arXiv:2611.31807v1 [math.RA] 24 Nov 2026

线性秩-k 不增保持映射

Huajun Huang*

摘要

我们刻画了矩形矩阵空间之间将秩至多为 k 的矩阵映射为秩至多为 k 的矩阵的线性映射。在任意域上，这样的映射具有 $X \mapsto MXN$ 或 $X \mapsto MX^{\mathsf{T}}N$ 的形式，或者其像整体的上秩至多为 k。证明使用了行列式簇上的多项式函数，并将 Loewy 无限域定理推广到了所有有限域。在含有多于两个元素的域上，精确保持秩 k 蕴含秩-k 不增。在 $\mathbb{F}_2$ 上，对每个 $k \geq 2$，我们构造了一个秩-k 保持映射，它将一个秩一矩阵映射为秩 $k+1$ 的矩阵。对于像的上秩为 k 的映射，三个分块秩等式刻画了精确保持。在 $\mathbb{C}$ 上，我们将 Huang–Landsberg 分类与 PGL_k 上的次数障碍相结合，证明每个由秩四保持映射产生的上秩四本原核心，在等价和转置意义下，都是 $\mathbb{C}^5$ 上的投影外积空间。若任一源空间维数超过五，则每个复秩四保持映射要么带有满秩因子的标准形式，要么是压缩。一个 4×5 例子达到了这一界限。次数障碍还表明，在任意代数闭域上，当 $4 \mid k$ 时，每个线性映射 $\mathrm{M}_k \to \mathrm{Alt}_{k+1}$ 都会将某个可逆矩阵映射为秩至多为 $k-2$ 的矩阵。

关键词。 线性保算子、有界秩、行列式簇、本原矩阵空间、Pfaff 簇。

2020 年数学主题分类。 15A86, 15A03, 14M12,15A75.

1 引言

设 $\phi\colon \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{F})$ 是域 $\mathbb{F}$ 上矩阵空间之间的线性映射，并固定 $1 \leq k \leq \min(m, n)$。我们要探究，在秩为 k 或秩至多为 k的矩阵上， ϕ 的取值能说明 ϕ在全矩阵空间上的哪些性质。记

$$\mathcal{D}_k^{m,n} = \{X : \operatorname{rank} X \leq k\}, \qquad \mathcal{R}_k^{m,n} = \{X : \operatorname{rank} X = k\}$$

分别表示行列式轨迹及其秩为-k 的分层。若 ϕ 秩不增k ，则称其为秩-k不增，即 $\phi(\mathcal{D}_k^{m\ n}) \subseteq \mathcal{D}_k^{p\ q}$。若 $\phi(\mathcal{R}_k^{m\ n}) \subseteq \mathcal{R}_k^{p\ q}$，则称其保秩；这一条件要求 $k \leq \min(p, q)$。矩阵空间记号中省略 $\mathbb{F}$ ，并记作 $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{n,n}$。对于矩阵空间 S，其上秩 为 urk $S = \max_{Y \in S}$ rank Y，取遍
给定域上的矩阵。

*美国阿拉巴马州奥本市奥本大学数学与统计系，邮编 36849。电子邮箱： huanghu@auburn.edu

一个 标准映射 具有以下形式之一

$$X \longmapsto MXN \qquad \text{or} \qquad X \longmapsto MX^{\mathsf{T}}N \tag{1}$$

具有尺寸相容的固定因子。在任一种情况下，对每个X，秩 $\phi(X) \leq \operatorname{rank} X$。

定理 1.1 (秩-k 在任意域上不增加)。 映射 ϕ 是秩-k不增加的，当且仅当它是标准形式或 $\operatorname{urk}(\operatorname{im}\phi) \leq k$。因此，每个秩-$k$ 不增加的映射都满足

$$\operatorname{rank}\phi(X) \leq \max\{k, \operatorname{rank} X\} \qquad \textit{for every } X \in \mathrm{M}_{m,n}.$$

Loewy 证明了：当像包含一个秩大于k [24]的矩阵时，全矩阵空间上代数闭域上的自同态具有标准形式。他后来指出，同一结论对每个无限域都成立 [25,注 5]。对于秩-k 不增加的情形，无限域上的矩形版本可通过取一个足够大的方阵的坐标块，应用ϕ，并在输出中补零得到。将 Loewy 的结果应用于该自同态，再限制回源块，只要像的上秩大于 k，便可得到 (1)。当 $|\mathbb{F}| > k+1$时，也可以转到代数闭包。将一个秩至多为 k 的矩阵写成 $X = AB$ ，其中 $A \in \mathrm{M}_{m,\,k}$ 且 $B \in \mathrm{M}_{k,\,n}$。 $\phi(AB)$的每个 $(k+1)$ 子式关于 A， B中的每个元素的次数至多为 $k+1$ ，因此，在 $\mathbb{F}$ 上消失意味着通过插值 [21]在其代数闭包上也消失。若 $\operatorname{urk}(\operatorname{im}\phi) > k$，那么代数闭包上的 Loewy 定理给出 $\mathbb{F}$上的秩一不增加，而 Botta 定理 [6] 则给出 $\mathbb{F}$ 上 (1) 中的一种标准形式。Huang 和 Tsai 利用一般三次行列式的 Chow 秩 [21]，对元素个数至少为五的域上的秩二不增加映射进行了分类。

定理 1.1 的证明在基域上成立，包括 $\mathbb{F}_2$。每个次数至多为 $k+1$ 的多项式，只要在 $\mathcal{D}_k^{m\,n}$，上消失，就作为 $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ 上的函数等于 $(k+1)$ 阶子式的线性组合。我们将这一事实应用于方形输出块，以证明 $\operatorname{urk}(\operatorname{im}\phi) > k$ 必然导致秩一不增加。接着由 Botta 定理得到标准形式。

在有界像情形中，哪些上秩为 k 的空间存在一种线性参数化，使其对每个秩为 k 的输入都达到秩 k？ Atkinson–Lloyd 约化 [3] 将那些删除后会降低上秩的行和列分离出来；去掉未使用的行和列后，留下一个本原核心。当核心为零时，适当选择输出基，可以使每个像矩阵的支集都落在 $a+b \leq k$个 a 行和 b 列的并集中。我们将具有这种支集的映射称为上秩至多为 k 的压缩 。在 $\mathbb{C}$ 上，Huang 和 Landsberg 对四个上秩为四的基本空间 [20]进行了分类。要求参数化保持四阶秩，可从中选出一个模型。

定理 1.2 (复数域上的四阶秩保持映射 $\mathbb{C}$)。 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$、 $k = 4$ 和 ϕ保持四阶秩。若 $\max(m,n) > 5$，则 ϕ 是标准形式，具有满列秩

左因子和满行秩右因子；或者它是一个压缩，且 $a+b=4$。五这个界是锐利的。

对于有界像保持映射，每个上秩为四的本原核心，在等价和转置意义下，都是 $U=\mathbb{C}^5$ 上的一个投影外积空间。其矩阵具有如下形式：$y\mapsto T(z\wedge y)$，其中 z 遍历 U，且线性投影 T 的核不包含非零可分解双向量。

定理 6.3 给出了所有可能核心的完整描述。第 5 节中的外积构造在一个 4×5 源空间上达到了五这一上界。为了排除其他基本模型，我们利用其系数的线性条件，以及命题 6.1 证明的射影秩下降轨迹次数的整除条件。推论 6.2 表明，对于每个能被四整除的正 k，在代数闭域上，每个线性映射 $\mathrm{M}_k\to\mathrm{Alt}_{k+1}$ 都会将某个可逆输入映射为秩至多为 $k-2$ 的矩阵。

在有限域 $\mathbb{F}_Q$ 上，从精确保持到秩不增的推导依赖于引理 3.3。对于 $k\ge 2$，若一个次数小于 $k(Q-2)+2$ 的多项式在秩-k 秩层上取值为零，那么它在 $\mathcal{D}_{k}^{m\,n}$ 上也取值为零。当 $Q>2$ 时，这个界适用于 $\phi(X)$ 的每个 $(k+1)$ 子式。结合引理 3.1 中的矩阵铅笔，可得：只要 $\operatorname{rank}\phi(X)\le k$ 在秩-k 秩层上，那么在任何含有多于两个元素的域上，秩-k 不增（推论 3.4）。例 3.6 表明，对每个 $k\ge 2$，域的假设都是精确的。定理 3.5 和命题 4.2 通过三个分块秩等式刻画了有界像情形下的精确保持。第 5 节明确描述了外积的本原空间及其参数化。

相关的精确保持结果包括 Beasley 关于复全矩阵空间 [4]，上自同态的定理、Beasley–Laffey 关于元素数至少为四的域上可逆自同态的定理 [5]，以及 Li、Rodman 和 Šemrl 关于不同秩层之间映射的构造 [23]。Huang 和 Tsai 证明了，当 $|\mathbb{F}|>k+2$ 时，精确保持秩-k 蕴含秩-k 不增；并且当 $|\mathbb{F}|>k+1$ [21] 时，对每个可容许的 $\ell\ge k$，秩-k 不增蕴含秩-ℓ 不增。定理 1.1 中的全局不等式给出了后一推论，且不需要域大小假设。

2 行列式簇上的多项式函数

我们用以下引理代替插值。其结论涉及多项式在 $\mathbb{F}$-点上的取值。

引理 2.1。设 $r\ge 2$。假设总次数至多为 r 的多项式 $f(X)$ 在 $D_{r-1}^{m\,n}$ 上恒为零。作为 $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ 上的函数，

$$f(X)=\sum_{\substack{|I|=r\\|J|=r}} c_{I,J}\det X[I,J],\qquad c_{I,J}\in\mathbb{F}. \tag{2}$$

当 $r > \min(m, n)$ 时，求和为空，且系数唯一。

证明。 按照单项式中出现的列的确切集合对单项式分组。记 X_H 为将 X 中 H 集合之外的列置零所得的矩阵。支集为 J 的分量取值为

$$f_J(X) = \sum_{H \subseteq J} (-1)^{|J|-|H|} f(X_H).$$

对于 $|J| < r$，每一项都为零。对于 $|J| = r$，次数界使 f_J 关于这 r 列是多线性的。如果这些列线性相关，则和中的每个矩阵 X_H 的秩都小于 r。因此 f_J 是交错的，并且可以唯一地展开为坐标交错 r-形式。这些形式恰好是列集合为 J 的子式。不会出现支集更大的项。要读出 $c_{I,\ J}$，在 I，J 处插入单位矩阵，并在其他位置置零。 □

在无限域上，(2) 是一个多项式恒等式，描述了通用行列式理想 [7] 的次数为 r 的部分。在有限域上，非零多项式可能诱导出零函数。证明只用到了域值矩阵上的取值。

引理 2.2. 在任意域上，M_r 上的行列式函数都没有非零平移周期。任何形如 (2) 的非零函数，至少需要 r^2 个齐次线性坐标，即使允许使用这些坐标的任意函数也是如此。

证明。 对于 $H \neq 0$，进行换基，使得 $H = \mathsf{diag}(I_h, 0)$。取 $Y = \mathsf{diag}(0_h, I_{r-h})$，得到 $\det Y = 0$ 和 $\det(Y + H) \neq 0$。可逆基变换保留这一区别。对于第二个断言，将范围限制在单个块 I, J 上，其中 $c_{I,J} \neq 0$。在该块上，这个函数是行列式的非零倍数。少于 r^2个线性坐标会在 $\mathbf{M}_r$上产生非零公共核，从而得到一个平移周期。 □

一个含有固定零元素的线性 $r \times r$ 矩阵至多使用 $r^2 - 1$ 个线性坐标。因此，如果它在所有秩小于 r的输入上都为零，那么它的行列式作为函数恒等于零。

命题 2.3。 设线性映射 $\theta : \mathrm{M}_{m,n} \to \mathrm{M}_r$, $r \geq 2$ 将 $D_{r-1}^{m\ n}$, 映入奇异矩阵。若其像包含一个可逆矩阵，则 θ 是标准映射。其两个外因子的秩均为 r。

证明。 将引理 2.1 应用于 $\det \theta(X)$。(2) 中有某个系数非零。对源空间的行和列进行置换后，限制映射 $\theta_0 : \mathbf{M}_r \to \mathbf{M}_r$ 到左上角分块，满足对所有 Y 均有 $\det \theta_0(Y) = c \det Y$，其中 $c \neq 0$。因此，$\ker \theta_0$ 中的每个元素都是行列式的平移周期。由引理 2.2 可知该核为零，故 θ_0 是双射。现在，任意域 [9, 上 GL_r 的可逆线性保算子定理，即定理 1]，给出 $\theta_0(Y) = PYQ$ 或 $PY^{\mathsf{T}}Q$，其中 P, Q 可逆。通过在输出端复合 θ_0^{-1}，不妨设 $\theta_0(Y) = Y$。

将输入写作 $\left(\begin{smallmatrix} Y & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$。对于另一列 b，用 $L(b)$ 表示其贡献。若 H 是包含 b 的超平面，则对每个满足 $\operatorname{im} Y \subseteq H$ 的 Y，$Y + L(b)$ 都是奇异矩阵。这迫使 $\operatorname{im} L(b) \subseteq H$。事实上，令 $H = \ker \lambda$。若 $\lambda L(b) \neq 0$，则可将该非零行扩充为一个可逆矩阵 Z，使其满足 $\lambda Z = \lambda L(b)$，再取 $Y = Z - L(b)$。对 H 取交集，得到 $\operatorname{im} L(b) \subseteq \mathbb{F}b$。因此，线性映射 $b \mapsto L(b)$ 的每一列都是 b 的标量倍数；由对两个基向量及其和的线性性可知，该标量与 b 无关。转置论证适用于每一条额外的行。因此，

$$\theta(X) = Y + BV + UC + L_0(D) = \begin{pmatrix} I & U \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} + H_0(D)$$

对于固定的 U，V 以及一个线性 H_0。可逆的块三角源变换会用新的左上块替换第一项，并保持 D 不变。在这些坐标下$\theta(X) = Y + H_0(D)$。

对于剩余块的一个矩阵单位 E_{ij}，以及任意一个秩为 $r-1$的 Y，将Y补全为一个秩相同且满足 $D = E_{ij}$的输入。为此，取 $\binom{I}{S} Y \begin{pmatrix} I & T \end{pmatrix}$，只令 S 的第 i 行和 T 的第 j 列非零，使它们经由 Y 的配对为 1。因此，对于每个这样的 Y，$Y + H_0(E_{ij})$ 都是奇异的。若 $H_0(E_{ij})$ 的秩 h为正，则将其化为 $\operatorname{diag}(I_h, 0)$，并在相同基下取 $Y = \operatorname{diag}(J_h, I_{r-h})$，其中 J_h是一个幂零若尔当块。此时 Y的秩为 $r-1$，且两者之和可逆。这证明了 $H_0 = 0$。撤销这些变换即可得到 (1)。若输出可逆，则两个因子的秩都为 r。

□

引理 2.4。 如果 $A, B \in \mathrm{M}_{p,q}$, 秩 $A \geq s$, 秩 $B \geq r$, 且 $1 \leq s \leq r$，则存在$L \in \mathrm{M}_{r,p}$ 和 $R \in \mathrm{M}_{q,r}$，使得秩 $LAR \geq s$ 且 LBR 可逆。

证明。 选取 s 个定义域向量，使它们在两个映射下的像均线性无关。每一步中，被排除的向量构成两个真线性子空间的并；在任意域上的向量空间中，这个并都不可能覆盖整个空间。扩充为 r 个向量，使其 B-像线性无关，并将它们作为 R 的列。对 $(AR)^{\mathsf{T}}$ 和 $(BR)^{\mathsf{T}}$ 重复此构造，以选出 L 的行。 □

定理 *1.1* 的证明。 只需证明 $\operatorname{urk}(\operatorname{im} \phi) > k$ 的情形。令 $r = k + 1$，并选取 Y，使得 $\operatorname{rank} \phi(Y) \geq r$。若存在某个秩一 X，使得 $\operatorname{rank} \phi(X) \geq 2$，则对 $A = \phi(X)$ $B = \phi(Y)$ $s = 2$应用引理 2.4。映射 $Z \mapsto L\phi(Z)R$ 满足命题 2.3，因此会将 X 映射为秩至多为一的矩阵，矛盾。因此 ϕ 是秩一不增的。由 Botta 定理 [6] 可得一种标准形式，或其像的上秩至多为一。我们对 Y 的选择排除了后一种可能。反过来，标准映射满足 $\operatorname{rank} \phi(X) \leq \operatorname{rank} X$；而在像有界的情形下，对每个 X 都有 $\operatorname{rank} \phi(X) \leq k$。这些不等式也给出了 $\operatorname{rank} \phi(X)$ 的所述上界。 □

3 从精确保持到秩非增加

引理 3.1。 假设 $|\mathbb{F}| > k+1$。若对于每个秩恰为k的 X，都有 秩 $\phi(X) \le k$，则 ϕ 是秩-k 不增的。

证明。 取秩为 $h < k$ 的 A。选取一个秩为 h 的幂零 $k \times k$ 矩阵 J，例如 $J_{h+1} \oplus 0$。选取固定的源基，使得 A 为在 J 中补零后的矩阵。在同一组基下，令 B 为补零后的 I_k。对于 $t \neq 0$， B 和 $A + tB$ 的秩均为 k。 $\phi(A) + t\phi(B)$ 的每个（$k+1$）-子式的次数至多为 k，因为其t^{k+1} 的系数是 $\phi(B)$ 的一个子式，而该子式为零。每个这样的子式在 t 的多于 k 个非零值处为零，因此在 $t = 0$处也为零。于是，$\operatorname{rank} \phi(A) \le k$。如果输出的行数或列数少于 $k+1$，则该界自动成立。 □

引理 3.2。 设 Q、$k \ge 2$ 为整数， $N = Q^k - 1$，且 $D = N/(Q-1)$。对于$0 \le n \le N$，令 $s(n)$ 为其 k 个基-Q 进制数字之和。对于 $m \ge 1$，记 $[e]_m$ 为 e模 m 在 $\{1, \dots, m\}$ 中的代表元。对于每个整数 e，

$$\frac{1}{Q-1} \sum_{t=0}^{Q-2} s([e + tD]_N) \;\ge\; \frac{k(Q-2)}{2} + 1.$$

证明。 乘以 Q 模 N 会循环置换 k 位数字，包括 $[e]_N = N$的情况。对 k 种旋转求和可得

$$D\, s([e]_N) = \sum_{h=0}^{k-1} [Q^h e]_N.$$

固定 h，令 $r_h = [Q^h e]_D$。由于当 t 从 0 取到 $Q-2$时， $QD \equiv D \pmod N$，数值 $[Q^h(e + tD)]_N$依次遍历 r_h， $r_h + D$，……， $r_h + (Q-2)D$。因此，对旋转恒等式取平均可得

$$\frac{1}{Q-1} \sum_{t=0}^{Q-2} s([e + tD]_N) = \frac{k(Q-2)}{2} + \frac{1}{D} \sum_{h=0}^{k-1} r_h.$$

最后一个和为正，且模 D同余于 $e \sum_{h=0}^{k-1} Q^h = eD$，因此它至少为 D。

□

引理 3.3。 设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_Q$ 且 $2 \le k \le \min(m, n)$。如果关于 $X \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F}_Q)$ 的各项的多项式的总次数小于 $k(Q-2) + 2$，并且在每个秩为 k的矩阵上都为零，那么它在每个秩至多为 k的矩阵上也为零。

证明。 经过行列变换后，任意秩不超过 k 的矩阵都支撑在一个 $k \times k$ 块中。限制到该块不会增加次数上界，并得到一个在 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_Q)$ 上恒为零的多项式 f。只需证明 f 在 $\mathrm{M}_k(\mathbb{F}_Q)$ 的所有元素上都恒为零。

令 $K=\mathbb{F}_{Q^k}$，并按引理 3.2 中的定义取 N，D，s。固定 K 的一个 $\mathbb{F}_Q$ 基，并令$L_{a,\ b}$ 为

$$u\longmapsto au-bu^Q,\qquad a,b\in K.$$

若 a,b 中恰有一个为零，则 $L_{a,b}$ 可逆。对于 $ab\neq 0$，当且仅当存在某个 $u\in K^\times$使得 $a/b=u^{Q-1}$ 时，它是奇异的；等价地，$a^D=b^D$，因为 $K^\times$是循环的。特别地，$\ker L_{1,1}=\mathbb{F}_Q$，所以 $L_{1,1}$ 的秩为 $k-1$。

将函数 $g(a,b)=f(L_{a,b})$ 表示为其在 K 上的唯一多项式，该多项式关于每个变量的次数至多为 N。每个系数非零的单项式 a^ib^j 都满足

$$s(i)+s(j)\le \deg f.$$

事实上，$L_{a,b}$ 的各项关于 a,b是 $\mathbb{F}_Q$-线性的。由迹配对的非退化性可知，K 上的每个 $\mathbb{F}_Q$-线性泛函都具有形式 $a\mapsto \mathrm{Tr}^{K/\mathbb{F}_Q}(ca)=\sum_{h=0}^{k-1}(ca)^{Q^h}$。展开 f 中的单项式时，每个因子因此贡献一个 a^{Q^h} 次幂或一个 b^{Q^h} 次幂。为了约化 a 的指数，将 a^{Q^h} 的 Q 个副本替换为一个 $a^{Q^{h+1}}$，其中当 $h=k-1$ 时使用 $a^{Q^k}=a$。每次替换都会减少因子数量。当每种重数都小于 Q 后，这些重数就是约化指数的各位数字。同样的论证也适用于 b。

在 a 轴上，约化多项式为 $g(0,0)(1-a^N)$。由于 $s(N)=k(Q-1)\ge k(Q-2)+2$，数字界迫使 a^N 的系数为零。因此 $g(0,0)=0$。由此，g 在两条坐标轴上都为零，且每个系数非零的单项式都满足 $1\le i,\ j\le N$。

在 $(K^\times)^2$，上，g 的支集包含于 $a^D=b^D$，因此 $a^Db^{-D}g=g$。单项式 a^ib^j、$1\le i,\ j\le N$ 构成 $(K^\times)^2$ 上取值于 K 的函数空间的一组基。因此，$(i,\ j)$ 处的非零系数会迫使每一对

$$\big([i+tD]_N,[j-tD]_N\big),\qquad 0\le t\le Q-2.$$

由于 tD 和 $-tD$ 遍历模 N 的相同剩余类，引理 3.2 将 $s([i+tD]_N)+s([j-tD]_N)$ 的平均值下界限定为 $k(Q-2)+2$。每个系数非零的数对，其数位和至多为 $\deg f<k(Q-2)+2$。因此 $g=0$。

特别地，$f(L_{1,\ 1})=0$。将这一论证应用于 $X\mapsto f(PXR)$，对于$P,\ R\in \mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_Q)$，可知 f在每个秩为 $k-1$的矩阵上都取零。现在假设 f 在每个秩为 r的矩阵上都取零，其中 $1\le r<k$。对于任意秩为r的 A，多项式 $X\mapsto f(AX)$ 在 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_Q)$ 上取零，因此对于每个秩为 $k-1$的B，$f(AB)=0$。每个秩为 $r-1$ 的矩阵都可表示为这样的乘积，这是由基变换可得 $\mathrm{diag}(I_r,\ 0)(I_k-E_{rr})=\mathrm{diag}(I_{r-1},\ 0)$。通过下降归纳即可完成证明。 □

推论 3.4。假设 $k=1$ 或 $|\mathbb{F}|>2$。若当秩 $\phi(X)\le k$ 时，均有秩 $X=k$，则 ϕ 是秩-k 非增的。

证明。对于 $k=1$，使用 $\phi(0)=0$。在无限域上应用引理 3.1。在 $\mathbb{F}_Q$ 上，若有 $Q>2$ 且有 $k\ge 2$，则 $\phi(X)$ 的每个 $(k+1)$ 子式的次数至多为 $k+1<k(Q-2)+2$

并且当秩 $X = k$时为零。根据引理 3.3，这些子式在$\mathcal{D}_k^{m\ n}$ ，上均为零。

□

定理 3.5 (秩精确-k 保持**)**。 设 $k \le \min(p, q)$ ，且满足$k = 1$ 或 $|\mathbb{F}| > 2$。那么， ϕ 保持秩 k ，当且仅当下列条件至少有一个成立。

(i) 它是标准形式，左因子满列秩，右因子满行秩。(ii) 其像的上秩为 k。在下文的分块形式(3) 中， $a + b + r = k$，且对于每个秩-k 输入，三个分块等式(4)均成立。

对于已知为秩-k非增的映射，同样的刻画适用于任意域。

证明。 根据推论 3.4，在所述假设下，每个秩-k 保持映射都是秩-k非增的。应用定理 1.1。先考虑标准形式 $X \mapsto MXN$。若 $\ker M \neq 0$，则存在某个秩-k 输入，其列空间与 $\ker M$非平凡相交，因此其秩会下降。对行空间作同样的论证可知，N 必须满行秩。由于转置保持秩，这两个结论对 $X \mapsto MX^{\mathsf{T}}N$也成立。反过来，具有这些秩的因子会保持每个输入的秩。在有界情形下，上秩必须恰为 k。下文的命题 4.2 给出了达到该值的充要条件。

□

例 3.6。 对于每个 $k \ge 2$，都存在一个线性映射 $\phi : \mathrm{M}_k(\mathbb{F}_2) \to \mathrm{M}_{k+1}(\mathbb{F}_2)$，它保持秩 k，并将秩一矩阵映射为秩为 $k+1$ 的矩阵。

固定 $K = \mathbb{F}_{2^k}$的一个 $\mathbb{F}_2$-基，并利用它将 $\mathbb{F}_2^k$ 与 K 视为相同。对于 $X = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_k(\mathbb{F}_2)$，令 $v \in K$ 表示 X 的第一列，并置 $t = x_{12}$。在 $\mathbb{F}_2 \oplus K$ 上定义 $\phi(X)$ 如下：

$$\phi(X)(s, u) = (ts,\ vu + tu^2).$$

由于平方运算在 K 上是 $\mathbb{F}_2$-线性的，因此这定义了一个 $\mathbb{F}_2$-线性算子，并且它关于 X 的依赖是线性的。

如果 X 可逆，则 $v \neq 0$。对于 $t = 0$，乘以 v 在 K 上是可逆的，因此 $\phi(X)$ 的秩为 k。对于 $t = 1$，方程 $vu + u^2 = u(u + v) = 0$ 恰好有 0 和 v 这两个解。因此，第二个分量的秩为 $k - 1$，而第一个分量的秩为一。因此， ϕ 保持秩 k。

对于秩一输入 $X = E_{12}$，有 $v = 0$ 和 $t = 1$。由于平方映射是 K 的一个自同构，因此映射 $\phi(E_{12})(s,\ u) = (s,\ u^2)$ 是可逆的。

4 有界像及其参数化

4.1 本原核心

空间 $S \subseteq \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^q, \mathbb{F}^p)$ 若其公共核为零且其像张成 $\mathbb{F}^p$，则称其为约化空间。对于 $r = \operatorname{urk} S > 0$，若一个约化空间的上秩在限制到任意定义域超平面以及将陪域对任意直线取商后均保持为 r

不变，则称其为本原空间。在坐标表示中，在对两个输出基进行任意固定变换后，删除任意一行或一列，仍会留下某个秩为 r 的元素。这个秩为 r 的矩阵可能取决于所删除的行或列。我们将 0×0 矩阵的零空间视为平凡核心。将 Atkinson 和 Lloyd[3, 定理 1] 应用于 ϕ 的像，可得到如下分块形式。

定理 4.1。 设 $s=\operatorname{urk}(\operatorname{im}\phi)$。存在可逆输出因子 U_0、V_0 以及非负的 a、b、u、v、r，使得

$$\Phi(X)=U_0\phi(X)V_0=\begin{pmatrix}A(X) & B(X) & E(X)\\ C(X) & P(X) & 0\\ F(X) & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad a+b+r=s. \tag{3}$$

行大小分别为 a、u、$p-a-u$，列大小分别为 b、v、$q-b-v$。所显示的分块是线性的，且 P 映射到本原空间 $\boldsymbol{P}\subseteq \mathrm{M}_{u,\,v}$ 其上秩为 r。反之，任意这样的分块都给出秩 $\Phi(X)\le a+b+r$。当 $|\mathbb{F}|>r>0$、
u 、$v\le\binom{r+1}{2}$时。

证明。 分块约化可在任意域上进行。经过基变换后，只要存在公共零行或列，就将其删除。如果剩余空间是约化的且非本原的，则删除一个使上秩降低的行或列。一次删除恰好使其降低一。重复此过程，直到剩余空间为本原空间或零空间。反向执行这些步骤，就会将降秩行置于顶部、列置于左侧，并将公共零行和列置于底部和右侧。通过固定运算得到 (3)，且分块坐标是线性映射。反之，删除前 a 行和 b 列后，剩下的是用零填充的 $P(X)$。当 $|\mathbb{F}|>r>0$ 时， u 和 v 的界可通过将定理 [3,定理 1]应用于本原空间而得出。核心的选择不必是唯一的。

□

命题 4.2. 对于 (3) 中固定的输出，令

$$R=\begin{pmatrix}B & E\\ P & 0\end{pmatrix},\qquad L=\begin{pmatrix}C & P\\ F & 0\end{pmatrix}.$$

若 秩 $P\le r$，则 秩 $\Phi=a+b+r$ 当且仅当

$$\operatorname{rank}P=r,\qquad \operatorname{rank}R=r+a,\qquad \operatorname{rank}L=r+b. \tag{4}$$

块 A 不受限制。对于 $s=k$，所有 $X\in \boldsymbol{R}_k^{m\ n}$,上的等式刻画了任意域上的精确保持。

证明。 上界 $a+b+$秩 P首先迫使秩为 $P=r$。在适当的基下，将 $P=\operatorname{diag}(I_r,\ 0)$ 写成相应形式。通过消元去除其主元行和列后，剩下

$$\begin{pmatrix}A-B_1C_1 & \widehat{B}\\ \widehat{C} & 0\end{pmatrix},\qquad \widehat{B}=(B_0\ E),\qquad \widehat{C}=\begin{pmatrix}C_0\\ F\end{pmatrix},$$

其中 B_1, C_1 与 P 的主元相交。其秩至多为 b+秩 B 和 a+秩 C 中的较小者。当且仅当 B 具有满行秩 a 且 C 具有满列秩 b 时，它达到 $a+b$。在这种情况下，右块的列张成前 a 个坐标方向，并且前 b 列模去其张成空间后仍然线性无关。最后，秩 $R = r +$ B 秩以及秩 $L = r +$ 秩 C。

□

对于 $r = 0$，输出的支集位于 a 行和 b 列上。记 $\mathcal{C}_{a,\,b}$ 为具有该支集的全空间。到 $\mathcal{C}_{a,\,b}$ 的映射（其中 $a + b = k$）具有以下形式

$$\begin{pmatrix} A(X) & B(X) \\ C(X) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

当且仅当 $B(X)$ 的秩为 a，且 $C(X)$ 在该层上的秩为 b 时，它精确保持秩 k。对于一般的有界像映射，仅有条件 $\ker\phi \cap \mathcal{R}_k = \varnothing$ 并不能确保精确保持。例如，将对角线移到第一行的 M_k的坐标置换是双射，并将 I_k 映射为秩一矩阵，对于 $k \geq 2$。

4.2 维数界

引理 4.3。令 $t = \max(m, n)$。如果线性映射 $\Gamma : \mathrm{M}_{m,\,n} \to W$ 满足$\Gamma^{-1}(H) \cap R_k^{m\,n} = \varnothing$，对于线性子空间 $H \leq W$，则

$$t \leq \dim\big((\operatorname{im}\Gamma + H)/H\big) \leq \operatorname{codim}_W H. \tag{6}$$

证明。将商映射限制在一个 $k \times t$ 源块上；如有需要，可对输入进行转置。其核中仅包含秩至多为 $k-1$ 的矩阵。根据 Flanders 界，该核的维数至多为 $(k-1)t$，因此商映射的秩至少为 t。关于原始定理，参见 [15]；关于任意域上的版本，参见 [11, 定理 1。1]

□

对于有界像保持映射，每个上秩为 $H \subseteq \mathcal{P}$ 的 $< r$ 都给出$t \leq$ 余维$_{\mathcal{P}} H$，由（4）可得。更一般地，只要在某个线性参数空间中，属于 H 就会导致核心秩下降，无论是否用到了所有参数，这一结论都成立。特别地，若 $r > 0$，则 $t \leq$ 维$\mathcal{P}$。若 $r > 0$ 且 $|\mathbb{F}| > r$，则由定理 4.1 和 Flanders 界可得

$$t \leq r\max(u, v) \leq r\binom{r+1}{2}. \tag{7}$$

因此，若 $|\mathbb{F}| > k$ 且 $t > k\binom{k+1}{2}$，则保持映射要么是具有满秩因子的标准映射，要么满足（5）。对于压缩，若 $a > 0$，则外部块大小满足 $q - b \geq t$；若 $b > 0$，则满足$p - a \geq t$。事实上，对 $X \mapsto u^{\mathsf{T}}B(X)$或 $X \mapsto C(X)v$ 应用引理 4.3，其中固定的 u 或 v非零即可。

Flanders 定理给出了上秩为 s 的 $S = \operatorname{im}\,\phi$ 的维数上界 $S \leq s\max(p, q)$。取等时，正上秩为 $s < \min(p, q)$ 的线性空间在等价和转置意义下是一个完整的单侧压缩 [11,定理 1.1]。以下

这一加强结论在方阵情形下归功于 Atkinson 和 Lloyd，在矩形情形下归功于 Beasley，而在任意域上则归功于 de SeguinsPazzis [2, 11]。如有必要，对输出进行转置，使得 $p \ge q$。如果 $1 \le s < q$ 并且

$$\dim S \ge ps - (p - q + s) + 1,$$

则 S 除等价变换外包含于以下空间之一：复数域$_{s,\ 0}$，复数域$_{s-1,\ 1}$，复数域$_{1,\ s-1}$，复数域$_{0,\ s}$，唯一可能的例外是（p，q，s，$\mathbb{F}$）=（3，3，2，$\mathbb{F}_2$）。这个例外空间是五维的上三角迹零矩阵空间 [11, 定理 1.3]因此，在这一维数范围内，只要压缩这一备选情形成立，（5）就会直接检验有界像保持。

5 投影外积

设 $k \ge 2$，$U = \mathbb{F}^{k+1}$ 且 $N = \binom{k+1}{2}$。经典外积空间 [1, 20]由线性矩阵 $W(v)$：$U \to \bigwedge^2 U$，$y \mapsto v \wedge y$给出。对于 $v \ne 0$，其核为$\mathbb{F}v$，秩为 k。固定一个满射 $T\colon \bigwedge^2 U \to \mathbb{F}^d$ 以及一个线性映射 $\Gamma\colon \mathrm{M}_{m,\ n} \to U$。考虑

$$\phi_{T,\Gamma}(X) = TW(\Gamma(X)) \in \mathrm{M}_{d,k+1}. \tag{8}$$

定理 5.1。在任意域上，(8) 保持秩 k 当且仅当$\ker T$ 不包含非零可分解双向量，且 $\ker \Gamma$ 不包含秩为 k 的矩阵。

证明。第一个条件使得 T 对每个 $w \ne 0$ 都是 $w \wedge U$ 上的单射，因此这两个条件足够。反之，若对于秩为 k 的输入有 $\Gamma(X) = 0$，则 $\phi_{T,\ \Gamma}(X) = 0$。如果 $0 \ne u \wedge v \in \ker T$，令 $H = \operatorname{span}(u,\ v)$。对于每个非零 $w \in H$，空间 $w \wedge U$ 包含 $u \wedge v$，因此 $\operatorname{rank} TW(w) < k$。秩在 $w = 0$ 处也会下降。但 H 在 U 中的余维为 $k - 1$，而引理 4.3 给出了 $\Gamma^{-1}(H)$ 中的一个秩为 k 的输入。这证明了必要性，即使 Γ 不是满射。□

命题 5.2。假设 m、$n \ge k \ge 2$。线性 $\Gamma\colon \mathrm{M}_{m,\ n} \to \mathbb{F}^{k+1}$ 只有在以下情形下，才能使其核中不含秩为 k 的元素：

$$(m, n) = (k, k+1), \quad (k+1, k), \quad (k, k).$$

在对系数坐标作可逆变换的意义下，以下列表恰好给出了具有此性质的映射。

(a) 在两个矩形情形中，对于一个固定的非零向量，其长度为 k，分别有 $\Gamma(X) = X^{\mathsf{T}}u$ 或 $\Gamma(X) = Xv$。(b) 在M_k上，可能的形式包括 $\Gamma(X) = (Xv, \ell(X))$ 以及 $(X^{\mathsf{T}}u, \ell(X))$，其中$\ell$ 是任意标量线性形式，且 u、$v \ne 0$。对于 $k \ne 3$，这些形式穷尽了方阵情形。

(c)在M_3 上，还有一个以 $C_{1,1}$，为商空间的情形，由互补 2×2 块的四个元素给出。在 $\mathbb{F}_2$ 上还存在另一种核类型，即上三角迹零矩阵构成的空间。这些描述允许对源空间进行固定的行列变换。在每种商空间情形中，都允许将四维商空间与 $\mathbb{F}^4$ 作任意同构。

证明。 引理 4.3 给出 $\max(m,\ n)\ \le k+1$。在 $\mathrm{M}_{k\text{中},\ k+1}$ 核的维数至少为 $(k-1)(k+1)$，且上秩至多为 $k-1$。Flanders 界中的等号情形迫使其成为映射到 $\mathbb{F}^k$ [11, 的某个固定超平面的映射空间。定理 1.1]这证明了 (a) 对于 $k\times(k+1)$ 阶矩阵成立。转置即可得到另一种情形。

在阶数为 $(k+1)\times(k+1)$ 的情形下，将 $\Gamma(X)=\sum_i B_i x_i$ 表示为转置行 x_i 的形式。限制到任意 k 行即可得到 (a)，因此在该集合内，B_i 都是某个可逆矩阵的标量倍。任意两行都会同时出现，因为 $k\ge 2$。固定一个非零的 B_i。于是对于某个非零的 c，有 $\Gamma(X)=B_iX^{\mathsf{T}}c$。取 $\operatorname{im} X=\ker c^{\mathsf{T}}$，得到一个被 Γ 消去的秩-k 输入。

在大小为 $k\times k$ 时，奇异空间 $K=\ker\Gamma$ 的维数至少为 k^2-k-1。对于 $k\ge 3$，该下界为 $k(k-1)-(k-1)+1$，因此大空间定理 [11,定理 1。3] 适用。参数为 1，$k-2$ 和$k-2$，1 的两个混合压缩空间维数为 k^2-2k+2；当 $k>3$ 时，这一维数过小。在 $k=3$ 的情况下，等号成立迫使其为整个混合压缩空间或所述的二元例外。否则，K 具有一个公共核向量或一个公共左核向量。对于 $k=2$，同样的结论也成立，因为秩至多为一的空间具有一个公共像直线或一个公共行直线。事实上，当两对因子均线性无关时，两个秩一矩阵之和的秩为二。因此，求值 Xv 或 $X^{\mathsf{T}}u$ 可经过Γ分解，并且其 k 个线性无关坐标可以补充为 (b) 中的坐标。反之，在方阵情形下，所列出的每个核都由奇异矩阵组成。对于满秩矩形输入，映射 X^{T} 或 X 在 (a) 中是单射，因此所指示的求值非零。 □

特别地，$W(X^{\mathsf{T}}u)$ 在 $\mathrm{M}_{k,\ k+1}$ 保持秩 k，并将某个秩一输入映射为秩 k。这就在每个秩 $k\ge 2$下、每个域上都给出了一个非标准保持映射。

命题 5.3。 设底域为代数闭域，且(8) 保持秩$k\ge 2$。当且仅当 Γ 是满射时，其所示矩阵空间是本原的。

证明。 若 $\operatorname{im}\Gamma$ 包含于某个超平面 $H\subset U$，则将矩阵限制到 H 会使上秩至多为 $k-1$，因为对于 $z\in H$，$z\wedge H$的维数至多为 $k-1$。现在假设 Γ 是满射。非零矩阵的核 $\mathbb{F}z$ 两两交于零，而它们的像张成目标空间，因为可分解二向量张成 $\bigwedge^2 U$。对于任意超平面 $H\subset U$，取 $z\notin H$，则限制到 H上的秩为 k。

删行导致上秩降低，将会使每个 $T(z\wedge U)$ 中都存在一条直线 L，$z\neq 0$。在 $\mathbb{P}(T^{-1}(L))$ 中，可分解点构成一个闭射影集合，根据定理 5.1，该集合与 $\mathbb{P}(\ker T)$ 不相交。如果 $\ker T\neq 0$，那么 $\mathbb{P}(\ker T)$ 是 $\mathbb{P}(T^{-1}(L))$ 中的一个超平面。因此，根据射影

维数定理，可分解点的集合是有限的。如果 $\ker T = 0$，则环境空间本身就是一个点。每个可分解点都对应 U 的一个二维子空间，且只有当该子空间包含 z 时，它才属于 $\mathbb{P}(z \wedge U)$。在无限域上，这些子空间的有限并不可能覆盖维数为 $k+1 \geq 3$ 的 U。因此，不存在这样的直线 L。 □

下一条命题中的目标空间最小维数是 Gow 和 Quinlan 的不变量 $s_{k+1}(\mathbb{F})$。他们确定了它在有限域上的值，并记下了特征不等于二时的代数闭域上的值 [18, §1，定理 2 和推论 8]。

命题 5.4. 定理 *5.1* 中满射 T 所能取的最小 d，在代数闭域上为$2k-1$，在有限域上为 $k+1$。从该最小值到 N 的每个 d 都能取到。

证明。 在代数闭域上，可分解直线构成 $\mathrm{Gr}(2, k+1) \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$，其维数为 $2k-2$。若 $d \leq 2k-2$，则余维为 d 的非空射影中心必与其相交。对于 $d > 2k-2$，根据射影维数定理和关联对应 [19, Ch. I]，一般的此类中心与其不相交。允许核为零。

在 $\mathbb{F}_Q$ 上，将 U 与 $K = \mathbb{F}_{Q^{k+1}}$ 等同。交错映射 $(u,\ v) \mapsto uv^Q - u^Q v$ 仅在相关对上取零，因为对于 $w \in \mathbb{F}_Q$，$w^Q = w$ 恰好属于 K。将此映射的像作为目标空间，便得到 $d \leq k+1$。反过来，$d \geq k$，因为 T 必须在 $w \wedge U$ 上是单射。若 $d = k$，则 T^* 的 k 维像中的每个非零形式 $\mathbb{F}_Q^k$: $(^* \to \bigwedge^2 U^*)$ 都会是非退化的，因为对于 $w \neq 0$，映射 $T(w \wedge -)$ 是满射。奇数维空间上的交错形式是奇异的。在偶数维中，$k+1 = 2e$ 该空间上的 Pfaffian 是一个次数为 $e < k$ 的齐次多项式，因此它在 $\mathbb{F}_Q$ 上有一个非零零点。事实上，对于 k 个变量上的次数为 $< k$ 的多项式 g，在该域上对 $1 - g^{Q-1}$ 求和，在 $\mathbb{F}_Q$ 中结果为零，因为每个单项式都至少有一个指数 $< Q-1$，而对该变量求和的结果为零。因此，齐次 g 不可能恰好只有一个零点。Pfaffian 的论证对特征二下的交错形式也成立。最后，缩小任何可容许的核，都能实现所有更大的 d。 □

6 低秩中的本原核心

6.1 秩一、秩二和秩三

非零上秩一空间具有公共像直线或公共行直线。它没有正秩的本原核心。对于 $|\mathbb{F}| > 2$，唯一的本原上秩二空间是 $\mathrm{Alt}_3(\mathbb{F})$，即交错 3×3 矩阵；在特征二 [3, 10] 中还包括零对角线要求。对于 $\mathbb{F}_2$，所有本原上秩二空间仍具有格式 3×3。它们等价于上三角迹零空间的一个本原子空间、Alt_3，，或 de Seguins Pazzis U_3, V_3 提出的两个显式空间之一 [12, 定理 15]。对于 $k = 2$ 和 $|\mathbb{F}| > 2$，定理 3.5

给出了以下秩二保持映射的描述。除了具有满秩因子的标准映射以及满足 (4) 的压缩映射外，其余映射都具有完整的 Alt_3核心，且不含额外的行或列。在外积坐标中，它们是$X \mapsto W(\Gamma(X))$，在等价、转置和零填充意义下成立。这里 Γ 是满射，并且其核不包含任何秩二矩阵。命题 5.2 列出了可能的映射 Γ。事实上，$\bigwedge^2 \mathbb{F}^3$ 中的每个非零双向量都是可分解的，因此定理 5.1 中可容许的 T 是一个同构。

对于 $|\mathbb{F}| > 3$，Atkinson 定理 C 的 [1], 任意特征形式由 [10, 定理 5.8], 给出：每个本原上秩三空间在等价变换和转置下，均由以下方式得到

$$z \longmapsto T(z \wedge -), \qquad T : \bigwedge^2 \mathbb{F}^4 \twoheadrightarrow \mathbb{F}^d, \quad d = 4, 5, 6.$$

所有投影都会产生有界像。本原性对投影施加了进一步条件。因此，对于 $k = 3$, $|\mathbb{F}| > 3$，定理 1.1 给出了标准映射、具有 $a + b \le 3$ 的压缩映射、至多带一条额外行或列的交错核心，以及不带额外行或列的投影外积。这里默认采用零填充和固定输出等价变换。所展示的每个族都是秩三非增的。

对于恰为秩三的情形，压缩判据为 (5)。若具有秩二核，则需要 $a + b = 1$。在额外行情形中，非零部分可写为

$$\begin{pmatrix} h(X) & \ell(X) \\ C(z(X)) & 0 \end{pmatrix}, \qquad C(z) = \begin{pmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ -z_2 & z_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 $z \neq 0$， $C(z)$ 的秩为二，且核为 $\mathbb{F}z$。当且仅当 $z \neq 0$ 且 $\ell \neq 0$ 或 $hz \neq 0$ 时，输出的秩为三。转置后可得额外列情形的条件。引理 4.3 推出 $m = n = 3$，而 Flanders 定理中的等号情形表明 z 是对 Xv 或 $X^{\mathsf{T}}u$ 的可逆变换。对于秩三核，定理 5.1 和命题 5.2 描述了该投影及所有系数映射。在普吕克坐标中，$\bigwedge^2 \mathbb{F}^4$ 中的非零双向量恰为可分解的条件是

$$w_{12}w_{34} - w_{13}w_{24} + w_{14}w_{23} = 0.$$

因此， $d = 4$ 要求这个二次型在二维核上没有非零零点。根据命题 5.4，这在有限域上成立，而在 $\mathbb{C}$上不可能成立。对于元素多于三个的每个域，前述有界像族以及因子满秩的标准映射穷尽了秩三保持映射。 $|\mathbb{F}| > 3$ 这一假设是通过本原空间的分类起作用的。推论 3.4 还给出了 $\mathbb{F}_3$上的秩三非增性。

6.2 秩下降轨迹的次数

将秩-k 保持映射的源空间限制在一个坐标 $k \times k$ 块上，可得到一个在每个可逆输入上都达到秩 k 的映射。以下整除条件

用于检验所提模型的系数映射能否避开该块上的秩下降轨迹。

命题 6.1。 设 $\mathbb{F}$ 为代数闭域，$1 \le j < k$，且 $Z \subset \mathbb{P}(W)$是一个余维为 j 、次数为 δ的射影子簇。假设线性映射$\Gamma{:}\mathrm{M}_k \to W$ 在 GL_k上避开 Z上的仿射锥（包括其顶点）。那么

$$\gcd\left\{\binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \dots, \binom{k}{j}\right\} \mid \delta.$$

证明。 令 $B = \mathbb{P}(\mathrm{M}_k) \setminus \{\det = 0\} = \mathrm{PGL}_k$，并令 $h = c_1(\mathcal{O}_B(1))$。我们计算 h^j 在整肖群 $\mathrm{CH}^j(B)$中的阶；该群由模有理等价的余维-j循环构成。关于 $\mathbb{C}$上的肖环计算，见 [13,§3]。我们通过局部化和射影丛公式 [16]计算给定域上的阶。

在 $\mathbb{P}(\mathrm{M}_k) \times \mathbb{P}^{k-1}$ 中取

$$Y = \{([X], [v]) : Xv = 0\}.$$

它是 $\mathbb{P}^{k-1}$上的一个射影丛，纤维为 $\mathbb{P}^{k(k-1)-1}$。若 H，x 为两个超平面类，则它在乘积中的类为 $(H + x)^k$，因为它由 k 个双次数为 $(1,\ 1)$ 的方程以预期余维切出。行列式超曲面上的每个整子簇都能双有理地提升到 Y。事实上，在该子簇的函数域上，其一般矩阵有一个非零核向量。由该向量张成的直线定义了一个有理截面，其像的闭包给出所需的提升。因此，支集在行列式超曲面上的循环，在 $\mathbb{P}(\mathrm{M}_k)$的肖群中的像，与来自 Y的真推前相同。

在 Y上的余维 $j-1$ 中，射影丛公式给出生成元$H^{j-1-i}x^i$、 $0 \le i < j$。要将每个生成元推前到 $\mathbb{P}(\mathrm{M}_k)$，需乘以$(H + x)^k$ 并取 x^{k-1}的系数。结果为 $\binom{k}{i+1} H^j$。因此，局部化将 $\mathrm{CH}^j(B)$ 与$\mathbb{Z}/b_{k,\ j}\mathbb{Z}$等同起来，其生成元为 h^j，其中$b_{k,\ j}$ = 最大公约数$_{1 \le i \le j} \binom{k}{i}$。

定义 Γ 的线性系在 B上没有基点。因此，它定义了一个态射 $B \to \mathbb{P}(W) \setminus Z$，在该态射下，超平面类拉回为 h。在这个开目标空间的肖环中，$\delta H^j = 0$，因为 $[Z] = \delta H^j$ 属于其射影完备化。在光滑开簇之间的拉回给出 $\delta h^j = 0$，从而证明了整除性。 □

推论 6.2 (Pfaffian 障碍)。 设 $\mathbb{F}$ 为代数闭域。用$\mathrm{Alt}_n(\mathbb{F})$表示交错 $n \times n$ 矩阵所成的空间，其中每个特征下对角线均为零。若 $k \ge 4$ 能被四整除，则每个线性映射

$$\Gamma : \mathrm{M}_k(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{Alt}_{k+1}(\mathbb{F})$$

将某个可逆矩阵映射为秩至多为 $k-2$ 的矩阵。

证明。令 $k=2d$。由大小为 $2d+1$ 且秩至多为 $2d-2$ 的交错矩阵构成的射影轨迹 Z 由次极大 Pfaff 子式定义。其余维为三，而 Pfaff 子式重数公式 [17, 定理 2 和例子]给出

$$\deg Z=\frac{d(d+1)(2d+1)}{6}=\frac{k(k+1)(k+2)}{24}.$$

如果每个可逆输入都达到秩 k，命题 6.1 将给出 $\gcd(k,\binom{k}{2},\binom{k}{3})\mid\deg Z$。记 $a=v_2(k)\geq 2$，其中 v_2 是整数的 2-adic 指数。这三个二项式系数的赋值分别为 $a,a-1,a$，因为 $k-1$ 是奇数且 $v_2(k-2)=1$。因此，它们的最大公约数的赋值为 $a-1$。在次数公式中，$k+1$是奇数且 $v_2(k+2)=1$，从而 $v_2(\deg Z)=a-2$。这与整除性矛盾。□

对于 $k=4$，轨迹 Z 是普吕克格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}(2,5)\subset\mathbb{P}^9$，而整除性要求 $2\mid 5$。在 $k=8$处，则要求 $4\mid 30$。

6.3 复秩四保持映射的本原核

在 $\mathbb{C}$ 上，Huang 和 Landsberg 对上秩四的四个基本空间进行了分类[20, 定理 3.1]。基本空间满足 Eisenbud 和 Harris 引入的附加不可分解性与极大性条件 [14]。根据 [20, 命题 2.5],，每个本原空间都可以由基本空间经过保秩参数限制和输出投影得到，或者取秩相加的直和后再进行上述运算。

为了从空间转到映射，设一个上秩为 r 的模型 S 通过限制到子空间 $S'\subseteq S$ 并进行投影 $Y\mapsto LYR$ 得到一个核心。任何映射到所得核心中的系数映射，都可以通过该投影到其像上的线性截面提升为 S'。对于核心秩为 r 的每个输入，提升后的矩阵必须已经具有 r 秩。重复这一论证，即可沿着一系列投影进行提升。对于总上秩为 $r=\sum_i r_i$ 的直和，每个被提升的直和分量都必须在同一个输入上达到其上秩 r_i。因此，只需迫使一个母模型或一个直和分量发生秩下降即可。

对于这两个六参数模型，令 $J(s,\ s')=\left(\begin{smallmatrix}s & s'\\ 0 & s\end{smallmatrix}\right)$。对于 $U,\ V,\ W\in\mathrm{M}_2$,集合

$$H(U,V,W)=\begin{pmatrix}U & 0 & -W\\ 0 & U & V\\ V & W & 0\end{pmatrix}.$$

这两个模型于是为

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_3&=\{H(sI_2,tI_2,D):s,t\in\mathbb{C},\ D\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})\},\\ \mathcal{H}_4&=\{H(J(s,s'),J(t,t'),J(w,w')):s,s',t,t',w,w'\in\mathbb{C}\}.\end{aligned}\tag{9}$$

定理 6.3。设 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$，$k=4$，$t=\max(m,n)$。式(3) 中的有界像保持映射具有以下可能的核心之一。

(i) $r=0$，从而得到一个压缩。

(ii) $r = 3$、 $a + b = 1$和 $m = n = 4$。除转置外，核心具有形式$TW_3(z(X))$，其中 $W_3(z) = z \wedge -$ 在 $\mathbb{C}^4$、 z 上是 Xv 或$X^{\mathsf{T}}u$的可逆变换，并且$\ker T$ 不包含非零可分解双向量。额外的行或列必须满足(4)。

(iii) $r = 4$, $a = b = 0$。在等价、零填充和转置意义下，该映射为(8) ，其中 $k = 4$。其投影和系数与定理 *5.1* 和命题 *5.2* 中的相同，且 Γ 满射。源空间的大小为 $4 \times 4, 4 \times 5$, 或5×4。

结合 *(i)* 和 *(ii)* 中的(4)，这些描述已足够。特别地，对于 $t > 5$ ，每个复秩四保持映射要么是具有满秩因子的标准映射，要么具有压缩形式。这个界值由源空间为 4×5 的完整 *II* 型空间达到。

证明。 由 (4) 可知，该核心在每个秩四输入上都必须达到上秩 r 。上秩为一的非零空间不可能是本原的。秩二核心 Alt_3 的维数为三，这与引理 4.3 矛盾。根据 Atkinson 定理，秩三本原核心至多有四个参数，因此该引理给出 $m = n = 4$。其四个参数 z 在 GL_4 上必须避免取零。于是它们的公共核是一个极大奇异空间，而 Flanders 维数界的等号情形给出了所述求值。每个求值在某个可逆输入上都能取到每个非零值。因此，如 (ii) 中所述，对于每个 $z \neq 0$， T 必须在 $z \wedge \mathbb{C}^4$ 上是单射。

现在考虑 $r = 4$。较低正本原秩的直和必须分解为$2 + 2$。根据引理 4.3，每个 Alt_3 直和项的三个坐标都在某个秩四输入上消失。因此，提升论证排除了直和。表 1 记录了对每个基本模型的检验。

表 1：上秩四的四个基本复空间。

类型	模型	大小	dim S	对秩四输入的检验
I	Alt_5	5×5	10	Gr(2,5) 的次数为五，而其次数必须是偶数。
II	$z \wedge -$	10×5	5	四阶秩在以下两个核条件下保持不变 定理 5.1。
III	$\mathcal{H}_3$	6×6	6	二元二次型的一个射影零点迫使秩至多为 two.
IV	$\mathcal{H}_4$	6×6	6	一个余维三的子空间由秩至多为二的矩阵组成。 二。

I 型。 在源空间中的坐标 M_4 上，推论 6.2 给出了一个可逆输入，其中母交错矩阵的秩至多为二。

III 型。 在同一个坐标块上，用 s, t, D 表示提升映射到 $\mathcal{H}_3$的六个线性坐标。当 $s = t = 0$ 其秩为 2 秩 D。对于 D 的每一行D_i， (s, t, D_i) 的四个元素消失，意味着秩 $D \leq 1$ 且输出秩至多为二。这四个元素不可能在 GL_4 上同时消失。它们的公共核是一个维数至少为 12 的奇异矩阵空间。Flanders 定理

给出等号成立，并表明其湮灭子由形式 $X \mapsto u^{\mathsf{T}} X v$ 构成，其中 u 或 v 固定。这类两个不同的四维空间至多交于一维。这里的两个湮灭子都包含线性无关的形式 s, t，因为每个四元组的秩都是四。因此它们相同，所有六个坐标都通过同一个求值 $X \mapsto Xv$ 或 $X \mapsto X^{\mathsf{T}} u$ 分解。该求值的每个非零值都能在 GL_4 上取到。在此求值的目标空间中，方程 $s = t = 0$ 定义了一个二维平面。在 $\mathbb{C}$ 上，二次型 $\det D$ 在该平面的某个非零点处消失。于是提升后的矩阵秩至多为二。

IV 型。在 $s = t = w = 0$ 处，H 的三个块都是 $J(0,1)$ 的倍数。该矩阵是 $J(0,1)$ 与一个行列式为零的 3×3 矩阵的克罗内克积，因子顺序可交换。其秩至多为二。方程 $s = t = w = 0$定义了一个余维三的子空间，根据引理 4.3，其逆像包含一个秩四输入。

II 型。z 这五个参数在所有秩四输入上都必须避开零。若某个投影将 $z \wedge -$ 的五维定义域限制到包含于超平面 H中的真子空间，则当 $z \in H$时秩会下降。引理 4.3给出了 H逆像中的一个秩四输入。因此，只可能出现外平方侧上的投影。定理 5.1和命题 5.2刻画了这些投影及系数映射。命题 5.3给出了本原性的满射条件。

分块判据给出了 (i) 和 (ii) 中的充分性，而定理 5.1 给出了 (iii) 中的充分性。在一个 4×5 源空间上，命题 5.2 后面的构造以整个本原 II 型空间作为其像。由于若该空间包含在上秩四的压缩中，则可以删除其中的一行或一列以降低上秩，因此它不可能包含在这样的压缩中。某个秩一输入具有四阶秩输出，这也排除了标准形式。

□

7 应用与开放问题

7.1 秩距离与常秩码

对于 $d(A,\ B) = \text{秩}(A - B)$，线性映射保持秩不增，当且仅当它将距离至多为 k 的有序对映射为距离至多为 k 的有序对。根据定理 1.1，它要么在每个距离下都是非扩张的，要么其像的直径至多为 k。在有限域上，直径至多为 k 的子空间是线性反码。因此，在后一种情况下，Flanders 维数界给出 $\dim \operatorname{im}\ \phi \le k \max(p,\ q)$。左因子具有满列秩且右因子具有满行秩的标准映射保持秩距离。在 $\mathbb{F}_Q$ 上，命题 7.1 给出满足以下条件的 $Q^{mn} N_{n-i,\ q-j}$ 个有序对 $(X,\ Y) \in \mathrm{M}_{m,\ n}(\mathbb{F}_Q)^2$

$$d(X, Y) = i, \qquad d\big(\phi(X), \phi(Y)\big) = j.$$

确实，每个差值 $Z = X - Y$ 恰好对应 Q^{mn} 个有序对，并且$\phi(X) - \phi(Y) = \phi(Z)$。Delsarte 双线性型方案和码–反码

对偶性由 Ravagnani 研究，为此提供了编码理论框架 [8, 27]。Maksaev、Medved 和 Promyslov 研究了一个相关的双映射双射定距离问题[26]。

对于任意域上的方阵，de Seguins Pazzis 对将 GL_k 映入自身的线性映射 $\mathrm{M}_k \to \mathrm{M}_k$ 进行了分类 [9, 定理 2]。除可逆标准映射外，这些映射为 $X \mapsto g(Xv)$ 或 $g(X^{\mathsf{T}}u)$，其中 $u,\ v \neq 0$ 且存在一个线性同构 $g\colon\ \mathbb{F}^k \to W \subseteq \mathrm{M}_k$ 映至一个其非零元素均可逆的空间。例如，取 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_Q$，并令 $g(w)$表示 w 在 $\mathbb{F}_{Q^k}$上的乘法。非零输出的秩为 k，从而得到一个 k维常秩码。在代数闭域上，这种 W 的维数不可能为 $k > 1$，因为行列式在 W 上的限制是一个有非平凡零点的齐次形式。

对于任意大小的源空间，令 $v(X)$为 X的 mn 个元素组成的列向量。构造一个 $kmn \times k$ 块对角矩阵，其中有 k 个对角块，每个块都等于$v(X)$。每个非零输入的输出秩均为 k。这是一个有界像保持映射；对于 $k \geq 2$，它会提高每个秩一输入的秩。Li、Rodman 和 Šemrl 给出了这一构造在 $\mathbb{R}$ 上的版本 $\mathbb{C}$ [23, 命题 2.1]。他们的命题 2.2 还利用非奇异矩阵子空间给出了其他实数域上的例子。

7.2 二分张量

通过 $u \otimes v \mapsto uv^{\mathsf{T}}$ 将 $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ 与 $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ 对应起来。当且仅当一个向量的系数矩阵的秩为 j 时，该向量的施密特秩为 j。假设一个在两个此类张量积之间的复线性算子，将施密特秩至多为 k 的向量映射为施密特秩至多为 k 的向量。若其像中包含一个施密特秩大于 k 的向量，则定理 1.1 表明，该算子由两个张量因子上的独立线性映射构成，必要时还可交换这两个因子。按照我们的约定，$X \mapsto MXN$ 的两个局部因子为 M 和 N_{T}。在这种情况下，精确保持要求两个局部映射均为单射。这是 Johnston 在研究可分性度量 [22] 时所用线性保持映射结果的矩形类比。它适用于态矢量，也适用于归一化之前的单个线性测量算子。

对于值落在 d 个元素的单行中的映射 Γ，与秩一保持相容的最小输出维数取决于域。仅当双线性映射 $(u, v) \mapsto \Gamma(uv^{\mathsf{T}})$ 对每一对非零向量都非零时，此类映射才精确保持秩一。在代数闭域上，可达到的最小 d 为 $m+n-1$，因为射影核必须避开维数为 $m+n-2$ 的塞格雷簇，而具有所需余维的一般中心能够做到这一点。在 $\mathbb{F}_Q$ 上，根据引理 4.3 以及两个线性嵌入子空间 $\mathbb{F}_{Q^{\max(m,n)}}$ 的乘法，最小 d 为 $\max(m, n)$。这是命题 5.4 的秩一对应结果。

7.3 精确保持检验

在有限域上，输入秩和输出秩的联合分布给出了一种精确检验，即使在例 3.6 这样的情形下也是如此。令 $\begin{bmatrix} a \\ i \end{bmatrix}_Q$ 表示 i 维

$\mathbb{F}_Q^a$ 的子空间数，当 $i > a$ 时取值为零。

命题 7.1。令 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_Q$ 和 $k \le \min(p, q)$。对于 $U \le \mathbb{F}^n$，$V \le \mathbb{F}^q$，计算

$$c(U,V) = \dim\{X : XU = 0,\ \phi(X)V = 0\}, \qquad H_{ij} = \sum_{\dim U = i,\ \dim V = j} Q^{c(U,V)}.$$

通过三角系统定义整数 N_{ab}、$0 \le a \le n$、$0 \le b \le q$

$$H_{ij} = \sum_{a \ge i,\ b \ge j} \begin{bmatrix} a \\ i \end{bmatrix}_Q \begin{bmatrix} b \\ j \end{bmatrix}_Q N_{ab}. \tag{10}$$

当且仅当 ϕ 保持秩 k 时

$$N_{n-k,q-k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(Q^m - Q^i)(Q^n - Q^i)}{Q^k - Q^i}.$$

证明。统计满足 $U \subseteq \ker X$、$V \subseteq \ker \phi(X)$ 且具有规定子空间维数的三元组（X，U，V）。先对 X 进行计数，可得 (10)，其中 N_{ab} 是具有两个零度 a，b 的输入数量。由于对角系数均为 1，按两个零度的降序求解即可得到每个 N_{ab}。该乘积通过除以 $\mathbb{F}^k$上的基变换，对秩-k输入按满秩分解进行计数。当且仅当所有秩-k 输入的输出秩均为 k时，等式成立。每个 $c(U,\ V)$ 都是由 $XU = 0$ 和 $\phi(X)V = 0$定义的齐次线性系统的零度。 □

在代数闭域上，也可以通过理想成员关系检验有界像映射。令 $I_j(Z)$ 表示由 Z 在源空间坐标的多项式环中的 j-子式生成的理想；当不存在这类子式时，取零理想。令

$$J = I_{k+1}(X) + I_k(\phi(X)).$$

其公共零点正是秩至多为 k 且其像的秩小于 k 的输入。因此，当 $\operatorname{urk}(\operatorname{im}\phi) \le k$ 时，精确保持等价于 $I_k(X) \subseteq \sqrt{J}$。等价地，对于每个源空间 k- 子式 Δ，在增加一个变量 z 的多项式环中，理想 $(J, 1 - z\Delta)$ 是单位理想。这一结论由零点定理推出，并在具体示例 [7, 19] 中给出有限的格罗布纳基检验。对于投影外积，域的选择会影响检验。命题 5.4 表明，某个投影可能在有限域上保持秩，却无法在代数闭包上保持秩。

7.4 开放问题

1. 例外的秩-k 保持映射，定义在 $\mathbb{F}_2$上。固定 $k \ge 2$ 和 $p, q \ge k + 1$。对于哪些源空间维数 $m, n \ge k$，存在一个线性秩-k 保持映射 $\phi : \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{F}_2) \to \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{F}_2)$，使得对于某个秩小于 k 的 X，有 $\operatorname{rank}\phi(X) > k$？例 3.6 给出了一个适用于 $m = n = k$ 的此类映射；对于每个这样的目标空间，只需在输出中添加零行和零列即可。请对这些映射按源空间和目标等价分类，从最小情形 $\mathbf{M}_k(\mathbb{F}_2) \to \mathbf{M}_{k+1}(\mathbb{F}_2)$ 开始。

2. ***Pfaffian* 障碍。**是否存在一个复线性映射 $\Gamma\colon M_6(\mathbb{C}) \to \mathrm{Alt}_7(\mathbb{C})$，使得对于每个 $X \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$，都有 $\operatorname{rank}\Gamma(X) = 6$？对于 $k = 6$，次数障碍中的因子是 $\gcd(6,15,20) = 1$，因此该障碍不施加任何限制。更一般地，对于满足 $k \equiv 2 \pmod 4$ 的哪些 $k \geq 6$，这样的映射存在？对于固定的候选 Γ，令 $P_1, \dots, P_7$ 为 $\Gamma(X)$ 的六阶主 Pfaffian。则 Γ 在每个可逆输入上秩为六，当且仅当 $\det X \in \sqrt{(P_1, \dots, P_7)}$。

生成式人工智能的使用。 OpenAI 的 ChatGPT 协助进行了文献检索、文字表述的修订，以及部分证明和例子的编写，包括引理 3.3 的证明和例 3.6 中的构造。

参考文献

[1] M. D. Atkinson, 《有界秩矩阵原始空间》II, 《澳大利亚数学会杂志 A 辑》34（1983）, 306–315。doi:10.1017/S1446788700023740.[2] M. D. Atkinson 和 S. Lloyd, 《有界秩矩阵的大空间》, 牛津数学季刊（第 2 辑）31（1980）, 253–262。doi:10.1093/qmath/31.3.253.[3] M. D. Atkinson 和 S. Lloyd, 《有界秩矩阵原始空间》, 《澳大利亚数学会杂志 A 辑》30（1981）, 473–482。doi:10.1017/S144678870001795X.[4] L. B. Beasley, 《矩阵上的线性算子：秩为 k 的矩阵的不变性》, 《线性代数及其应用》107（1988）, 161–167。doi:10.1016/0024-3795(88)90242-X.[5] L. B. Beasley 和 T. J. Laffey, 《矩阵上的线性算子：秩为 k 的矩阵的不变性》, 《线性代数及其应用》 **133** 1990 175 184 10.1016/0024-3795(90)( ), –。doi:。[6] P. Botta, 《保持秩不超过一的线性映射》, 《线性与多重线性代数》20（1987）, 197–201。doi:10.1080/03081088708817756.[7] W. Bruns 和 U. Vetter, 《行列式环》, 《数学讲义》1327, Springer, 柏林, 1988。doi:10.1007/BFb0080378.[8] P. Delsarte, 《有限域上的双线性型及其在编码理论中的应用》, 组合理论杂志 A 辑 25（1978）, 226–241。doi:10.1016/0097-3165(78)90015-8.[9] C. de Seguins Pazzis, 《非奇异矩阵的奇异线性保持映射》, 《线性代数及其应用》433（2010）, 483–490。doi:10.1016/j.laa.2010.03.021.[10] C. de Seguins Pazzis, 《通过对偶性考察局部线性相关 II》, 《线性代数及其应用》462（2014）, 133–185。doi:10.1016/j.laa.2014.08.013.[11] C. de Seguins Pazzis, 《重新审视有界秩矩阵的大空间》, 《线性代数及其应用》504（2016）, 124–189。doi:10.1016/j.laa.2016.03.051.[12] C. de Seguins Pazzis, 《二元域上上秩为二的矩阵原始空间》, 《线性与多重线性代数》 **64** 2016 1321 1353 10.1080/( ), –。doi:。

[13] H. Duan 和 X. Lin, 《酉群的拓扑与二项式系数的素数阶》, 《中国科学: 数学》60（2017）, 1543–1548。doi:10.1007/s11425-016-9004-0.[14] D. Eisenbud 和 J. Harris, 《低秩矩阵的向量空间》, 《数学进展》70（1988）, 135–155。doi:10.1016/0001-8708(88)90054-0.[15] H. Flanders, 《关于具有有界秩的线性变换空间》, 《伦敦数学学会杂志》37（1962）, 10–16。doi:10.1112/jlms/s1-37.1.10.[16] W. Fulton, 《交叉理论》, 第 2 版, 《数学及其边界领域成果》（第 3 辑）, 第 2 卷, Springer, 柏林, 1998。doi:10.1007/978-1-4612-1700-8.[17] S. R. Ghorpade 和 C. Krattenthaler, 《帕菲安环的希尔伯特级数》, 载于《代数、算术与几何及其应用》, Springer, 柏林,

2004, 337 356 10. –。1007/978-3-642-18487-1_22 doi: 。[18] R. Gow 和 R. Quinlan, 《交替双线性形式子空间的消失》, 《线性与多重线性代数》54（2006）, 415–428。doi:10.1080/03081080500361264.[19] R. Hartshorne, 《代数几何》, 《研究生数学教材》52, Springer, 纽约, 1977。doi:10.1007/978-1-4757-3849-0.[20] Hang Huang 和 J. M. Landsberg, 《关于有界秩矩阵的线性空间》, 《数学选刊》（新辑）32（2026）, 文章 30。doi:10.1007/s00029-026-01137-x.[21] Huajun Huang 和 M.-C. Tsai, 《矩阵空间之间的秩线性非增且保持映射》, 2026。arXiv:2610.40995.[22] N. Johnston, 《通过线性保持问题刻画保持可分性度量的运算》, 《线性与多重线性代数》

59 2011 1171 1187 10.1080/ ( ), –。03081087.2011.596540 doi: 。[23] C.-K. Li、L. Rodman 和 P. Šemrl, 《将一个特定秩集合映入另一个特定秩集合的矩阵空间间线性变换》, 《线性代数及其应用》357（2002）, 197–208。doi:10.1016/S0024-3795(02)00381-6.[24] R. Loewy, 《秩-k 非增线性映射》, 《线性与多重线性代数》34（1993）, 21–32。doi:10.1080/03081089308818205.[25] R. Loewy, 《秩-k 非增线性映射 II》, 《线性与多重线性代数》36（1993）, 115–123。doi:10.1080/03081089308818281.[26] A. Maksaev、N. Medved 和 V. Promyslov, 《保持有限域上矩阵固定秩距离的映射》, 《有限域及其应用》

111 2026 102759 10. ( ), 1016/j.ffa.2025.102759 文章。doi: 。[27] A. Ravagnani, 《秩度量码及其对偶理论》, 《设计、码与密码学》80（2016）, 197–216。doi:10.1007/s10623-015-0077-3。