = |\alpha|e^{i\tau}$分别表示压缩参数和位移参数。因此，初始探针态为

$$|\psi_y^{\text{in}}\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle, \tag{A3}$$

压缩强度 r 由式（5）中的能量约束固定。

相位通过旋转进行编码

$$\hat{R}(\theta) = \exp(-i\theta \hat{a}^\dagger \hat{a}), \tag{A4}$$

如方程（1）所示。所得态是高斯态，因为其维格纳函数是高斯函数。因此，只需用正交分量 $\hat{q} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/\sqrt{2}$ 和 $\hat{p} = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/(i\sqrt{2})$的一阶矩和协方差矩阵即可完全表征该态。这些量见方程（2–4），其协方差矩阵元素为

$$V_{ij} = \frac{1}{2}\langle\{\hat{\boldsymbol{r}}_i - \langle\hat{\boldsymbol{r}}_i\rangle, \hat{\boldsymbol{r}}_j - \langle\hat{\boldsymbol{r}}_j\rangle\}\rangle, \tag{A5}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{q}, \hat{p})^T$ 和 $\{A, B\} = AB + BA$。

附录B：相位估计的损失函数

由于相位是一个圆周参数，损失函数 $\ell(\theta, \theta)$必须满足周期性 $\theta' = \theta + 2\pi$。一种自然的选择是单位圆上两点之间的距离，它会对等价相位赋予零损失。用单位向量 $\boldsymbol{u}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)^\intercal$表示每个相位，可得

$$\begin{aligned}\ell(\tilde{\theta}, \theta) &= \|\boldsymbol{u}(\tilde{\theta}) - \boldsymbol{u}(\theta)\|^2 \\ &= 2[1 - \cos(\tilde{\theta} - \theta)] \\ &= 4\sin^2\left(\frac{\tilde{\theta} - \theta}{2}\right),\end{aligned} \tag{B1}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数。这便是正文中讨论的正弦损失。