arXiv:2611.31796v1 [math.AC] 24 Nov 2026

塞尔正性的一个简短证明

LINQUAN MA

Abstract. 最近，OpenAI 找到了塞尔交数正性的一个证明。其两个主要要素是：关于带支撑的有理 K-理论的下降结果；以及某个渐近复形范畴的构造，该范畴与某个连通（非交换）导环上的完美复形范畴相同。在本文中，我们给出一个更简单的塞尔正性证明，避开第二步；相反，我们通过 A_{inf}-构造使用“对角化约”技巧。

1. Introduction

在本文中，我们解释以下定理的一个证明，该定理解决了长期悬而未决的塞尔正性猜想 [关于65] 混合特征中交数的猜想。我们固定一个素数 p 并在全文中保持不变。

定理 1.1。设 $(S, \mathfrak{m}_S)$ 是一个混合特征$(0, p)$ 的分歧正则局部环，其维数为 n。设 P 和 Q 是 S 的两个素理想，满足 $P + Q$ 是 $\mathfrak{m}_S$-初等理想，且维数(S/P) + 维数$(S/Q) = n$。那么我们有

$$\chi(S/P, S/Q) > 0.$$

我们简要回顾一下关于塞尔交叉重数的历史和背景。设 $(S, \mathfrak{m}_S)$ 是一个正则局部环，M、N是两个有限生成的 S-模。假设$M \otimes_S N$ 具有有限长度（即 $M \otimes_S N$ 仅支撑于 $\{\mathfrak{m}_S\}$）。塞尔引入了以下交叉重数

$$\chi(M, N) := \chi(M \otimes^{\mathbb{L}}_S N) = \sum_i (-1)^i \ell(\mathrm{Tor}^S_i(M, N)).$$

文献 [塞尔65] 证明了，当 S 的完备化是域上的形式幂级数环或混合特征离散赋值环时（这包括等特征和非分歧混合特征的情形），则

(a) 维数(M) +维数(N) ≤维数(S); (b) $\chi(M, N) = 0$当维数(M) +维数(N) <维数(S); (c) $\chi(M, N) > 0$当维数(M) +维数(N) =维数(S)。

塞尔还证明了 (a) 对 [Ser65]，中的所有正则局部环都成立，并猜想（“Il est naturel de conjecturer”）(b) 和 (c) 对所有正则局部环也都成立。Roberts[Rob85] 以及 Gillet 和 Soul´e [GS87]，独立地证明了 (b) 部分。Gabber 证明了$\chi(M, N) \geq 0$，参见 [Ber97、Hoc97]。剩下的问题是当 S 是分歧混合特征时的严格正性（即 (c) 部分）。通过取 M 和 N 的素循环滤过，并利用 $\chi(-, -)$ 的双加性以及已确立的消失部分 (b)，不难看出 (c) 部分可归结为定理 1.1。

证明提纲。 我们首先概述证明的思路和策略，这在很大程度上受到 [BHM26] 的启发。我们的目标是证明 $\chi(S/P \otimes^{\mathbb{L}}_S S/Q)$ 的正性。第一步是将 χ 替换为 χ_∞，即我们证明

$$\chi(S/P \otimes^{\mathbb{L}}_S S/Q) = \chi^{x}_{\infty}\big((S/P)^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S S/Q\big)$$

其中，$(S/P)^{A_\infty}$perfd 是混合特征下完美化在特征 p 中的类似物（见 [BS22，第8节和第 10] 节），而 χ^{x}_{∞} 是在 A_∞ 上计算的归一化长度的交错和（见 [CLM+26，第 4] 节）。这一步与 [Ope26，第5.1节、引理 5.2] 中的做法基本相同（无论是策略还是证明），并在第2节中完成。但请注意，与使用 [Ope26，第 3], 节中的完整结果不同，这一步只需要来自 K-理论的一个相对简单的输入（[Ma26，附录A]），见定理 2.2 的证明。

第二步也是更为关键的一步，是将 χ_∞ 替换为 $\chi_{\infty,\ \infty}$。更具体地说，我们构造 $(S/Q)^{B_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}$，使其类似于 $(S/P)^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}$，并证明

$$\chi^{x}_{\infty}\big((S/P)^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S S/Q\big) = \chi^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big((S/P)^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}\big).$$

这里，$\underline{\chi}^{x}$、∞^{y}、∞ 是在某个辅助完美拟环上计算的归一化长度的交错和，见设定 3.1。为建立这一等式，我们利用完美拟化的等ogeny定理（见 [CLM+26，命题 2.4.7]），将其归约为 $\underline{\chi}^{x}$、∞^{y}、∞ 的消失性陈述，即 $(S/P)^{A_\infty}$perfd $\otimes^{\mathbb{L}}_S G$，其中 G 的支撑更小，见讨论 3.8。随后，我们将 $(S/P)^{A_\infty}$perfd 与 G 在 S 上的交集，识别为 A_{inf} 与 G 在非分歧正则局部环上的交集，其中 A_{inf}=$((S/P)^{A_\infty}$perfd$)$。这样便可以将约化应用于对角线，并通过 Koszul复形重新解释该交集。后者之所以可以证明为零，根本原因在于其中一个对角元是冗余的，见命题 3.13 及定理 3.16 的证明。

最后，由 [CLM+26，推论 4.0.（这是 Bhatt–Scholze BS22 定理 10.9]中几乎纯性定理的直接推论）可知，$(S/P)^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}$和$(S/Q)^{B_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}$ 是几乎Cohen–Macaulay。这意味着

$$\chi^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big((S/P)^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}\big) = \lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big((S/P)^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}\big)$$

由 引理 3.6 （其证明思路与 [BHM26 定理 6.1]中的论证相似）。上面的右端由 [CLM+26 命题 4.0.20] 得到正性。

致谢与人工智能披露。 本证明的整体策略最初形成于准备 [BHM26]期间。作者从第2节中学习了相关结果和方法，这些内容来自 [Ope26，第 3] 节（以及 [Ma26，附录A], ，该部分是借助 ChatGPT 发现的）。此外，作者还使用 ChatGPT 找到了命题 3.13的证明，以及引理 3.11和引理 3.12中的论证。

我谨向 Bhargav Bhatt 致谢，感谢他就 Serre正性猜想以及完美拟技术在交换代数中的其他应用，与我进行了许多愉快的讨论。本文所呈现的证明中的许多想法和细节，都是在我与 Bhargav 的会面和交谈中发现的。此外，我还要感谢 Bhargav Bhatt 和 Mel Hochster 的合作 [BHM26]。作者获得了 NSF DMS资助项目#2302430 的资助。

2. Positivity of Serre intersection multiplicity: the first step

本节将完成引言中概述的第一步。我们将在以下设定下进行讨论。

设定 2.1。 设 $(S, \mathfrak{m}_S, k)$ 为一个混合特征 $(0, p)$ 的完备分歧正则局部环，其维数为 n，且 k 代数闭。设 P, Q 是 S 的两个素理想，使得 $P+Q$ 是 $\mathfrak{m}_S$-主理想，且 $\dim(S/P) + \dim(S/Q) = n$。假设 S/P 无 p-挠。令 $R = S/P$ 为一个诺特完备局部整环。取 R 的一组参数系 $x := p, x_2, \ldots, x_d$，并令 $(A, \mathfrak{m}_A) := W(k)[[x_2, \ldots, x_d]] \subseteq R$ 为相应的 Noether–Cohen 规范化。令

$$A_\infty := A[p^{1/p^\infty}, x_2^{1/p^\infty}, \ldots, x_d^{1/p^\infty}]^{\wedge p}$$

并令 $R^{A_\infty\text{完美拟化}} := (R \otimes_A A_\infty)^{\mathrm{perfd}}$ 其中 $(-)^{\mathrm{perfd}}$ 是 Bhatt–Scholze 的完美拟化函子（参见 [BS22，第 8]节）。为便于日后参考，我们也令 $A' := W(k)[x_2, \ldots, x_d]^{\wedge p}$ 并令

$$A'_\infty := W(k)[p^{1/p^\infty}, x_2^{1/p^\infty}, \ldots, x_d^{1/p^\infty}]^{\wedge p}.$$

我们将使用 Faltings 的归一化长度函数 $\lambda_\infty(-)$，参见 [Fal02] 或 [CLM+26，第2节。2]此外，我们有时会相对于（g）^{perfd} 使用几乎数学，其中（对某个 $0 \neq g \in A$），如 [BS22，第 10]节所述。我们指出，所需的基本性质仅仅是存在一个定义良好的“长度函数”

$$\lambda_\infty(-) : \ \mathfrak{m}_A\text{-power torsion } A_\infty\text{-modules} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

该函数在短正合列上具有可加性，并且对于 A_∞-模中 g-几乎为零的模（即被 $(g)^{\mathrm{perfd}}$ 湮灭的模）取值为零。注意，在典范映射 $A'_\infty \to A_\infty$ 下，在 A'_∞ 和 A_∞ 上计算的归一化长度相同：这是因为归一化长度定义在 $\mathfrak{m}_A$-幂挠模上。在下文中，我们需要区分在各种完美拟环上计算的归一化长度，因此从现在起，我们将使用 $\lambda^x_\infty(-)$ 表示在 A_∞ 或 A'_∞ 上计算的归一化长度。

定理 2.2. 沿用设定 *2.1* 中的记号，对于任意有限生成的 S/Q-模 N，有

$$\chi(S/P \otimes^{\mathbb{L}}_S N) = \chi^{\underline{x}}_\infty(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S N)$$

其中后者定义为

$$\chi^{\underline{x}}_\infty(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S N) := \sum_i (-1)^i \lambda^{\underline{x}}_\infty\big(H_i(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S N)\big),$$

求和中的每一项都是有限的。

证明。 这由 [Ma26第 2]节得出。具体而言，设 $F_\bullet$ 是 N 在 S上的有限自由分解。则有

$$\chi^{\underline{x}}_\infty(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S N) = \chi^{\underline{x}}_{\mathrm{perfd}}(F_\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_S R)$$

其中后者的定义见 [Ma26，定义 2。4]。特别地，χ^x_∞ 是良定义的（即，求和中的每一项根据 [Ma26，引理 2，都是有限的3]）。现在根据 [Ma26，定理 2。9]，

$$\chi^{\underline{x}}_{\mathrm{perfd}}(F_\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_S R) = \chi_\infty(F_\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_S R)$$

其中，χ_∞ 表示完美复形 $F_\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_S R$ 在 R 上的 Dutta重数，该重数由局部化陈特征定义。最后，在我们的设定下，众所周知，

$$\chi_\infty(F_\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_S R) = \chi(S/P \otimes^{\mathbb{L}}_S N).$$

例如，这可由 [Kur93、第 376]页顶部的计算[1] 推出。综合以上结果，定理的证明即告完成。 □

注 2.3。 定理2.2 的证明与 [Ope26]中的证明基本相同。证明的关键在于一个关于带支撑的有理 K-理论的下降结果：见 [Ma26，定理 A。1]（该结果用于 [Ma26，定理 2，9] 且是 [Ope26，定理 3 的特例。1]）这是我们证明 Serre 正性的方法中唯一需要 K-理论的地方。请注意，我们在 [Ma26，附录A]中给出了另一种简短的阐述。

接下来，我们利用 定理2.2 以及特征 p 下极限 Cohen–Macaulay 序列的存在性，证明当 S/Q 的特征为 p时，Serre 正性成立。

定理 2.4。 沿用设定 *2.1*中的记号，并进一步假设 S/Q 的特征为p。则 $\chi(S/P \otimes^{\mathbb{L}}_S S/Q) > 0$。

证明。 首先注意，存在 $K \gg 0$ ，使得

$$\mathfrak{m}_S^K \subseteq \ker\left(S \to \mathrm{Hom}_{D(S)}\left(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S F^e_*(S/Q), R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S F^e_*(S/Q)\right)\right)$$

对所有 $e \geq 0$ 都成立。这可由一个简单的谱序列论证得到，因为 $R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S F^e_*(S/Q) \in D^{[-n,0]}(S)$，且其每个同调模都被 $P+Q$ （它是 $\mathfrak{m}_S$-准素的，且独立于 e）湮灭。取一个参数系 $f_1, \ldots, f_d, f_{d+1}, \ldots, f_n \in \mathfrak{m}_S^K$，使得 $f_1, \ldots, f_d$ 是 $R = S/P$ 上的参数系，而 $f_{d+1}, \ldots, f_n$ 是 S/Q 上的参数系（此处用到了假设 $\dim(S/P) + \dim(S/Q) = n$ ）。典范映射

$$\mathrm{Kos}(f_1, \ldots, f_n; R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S F^e_*(S/Q)) \to \left(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S F^e_*(S/Q)\right)[n]$$

在 $D(S)$ 中有一个截面。特别地，$\mathrm{Tor}^S_i(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}\ F^e_*(S/Q))$ 是

$$\begin{aligned} &H_{i+n}\left(\mathrm{Kos}(f_1, \ldots, f_n; R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S F^e_*(S/Q))\right) \\ \cong &H_{i+n}\left(\mathrm{Kos}(f_1, \ldots, f_d; R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \otimes^{\mathbb{L}}_S \mathrm{Kos}(f_{d+1}, \ldots, f_n; F^e_*(S/Q))\right). \end{aligned}$$

考察计算后者的谱序列可知，其在 A_∞ 上的归一化长度受以下各项归一化长度之和控制：

$$\mathrm{Tor}^S_{i+n-s-t}\left(H_s(\mathrm{Kos}(f_1, \ldots, f_d; R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})), H_t\left(\mathrm{Kos}(f_{d+1}, \ldots, f_n; F^e_*(S/Q))\right)\right) \tag{2.4.1}$$

对于不同的 s 和 t。

注意，若 $s > 0$，则由 (2.4.1) 的归一化长度为零 [CLM+26，命题 4.0。10] 因为 $H_s(\mathrm{Kos}(f_1, \ldots, f_d; R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}))$ 是 g-几乎为零，其中 g是 $A \to R$的判别式 [CLM+26，推论 4.0。4]；而若 $s = 0$ 且 $t > 0$，则(2.4.1)的归一化长度有上界

$$\begin{aligned} &\lambda^x_\infty\left(\mathrm{Tor}^S_{i+n-t}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}/(f_1, \ldots, f_d)R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}, k)\right) \cdot \ell\left(H_t\left(\mathrm{Kos}(f_{d+1}, \ldots, f_n; F^e_*(S/Q))\right)\right) \\ \leq &\lambda^x_\infty(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}/(f_1, \ldots, f_d)R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \cdot 2^n \cdot o(p^{e(n-d)}) \end{aligned}$$

[1]注意，在 [Kur93，命题 3 中，3], 附加的 Cohen–Macaulay 条件和特征假设仅用于正性结论；陈特征计算并不需要这些假设。

因为 $F^e_*(S/Q)$ 是一个极限 Cohen–Macaulay 序列 [BHM26，定理 5。4]。综合以上结果，并注意到当 $i>0$时，(2.4.1) 仅在 $s>0$ 或 $t>0$时非零，可得

$$\lambda^{\underline{x}}_{\infty}\big(\operatorname{Tor}^S_i(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}, F^e_*(S/Q))\big) \le \lambda^{\underline{x}}_{\infty}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}/(f_1,\dots,f_d)R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\cdot n2^n\cdot o(p^{e(n-d)}). \tag{2.4.2}$$

另一方面，当 $i=0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\lambda^{\underline{x}}_{\infty}\big(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}\otimes_S F^e_*(S/Q)\big) &\ge \lambda^{\underline{x}}_{\infty}\big(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}/\mathfrak{m}_S R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}\otimes_k F^e_*(S/Q)/\mathfrak{m}_S F^e_*(S/Q)\big)\\ &= \lambda^{\underline{x}}_{\infty}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}/\mathfrak{m}_S R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\cdot \ell\big(F^e_*(S/Q)/\mathfrak{m}_S F^e_*(S/Q)\big)\\ &\ge \lambda^{\underline{x}}_{\infty}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}/\mathfrak{m}_S R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\cdot \big(e_{\mathrm{HK}}(S/Q)\cdot p^{e(n-d)}-o(p^{e(n-d)})\big)\\ &\ge e_{\mathrm{HK}}(S/Q)\cdot p^{e(n-d)}-o(p^{e(n-d)}),\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

其中，最后一个不等式由 [CLM+26，命题 4.0 得出。20]。

最后，我们有

$$\begin{aligned}\chi(S/P\otimes^{\mathbb{L}}_S S/Q) &= \lim_{e\to\infty}\frac{\chi\big(S/P\otimes^{\mathbb{L}}_S F^e_*(S/Q)\big)}{p^{e(n-d)}}\\ &= \lim_{e\to\infty}\frac{\chi^{\underline{x}}_{\infty}\big(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}\otimes^{\mathbb{L}}_S F^e_*(S/Q)\big)}{p^{e(n-d)}}\\ &\ge \lim_{e\to\infty}\frac{e_{\mathrm{HK}}(S/Q)\cdot p^{e(n-d)}-o(p^{e(n-d)})}{p^{e(n-d)}}\\ &\ge e_{\mathrm{HK}}(S/Q)\ge 1,\end{aligned}$$

其中，第一个等式由塞尔交叉重数的消失部分得出（因为 rank$(F^e_*(S/Q))=p^{e(n-d)}$），第二个等式由 定理 2.2 得出；第一个不等式由 (2.4.2) 和 (2.4.3) 得出。定理的证明至此完成。□

3. Positivityof Serre intersection multiplicity: completion of the proof

本节中，当 定理 1.1 中的 S/P 和 S/Q均为 p-挠无挠的（事实上，稍作调整后，该论证在 S/Q 具有特征 p时也适用，但我们已在定理 2.4中处理了该情形），我们证明 [Ope26 第 4 节和第 5]节中所采用的方法与本最终步骤的证明有很大不同。我们先建立记号。

设定 3.1。我们继续使用 设定 2.1 中的记号，并进一步假设S/Q 是 p-挠无 torsion 且 dim(S/Q) $=c$。取一个参数系 $y:=p,\ y_2,\ \dots\dots,\ y_c$属于 S/Q，并令 $(B,\ \mathfrak{m}_B):=W(k)[[y_2,\dots,y_c]]\subseteq S/Q$ 为相应的 Noether–Cohen 规范化。令 $B':=W(k)[y_2,\dots,y_c]^{\wedge p}$ 并令

$$B_\infty := B[p^{1/p^\infty}, y_2^{1/p^\infty},\dots,y_c^{1/p^\infty}]^{\wedge p},\quad B'_\infty := W(k)[p^{1/p^\infty}, y_2^{1/p^\infty},\dots,y_c^{1/p^\infty}]^{\wedge p}.$$

令 $(S/Q)^{B_\infty}{}_{\mathrm{perfd}} = (S/Q\otimes_B B_\infty)_{\mathrm{perfd}}$。在 B_∞ 和 B'_∞ 上计算的归一化长度相同，记作 $\lambda^{y}_{\infty}(-)$。我们还将在下面的完美拟环上计算归一化长度：

$$C_\infty := W(k)[x_1^{1/p^\infty}, x_2^{1/p^\infty},\dots,x_d^{1/p^\infty}, p^{1/p^\infty}, y_2^{1/p^\infty},\dots,y_c^{1/p^\infty}]^{\wedge p}$$

并将基于 C_∞ 通过 λ^{x}_{∞} 计算得到的归一化长度记为。注意，

$$C_\infty/(p-x_1)\cong (A'_\infty\otimes_{W(k)} B'_\infty)^{\wedge p}.$$

特别地，对于任意 $\mathfrak{m}_A$-幂挠 A_∞-模 M 和 $\mathfrak{m}_B$-幂挠 B_∞-模N， $\lambda^{x,y}_{\infty,\infty}(M\otimes_{W(k)}N)$ 是定义良好的。

注记 3.2. 提醒读者，采用设定 3.1中的记号时，$(A'_\infty\otimes_{W(k)}B'_\infty)^{\wedge p}$本身并不是完美拟环，并且其中存在两组相容的 p-次方根 p，即 $(A'_\infty\otimes_{W(k)}B'_\infty)^{\wedge p}\cong C_\infty/(p-x_1)$ 中的 $\{x_1^{1/p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$ 和 $\{p^{1/p^e}\}_{e\in\mathbb{N}}$。

我们记录一些关于 $\lambda^{x,y}_{\infty,\infty}(-)$与 $\lambda^x_\infty(-)$及 $\lambda^y_\infty(-)$之间关系的基本结果。

引理 3.3。 采用设定 *3.1*中的记号，对任意 $\mathfrak{m}_A$-幂挠 A_∞-模 M以及 $\mathfrak{m}_B$-幂挠 B_∞-模 N，有

$$\lambda^{x,y}_{\infty,\infty}(M\otimes_{W(k)}N)\le\lambda^x_\infty(M)\lambda^y_\infty(N)$$

当 M 和 N 都被 p湮灭时，等号成立。

证明。 我们可以放心地将 M 和 N 视为 A'_∞ 和 B'_∞-模。首先，假设 M 和 N 分别是A'_∞ 和 B'_∞ 上的有限表示模。存在 $e\gg0$，使得 $M=M_e\otimes_{A'_e}A'_\infty$和 $N=N_e\otimes_{B'_e}B'_\infty$，其中 M_e 和 N_e 是上的有限生成模

$$A'_e:=W(k)[p^{1/p^e},x_2^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e}]^{\wedge p}\ \text{ and }\ B'_e:=W(k)[p^{1/p^e},y_2^{1/p^e},\dots,y_c^{1/p^e}]^{\wedge p}$$

分别。于是很容易看出

$$M\otimes_{W(k)}N\cong(M_e\otimes_{W(k)}N_e)\otimes_{A'_e\otimes_{W(k)}B'_e}(A'_\infty\otimes_{W(k)}B'_\infty)\cong(M_e\otimes_{W(k)}N_e)\otimes_{C_e}C_\infty$$

其中 $C_e=W(k)[x_1^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e},p^{1/p^e},y_2^{1/p^e},\dots,y_c^{1/p^e}]^{\wedge p}$和 $C_e/(p-x_1)\cong(A'_e\otimes_{W(k)}B'_e)^{\wedge p}$。由归一化长度的定义可得

$$\lambda^x_\infty(M)=\frac{1}{p^{ed}}\ell(M_e),\ \lambda^y_\infty(N)=\frac{1}{p^{ec}}\ell(N_e),\ \lambda^{x,y}_{\infty,\infty}(M\otimes_{W(k)}N)=\frac{1}{p^{en}}\ell(M_e\otimes_{W(k)}N_e).$$

因此结论成立，因为 $d+c=n$和 $\ell(M_e\otimes_{W(k)}N_e)\le\ell(M_e)\ell(N_e)$，当 M_e 和 N_e 被 p 湮灭时等号成立（若 M 和 N 被 p湮灭，则此条件成立）。

接下来，我们假设 M 和 N 分别是 A'_∞ 上的有限生成模。我们记$M=\operatorname{colim}_i M_i$ 以及 $N=\operatorname{colim}_i N_i$，从而 M_i和 N_i 分别是在 A'_∞ 和 B'_∞上的有限表示模；并且过渡映射是满射的。于是

$$\lambda^{x,y}_{\infty,\infty}(M\otimes_{W(k)}N)=\lim_i\lambda^{x,y}_{\infty,\infty}(M_i\otimes_{W(k)}N_i)\le\lim_i\lambda^x_\infty(M_i)\lambda^y_\infty(N_i)=\lambda^x_\infty(M)\lambda^y_\infty(N)$$

其中，第一个和最后一个等式由下式得出 [CLM+26，命题2.2.6 (b)]，中间的不等式则由已建立的以下情形得出： M_i 和 N_i 是有限表示的；当 M_i 和 N_i 被 p湮灭时，该不等式为等式 M （当 N 和 p被其湮灭时，我们可以作此安排）。

最后，对于一般的 M和 N，我们写作 $M=\operatorname{colim}_i M_i$和 $N=\operatorname{colim}_i N_i$，使得 M_i和 N_i 分别是 A'_∞ 和 B'_∞ 上的有限生成对象；并且过渡映射是单射。考虑对所有 $i\le j$ 的以下图：

$$\begin{array}{ccccc}
M_i\otimes_{W(k)}N_i & \twoheadrightarrow & \mathrm{Image}(i) & \hookrightarrow & M\otimes_{W(k)}N\\
\downarrow & & \downarrow & & \|\\
M_j\otimes_{W(k)}N_j & \twoheadrightarrow & \mathrm{Image}(j) & \hookrightarrow & M\otimes_{W(k)}N.
\end{array}$$

由此图可知

$$\begin{aligned}\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(M\otimes_{W(k)}N)&=\lim_i\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(\mathrm{Image}(i))\\&\le\lim_i\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(M_i\otimes_{W(k)}N_i)\\&\le\lim_i\lambda^{\underline{x}}_{\infty}(M_i)\lambda^{\underline{y}}_{\infty}(N_i)\\&=\lambda^{\underline{x}}_{\infty}(M)\lambda^{\underline{y}}_{\infty}(N).\end{aligned}$$

这里的第一个和最后一个等式由 [CLM+26、命题 2.2.6 (b)] 得出（因为过渡映射是单射）；第一个不等式由满射 $M_i\otimes_{W(k)}N_i\twoheadrightarrow\mathrm{Image}(i)$ 得出，第二个不等式则由已证明的 M_i 和 N_i 为有限生成时的情形得出。注意，当 M 和 N 被 p 湮灭时，第一个不等式是等式：M_i 和 N_i 都被 p 湮灭，因而 $M_i\otimes_{W(k)}N_i\cong M_i\otimes_k N_i$ 和 $M\otimes_{W(k)}N\cong M\otimes_k N$；这意味着 $M_i\otimes_{W(k)}N_i\cong\mathrm{Image}(i)$。由于根据已证明的 M_i 和 N_i 为有限生成且被 p 湮灭时的情形，第二个不等式也是等式，因此处处均为等式。□

引理 3.4。 采用设定 *3.1* 中的记号。设 M 是一个模，且定义在

$$W(k)[x_1^{1/p^\infty},x_2^{1/p^\infty},\dots,x_d^{1/p^\infty},y_2,\dots,y_c]^{\wedge_p}/(p-x_1)$$

是$(x_1,\dots,x_d,p,y_2,\dots,y_c)$-幂挠的。那么我们有

$$\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(M\otimes_{B'}B'_\infty)=\lambda^{\underline{x}}_{\infty}(M).$$

证明。将 $M=$ 写成带有单射过渡映射的 $\mathrm{colim}_i M_i$，并且每个 M_i 都是 $W(k)[x_1^{1/p^\infty},x_2^{1/p^\infty},\dots,x_d^{1/p^\infty},y_2,\dots,y_c]^{\wedge_p}/(p-x_1)$ 上有限生成的，由此立即可由[CLM+26，命题 2.2.6 (b)] 推出，只需对每个 M_i 证明该引理（注意，B'_∞ 是 B' 上 p-完备忠实平坦的，因此 $M\otimes_{B'}B'_\infty\cong\mathrm{colim}_i(M_i\otimes_{B'}B'_\infty)$，且过渡映射为单射）。因此我们可以假设 M 是有限生成的。但此时，将 $M=$ 写成带有满射过渡映射的 $\mathrm{colim}_i M_i$，并且每个 M_i 都是 $W(k)[x_1^{1/p^\infty},x_2^{1/p^\infty},\dots,x_d^{1/p^\infty},y_2,\dots,y_c]^{\wedge_p}/(p-x_1)$ 上有限表示的，再次应用 [CLM+26，命题 2.2.6 (b)]，可将该引理归结为 M 有限表示的情形。现在我们写出

$$\begin{aligned}M&=M_e\otimes_{W(k)[x_1^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e},y_2,\dots,y_c]^{\wedge_p}/(p-x_1)}W(k)[x_1^{1/p^\infty},\dots,x_d^{1/p^\infty},y_2,\dots,y_c]^{\wedge_p}/(p-x_1)\\&=M_e\otimes_{W(k)[x_1^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e}]^{\wedge_p}/(p-x_1)}W(k)[x_1^{1/p^\infty},\dots,x_d^{1/p^\infty}]^{\wedge_p}/(p-x_1)\\&\cong M_e\otimes_{A'_e}A'_\infty.\end{aligned}$$

因此，根据在 A'_∞ 上归一化长度的定义，我们有

$$\lambda^{\underline{x}}_{\infty}(M)=\frac{1}{p^{ed}}\ell(M_e).$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
M \otimes_{B'} B'_\infty &= M_e \otimes_{W(k)[x_1^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e},y_2,\dots,y_c]^{\wedge p}} W(k)[x_1^{1/p^\infty},\dots,x_d^{1/p^\infty},y_2,\dots,y_c]^{\wedge p} \otimes_{B'} B'_\infty \\
&= M_e \otimes_{W(k)[x_1^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e},y_2,\dots,y_c]^{\wedge p}} W(k)[x_1^{1/p^\infty},\dots,x_d^{1/p^\infty},p^{1/p^\infty},y_2^{1/p^\infty},\dots,y_c^{1/p^\infty}]^{\wedge p} \\
&= M_e \otimes_{W(k)[x_1^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e},y_2,\dots,y_c]^{\wedge p}} C_\infty \\
&= \big(M_e \otimes_{W(k)[x_1^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e},y_2,\dots,y_c]^{\wedge p}} C_e\big) \otimes_{C_e} C_\infty.
\end{aligned}$$

根据 C_∞ 上归一化长度的定义可知

$$\begin{aligned}
\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(M \otimes_{B'} B'_\infty) &= \frac{1}{p^{en}}\ell\big(M_e \otimes_{W(k)[x_1^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e},y_2,\dots,y_c]^{\wedge p}} C_e\big) \\
&= \frac{1}{p^{en}} \cdot p^{ec} \cdot \ell(M_e) \\
&= \frac{1}{p^{ed}}\ell(M_e)
\end{aligned}$$

其中，第二个等式是因为 $C_e = W(k)[x_1^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e},p^{1/p^e},y_2^{1/p^e},\dots,y_c^{1/p^e}]^{\wedge p}$ 在 $W(k)[x_1^{1/p^e},\dots,x_d^{1/p^e},y_2,\dots,y_c]^{\wedge p}$ 上是 p-完备自由的，秩为 p^{ec}；第三个等式则是因为 $d+c=n$。综上，便完成了该引理的证明。□

下一个简单但关键的引理，正是我们之后能够应用对角线技巧的约化的根本原因。

引理 3.5。沿用设定 *2.1* 和设定 *3.1* 中的记号，并记 $S = T/(p-f)$，其中 $T = W(k)[[z_1,\dots,z_n]]$，且 $f \in (p,z_1,\dots,z_n)^2$。存在一个映射 $T \to A_{\mathrm{inf}}(R^{A_{\infty}\mathrm{perfd}})$，使得下图是一个 *Tor*-独立推出：

$$\begin{array}{ccc}
T & \longrightarrow & A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
S & \longrightarrow & R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}.
\end{array}$$

固定这样的映射 $T \to A_{\mathrm{inf}}(R^{A_{\infty}\mathrm{perfd}})$ 后，我们有如下由自然映射构成的交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
C_\infty & \longrightarrow & (A_{\mathrm{inf}}(A'_\infty) \otimes_{W(k)} B'_\infty)^{\wedge p} & \longrightarrow & (A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \otimes_{W(k)} B_\infty)^{\wedge p} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C_\infty/(p-x_1) & \xrightarrow{\sim} & (A'_\infty \otimes_{W(k)} B'_\infty)^{\wedge p} & & A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \otimes_T (S/Q \otimes_B B_\infty) \\
 & & \downarrow & & \| \\
 & & (A_\infty \otimes_{W(k)} B_\infty)^{\wedge p} & \longrightarrow & R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes_S (S/Q \otimes_B B_\infty) \longrightarrow R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}.
\end{array}$$

特别地，对于任意的 $\mathcal{M}$ 上的 $R^{A_{\infty}\mathrm{perfd}} \otimes_S (S/Q)^{B_{\infty}\mathrm{perfd}}$ 模，其归一化长度 $\lambda^{x,\infty}_{\underline{y},\infty}(\mathcal{M})$ 是良定义的。

证明。 在 $A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})$ 中选取元素 $\widetilde{z}_1,\dots,\widetilde{z}_n$，使它们分别是 $R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}$ 中 $z_1,\dots,z_n$ 的任意提升。我们得到一个映射

$$W(k)[z_1,\dots,z_n]^{\wedge p}\to A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})$$

将 z_i 发送到 $\widetilde{z}_i$，使得模掉 p^m 后，它可纳入以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} W(k)[z_1,\dots,z_n]/p^m & \longrightarrow & A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})/p^m & \longrightarrow & A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})/(p,\xi)^m \\ \downarrow & & \overset{\alpha_m}{\nearrow} & & \downarrow \\ T/p^m\cong W(k)[[z_1,\dots,z_n]]/p^m & \hookrightarrow & R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}/p^m\cong A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})/(p^m,\xi) & \twoheadrightarrow & A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}{}_{\text{完美}})/(p,\ \xi) \end{array}$$

其中 $(\xi)=\ker(A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})\to R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})$。我们断言，存在唯一的映射 α_m（由虚线箭头表示），使得上述图交换。要证明这一点，只需注意到

$$W(k)/p^m[z_1,\dots,z_n]\to W(k)/p^m[[z_1,\dots,z_n]]$$

对所有 m 都是形式 étale 的：对于 $m=1$，$k[z_1,\dots,z_n]\to k[[z_1,\dots,z_n]]$ 的相对弗罗贝尼乌斯是同构（我们假设 k 是代数闭的），因此相对余切复形消失；这进而意味着，对所有 m，模导出 p 后的相对余切复形都消失，因此由导出中山引理可知，相对余切复形本身也消失。于是我们可以对 α_m 取逆极限，得到一个映射

$$T=\varprojlim_m T/p^m\to\varprojlim_m A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})/(p,\xi)^m=A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}).$$

为证明该图表的 Tor-独立性，根据 [BS22，引理 2.24]，只需证明 $p-f$ 映射到 $A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})$ 中的一个 distinguished 元素。但由于 $f\in(p,\ z_1,\ \dots\dots,\ z_n)^2$，不难验证 $\delta(p-f)\equiv\delta(p)$ 模 $(p,\ z_1,\ \dots\dots,\ z_n)A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})$，因此 $\delta(p-f)$ 是 $A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})$ 中的单位。

最后，通过将 $x_1\mapsto[p^\flat]\in A_{\mathrm{inf}}(A'_\infty)$ 和 $x_i\mapsto[x_i^\flat]\in A_{\mathrm{inf}}(A'_\infty)$ 发送到 $i\geq 2$，构造映射 $C_\infty\to(A_{\mathrm{inf}}(A'_\infty)\otimes_{W(k)}B'_\infty)^{\wedge p}$。直接验证可知，对 $(p-x_1)$ 取模后，此映射与 $C_\infty/(p-x_1)\to(A'_\infty\otimes_{W(k)}B'_\infty)^{\wedge p}$ 一致。交换图的其余部分基本上显而易见。对于最后一个断言，注意到任何 $\mathcal{M}$ 上的模都被 $\mathfrak{m}_S$ 幂挠，因此通过交换图将其视为 C_∞-模时，它是 $(x_1$、……、x_d、p、y_2、……、$y_c)$-幂挠。□

下一个引理基本上说明，$\chi^{x,\ y}_{\infty,\infty}(-\otimes^{\mathbb{L}}_S-)$两个几乎 Cohen–Macaulay 模的结果是正的。这应当被视为经典事实的几乎对应版本：两个 Cohen–Macaulay 模（其维数之和符合要求）的$\chi(-\otimes^{\mathbb{L}}_S-)$是正的。证明主要受 [BHM26] 中发展起来的极限 Cohen–Macaulay 序列理论的启发（前提是我们正确地建立 $\lambda^{x,\ y}_{\infty,\infty}(-)$和 $\chi^{x,\ y}_{\infty,\infty}(-)$）。

引理 3.6。 采用 设定 *2.1* 和 设定 *3.1*中的记号，则有

$$\begin{cases}\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big(\operatorname{Tor}^S_i(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}},(S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}})\big)=0 & when\ i>0;\\ \lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big(\operatorname{Tor}^S_i(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}},(S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}})\big)>0 & when\ i=0.\end{cases}$$

特别是，

$$\chi^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}\otimes^{\mathbb{L}}_S(S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}\big)=\sum_i(-1)^i\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big(\operatorname{Tor}^S_i(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}},(S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}})\big)>0.$$

证明。 我们首先注意到存在 $K \gg 0$，使得

$$\mathfrak{m}_S^K \subseteq \ker\left(S \to \mathrm{Hom}_{D(S)}\left(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}, R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}\right)\right).$$

这可由一个简单的谱序列论证得到，因为 $R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}} \in D^b(S)$的每个同调模都被 $P+Q$ 湮灭，而 $P+Q$ 是 $\mathfrak{m}_S$-primary 的。现在我们固定 S的一个参数系 $f_1, \dots, f_d, f_{d+1}, \dots, f_n \in \mathfrak{m}_S^K \subseteq P+Q$，使得 $f_1, \dots, f_d$ 是 $R = S/P$ 上的一个参数系，而 $f_{d+1}, \dots, f_n$ 是 S/Q 上的一个参数系。典范映射

$$\mathrm{Kos}(f_1, \dots, f_n; R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \to \left(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}\right)[n]$$

具有一个截面 n 位于 $D(S)$ 中。因此，$\mathrm{Tor}_i^S(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}, (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}})$ 是

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_i :=& H_{i+n}\left(\mathrm{Kos}(f_1, \dots, f_n; R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}})\right)\\ \cong& H_{i+n}\left(\mathrm{Kos}(f_1, \dots, f_d; R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \otimes^{\mathbb{L}}_S \mathrm{Kos}(f_{d+1}, \dots, f_n; (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}})\right).\end{aligned}$$

考察计算 $\mathcal{M}_i$ 的谱序列，我们知道 $\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(\mathcal{M}_i)$ 由 $\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(\mathcal{M}_{i,s,t})$ 之和控制，其中

$$\mathcal{M}_{i,s,t} := \mathrm{Tor}^S_{i+n-s-t}\left(H_s(\mathrm{Kos}(f_1, \dots, f_d; R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})), H_t(\mathrm{Kos}(f_{d+1}, \dots, f_n; (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}))\right).$$

假设 $i > 0$，那么 $\mathcal{M}_{i,s,t} \neq 0$ 当且仅当 $s \geq 1$ 或 $t \geq 1$。因此，要么 $H_s(\mathrm{Kos}(f_1, \dots, f_d; R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}))$ 是 g-几乎为零，要么 $H_t(\mathrm{Kos}(f_{d+1}, \dots, f_n; (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}))$ 是 h-几乎为零，其中 g 和 h 分别是 $A \to R$ 和 $B \to S/Q$ 的判别式，依据 [CLM+26，推论 4.0.4]。因此，若我们将 $\mathcal{M}_{i,s,t}$ 视为经由 $A_\infty \otimes_{W(k)} B_\infty$ 的一个模

$$A_\infty \otimes_{W(k)} B_\infty \to R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}},$$

那么，要么 $\mathcal{M}_{i,\,s,\,t}$ 作为一个 A_∞-模是 g-几乎为零，要么 $\mathcal{M}_{i,\,s,\,t}$ 作为一个 B_∞-模是 h-几乎为零。由于 $\mathcal{M}_{i,\,s,\,t}$ 被 $P+Q$ 消去，而 $P+Q$ 是 $\mathfrak{m}_S$-主理想，因此存在 $L \gg 0$ 使得 $\mathfrak{m}_A^L \mathcal{M}_{i,\,s,\,t} = 0 = \mathfrak{m}_B^L \mathcal{M}_{i,\,s,\,t}$。现在，若 $\mathcal{M}_{i,\,s,\,t}$ 作为一个 A_∞-模是 g-几乎为零，那么根据 $A_\infty \otimes_{W(k)} B_\infty$-线性满射

$$\mathcal{M}_{i,s,t} \otimes_{W(k)} B_\infty/\mathfrak{m}_B^L B_\infty \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{i,s,t},$$

我们有

$$\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(\mathcal{M}_{i,s,t}) \leq \lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(\mathcal{M}_{i,s,t} \otimes_{W(k)} B_\infty/\mathfrak{m}_B^L B_\infty) \leq \lambda^{\underline{x}}_\infty(\mathcal{M}_{i,s,t}) \cdot \lambda^{\underline{y}}_\infty(B_\infty/\mathfrak{m}_B^L B_\infty) = 0$$

其中第二个不等式由引理 3.3 得出，而等式由 [CLM+26、命题 4.0.10] 得出。类似地，$\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(\mathcal{M}_{i,\,s,\,t}) = 0$ 如果 $\mathcal{M}_{i,\,s,\,t}$ 作为一个 B_∞-模是 h-几乎为零。综合以上结果，我们有

$$\lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\left(\mathrm{Tor}^S_i(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}, (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}})\right) \leq \lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(\mathcal{M}_i) \leq \sum_{s,t} \lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(\mathcal{M}_{i,s,t}) = 0$$

对所有 $i > 0$。最后，当 $i = 0$ 时，我们有自然满射

$$\left(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}/\mathfrak{m}_S^K R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}\right) \otimes_{W(k)} \left((S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}/\mathfrak{m}_S^K (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}\right) \twoheadrightarrow R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}$$

$$R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}} \twoheadrightarrow \left(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}/\mathfrak{m}_S R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}\right) \otimes_k \left((S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}/\mathfrak{m}_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}\right).$$

第一个满射、引理 3.3和 [CLM+26、推论 4.0.18] 意味着 $\lambda^{\underline{x}}_{\infty}\big(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}} \underline{\otimes}_S (S/Q)^{B_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}\big) < \infty$；而第二个满射、引理 3.3和 [CLM+26、命题 4.0.20]意味着 $\lambda^{\underline{x}}_{\infty}\big(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}} \otimes_S (S/Q)^{\underline{B_\infty}}{}_{\mathrm{perfd}}\big) > 0$。□

引理 3.7。 采用 设定 *2.1* 和 设定 *3.1*中的记号。则有

$$\chi^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S ((S/Q) \otimes_B B_\infty)\big) = \chi^{\underline{x}}_{\infty}\big(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)\big).$$

证明。 由于 B_∞ 在 B 上忠实平坦，且 $R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)$ 是 $\mathfrak{m}_S$-幂挠的，因此有

$$R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S ((S/Q) \otimes_B B_\infty) = (R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)) \otimes^{\mathbb{L}}_B B_\infty = (R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)) \otimes^{\mathbb{L}}_{B'} B'_\infty. \tag{3.7.1}$$

现在， $R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)$ 的每个同调都是 $R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}} \otimes_S (S/Q)$ 上的模，并且是 $\mathfrak{m}_S$-幂挠的，特别地，它也是以下对象上的模

$$W(k)[x_1^{1/p^\infty}, x_2^{1/p^\infty}, \dots, x_d^{1/p^\infty}, y_2, \dots, y_c]^{\wedge p}/(p - x_1)$$

即 $(x_1, \dots, x_d, p, y_2, \dots, y_c)$-幂挠（参见引理 3.5中的最后一个交换图）。由引理 3.4，可得

$$\begin{aligned} \lambda^{\underline{x}}_{\infty}\big(H_i(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q))\big) &= \lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big(H_i(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)) \otimes_{B'} B'_\infty\big) \\ &= \lambda^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big(H_i((R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)) \otimes^{\mathbb{L}}_{B'} B'_\infty)\big) \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

其中第二个等式是由 p-完备平坦性得出的，其中 B'_∞ 在 B' 上（特别地，这说明(3.7.2)右侧是有限的，因为根据定理 2.2，左侧是有限的）。现在，对(3.7.2) 两边取交错和，并利用(3.7.1)，即可完成引理的证明。□

我们汇总迄今为止证明的结果，概述证明策略，并指出最后尚待完成的一步。

讨论 3.8。 采用设定 2.1 和设定 3.1中的记号，根据 perfectoid 化的同源定理 [CLM+26，命题 2.4。7], 我们有一个短正合序列：

$$0 \to (S/Q) \otimes_B B_\infty \to (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}} \to G \to 0 \tag{3.8.1}$$

其中 G 被 h^K 湮灭，其中 $K > 0$ 是 $h \notin Q$ 的判别式 $B \to (S/Q)$。将 h 替换为 h^K后，我们有 G 是 $S/(Q + h)$ 上的一个模 $\otimes_B B_\infty$。根据定理 2.2和引理 3.7，我们得到

$$\begin{aligned} \chi(S/P \otimes^{\mathbb{L}}_S S/Q) &= \chi^{\underline{x}}_{\infty}\big(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)\big) \\ &= \chi^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S ((S/Q) \otimes_B B_\infty)\big) \\ &= \chi^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}\big(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S (S/Q)^{B_\infty}_{\mathrm{perfd}}\big) - \chi^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S G) \end{aligned}$$

其中最后一个等式由(3.8.1)得出。根据引理 3.6，若能证明 $\chi(S/P \otimes^{\mathbb{L}}_S S/Q) > 0$，则有

$$\chi^{\underline{x},\underline{y}}_{\infty,\infty}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S G) = 0. \tag{3.8.2}$$

注意到 $\lambda^{\underline{x}}_{\infty}\big(H_i(R^{A_\infty}{}_{\text{完美导出}} \otimes^{\mathbb{L}}_S G)\big) < \infty$ 对所有 i，通过考察以下对象的长正合序列(3.8.1) 与 $R^{A_\infty}{}_{\text{完美导出}}$（因此特别地， $\chi^{\underline{x}}_{\infty}(R^{A_\infty}{}_{\text{完美导出}} \otimes^{\mathbb{L}}_S G)$ 是良定义的）。我们将通过“(3.8.2)对角化约”来证明。

为便于表述，我们先引入一些记号。

设定 3.9。我们继续使用设定 2.1 和设定 3.1 中的记号。我们写作$S = T/(p - f)$，其中 $T = W(k)[[z_1, \dots, z_n]]$且 $f \in (p, z_1, \dots, z_n)^2$。对于两个 T-模 M和 N，我们用 $M \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W}(k) N$表示相对于理想 $(p, z_i \otimes 1, 1 \otimes z_j \mid 1 \le i, j \le n) \subseteq T \otimes_{W(k)} T$对 $M \otimes^{\mathbb{L}}_{W(k)} N$进行的导出完备化。特别地， $T \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W}(k) T$同构于一个以 $W(k)$ 为系数环、含 $2n$ 个变量的幂级数环，可将其识别为 $z_i \otimes 1$ 和$1 \otimes z_j$（其中 $1 \le i, j \le n$）。记 $\delta_i := z_i \otimes 1 - 1 \otimes z_i \in T \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W}(k) T$。固定 $h \notin Q$（它将是讨论 3.8 中 $B \to S/Q$ 的判别式的一个幂），并固定一个如引理 3.5 中的映射 $T \to A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}\text{perfd})$，我们考虑

$$A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} S/(Q + h)$$

作为一个 $T \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} T$-代数。注意，$(T \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} T)/^{\mathbb{L}}(\delta_1, \dots, \delta_n) \cong T$并且根据引理 3.5，

$$\begin{aligned} &\big(A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} S/(Q + h)\big)/^{\mathbb{L}}(\delta_1, \dots, \delta_n) \\ =&\mathrm{Kos}\big(\delta_1, \dots, \delta_n; \big(A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} S/(Q + h)\big)\big) \\ \cong&A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{T} S/(Q + h) \\ =&R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_{S} S/(Q + h). \end{aligned} \tag{3.9.1}$$

注记 3.10。我们注意到， $A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}\text{perfd}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W}(k) S/(Q + h)$ 是一个离散的（局部）环。事实上，对于任意有限生成的 T-模 N， $A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}\text{perfd}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W}(k) N$都是离散的。为说明这一点，我们可以通过对 N 进行滤化，假设 N 要么是 p-挠自由的，要么是 p-挠的。在这两种情形下，只需证明 $(R^{A_\infty}\text{perfd})^\flat \widehat{\otimes}_k N'$ 是离散的，其中 N' 是一个有限生成的 T/p-模。由 N' 的诺特性，$z_1, \dots, z_n$ 是 N' 上的弱投射正则序列；又由于 $(R^{A_\infty}\text{perfd})^\flat$ 是完美的， $z_1, \dots, z_n$ 的像在 $(R^{A_\infty}\text{perfd})^\flat$ 上构成一个投射正则序列（因而也是弱投射正则序列）。[2] 考察 $z_1^m \otimes 1, \dots, z_n^m \otimes 1, 1 \otimes z_1^m, \dots, 1 \otimes z_n^m$ 上的 Koszul复形，便容易看出 $z_1 \otimes 1, \dots, z_n \otimes 1, 1 \otimes z_1, \dots, 1 \otimes z_n$ 是 $(R^{A_\infty}\text{perfd})^\flat \otimes_k N'$ 上的弱投射正则序列。因此，其导出完备化是离散的。（关于我们所使用的有关（弱）投射正则序列和导出完备化的各种事实，参见 [Sch03]。）

我们证明 (3.8.2) 的思路是应用 (3.9.1) ，将 χ^x、∞^y、∞ 的计算归约为一个 Koszul复形，然后证明在 设定 3.9下，$(\delta_1, \dots, \delta_n)$ 的某个生成元在 $A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}\text{perfd}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} S/(Q + h)$ 中是多余的（除幂次之外）。为确立这一点，我们需要先对赋值理论作一些准备（这也使我们能够证明一个更强的结果）。

对于环 R 上的赋值 v，我们用 Γ_v 和 k_v 分别表示由其在 R/Q 的分式域上的诱导赋值的值群和剩余域，其中 $Q := v^{-1}(\infty)$ 是 v 在 R 上的支撑。我们回顾一下 Γ_v 和 k_v 的行为的两个基本观察：

- 设 $R \to R'$ 是一个整扩张，且 w 是 R' 上的一个赋值，它扩张了 R 上的赋值 v。那么 Γ_w/Γ_v 是挠的，而 k_w/k_v 是代数扩张。
- 设 v 是定义在 R 上的秩一赋值，且 J 是 R 的有限生成理想，并且包含于 v 的中心中（即， $v(J) > 0$）。令 w 为定义在 $R^{\wedge J}$ 上的赋值，其定义为 $w(\lim_i r_i) := \lim_i v(r_i)$。则 $\Gamma_w = \Gamma_v$ 且 $k_w = k_v$。

[2] 若 R是完美的，且 $f_1, \dots, f_n$是 R中的任意序列，则 $(f_1^{pm}, \dots, f_i^{pm}) : f_{i+1}^{pm} \subseteq (f_1^m, \dots, f_i^m) : f_{i+1}^{pm-m}$。

我们记录环运算下值群和剩余域的两个性质（这些结果对于专家而言应当是众所周知的）。首先，我们研究它们在完美拟化下的性质。

引理 3.11. 设 R 是一个环，使得 R_{perfd} 是离散的（因而是完美拟环）。假设 w 是 R_{perfd} 上的秩一赋值，且满足 $w(p) > 0$，并令 v 为其在 R 上的限制。那么 Γ_w/Γ_v 是挠的，且 k_w/k_v 是代数扩张。

证明. 若 $w(p) = \infty$，则 w 是 R_{perfd}/p 上的一个赋值，结论由 $R/p \to R_{\mathrm{perfd}}/p$ 是整的即得。以下我们假设 $w(p) < \infty$。令 $Q \in \mathrm{Spec}(R)$ 为 v 的支撑，并令 F 为 R/Q 的分式域。同样，令 $Q' \in \mathrm{Spec}(R_{\mathrm{perfd}})$ 为 w 的支撑，并令 F' 为 R_{perfd}/Q' 的分式域。取 F' 的一个 p 完备代数闭包 $\widehat{\overline{F}}$ 的代数闭包的 $\widehat{p}$-进闭包。那么 $\mathcal{O}_{\widehat{F}}$ 是一个秩一完美拟赋值环，因此我们有

$$R \to R_{\mathrm{perfd}} \to \mathcal{O}_{\widehat{\overline{F}}} \to \mathcal{O}_{\widehat{\overline{F'}}}$$

根据完美化的泛性质。特别地，映射 $R_{\mathrm{perfd}} \to \mathcal{O}_{\widehat{F}}$ 可经由 R_{perfd}/Q' 分解，因此我们有

$$F \to F' \to \widehat{\overline{F}} \to \widehat{\overline{F'}}$$

作为赋值域之间的映射。特别地，若 w 是 F 上的秩一赋值，其赋值环为 $\mathcal{O}_{\widehat{F}}$，那么 w 和 v 分别是它在 F' 和 F 上的限制。由于 Γ_w/Γ_v 是挠的，且 k_w/k_v 是代数的，因此 Γ_w/Γ_v 是挠的，且 k_w/k_v 是代数的。□

下一个引理为专家所熟知，并可由以下更一般的结果推出：[Ked13，推论 8。19]我们在此情境下给出一个简短的证明。

引理 3.12。 设 R 是特征为 p 的完美环，且 w 是 $W(R)$ 上的秩一赋值，使得 $w(p) > 0$。那么 $v(r) := w([r])$ 定义了 R 上的秩至多为一的赋值，并具有自然包含 $\Gamma_v \subseteq \Gamma_w$ 和 $k_v \subseteq k_w$。此外，

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_w/\Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) + \mathrm{trdeg}_{k_v} k_w \leq 1.$$

证明。注意，$R' := W(R)[p^{1/p^\infty}]^{\wedge p}$ 是一个完美拟环，而 $W(R) \to R'$ 是一个 p-完备的整扩张。因此，将 w 延拓为 w' 在 R' 上的赋值（通过设定 $w'(p^{1/p^e}) = w(p)/p^e$），我们知道 $\Gamma_{w'}/\Gamma_w$ 是挠的，且 $k_{w'}/k_w$ 是代数的。

根据倾斜对应 [Sch12，引理 3.4 (iii)]，w' 在 $R'^\flat \cong R[t^{1/p^\infty}]^{\wedge t}$ 上诱导出一个秩一赋值 w''，使得 $\Gamma_{w'} = \Gamma_{w''}$ 和 $k_{w'} = k_{w''}$。显然可以验证 $w''|_R = v$，其中 v 按引理中的定义（因此特别地，v 是 R 上的秩至多为一的[3] 赋值）。令 $v' := w''|_{R[t]}$。由于 $R[t] \to R[t^{1/p^\infty}]^{\wedge t}$ 是一个 t-完备的整扩张，且 $v'(t) = w''(t) = w'(p) > 0$（因此 t 在中心中），我们知道 $\Gamma_{w''}/\Gamma_{v'}$ 是挠的，且 $k_{v'} \to k_{w''}$ 是代数的。最后，根据 Abhyankar 不等式的相对版本 [Bou98，VI.10.3，推论 1]，我们有

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{v'}/\Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) + \mathrm{trdeg}_{k_v} k_{v'} \leq 1.$$

因此，将 $\Gamma_{v'}$ 替换为 Γ_w，并将 $k_{v'}$ 替换为 k_w 后，结论仍然成立。□

下一个结果是我们证明(3.8.2)的关键组成部分。

[3] v 可能是平凡赋值（例如，$R = \mathbb{F}_p$，而 w 是 $\mathbb{Z}_p$ 上的 p-进赋值）。

命题 *3.13*。采用设定 *3.9* 中的记号。假设 $\delta_1,\dots,\delta_n$ 是 $\delta_1,\dots,\delta_n$ 的一般 $W(k)$-线性组合。那么理想 $(\delta_1,\dots,\delta_n)\big(A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}\text{perfd})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)}S/(Q+h)\big)$ 整于 $(\widetilde{\delta}_1,\dots,\widetilde{\delta}_{n-1})\big(A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}\text{perfd})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)}S/(Q+h)\big)$。特别地，存在一个整数$L>0$，使得

$$\widetilde{\delta}_n^L \in (\widetilde{\delta}_1,\dots,\widetilde{\delta}_{n-1})\big(A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)}S/(Q+h)\big).$$

证明。在下文中，我们用 $(U,\ \mathfrak{m}_U,\ k)$ 表示局部环 $A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)}S/(Q+h)$。我们将考察 U 上的秩一赋值。

断言 3.14。对于 $\mathfrak{m}_U$ 中心化于 $\mathfrak{m}_U$ 上的任意秩一赋值 v，我们有 $\mathrm{trdeg}_k k_v < n-1$。

断言的证明。假设 $\mathrm{trdeg}_k k_v \geq n-1$。于是我们有

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_v\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})+\mathrm{trdeg}_k k_v \geq n.$$

令 v_0 为 v 在 $A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)}S/(Q+h)$ 上的限制，并令 Q' 为 v_0（的限制）在 $S/(Q+h)$ 上的支撑。于是我们在 $A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)}S/Q'$ 上得到一个赋值 v_0，其值群和剩余域与 v 相同，特别地

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{v_0}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})+\mathrm{trdeg}_k k_{v_0} \geq n.$$

注意，$\dim(S/Q') \leq \dim(S/(Q+h)) = c-1$。若 $p\notin Q'$，则令 $W(k)[[t_2,\dots,t_{c-1}]]\to S/Q'$ 为一个模有限映射。若 $p\in Q'$，则令 $k[[t_1,\dots,t_{c-1}]]\to S/Q'$ 为一个模有限映射。在这两种情况下，令 v_1 为 v_0 在以下对象上的限制

$$A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)}W(k)[[t_2,\dots,t_{c-1}]] \quad\text{or}\quad A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)}k[[t_1,\dots,t_{c-1}]]$$

分别如此。在这两种情况下，我们都有

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{v_1}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})+\mathrm{trdeg}_k k_{v_1} \geq n.$$

进一步，令 v_2 为 v_1 在

$$A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)}W(k)[t_2,\dots,t_{c-1}] \quad\text{or}\quad A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)}k[t_1,\dots,t_{c-1}].$$

那么，v_2 和 v_1 具有相同的值群和剩余域，因此

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{v_2}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})+\mathrm{trdeg}_k k_{v_2} \geq n.$$

根据 Abhyankar 不等式的相对版本（参见 [Bou98, VI.10.3, Corollary 1]）以及引理 3.12，我们由此得到，无论是哪种情况，在 $(R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}})^\flat$ 上都存在一个以其极大理想为中心的秩一赋值 v'，使得

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{v'}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})+\mathrm{trdeg}_k k_{v'} \geq n-(c-1).$$

由倾斜对应（[Sch12，引理 3.4(iii)]）可知，在 $R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}$ 上存在一个以其极大理想为中心的秩一赋值 w，使得

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{w}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})+\mathrm{trdeg}_k k_{w} \geq n-(c-1).$$

最后，令 w' 为 w 在 R上的限制。由于 $R\to R\otimes_A A_\infty$ 是一个 p-完备整扩张，且 $(R\otimes_A A_\infty)_{\mathrm{perfd}} = R^{A_\infty}{}_{\mathrm{perfd}}$ 是离散的，根据引理 3.11 可得

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{w'}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})+\mathrm{trdeg}_k k_{w'} \geq n-(c-1).$$

但这与经典的 Abhyankar 不等式 [Abh56，定理 1]，，即 $\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{w'}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})+\mathrm{trdeg}_k k_{w'} \leq \dim(R) = d = n-c$. □

现在我们回到命题的证明。设 $J:=(\delta_1,\dots,\delta_n)U$。根据 断言 3.14和 引理 3.15 （见下文），我们知道有限生成的 k-代数

$$\mathcal{F}_J(U) := k \oplus J/\mathfrak{m}_U J \oplus J^2/\mathfrak{m}_U J^2 \oplus \cdots$$

$\sim$ $\sim$的维数至多为 $n-1$。由于 k 是无限的，因此 $\delta_1,\dots,\delta_{n-1}$ 在$\mathcal{F}_J(U)$中的像构成一个齐次参数系。因此，对于 $L \gg 0$,

$$J^L \subseteq (\widetilde{\delta}_1,\dots,\widetilde{\delta}_{n-1})J^{L-1} + \mathfrak{m}_U J^L$$

$\sim$ $\sim$，因此由中山引理可得 $J^L =(\delta_1,\dots,\delta_{n-1})J^{L-1}$。这证明了 J在$\sim$ $\sim$$(\delta_1,\dots,\delta_{n-1})U$上是整的，最后的断言由此显然成立。□

上文用到了下面这个简单的引理。

引理 3.15. 设 $(R,\mathfrak{m}_R,k)$ 是一个（不一定是诺特的）局部环，并设 $J =(f_1,\dots,f_n) \subseteq R$ 是一个有限生成理想，使得 $\sqrt{J} = \mathfrak{m}_R$。假设自然映射

$$R/\mathfrak{m}_R[T_1,\dots,T_n] \twoheadrightarrow \mathcal{F}_J(R) := R/\mathfrak{m}_R \oplus J/\mathfrak{m}_R J \oplus J^2/\mathfrak{m}_R J^2 \oplus \cdots$$

将 T_i 映射到 $\overline{f}_i \in J/\mathfrak{m}_R J$ 是一个同构。于是存在一个以 $\mathfrak{m}_R$ 为中心的 R的秩一赋值 v，使得 $\mathrm{trdeg}_k k_v \geq n-1$。

证明。 考虑交换图：

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Proj}\mathcal{F}_J(R) \cong \mathbb{P}^{n-1}_k & \hookrightarrow & Y := \operatorname{Bl}_J(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec}(k) & \hookrightarrow & \operatorname{Spec}(R). \end{array}$$

设 η 是 Y内不可约子概形 $\mathbb{P}^{n-1}_k$ 的一般点。于是我们有局部环的映射：

$$(R,\mathfrak{m}_R) \to (\mathcal{O}_{Y,\eta},\mathfrak{m}_\eta).$$

设 v 是$\mathcal{O}_Y$的任意赋值，η 以 $\mathfrak{m}_\eta$ 为中心，并支撑于$\mathcal{O}_Y$的某个素理想 $\mathfrak{Q} \neq \mathfrak{m}_\eta$，$\eta$。设 Q 是 $\mathfrak{Q}$ 到 R的收缩。则 v 是以 $\mathfrak{m}_R$ 为中心并支撑于 Q 的 R 的赋值（注意，R/Q的分式域与$\mathcal{O}_Y$的分式域一致，$\eta/\mathfrak{Q}$）。显然，$\mathrm{trdeg}_k k_v \geq n-1$，因为根据构造，$k_v$是 $\mathbb{P}^{n-1}_k$ 的函数域的扩张。还要注意，根据构造，对于所有 i 和 j，$v(f_i) = v(f_j)$，因为 $T_i/T_j \in \mathcal{O}_{Y,\eta}$ 是一个单位。因此，$f_i = u_i \cdot f \in V$，其中 V 是 v 的赋值环，而 $u_i \in V^\times$。注意

$$\mathfrak{p} := \cap_n (fV)^n \subseteq \sqrt{fV} =: \mathfrak{q}$$

是 V 的两个中间素理想。将 v 替换为与赋值环 $(V/\mathfrak{p})_\mathfrak{q}$ 相对应的秩一赋值，很容易看出，v 仍然是 R 上的一个以 $\mathfrak{m}_R$ 为中心、具有 $\mathrm{trdeg}_k k_v \geq n-1$ 的赋值。□

最后，我们已经具备了证明蕴含 Serre 正性的主要结果所需的全部要素。

定理3.16。 采用讨论 *3.8*中的记号。我们有

$$\chi^{x,y}_{\infty,\infty}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S G) = 0.$$

特别地，我们有

$$\chi(S/P \otimes^{\mathbb{L}}_S S/Q) > 0.$$

证明。 定理中的“特别地”部分由以下内容得出讨论 3.8，前提是我们能够证明定理的第一个陈述。

为证明第一个结论，我们沿用设定 3.9中的记号。令 $\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_n$ 为 $W(k)$-线性组合 $\delta_1, \dots, \delta_n$，它们满足命题 3.13的结论。固定一个整数 $L > 0$ 使得

$$\widetilde{\delta}_n^L \in (\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1})\big(A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} S/(Q+h)\big) \tag{3.16.1}$$

根据命题 3.13，现在我们有

$$\begin{aligned} R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S G &\cong A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}}) \otimes^{\mathbb{L}}_T G \\ &\cong \mathrm{Kos}(\delta_1, \dots, \delta_n; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G) \\ &\cong \mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_n; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G) \end{aligned}$$

其中，第一个等号由引理 3.5得出。特别地，我们有

$$\begin{aligned} \chi^{\underline{x},y}_{\infty,\infty}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S G) &= \chi^{\underline{x},y}_{\infty,\infty}\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_n; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big) \\ &= \frac{1}{L} \cdot \chi^{\underline{x},y}_{\infty,\infty}\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}, \widetilde{\delta}_n^L; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big) \end{aligned} \tag{3.16.2}$$

其中，第二个等号是通过对Koszul复形进行滤过得到的。注意，通过对Koszul复形进行滤过并考察Koszul 同调的长正合序列，我们还知道

$$\lambda^{\underline{x},y}_{\infty,\infty}\big(H_i\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}, \widetilde{\delta}_n^L; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big)\big) < \infty$$

对所有 i（因为 $\lambda^{\underline{x},y}_{\infty,\infty}\big(H_i\big(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}} \otimes^{\mathbb{L}}_S G\big)\big) < \infty$ 对所有 i，参见 讨论 3.8的最后一段）。现在，由于 G 是一个 $S/(Q+h)$ 上的模，根据 (3.16.1) 我们知道

$$\begin{aligned} & H_i\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}, \widetilde{\delta}_n^L; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big) \\ \cong\ & H_i\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}, 0; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big) \\ \cong\ & H_i\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big) \oplus H_{i-1}\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big) \end{aligned}$$

对所有 i。特别地，这意味着

$$\lambda^{\underline{x},y}_{\infty,\infty}\big(H_i\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big)\big) < \infty$$

对所有 i，取归一化长度的交错和后，我们得到

$$\begin{aligned} & \chi^{\underline{x},y}_{\infty,\infty}\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}, \widetilde{\delta}_n^L; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big) \\ =\ & \sum_i (-1)^i \lambda^{\underline{x},y}_{\infty,\infty}\big(H_i\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}, \widetilde{\delta}_n^L; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big)\big) \\ =\ & \sum_i (-1)^i \lambda^{\underline{x},y}_{\infty,\infty}\big(H_i\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big)\big) \\ & + \sum_i (-1)^i \lambda^{\underline{x},y}_{\infty,\infty}\big(H_{i-1}\big(\mathrm{Kos}(\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_{n-1}; A_{\mathrm{inf}}(R^{A_\infty}_{\mathrm{perfd}})\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{W(k)} G)\big)\big) \\ =\ & 0. \end{aligned} \tag{3.16.3}$$

将 (3.16.2)与 (3.16.3) 结合起来，即完成了定理的证明。 □

定理 1.1 的证明。不妨设 S 是完备的，且具有代数闭剩余域。如果 S/P 和 S/Q 的特征均为 p，则该结果已由 [Mal72] 知晓（或者，根据 [BHM26, 定理 5.4]，S/P 和 S/Q 均具有极限 Cohen–Macaulay 序列，因此由 [BHM26, 定理 6.1]也可得到该结果）。如果 S/P 是p-挠自由的，且 S/Q 的特征为 p，则由定理 2.4 得到该结果。最后，如果 S/P 和 S/Q 均为 p-挠自由的，则由定理 3.16 得到该结果。□

References

[Abh56] S. Abhyankar：关于以局部整环为中心的赋值，《美国数学杂志》78 (1956)，321–348。82477[Ber97] P. Berthelot：代数簇的变形（据 A. J. de Jong），第 241 号，1997 年，第 815 号报告，5，273–311，Bourbaki 研讨会，1995/96 卷。1472543[BHM26] B. Bhatt, M. Hochster, and L. Ma：模的 Cohen–Macaulay 序列，《纯粹与应用数学杂志》835 (2026)，111–169。5080046[BS22] B. Bhatt and P. Scholze：棱镜与棱镜上同调，《数学年刊》（第 2 辑）196 (2022)，第 3 期，1135–1275。4502597[Bou98] N. Bourbaki：交换代数。第 1–7 章，数学原理丛书（柏林），施普林格出版社，柏林，1998 年，法文译本，1989 年英文译本重印。MR1727221 (2001g:13001)[CLM+26] H. Cai, S. Lee, L. Ma, K. Schwede, and K. Tucker：完美拟合特征、完美拟合 Hilbert–Kunz 重数及其在局部基本群中的应用，《数学发明》244 (2026)，第 2 期，357–454。5008168[Fal02] G. Faltings：几乎 étale 扩张，第 279 号，2002 年，第 185–270 页，《上同调与算术应用》，第二部分。1922831[GS87] H. Gillet and C. Soulé：利用 Adams 运算的交理论，《数学发明》90 (1987)，第 2 期，243–277。910201[Hoc97] M. Hochster：遵循 Gabber/De Jong/Berthelot，分歧正则局部环中交重数的非负性，https://sites.lsa.umich.edu/hochster/wp-content/ uploads/sites/1337/2024/10/mult.pdf，1997。[Ked13] K. S. Kedlaya：Witt 向量的非阿基米德几何，《名古屋数学杂志》209 (2013)，111–165。3032139[Kur93] K. Kurano：无特征 Dutta 重数的一种处理方法，《日本数学会杂志》45 (1993)，第 3 期，369–390。1219875[Ma26] L. Ma：所有特征下的 Lech 猜想，https://lquanma1019.github.io/Lech.pdf，2026。[Mal72] M.-P. Malliavin：关于正则局部环的一个注记，P. Dubreil、M.-L. Dubreil-Jacotin、L. Lesieur 与 C. Pisot 研讨会（1970/71 学年），代数与数论，第 2 册，数学秘书处，巴黎，1972 年，第 13 号报告，7。396543[Ope26] OpenAI：Serre 交重数的正性，2026。[Rob85] P. Roberts：完美复形交数的消失，《美国数学会通报》（新辑）13 (1985)，第 2 期，127–130。799793[Sch03] P. Schenzel：拟正则序列、局部上同调与完备化，《斯堪的纳维亚数学杂志》92 (2003)，第 2 期，161–180。1973941[Sch12] P. Scholze：完美拟空间，《高等科学研究所数学出版物》116 (2012)，245–313。3090258[Ser65] J.-P. Serre：局部代数。重数，数学讲义丛书，第 11 卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1965 年，法兰西学院课程，1957–1958 年，Pierre Gabriel 编写，第二版，1965 年。201468

Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, IN, USA电子邮件地址: ma326@purdue.edu