arXiv:2611.31809v1 [math.LO] 24 Nov 2026

博雷尔托卜

JOSEPH HELFER、PATRICK LUTZ 和 FORTE SHINKO

Abstract. 我们为博雷尔数学构造了一个拓扑斯：在博雷尔数学中为真的命题，与在该拓扑斯的内在逻辑中为真的命题，以一种精确的方式相对应。我们还研究了这个拓扑斯的其他若干性质，包括证明它满足丘奇–图灵论题的一个博雷尔类比形式：即标准博雷尔空间上的每个函数都是博雷尔函数。我们还说明，van Osdol 早先构造的一个类似“博雷尔拓扑斯”并不适用于这些目的，因为该论文存在一个错误。

Contents

1. 引言 2 1.1. 主要结果 3 1.2. 进一步结果 4 1.3. 关于未使用人工智能的声明。4 2. 预备知识 4 2.1. Grothendieck拓扑 4 2.2. 子层 6 2.3. 初等拓扑斯 7 2.4. Kripke-Joyal语义 9 2.5. 标准博雷尔空间 10 3. 博雷尔 Grothendieck拓扑斯 11 3.1. $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$ 13中的子层 3.2. 解析空间 15 3.3. 其他拓扑斯理论性质 19 3.4. 双重否定子拓扑斯 20 3.5. **SBor** 上的典范拓扑 21 3.6. Van Osdol 拓扑斯 23 4. 博雷尔数学与 $\mathcal{E}$ 23的内在逻辑 4.1. 内在黑田 = 外在博雷尔 23 4.2. 博雷尔数学中的例子 27 4.3. Borel 近视 29 附录 A. $J_{\mathbf{SBor}}$ 并非典范拓扑 37 附录 B. 定理 3.19 的证明 41 参考文献 44

1. Introduction

描述集合论，或者更准确地说，博雷尔数学，研究的是仅使用博雷尔运算和关系，由标准博雷尔空间（见 §2.5）构造出的数学对象的性质。例如，博雷尔图组合学研究顶点集构成标准博雷尔空间、边集是该空间的博雷尔子集的图（更多示例见 §4.2）。

人们对博雷尔数学感兴趣的一个原因是：一方面，博雷尔集具有许多有用的性质（例如，$\mathbb{R}$ 的所有博雷尔子集都是勒贝格可测的）；另一方面，人们通常进行的许多数学构造并不会使人脱离博雷尔数学的范畴。

博雷尔构造看似稳健，这表明存在一个自成一体的“博雷尔数学宇宙”，在其中所有 数学构造实际上都是博雷尔构造。由此，我们提出以下两个相关问题：

1. 我们能否找到一个集合论模型，使其恰好满足那些在博雷尔数学中为真的陈述？
2. 我们能否（至少部分地）刻画这个模型的理论？也就是说，我们能否找到一组公理，恰好刻画博雷尔数学中允许的构造？

本文旨在回答问题（1）。我们也在问题（2）上取得了一些进展，尽管——尽管这个问题在很大程度上构成了我们的研究动机——我们并未对此给出确定的答案。

我们对问题（1）的回答，是通过构造一个合适的拓扑斯 （它本质上与高阶算术的一个模型是同一回事，见 [LS86]）来实现的；可以将其视为博雷尔数学的拓扑斯。为此目的，相较于基于隶属关系的集合论模型（如 ZF），使用拓扑斯有几个理由。

首先，对于博雷尔数学而言，集合的相关方面在于它们作为抽象结构的承载者以及它们之间的映射——而不是隶属关系和累积层级。换言之，相关的是抽象集合论，即 [Mak13], 意义下的抽象集合论；这正是集合论中由拓扑斯理论所刻画的那一方面。其次，拓扑斯理论中已经有一种成熟的构造，恰好适合我们的目的：从一个所关注的基本范畴（这里是标准博雷尔空间）出发，将其扩展为一个集合论模型（即一个拓扑斯）。这就是在格罗滕迪克位点上构造层范畴，我们将在第2.1节回顾这一构造。具有类似精神的先前构造实例包括 Johnstone 的拓扑拓扑斯 [Joh79]和 Dubuc 的光滑拓扑斯 [MR91]——事实上，此前甚至已经存在一个博雷尔拓扑斯 [Van81], ，不过正如我们在第3.6节所解释的，这个拓扑斯并不适合我们的目的。（相关的还有 [Hyl82], 的有效托*pos*，不过它采用了不同但相关的方法构造。）

第三个原因——乍看之下并不明显相关——是，拓扑斯通常只是直觉主义 集合论的一个模型。事实上，我们构造的博雷尔拓扑斯并不遵循经典逻辑（即它不是布尔拓扑斯），而且出于我们

将在下文解释的原因，这最终对我们有利。博雷尔数学与构造主义之间存在联系，这也并非什么新思想；参见 [Sha21；Ber22；Ber23]。

直觉主义逻辑对于博雷尔拓扑斯的重要性，与无法构造一个真正只由博雷尔集组成的宇宙有关。相反，我们还必须将解析集纳入其中：它们是博雷尔集在博雷尔映射下的像。这基本上是不可避免的，因为在任何拓扑斯中，我们都必须能够形成任意映射的像。既然已经将解析集纳入我们的宇宙，那么自然会问：哪些子集实际上是博雷尔集，是否存在对它们的内在刻画？事实证明，这个问题有一个非常令人满意的答案：集合 X 的子集 P 是博雷尔集，当且仅当它们是可判定的，也就是说，对于所有 $x \in X$， $x \in P \vee x \notin P$。

让我们更精确地表述这一点：每个标准博雷尔集 X 都会在我们的拓扑斯中产生一个“集合”（即一个对象） X，而 X 的子对象对应于 X 的解析子集（更准确地说，是解析集的 σ-理想，见第3节.1）；那些在外部对应于 X 的博雷尔子集的子对象，在内部恰好是 X 的可判定子对象。但事实上，我们还可以说得更多：我们也可以在内部询问，“（例如， $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的）一个子集是可判定的，当且仅当它是博雷尔集”，这一命题是否成立；我们在第4节.3中证明了确实如此。此外，正如我们在那里解释的，这在直觉主义意义下等价于“每个函数都是博雷尔映射”，因此后者在我们的拓扑斯中也成立。这是强版本丘奇–图灵论题的一个博雷尔类比；该论题断言“每个函数都是可计算的”，同样可以使其在某个适当的拓扑斯内部按字面成立。

1.1. 主要结果。 我们的主定理表明，我们的拓扑斯 $\mathcal{E}$ 确实是“博雷尔数学的拓扑斯”：命题 φ 在 $\mathcal{E}$ 中内部成立，当且仅当 $\mathcal{E}$ 的“博雷尔版本”成立。为使这一点更加明确，我们需要说明所考虑的命题φ 属于何种类型，以及我们所说的此类命题的博雷尔版本是什么意思。我们将 φ 视为 §4.1 所述意义下的三阶算术命题：一种带有 $\mathbb{N}$、 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$和 $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}$型变量的一阶语言。此类命题的“博雷尔解释”就是通常的集合论解释，只不过将 $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}$ 型变量解释为对 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$的博雷尔子集进行量化。这里还有一个额外的隐含主张需要论证，即所有“博雷尔数学”的断言都是某个此类三阶命题的博雷尔解释。我们在 §4.2 中通过展示文献中的多种命题确实都属于这种形式，为此提供了佐证。

这个定理的表述还涉及一个额外的转折：博雷尔解释相对于经典逻辑是可靠的，而在我们的拓扑斯 $\mathcal{E}$ 中，对句子的解释原则上仅对直觉主义逻辑可靠。事实上，一般而言，唯一成立的是：对于每个句子 φ，都存在一个与之在经典逻辑下等价的陈述 $\tilde{\varphi}$，使得 φ 的博雷尔解释成立，当且仅当 $\tilde{\varphi}$ 在 $\mathcal{E}$中成立。我们选取的这个$\tilde{\varphi}$ 是对 φ进行黑田翻译所得；它是将经典逻辑解释为直觉主义逻辑的若干种“双重否定解释”之一。由此我们得到

定理A （见定理 4.3）。 对于三阶算术中的任意句子 φ， φ的博雷尔解释成立，当且仅当其 *Kuroda* 翻译 $\tilde{\varphi}$ 在博雷尔拓扑斯 $\mathcal{E}$中成立。

由于拓扑斯能够可靠地解释所有高阶算术（例如，在 [LS86]的意义下），因此我们得到以下关于博雷尔数学中陈述真值的判据：

推论。 对于任意 φ 三阶算术句子，如果其黑田翻译 $\tilde{\varphi}$ 可在直觉主义高阶算术中证明，那么其 φ 博雷尔解释为真。

事实上，正确的不止这些，因为在我们的拓扑斯 $\mathcal{E}$中，不仅纯高阶算术是有效的。例如，在证明 φ时，我们还可以额外假设任意这样的陈述的黑田翻译：其博雷尔解释已经得到确立。

第二个主要结果，我们称之为*Borel* 近视 ，就是上文已经提到的结果：

定理 B （见 §4.3，其中给出了精确表述）。 以下陈述在博雷尔拓扑斯 $\mathcal{E}$内部成立： $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的一个子集是可判定的，当且仅当它是博雷尔集。

1.2. **进一步结果**。 除了上述主要结果之外，我们还证明了我们的博雷尔拓扑斯 $\mathcal{E}$的许多其他基本拓扑斯论性质：

- 在第3.3节中，我们证明了 $\mathcal{E}$ 满足马尔可夫原理，并且它是二值的，但（如前所述）不是布尔的，因此不是良点化的，也不满足选择公理。
- 在第3.1节中，我们证明了 $\mathcal{E}$ 中 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的子对象格同构于 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$的解析子集的 σ-理想格。
- 在第3.4节中，我们证明了 $\mathcal{E}$ 的双重否定子拓扑斯等价于$\mathbf{Set}$。
- 在第3.5节中，我们证明，假设连续统假设， $\mathcal{E}$ 等价于关于标准博雷尔空间范畴 $\mathbf{SBor}$上的典范拓扑的层范畴。在附录 A 中，我们介绍了 Edward Hou 的一个论证，该论证表明这一点无法在 ZFC（不含连续统假设）中证明。

此外，在第3.2节中，我们证明 $\mathcal{E}$ 可以描述为解析$analytic$空间范畴上的层（即完备博雷尔空间的解析子集），而不是完备博雷尔空间上的层。我们还证明了该范畴的其他各种性质，尤其表明它在某种意义上——事实上是在多个意义上——是标准博雷尔空间范畴的$completion$。

1.3. **声明 关于未使用人工智能的声明**。本文的创作未使用任何人工智能工具 .

2. Preliminaries

我们假定读者熟悉范畴论和描述性集合论的基本概念；前者可参阅 [Mac98] ，后者可参阅 [Kec95], 。关于拓扑斯的更多背景知识，超出本文此处回顾的范围，可参阅 [Joh77；MM94；Joh02]。

2.1. **Grothendieck拓扑**。我们回顾一些基本概念，并确定有关Grothendieck拓扑的记号。

设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限的小范畴。我们回顾一下，定义 $\mathcal{C}$ 上 Grothendieck 拓扑有两种方式：用筛来定义，或用覆盖族来定义（参见 [MR77，第 1.1] 节）。我们将采用后一种方式，不过会在第 2.2 节和第 3.3 节再讨论筛。

给定一个对象 $X \in \mathcal{C}$，一个**在 X 上方的态射族**是一个由陪域为 X 的态射组成的集合 $\mathbf{A} \subset \mathrm{Ar}(\mathcal{C})$。我们用 $\mathrm{Fam}(X)$ 表示 X 上方的态射族的集合。对于 $\mathbf{A} \in \mathrm{Fam}(X)$ 和 $a \in \mathbf{A}$，我们通常用 U_a 表示 a 的定义域。 X 上的一个（**Grothendieck**）**拓扑**由每个 $X \in \mathcal{C}$ 对应的一个集合 $J(X) \subset \mathrm{Fam}(X)$ 构成，该集合包含 X 上方的态射族，称为**覆盖族**，或在 J 中称为**覆盖**，并满足以下公理：

（T1）对于每个 $X \in \mathcal{C}$，由态射 $\{\mathrm{id}_X\}$ 组成的单元素族属于 $J(X)$

（T2）给定一个覆盖族 $\mathbf{A} \in J(X)$、一个态射 $f\colon Y \to X$ 属于 $\mathcal{C}$，以及一个拉回的选择

$$\begin{array}{ccc} f^*U_a & \xrightarrow{\pi_f} & U_a \\ {\scriptstyle f^*a}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle a} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

对于每个 $a \in \mathbf{A}$，由此得到的关于 Y 的态射族 $f^*\mathbf{A} .. = \{f^*U_a \xrightarrow{f^*a} Y\}_{a\in\mathbf{A}}$ 属于 $J(Y)$。

（T3）给定一个覆盖族 $\mathbf{A} \in J(X)$，以及对于每个 $a \in \mathbf{A}$ 的进一步覆盖族 $\mathbf{B}_a \in J(U_a)$，由此得到的态射族 $\{a \circ b\colon U_b \to X \mid a \in \mathbf{A}\ b \in \mathbf{B}_a\}$ 也属于 $J(X)$。

（T4）给定 $\mathbf{A} \in J(X)$ 和 $\mathbf{B} \in \mathrm{Fam}(X)$，如果每个 $a \in \mathbf{A}$ 都经由某个 $b \in \mathbf{B}$ 分解（即存在 $g\colon U_a \to U_b$ 使得 $b \circ g = a$），那么 $\mathbf{B} \in J(X)$。

具有有限极限的范畴连同一个 Grothendieck拓扑称为一个**层位**。我们可以将层位与其底层范畴混同。

给定一个预层 F on $\mathcal{C}$（即，一个函子 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$）以及 $\mathcal{C}$ 中的一个态射族 $\mathbf{A} \in \mathrm{Fam}(X)$，如果给定拉回，我们称 F 是**关于 $\mathbf{A}$ 的层**，或称为一个**$\mathbf{A}$-层**；并称 $\mathbf{A}$ 是一个 ***F*-良态射族**。

$$\begin{array}{ccc} U_a \times_X U_{a'} & \xrightarrow{\pi} & U_a \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle a} \\ U_{a'} & \xrightarrow{a'} & X \end{array}$$

对于所有 $a, a' \in \mathbf{A}$，以及每个 $a \in \mathbf{A}$ 所对应的元素 $s_a \in F(U_a)$，若满足 $\pi^* s_a = (\pi')^*(s_{a'}) \in F(U_a \times_X U_{a'})$ 对所有 $a, a' \in \mathbf{A}$成立，则存在唯一的 $s \in F(X)$，使得对所有 $a \in \mathbf{A}$都有 $s_a = a^* s$。给定 $\mathcal{C}$ 上的一个拓扑 J，如果一个预层 F 关于 J 是一个**层**（或**关于J**，或一个**在 $\mathcal{C}$上的层**），即对于每个 $X \in \mathcal{C}$ 和$\mathbf{A} \in J(X)$，它都关于$\mathbf{A}$成立，则称其为一个**层**。

同样，我们完全可以说 F 是相对于 $\mathcal{C}$ 中的任意态射族集合而言的层，而不只是相对于 Grothendieck拓扑。Grothendieck拓扑这一概念的主要意义在于：如果 $\mathcal{C}$ 上的两个拓扑 J 和 J' 具有相同的层（即，$F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ 是 J 的层，当且仅当它是 J' 的层），那么它们相等。更确切地说，给定一个拓扑 J，覆盖族 $J(X) \subset \mathrm{Fam}(X)$ 恰好是那些 $\mathbf{A} \in \mathrm{Fam}(X)$，使得 $f^*\mathbf{A}$ 对每个 J-层 F 以及 $f\colon Y \to X$ in $\mathcal{C}$ 都是 F-良好的。

给定 $\mathcal{C}$ 中任意一组态射族 J，都存在包含 J 的最小拓扑，称为由 J **生成的**拓扑，记作 $\langle J \rangle$。如果 J 满足公理

(T2)，那么 $\langle J\rangle$ 的层与 J 的层相同。因此，两组 J，J' 态射族若都满足 (T2)，则它们生成相同的拓扑，当且仅当它们具有相同的层。

如果 J 还满足 (T1)-(T3)，则称其为**预拓扑**。这一概念的重要性在于，在这种情况下，我们可以精确地描述由 J 生成的拓扑：$\langle J\rangle(X)$恰好由那些$\mathbf{B} \in \mathrm{Fam}(X)$构成，使得某个 $\mathbf{A} \in J(X)$**经由……分解**通过$\mathbf{B}$；这意味着每个 $a \in \mathbf{A}$ 都经由某个 $b \in \mathbf{B}$分解，如 (T4) 所示。我们称具有有限极限的范畴连同一个预拓扑为**预层位点**。

对于范畴 $\mathcal{C}$，我们记作 $\widehat{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$ 上预层的范畴；给定 $\mathcal{C}$ 上的拓扑 J，我们记 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \subset \mathcal{C}$（或简称 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$）为 J-层的范畴。**格罗滕迪克拓扑斯**（或简称**拓扑斯**）是指与某个层位 $(\mathcal{C}, J)$ 上的 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 等价的范畴。

我们记よ: $\mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ 为米田嵌入よ$(X) = \mathcal{C}(-, X)$，并且也记$\yen X$ 为よ(X)；我们回顾一下，米田嵌入保持所有小极限。预层称为**可表对象**，如果它同构于形如 X的对象。若所有可表预层都是层，也就是说よ经由$\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$分解，则称拓扑 J 为**子典范的**。我们考虑的拓扑都将是子典范的。

全子范畴$\mathrm{Sh}(\mathcal{C}) \subset \widehat{\mathcal{C}}$是反射的，这意味着包含映射 $i\colon \mathrm{Sh}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ 具有左伴随 $\widehat{\mathcal{C}} \to \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$，称为**层化**。特别地，$i$ 保持并反映所有小极限，因而也保持并反映单态射，所以よ也保持单态射。

引理 2.1。 *若$(\mathcal{C}, J)$是一个小的子典范预层站，则对象 $U \in \mathcal{C}$被空族覆盖，当且仅当 $U \in \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 是初始对象。*

证明。 正向蕴含直接由定义和 Yoneda 引理得出。对于逆向蕴含，假设 U 是初始对象，并记 $\emptyset_U \in \mathrm{Fam}(U)$ 为对 U的空覆盖。那么，对于 $\mathcal{C}$中的任意态射 $f\colon U' \to U$，态射 $f\colon U' \to U$是同构，而 U' 同样是初始对象（这是拓扑斯的一般性质，更一般地说，也是笛卡尔闭范畴的性质）。由此可知，对于任意$F \in \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$，$\emptyset_{U'} = f^*\emptyset_U$是 F-良好的，因此我们得到 $\emptyset_U \in \langle J\rangle(U)$。但这意味着存在某个覆盖$\mathbf{A} \in J(U)$ 经由 $\emptyset_U$分解。因此，我们必有 $\emptyset_U \in J(U)$，因为经由 $\emptyset_U$ 分解的唯一覆盖就是 $\emptyset_U$ 其自身。□

2.2. **子层**。 在任意预层范畴 $\mathcal{C}$ 中，给定预层 $F \in \mathcal{C}$ 的子对象都可以明确描述。具体而言，F 的一个 **子函子** 是满足以下条件的预层 $R \in \mathcal{C}$：对于 $X \in \mathcal{C}$，有 $RX \subset FX$；并且对于 $\mathcal{C}$ 中的每个 $f\colon X \to Y$，$Rf\colon RY \to RX$ 是 $Ff\colon FY \to FX$ 的限制；特别地，$(Ff)(RY) \subset RX$。反过来，对于每个 $X \in \mathcal{C}$ 指定子集 $RX \subset FX$，只要满足 $(Ff)(RY) \subset RX$，就能确定一个子函子。于是，包含映射 $RX \hookrightarrow FX$ 给出自然变换 $R \hookrightarrow F$，它是 $\mathcal{C}$ 中的单态射。

事实是，现在每个 $\mathcal{C}$ 中的单态射 $i\colon G \to F$ 都同构于 F 的唯一子函子 R，即对 $X \in \mathcal{C}$，有 $R(X) = i_X(GX)$。

$\widehat{}$可表对象 X 的子函子 R 称为 X 上的**筛**；具体而言，它为每个 $Y \in \mathcal{C}$ 指定一个子集 $RY \subset \mathcal{C}(Y,\ X)$，使得给定 $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$，若 $f \in RY$，则 $f \circ g \in RZ$。

$\widehat{}$现在固定一个拓扑 J，以及一个层 $F \in \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$。由于包含函子 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}$保留并反映单态射，$\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$ 中到 F 的单态射 $G \to F$ $\widehat{}$恰好是 $\mathcal{C}$ 中使 G 成为层的单态射，因此与使 R 成为层的子函子 $R \subset F$ 一一对应，这些子函子称为**子层**。

$\widehat{}$ $\widehat{}$可表对象 X 的子层是满足以下条件的筛 $R \subset X$：给定 $f\colon\ Y \to X$，以及一个覆盖$\mathbf{A} \in J(Y)$，若对每个 $a \in \mathbf{A}$，$f \circ a\colon\ U_a \to X$ 都属于 RA，则 $f \in RY$。

任意层 F 的子层按包含关系排序后构成 Heyting代数 $\mathrm{Sub}(F)$，其运算由下文 §2.4 讨论的 KJ语义确定。不过，我们注意到，$\mathrm{Sub}(F)$ 中的有限合取就是逐点给出的：$(R \wedge S)X = RX \cap SX$。

2.3. **初等拓扑斯**。尽管本文主要关注格罗滕迪克拓扑斯，我们也会讨论更一般的初等拓扑斯。

我们回顾一下：范畴 $\mathcal{D}$ 中对象 X 的**幂对象** 是一个对象 $\mathcal{P}(X)$，配备一个二元关系 $\in_X \rightarrowtail X \times \mathcal{P}(X)$，并满足如下泛性质：任何其他二元关系 $R \rightarrowtail X \times U$ 都可沿 $\mathrm{id} \times f\colon$ $X \times U \to X \times \mathcal{P}X$ 拉回，且存在唯一的态射 $f\colon U \to \mathcal{P}X$ 使之成立（我们称该态射分类 R）。

初等拓扑斯 是具有有限极限的范畴，其中每个对象都存在幂对象。每个格罗滕迪克拓扑斯都是初等拓扑斯，而且格罗滕迪克拓扑斯的许多重要性质也为一般的初等拓扑斯所共有。首先，初等拓扑斯具有所有有限余极限和指数对象。但最重要的是，任意初等拓扑斯 $\mathcal{D}$ 都有如下逻辑 结构：对于 $X \in \mathcal{D}$，每个子对象格 $\mathrm{Sub}(X)$ 都是 Heyting代数；并且对于 $\mathcal{D}$中的每个态射 $f\colon\ X \to Y$，拉回态射 $f^*\colon \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ 都是 Heyting代数同态，并且具有左伴随和右伴随 $\exists_f,\ \forall_f\colon \mathrm{Sub}(X) \to \mathrm{Sub}(Y)$。

由此便得到 $\mathcal{D}$的内在逻辑。考虑多排序一阶语言$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$，其类型为 $\mathcal{D}$中的对象；对于 $\mathcal{D}$中每个从积出发的态射 $f\colon\ \prod_{i=1}^n X_i \to X$，都有一个函数符号（其输入和输出类型显而易见）；对于 $\mathcal{D}$中每个到积的单态射 $R \rightarrowtail \prod_{i=1}^n X_i$，都有一个关系符号（其元数同样显而易见）。我们写作 $x\colon\ X$，表示 x 是类型为 X的变量；给定序列 $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$和 $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$，我们写作 $\vec{x}\colon\ \vec{X}$，表示对每个 i，都有 $x_i\colon\ X_i$。

利用上述逻辑结构，我们便可如 [MR77，第 2], 章所示，为 $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$中的每个项 t（其自由变量$\mathrm{FV}(t) \subset \vec{x}\colon\ \vec{X}$）定义一个态射 $[t]_{\vec{x}}\colon \prod_{i=1}^n X_i \to X$；并为 $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$中的每个公式 φ（其$\mathrm{FV}(\varphi) \subset \vec{x}\colon\ \vec{X}$）定义一个子对象 $[\varphi]_{\vec{x}} \in \mathrm{Sub}(\prod_{i=1}^n X_i)$。特别地，命题联结词通过 $\mathrm{Sub}(\prod_{i=1}^n X_i)$上的Heyting代数结构来解释。若 φ 是一个闭公式，则 $[\varphi]_{\emptyset}$ 因此是终对象层$\mathbf{1}$的一个子层；若 $[\varphi]_{\emptyset} = \top_{\mathrm{Sub}(\mathbf{1})}$，我们便说 $\mathcal{D} \vDash \varphi$。

现在，我们对这一解释的可靠性及其各种扩展作一些注记：

1. 关于这一解释的基本事实是，它对于直觉主义逻辑是可靠的，也就是说，对于每个直觉主义有效式 φ，$\mathcal{D} \vDash \varphi$。
2. 此外，它对于直觉主义高阶逻辑是可靠的，其含义是：如果我们使用 $\mathcal{D}$ 中的幂对象来解释二阶及更高阶变量，那么高阶逻辑的公理（外延性和概括）也同样得到满足。[1]
3. 回忆一下，范畴中的**自然数对象**（NNO）是一个对象 N，配备了一个形如 $\mathbf{1} \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$ 的泛图，并具有$\mathbf{1}$ 终对象：给定任意其他图表 $\mathbf{1} \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f} A$，存在唯一的态射 $F\colon\ N \to A$，满足$F0 = a$和 $Fs = fF$。

   如果初等拓扑斯 $\mathcal{D}$ 包含一个 NNO，那么通过使用 NNO 解释自然数，并如上所述使用幂对象解释高阶型，我们便得到直觉主义高阶算术（HOA）的可靠解释：该理论具有型 $\mathcal{P}^n$（$\mathbb{N}$），其中 $n \geq 1$，函数符号 $0\colon\ \mathbb{N}$ 以及 $s\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，并且对于每个 n，都有关系符号 $\in\colon\ \mathcal{P}^n(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}^{n+1}(\mathbb{N})$，其公理包括对每个 n 的外延性和概括公理，以及（二阶）皮亚诺公理。
4. 最后，这种解释可以扩展为对 HOA 的任意定义扩张的可靠解释，其含义现说明如下。

   所谓**带语境公式**，是指一对 $(\varphi, \vec{x})$，由公式 φ 和一个变量序列 $\vec{x}$ 组成，该序列包含 φ 的自由变量。所谓理论 $(\mathcal{L}, \mathcal{T})$ 的**即时定义扩张**，是指由三组 $(\Phi_{\mathrm{sort}}, \Phi_{\mathrm{fun}}, \Phi_{\mathrm{rel}})$ 带语境公式按如下方式从 $\mathcal{L}$ 扩展得到的理论 $(\mathcal{L}', \mathcal{T}')$：

   - $\mathcal{L}'$ 对每个 $(\varphi, \vec{x}\colon \vec{X}) \in \Phi_{\text{型}}$，都有一个额外的型 A_φ 和函数符号$\pi_i\colon\ A_\varphi \to X_i$；此外，$\mathcal{T}'$ 还有一条额外公理，断言这些 π_i 联合起来是单射，并将 A_φ 与满足 φ 的 $\prod_i X_i$ 子集等同起来。
   - 对于每个 $(\varphi, \vec{x}\colon \vec{X}) \in \Phi_{\text{函数}}$，要求 $\vec{x}$ 的形式为 $\vec{w}y\colon \vec{W}Y$（即至少包含一个变量），并且 φ 必须在 $\mathcal{T}$ 中可证明地构成一个函数关系（输出为 y）；随后，$\mathcal{L}'$ 会有一个额外的函数符号$f_\varphi\colon\ \vec{W} \to Y$，而 $\mathcal{T}'$ 还有额外的公理 $f_\varphi(\vec{w}) = y \leftrightarrow \varphi$
   - $\mathcal{L}'$ 有一个额外的关系 $R_\varphi\colon\ \vec{X}$ 对于每个 $(\varphi,\ \vec{x}\colon\ \vec{X}) \in \Phi_{\text{关系}}$，并且 $\mathcal{T}'$ 有额外的公理 $R_\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi$。

   所谓 $(\mathcal{L},\ \mathcal{T})$ 的**定义扩张**，是指通过有限个即时定义扩张构成的扩张。

   在具有自然数对象的初等拓扑斯中，对 HOA 的解释以显然的方式扩展到 HOA 的任意定义扩张。该解释仍然可靠这一事实，源于一个更基本的事实：任意理论（$\mathcal{L}$，$\mathcal{T}$）的定义扩张（$\mathcal{L}'$，$\mathcal{T}'$）都是逻辑保守的：$\mathcal{L}$ 中的任何句子，在 $\mathcal{T}'$ 中可证时，已经可以在 $\mathcal{T}$ 中证明。但不仅如此，定义扩张还是

[1] 严格来说，这种扩展解释依赖于为 $\mathcal{D}$ 中的每个对象选取幂对象，因为幂对象只在同构意义下唯一确定。不过，所得解释中的 *truth values* 当然不依赖于这些选择。下文所述的进一步扩展解释也有类似的注记。

表达保守的，因为 $\mathcal{L}'$ 中的任何句子都可在 $\mathcal{T}'$ 中证明等价于 $\mathcal{L}$ 中的某个句子。因此，定义扩张既不能让我们证明更多定理，也不能让我们表达更多内容，而只能让表达更加简洁。

我们将在第 §4.3 节中展示 HOA 的一个适用于我们目的的特定定义扩张，并将在第 §4.2 节中考察定义扩张这一概念的一个变体。

2.4. **Kripke-Joyal语义**。 如果我们的初等拓扑斯 $\mathcal{D}$ 是预层位点 $(\mathcal{C}, J)$ 上的层范畴$\mathcal{D} = \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$（为简单起见，我们假设该预层位点是子典范的），那么 $\mathcal{D}$ 的内在逻辑就呈现出一种特别清晰而明确的形式，称为*KJ*语义或层语义。[2]

我们定义如下强迫关系：$\forall(\varphi) \subset \vec{x}$ 的公式 $\varphi \in \mathcal{C}$，态射 $a_i : \vec{X}$，我们记作 $U \Vdash_{\vec{x} \mapsto \vec{a}} \widehat{\varphi}$（或者，如果$\vec{x}$ 和 $\vec{a}$ 从上下文中可以明确，就简称为 $U \Vdash \varphi$），若态射 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$: $\widehat{U} \to \prod_{i=1}^n X_i$ 经由.....分解$[\varphi]_{\vec{x}} \hookrightarrow \prod_{i=1}^n X_i$。

现在我们列出强迫关系满足的一些关键性质（证明见 [MM94, §§VI.6-7]）。对于一个型为 A、且 FV(t) $\subset \vec{x}$：$\vec{X}$ 的项 t，以及态射 a_i: $\widehat{U} \to X_i$，令$\widehat{\ }$我们将$[\![t]\!]_{\vec{x},\ \vec{a}}$（或简称 $[\![t]\!]$）记作态射 $[t]_{\vec{x}} \circ \langle a_i \rangle_{i=1}^n$: $U \to A$。于是有：

命题 2.2。

(i) 以上述 U、$\vec{x}$、$\vec{a}$ 为条件，若 $U \Vdash \varphi$，则对任意态射 u: $U' \to U$，都有 $U' \Vdash \varphi$；注意，根据 $U' \Vdash \varphi$，我们指的是 $U' \Vdash_{\vec{x} \mapsto \vec{a}'} \varphi$，其中 $\vec{a}' = \langle a_1 \circ よ(u) \ldots, a_n \circ よ(u) \rangle$。*(ii)* 每当（$\varphi$ 的全称闭包）在直觉主义上有效时，$U \Vdash \varphi$。*(iii)* 若 $A \in J(U)$ 是一个覆盖，且对每个 $a \in A$ 都有 $U_a \Vdash \varphi$，则 $U \Vdash \varphi$。*(iv)* 若 φ 是闭的，则 $\mathcal{D} \vDash \varphi$ 等价于 $\forall U \in \mathcal{C}.\ U \Vdash_{\emptyset、\emptyset} \varphi$；若 $\mathcal{C}$ 有终对象 *1*，则还等价于 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$。*(v)* 关系 $U \Vdash_{\vec{x} \mapsto \vec{a}} \varphi$ 由以下递归条款明确给出：$U \Vdash \top$ 总是成立。$\frown U \Vdash \bot$，若 U 是一个始对象。$U \Vdash s = t$，若 $[\![s]\!] = [\![t]\!]$。$U \Vdash Rt_1 \ldots t_m$（$R \subset \prod_{i=1}^n X_i$ 是一个关系），若 $\langle [\![t_i]\!] \rangle_{i=1}^n$: $\widehat{U} \to \prod_i X_i$ 经由 R 分解。$U \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$，若 $U \Vdash \varphi_1$ 且 $U \Vdash \varphi_2$。$U \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$，若存在 $A \in J(U)$，使得对每个 $a \in A$，都有 $U_a \Vdash \varphi_1$ 或 $U_a \Vdash \varphi_2$。$U \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$，若 $U' \Vdash \varphi_1$ 蕴含对 $\mathcal{C}$ 中所有 $U' \to U$ 都有 $U' \Vdash \varphi_2$。$\frown U \Vdash \forall x_{n+1} \varphi$，若对所有 u: $U' \to U$ 及所有 a_{n+1}: $U' \to X_{n+1}$，都有 $U' \Vdash \varphi$，其中 x_{n+1}: X_{n+1}。$\frown U \Vdash \exists x_{n+1} \varphi$，若存在 $B \in J(U)$ 以及态射 a_b: $U_b \to X_{n+1}$（对每个 $b \in B$），使得对所有 $b \in B$ 都有 $U_b \Vdash \varphi$，其中 x_{n+1}: X_{n+1}。

注记 2.3. $\bot$、$\vee$ 和 $\exists$ 的子句在实践中往往要简单一些——尤其是在下文第3节引入的拓扑斯 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$ 中。具体来说，有：

[2]还有一种 KJ语义 的版本，它在一般的初等拓 os.

- $U \Vdash \bot$ 当且仅当 U 是初始对象。只要 $\mathcal{C}$ 中的一个对象被空族覆盖，当且仅当它是初始对象，这一点就成立（由引理 2.1）。

- $U \Vdash \varphi \vee \psi$ 当且仅当存在一个覆盖 $B_1,\ B_2 \to U$ 使得 $B_i \Vdash \varphi_i$ 对于 $i = 1,\ 2$。假设对于任意 $U \in \mathcal{C}$ 和 $\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2 \in \mathsf{Fam}(X)$，使得 $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$ 是一个覆盖，都存在态射 $A_1,\ A_2 \to U$ 使得 $\mathbf{A}$ 中的每个 $U_a \xrightarrow{a} U_{\,i}$ 经由.....分解 A_i；对于我们的拓扑斯 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}_{\mathrm{inc}}$，该条件源于层位**SBor**中有限余积的存在性。
- $U \Vdash \exists x_{n+1}\, \varphi$ 当且仅当存在一个覆盖 $U' \to U$ 以及 $a\colon\ U' \to X_{n+1}$ 使得 $U' \Vdash \varphi$。这对 $\mathcal{E}$ 成立——同样利用**SBor**中可数余积的存在性——但对 $\mathcal{E}_{\mathrm{inc}}$ 则不成立。

2.5. **标准博雷尔空间**。 **波兰空间** X 是可分完备可度量化拓扑空间。**标准博雷尔空间** 是波兰空间 X 的底层可测空间；也就是说，它是 X 配备了由**博雷尔子集**生成的 σ-代数的空间：在 X 上包含所有开子集的最小 σ-代数。我们还回顾一下，标准博雷尔空间 X 的一个**解析子集** 是指任何作为某个博雷尔（即可测）映射 $Y \to X$ 的像的子集，其中该映射从某个标准博雷尔空间 Y 出发。

令**SBor** 为标准博雷尔空间及其博雷尔映射构成的范畴。它是可测空间范畴**Meas** 的满子范畴，并且本质小：每个对象都同构于一个有限集、带离散拓扑的自然数集 $\mathbb{N}$，或带欧氏拓扑的实数集 $\mathbb{R}$ （等价地，同构于带积拓扑的 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 或 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ） [Kec95，定理 15.6]。

范畴 **SBor**具有可数[3] 极限和余积 [Che23], ，其特征如下：

命题 2.4. 底集函子 $U\colon \mathbf{SBor} \to \mathbf{Set}$ 保可数极限和可数余积，且反映可数极限和可数余积。

我们回顾一下，这意味着：对于可数图表 $D\colon J \to \mathbf{SBor}$，给定一个锥$D\colon J^{\triangleleft} \to \mathbf{SBor}$，它在 D 上是极限锥，当且仅当 $U \circ D\colon J^{\triangleleft} \to \mathbf{Set}$ 在**Set**中是极限锥；余积的情况也同理。

证明。 U 显然是保守的，这意味着 **SBor** 中的态射 $f\colon X \to Y$ 是同构，当且仅当 Uf 也是同构。由于 **SBor** 具有所有可数极限和余积，因此一般而言，若 U 保可数极限和余极限，则它也反映它们。因此，只需证明前半部分。

U 保极限这一点，源于它与从终对象 $\mathbf{1} \in$**SBor** 出发的同态函子 $\mathbf{SBor}(\mathbf{1}, -)$ 同构。直接观察即可看出， U 保可数余积：给定一个波兰空间的可数族 $(X_i)_{i\in I}$ ，只需在集合 X_i 的不交并上赋予通常拓扑，即可在**SBor** 中构造余积 $\coprod_{i\in I} X_i$ 。□

[3]我们所说的“可数”始终指“有限或可数无限”。

接下来，回顾一下：给定具有二元积的范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 $X, Y \in \mathcal{C}$， Y关于 X的指数对象 是一个对象 Y^X，它配有一个态射 $e\colon Y^X \times X \to Y$，使得对于每个 $A \in \mathcal{C}$，复合映射 $\mathcal{C}(A, Y^X) \xrightarrow{\times X} \mathcal{C}(A \times X, Y^X \times X) \xrightarrow{\circ \mathrm{ev}} \mathcal{C}(A \times X, Y)$ 是一个双射。

给定 $X, Y \in \mathbf{SBor}$，其中 X 可数（因而是离散的），我们有积 $Y^X = \prod_{x \in X} Y \in \mathbf{SBor}$ 以及求值映射 $\mathsf{ev}\colon Y^X \times X \to Y$。由于对于$U \subset Y$博雷尔，$\mathsf{ev}^{-1}(U) = \bigcup_{x \in X} \pi_x^{-1}(U) \times \{x\}$，故该映射是博雷尔的，其中 $\pi_x\colon \Pi_{x \in X} Y \to Y$是投影。

命题 2.5。 ev 将 Y^X 展现为 Y 的指数对象，其中 X 在 **SBor** 中。

证明。 展开定义后，这归结为断言：对于每个 $A \in$**SBor**以及博雷尔映射 $f\colon A \times X \to Y$，映射 $g\colon A \to Y^X$满足 $g(a)(x) = g(a, x)$，是博雷尔的。然而，由于每个分量 $A \xrightarrow{\langle \mathrm{id}_A, x \rangle} A \times X \to Y$，$\mathrm{const}$都是博雷尔的，根据积的泛性质 $Y^X = \prod_{x \in X} Y$以及该积被 U保持这一事实可立即得到：$\mathbf{SBor} \to \mathbf{Set}$。□

3. The Borel Grothendieck topos

我们考虑 **SBor** 上的两个预拓扑 $J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}} \subset J_{\mathbf{SBor}}$。拓扑 $J_{\mathbf{SBor}}$ 及其相关的拓扑斯 $\mathsf{Sh}(J_{\mathbf{SBor}})$ 将是我们主要关注的对象，但拓扑 $J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}}$ 稍微简单一些，而且我们的许多结果在拓扑斯 $\mathsf{Sh}(J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}})$ 中同样成立，因此我们也将其纳入讨论。

给定一个博雷尔映射族 $\mathbf{A} \in \mathsf{Fam}(X)$，我们规定，当 $\mathbf{A} \in J_{\mathbf{SBor}}(X)$ 时，若 $\mathbf{A}$ 是可数的，且 $a \in \mathbf{A}$ 的像覆盖 X。 $J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}}$ 中的覆盖以相同方式定义，只是覆盖中的映射 $a \in \mathbf{A}$ 还必须是单射。在这种情况下，根据 Lusin-Suslin定理 [Kec95, Theorem 15.1]，，每个 $a \in \mathbf{A}$ 的像都是博雷尔的；也就是说，在 $J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}}$ 中，覆盖是由博雷尔子集构成的可数覆盖。容易验证， $J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}}$ 和 $J_{\mathbf{SBor}}$ 确实是预拓扑。我们还注意到，在预拓扑 $J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}}$ 中，如果只取由不相交的博雷尔子集构成的覆盖——即划分——所得的拓扑是相同的。

定义 3.1. 我们将拓扑斯 $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^{\mathrm{inc}} \subset \widehat{}$**SBor** 定义为预层位点 **(SBor** $J_{\mathbf{SBor}}$**)** 和 **(S Bor** J_{inc}**SBor)** 上的层范畴 Sh**(SBor** $J_{\mathbf{SBor}}$**)** 和 Sh**(SBor** $J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}}$**)**，分别对应两者。

注记 3.2. 如果我们改为将 **SBor** 上的拓扑定义为使覆盖族是所有联合满射族（不一定可数），那么所得拓扑斯恰好等价于**Set**，参见命题 3.29。

注记 3.3。 拓扑 $J_{\mathbf{SBor}}$ 和 $J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}}$ 中的每一个都是一种已知的一般构造的实例。范畴 **SBor** 是可数广延的，事实上甚至是泛布尔可数完备可数广延范畴（参见 [Che23]）。在任意可数广延范畴上，都存在一种预拓扑（即“可数广延预拓扑”），其中覆盖族是可数余积图表 [Rob12, 附录 A]。对于**SBor**，这正是 $J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}}$。

接下来，范畴中的一族$\mathbf{A} \in \mathrm{Fam}(X)$态射$\mathcal{C}$若满足：任意一个单态射 $P \rightarrowtail X$，只要每个 $(U_a \xrightarrow{a} X) \in \mathbf{A}$ 都分解通过它，则该单态射必为同构；那么这族态射就称为极端满态射的。如果中的可数极端满态射族 $\mathcal{C}$ 在拉回下封闭，则它们构成一个拓扑，称为可数相干前拓扑；而在**SBor**上，这就是拓扑$J_{\mathbf{SBor}}$——事实上，在此情形下，它还与 $\aleph_1$-典范拓扑 [MR77, 第 i 章一致，即典范拓扑的可数族（参见第3节.5）。

通常，只有在底层范畴本身是可数相干范畴时，才考虑相干拓扑，而**SBor**并非如此，因为它缺少像。然而，在下文第3.2节中，我们将证明，$\mathcal{E}$ 是 一个可数相干范畴上的可数相干拓扑所对应的层范畴，也就是解析的 空间范畴。

命题 3.4. 拓扑 $J_{\mathbf{SBor}}$，因而 $J^{\mathrm{inc}}_{\mathbf{SBor}}$ 也，是子典范的；也就是说，よ:$\mathbf{SBor} \to \mathbf{SBor}$ 经由 $\mathcal{E} \hookrightarrow$**SBor**分解。

证明。只需证明：给定**SBor** 中的映射 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon W \to X$，且 g 为满射，若 $f \circ g\colon W \to Y$ 是博雷尔的，则 f 也是如此。这等价于说，对于任意子集 $U \subset X$，若 $g^{-1}(U)$ 是博雷尔的，则 U 也是如此。但在这种情况下， U 和 $X \setminus U$ 都是解析的，因此由苏斯林定理可得 [Kec95, Theorem 14.11]. □

令 $\mathcal{D}$ 表示 $\mathcal{E}$ 或 $\mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$之一；以下大部分内容适用于这两种情况，我们会指出不适用的情形。我们有一个“底层集合”函子 $\Gamma = \mathcal{D}(\mathbf{1}, -)$，与任何拓扑斯中的情形一样，它有一个左伴随 $\Delta\colon \mathbf{Set} \to \mathcal{E}$ （“离散空间”函子），将$X \in$**Set** 映射为 X 上常值预层 X 的层化。根据 [Joh02, Example C3.6.3 (d)] （以及 **SBor** 中的终对象没有非平凡覆盖这一事实）， Γ 也有一个右伴随 $\nabla\colon \mathbf{Set} \to \mathcal{E}$ （“不可分空间”函子），将$X \in \mathbf{Set}$ 映射为一个层，该层在 $A \in$**SBor** 处的取值是所有函数 $A \to X$ 构成的集合，并且 Δ 和 ∇ 都是全忠实的。对于 X 可数的情形，离散空间 ΔX 与 X 上的可表函子一致：

命题 3.5。给定任意可数集 X，常值预层 $X \in \mathbf{SBor}$ 的层化是可表层 $X \in \mathcal{D}$，其泛映射 $\alpha\colon X \to X$ 定义为$\alpha_A(x) =$ 常元$_x \in \mathbf{SBor}(A, X)$，其中 $A \in \mathbf{SBor}$。

证明。给定 $F \in \mathcal{D}$ 以及一个态射 $f\colon X \to F$ in SBor，我们需要证明存在唯一的 $f\colon X \to F$，使得对于所有 $A \in$ SBor 都有 $f_A \circ \alpha_A = f_A$。给定 $u \in X(A) =$ SBor(A, X)，我们有一个 $\{U_x \mid x \in X\}$ 对 A 的覆盖，其中 $U_x = u^{-1}(x)$，且 $u|_{U_x} = \alpha_{U_x}(x) \in X(U_X)$。若要使 $f_{U_x} \circ \alpha_{U_x} = f_{U_x}$成立，由于 F是一个层，我们必须取 $f_A(u) \in F(A)$ 为满足对每个 $x \in X$都有 $v|_{U_x} = f_{U_x}(x)$ 的唯一元素 v。这证明了 f的唯一性，而存在性则由验证上述定义的 f 确实是层的一个态射得到。□

对于 X 可数的情形，我们由此得到 $X \cong \coprod_{x \in X} \mathbf{1}$。根据 [MM94，第 270], 页，我们得出结论：

推论 3.6. $\mathbb{N} \in \mathcal{D}$ 是一个自然数对象。

除可数空间外，**SBor**中在同构意义下只有一个对象，即 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，接下来我们将对此展开讨论。

命题 3.7。 给定 X、$Y \in$ **SBor** 可数，态射 $\widehat{Y^X} \times \widehat{X} \xrightarrow{\langle \widehat{\pi}_0,\ \widehat{\pi}_1 \rangle^{-1}} \widehat{Y^X \times X} \xrightarrow{\widehat{\text{ev}}} \widehat{Y}$ 通过 X 在 $\widehat{}$**SBor** 中将 $\widehat{Y^X}$ 展示为 Y 的指数对象，因此（根据 *[MM94，命题 III.6.1]*）在 $\mathcal{D}$ 中也是如此。

这里所使用的事实是，$\langle \widehat{\pi}_0,\ \widehat{\pi}_1 \rangle$: $\widehat{Y^X \times X} \to \widehat{Y^X} \times \widehat{X}$ 是一个同构，这由$\widehat{}$米田嵌入よ：**SBor** $\to$ **SBor** 保持极限这一点可得。命题 3.7 由命题 2.5 和以下一般事实推出：

$\widehat{}$引理 3.8。 对于任意小范畴 $\mathcal{C}$，米田嵌入よ： $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 保持指数对象。

这意味着，对于 $\mathcal{C}$ 中的任意指数对象 ev： $Y^X \times X \to Y$ $\widehat{\text{ev}}$： $\widehat{Y^X \times X} \to \widehat{Y}$ 是 $\widehat{}\mathcal{C}$ 中的一个指数对象。

证明。 固定 $\mathcal{C}$ 中的一个指数对象 ev： $Y^X \times X \to Y$。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{C}(A, Y^X) & \xrightarrow{\times X} & \mathcal{C}(A \times X, Y^X \times X) & \xrightarrow{\text{ev}\circ} & \mathcal{C}(A \times X, Y) \\
\downarrow{\scriptstyle よ} & & \downarrow{\scriptstyle よ} & & \downarrow{\scriptstyle よ} \\
\widehat{\mathcal{C}}(\widehat{A}, \widehat{Y^X}) & \xrightarrow{\widehat{\times X}} & \widehat{\mathcal{C}}(\widehat{A \times X}, \widehat{Y^X \times X}) & \xrightarrow{\widehat{\text{ev}}\circ} & \widehat{\mathcal{C}}(\widehat{A \times X}, \widehat{Y}).
\end{array}$$

由于假设顶行的复合 $\mathcal{C}(A,\ Y^X) \to \mathcal{C}(X \times A,\ Y)$ 是同构，且垂直态射是同构，因此底行的复合 $\widehat{\mathcal{C}}(\widehat{A},\ \widehat{Y^X}) \to \mathcal{C}(\widehat{X \times A},\ \widehat{Y})$ 也是同构。这表明$\widehat{\text{ev}}$： $\widehat{Y^X \times X} \to \widehat{Y}$相对于可表对象具有所需的泛性质。

X 在 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中由 $\widehat{Y}$ 通过 $\widehat{X}$ 得到。我们刚刚的证明意味着，$\widehat{}$态射 f： $\widehat{Y^X} \to \widehat{Y}^{\widehat{X}}$ 由 $\widehat{\text{ev}}$： $\widehat{Y^X \times X} \to \widehat{Y}$诱导出一个同构 $f\circ$： $\widehat{\mathcal{C}}(\widehat{A}, \widehat{Y^X}) \to \widehat{\mathcal{C}}(\widehat{A}, \widehat{Y}^{\widehat{X}})$，对所有 $A \in \mathcal{C}$均成立——也就是说，根据米田引理，这是一个同构 f_A： $\widehat{Y^X}(A) \to \widehat{Y}^{\widehat{X}}(A)$，对所有 $A \in \mathcal{C}$均成立——因此它是预层的一个同构。□

3.1. **子层 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^{\text{inc}}$**。我们继续用 $\mathcal{D}$ 表示 $\mathcal{E}$ 或 $\mathcal{E}^{\text{inc}}$中的任意一个 .

给定 $X \in$ **SBor**，注意到 f 组成集 $A \subset X$ 都确定一个子层，且其像包含于 $\widehat{A}$；如果 A 是博雷尔集，这就与可表对象函子 A一致。反过来，任意子层 $R \subset X$ 都会给出一个子集 $\|R\|$，即 R 的**支集**，由满足以下条件的点 $x \in X$ 组成：包含映射 $\{x\} \hookrightarrow X$ 在 $R\{x\}$ 中。显然，对于 $R \subset X$，有 $R \subset \|R\|$；对于 $A \subset X$，有 $A = \|A\|$。

$\widehat{}$命题 3.9。 可表对象的子层 $R \subset X$ 的补集 $\neg R$ 由 $\|R\|^{\text{c}}$ 给出，其中 $\|R\|^{\text{c}} = X \setminus \|R\|$。

证明。 断言是， $\|R\|^{\mathrm{c}}$ 与 R 的交集为平凡交集，并且它是具有此性质的最大子层。这两点都是显然的；注意到底元素 $\bot \in \mathrm{Sub}(X)$ 由 $\bot\emptyset = \mathrm{Hom}(\emptyset, X)$（一个单元素集合）给出，而对于 Y 非空时则由 $\bot Y = \emptyset \subset \mathrm{Hom}(Y, X)$ 给出。□

推论 3.10。 对于任意子层 $R \subset X$，都有 $\neg\neg R = \|R\|$。

如果满足 $R \vee \neg R = F$，我们称子层 $R \subset F$ **可判定**。

命题 3.11。 $R \subset X$ 可判定，当且仅当对于某个博雷尔子集 $A \subset X$，有 $R = A$ （此时 $A = \|R\|$）。

证明。 析取 $R \vee \neg R$ 是包含 R 和 $\neg R$ 的 X 的最小子层。

如果 $R = A$，那么 $\neg R = A^{\mathrm{c}}$ 由命题 3.9 可知。于是，若 $S \subset X$ 是一个包含 R 和 $\neg R$ 的子层，则对于任意 $f\colon Y \to X$，都有一个博雷尔覆盖 $Y = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(A^{\mathrm{c}})$，并且 f 在这些子集上的限制分别属于 $R\big(f^{-1}(A)\big)$ 和 $(\neg R)\big(f^{-1}(A^{\mathrm{c}})\big)$。因此，它们分别属于 $S\big(f^{-1}(A)\big)$ 和 $S\big(f^{-1}(A^{\mathrm{c}})\big)$，从而 $f \in S(Y)$，因为 S 是一个子层，于是得到所需结论 $S = X$。

反过来，假设 $R \vee \neg R = X$。特别地，$R = \neg\neg R$，因此 $R = A$，其中 $A = \|R\|$。接下来只需证明 A 是博雷尔的。

该假设 $R \vee \neg R = X$ 特别给出了 $\mathrm{id}_X \in (R \vee \neg R)(X)$。根据 Kripke-Joyal 语义（§2.4），存在一个覆盖 $a_j\colon U_j \to X$ for $j = 0, 1$ with $a_0 = a_0 \circ \mathrm{id}_X \in R(U_0)$ and $a_1 = a_1 \circ \mathrm{id}_X \in (\neg R)(U_1)$。这意味着 a_0 和 a_1 的像分别包含于 A 和 A^{c} 中，因此分别等于 A 和 A^{c}，因为这些像覆盖了 X。在 $\mathcal{D} = \mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$ 的情形下，我们已经完成证明，因为 J^{inc} 中的覆盖只涉及博雷尔包含。而在 $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ 的情形下， A 和 A^{c} 都是解析的，因此根据苏斯林定理 [Kec95, Theorem 14.11]，它们也是博雷尔的。□

X 的子集与 X 的子层之间的上述关系，可以利用 σ-理想加以细化。在 $\mathcal{E}$ 中，这将使我们能够分类 X 的所有子层。

给定 $X \in \mathbf{SBor}$，我们将 σ **上解析集的理想** X 定义为解析子集 X 的一个非空向下封闭集合，并且它对可数并封闭。我们用 $\mathrm{AI}(X)$ 表示解析子集 X 的 σ-理想集合。于是我们有如下分解：

$$\mathcal{P}(X) \underset{|-|}{\overset{I_-}{\rightleftarrows}} \mathrm{AI}(X) \underset{|-|}{\overset{\widehat{(-)}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sub}(\widehat{X}) \qquad \text{of the maps} \qquad \mathcal{P}(X) \underset{\|-\|}{\overset{\widehat{(-)}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sub}(\widehat{X}) \tag{1}$$

使得 $|I_U| = U$ 对于 $U \in \mathcal{P}(X)$ 成立，且 $|I| = I$ 对于 $I \in \mathrm{AI}(X)$ 成立；特别地，向右的映射是单射，向左的映射是满射。

上面展示的映射定义如下：

- 给定 $U \in \mathcal{P}(X)$， $I_U \in \mathrm{AI}(X)$ 由满足 $V \subset U$ 的解析子集 V 组成；这显然是一个 σ-理想。
- 对于 X 的 $R \in$ ， $|R|$ 由那些作为某个 f 的像的 $V \subset X$ 构成： $Y \to X$，其中 $f \in R(Y)$；为证明 $|R|$ 向下封闭，给定 $R(Y)$ 中的 $f\colon Y \to X$，任意解析子集 $U \subset f(Y)$ 都可写成某个 $g\colon Z \to X$ 的 $g(Z)$，因此也

是来自纤维积 $Y \times_X Z \to X$ 的映射的像，该映射经由 f 分解，因此属于筛 R；为证明 $|R|$ 对可数并封闭，给定一个由博雷尔映射 $Y_\alpha \to X$ 构成的可数族，其中每个映射都属于 $R(Y_\alpha)$，它们的像的并集就是博雷尔映射 $\coprod_\alpha Y_\alpha \to X$ 的像；根据子层条件，该映射属于 $R(\coprod_\alpha Y_\alpha)$。

- 对于 $I \in$人工智能(X)，$|I|$ 是 I 中的点集，并且

- $I \rightarrowtail X$ 是以下子层：$I(Y)$ 对于 $Y \in \mathbf{SBor}$ 由满足以下条件的那些 f 组成：$Y \to X$ 且 $f(Y) \in I$；由 I 向下封闭可知这是一个筛，而由 I 对可数并封闭可知它是一个子层。

很容易看出，这些确实给出了如 (1) 中所示的分解。显然，如断言所述，$\precsim |I_U| = U$ 对于 $U \in \mathcal{P}(X)$ 成立。对于 $U \in$ 人工智能(X)，$|I| = I$ 成立，这是因为根据定义，X 中的每个解析集都是 $\mathbf{SBor}$ 中某个映射 $Y \to X$ 的像。

命题 3.12。对于 $X \in \mathbf{SBor}$，上述映射 $(-) :$ 人工智能$(X) \to$ 子$_{\mathcal{E}}(X)$ 是满射（因此根据前述内容也是双射），也就是说，X 的每个子层都具有如下形式：I，其中 $I \in$人工智能(X) 是一个 σ-理想。

证明。给定任意子层 $R \subset X$，我们需要证明 $R = |R|$。包含关系 $R \subset |R|$是显然的。因此，给定任意 $f\colon Y \to X$，其中 $f(Y) \in |R|$，我们需要证明 $f \in R(Y)$。根据假设，存在某个 $g\colon Z \to X$，属于 R，且 $f(Y) = g(Z)$。由此可知，该映射来自纤维积 $Y \times_X Z \to X$，属于 R。此外，它分解为 $Y \times_X Z \xrightarrow{\pi_Y} Y \xrightarrow{f} X$，其中 π_Y 是满射，因而是 $J_{\mathbf{SBor}}$中的一个覆盖。由于 R 是子层，我们得出 $f \in R(Y)$，如所要求。□

注记 3.13。

(1) 当 X 可数时，映射 $I_-\colon \mathcal{P}(X) \to$ 人工智能(X) 也是满射，这一点很容易看出。然而，如果 X 不可数，则该映射不是满射，因此 X 在 $\mathcal{E}$中的子层并不都能表示为 I_A 的形式，其中 $A \subset X$。一个例子是由 X的可数子集组成的 σ-理想。(2) 命题 3.12 在 $\mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$ 中不成立。一个例子如下：取一个满射映射$p\colon X' \to X$，其属于 $\mathbf{SBor}$，但不允许存在截面（见 [Kec95，第 18.17] 题），并令 $R \subset X$ 为由所有映射 $f\colon Y \to X$ 组成的子层，这些映射可通过 p分解。于是 R 显然是一个筛，并且它是一个子层，因为给定映射 $f\colon Y \to X$，如果 f 在限制到 Y 的每个博雷尔划分中的集合后都允许提升到 X'，那么就可以将这些提升拼接起来，得到一个提升 $Y \to X'$。然而，$\precsim R \neq |R|$，因为如果二者相等，那么 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ 就可以提升到 X'，而根据假设这是不可能的。

3.2. **解析空间**。现在我们按照注记 3.3 中的承诺，给出 $\mathcal{E}$ 作为解析空间范畴上的层的另一种描述。

定义 3.14。**解析空间**是一个可测空间，它由完备博雷尔空间 X 的一个子集 A 赋予诱导的 σ-代数（由满足 $A \cap B \subset A$ 的集合组成）而得到，

$B \subset X$ 博雷尔）。我们将由解析空间张成的 **Meas** 的全子范畴记为 **SAn**；因此，**SBor** $\subset$**SAn** $\subset$ **Meas**。

给定 $A \subset X$，其中 $A \in$ **SAn** 是 $X \in$**SBor**的一个解析子集，我们称子集 $V \subset A$**解析的**，如果它在 X中是解析的；等价地，如果它是 **SAn**中某个 $B \to A$ 的像。

SAn中的态射可以用几种等价的方式来描述：

命题 3.15。设 $X, Y \in$**SBor**，并设 $i_A\colon A \hookrightarrow X$和 $i_B\colon B \hookrightarrow Y$为解析子集。对于映射 $f\colon A \to B$，以下条件等价：

(i) f 是 **SAn**中的态射（即，对于 B 的任意博雷尔子集，其在 f 下的原像都是博雷尔集）；*(ii)* 任意解析集在 f 下的原像都是解析集。*(iii)* 对于任意经由 A分解的 $u\colon Z \to X$ *in* **SBor**，映射 $i_B \circ f \circ u\colon Z \to Y$是博雷尔的。*(iv)* 对于 某个 $u\colon Z \to X$ *in* **SBor**，其像为 A，映射 $i_B \circ f \circ u\colon Z \to Y$是博雷尔的。

证明。例如，可以按如下顺序证明：(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$(ii) $\Rightarrow$(i) $\Rightarrow$(iii)。唯一非平凡的一步是蕴含 (ii) $\Rightarrow$(i)，它由卢辛分离定理[Kec95, Theorem 14.7]得出。□

刻画 (iii) 表明，$A \to B$ 之间的态射 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$与第3.1节中子层 $I_A \subset X$ 和 $I_B \subset Y$之间的态射 $I_A \to I_B$ 一一对应。因此，**SAn** 也可以刻画为嵌入よ: **SBor** $\to \mathcal{E}$的像的像闭包：

$\widehat{\ }$**命题 3.16**。定义 $F\colon$ **SAn** $\to \mathcal{E}$为 $F(A) = I_A$，其中 $i_A\colon A \hookrightarrow X \in$**SBor** 解析的，且对 $f\colon A \to B$，定义 $F(f)$为将 $u \in I_A(Z) \subset$**SBor**(Z, X)映射到 $i_B \circ f \circ u$。那么F是一个扩展よ: **SBor** $\to \mathcal{E}$ 的全忠实函子，其本质像由 $\mathcal{E}$中可表对象之间的态射的像组成。

证明。F 的函子性显而易见，它可延拓到よ这一点也是如此。唯一需要$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$验证的是：若 $A \subset X$ 是 $h\colon Y \to X$的像，那么 $I_A \subset X$ 就是 $h\colon X \to Y$在 $\mathcal{E}$中的像$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，也就是说，$F(h)\colon Y \to I_A$是一个满态射，而 $F(i_A)\colon I_A \to X$是一个单态射。后者$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$显然，因为这不过是包含 $I_A \hookrightarrow X$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于前者，给定 $U \in$**SBor**和 $k\colon U \to I_A$，我们需要找到一个满态射 $a\colon U' \twoheadrightarrow U$以及$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$$\ell\colon U' \to Y$，使下图中的方形可交换。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{U'} & \xrightarrow{\hat{\ell}} & \widehat{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{a}} & & \downarrow{\scriptstyle F(h)} \\ \widehat{U} & \xrightarrow{k} & \widehat{I_A} \end{array}$$

我们可以 令 U'为纤维积 $U' = U \times_X Y \xrightarrow{a=\pi_U} U$和 $\ell = \pi_Y\colon U' \to Y$。 □

注记 3.17. 上文所述的 $\mathcal{E}$ 子范畴（在等价意义下）确实是 よ**(SBor)** 的像闭包 ——也就是说，它是包含 よ**(SBor)** 且对像封闭的 $\mathcal{E}$ 中最小的子范畴。换言之，要使其对像封闭，只需对所有态射取像一次：给定态射 $f\colon P \to Q$ 和 $g\colon R \to S$的像 $\mathrm{im}(f)$ 和 $\mathrm{im}(g)$，任意态射 $\mathrm{im}(f) \to \mathrm{im}(g)$ 的像也同样是某个态射 $P \to S$ 的像。

接下来我们要证明，**SAn** 具有可数极限、性质良好的像和可数余积，并且（因此）子对象的可数并也具有良好的性质。这里，像和并具有良好的性质，指的是它们在拉回下稳定；对于余积，则指它们在拉回下稳定且彼此"不相交"（参见例如[Che23]）。这些条件的不同组合有多种称谓：一个范畴 $\mathcal{C}$ 是

- 正则 的，当且仅当它具有有限极限和稳定像
- 相干 （或在 [MR77]中称为逻辑 的），当且仅当它是正则的且具有稳定的有限并
- 可数相干 （或在 [MR77] 中称为 ω_1-逻辑 的，在 [Joh02]中称为 σ-相干 的），当且仅当它是正则的且具有稳定的可数并
- （可数）广延 的，当且仅当它具有稳定且互不相交的有限（或可数）余积。

有时（例如在 [Rob12] 中），"有限完备扩张"也用于表示扩张且有限完备；而在 [Joh 02]，中，"（σ-）正（σ-）相干"用于表示正则且（σ-）扩张（这蕴含（σ-）相干）。

我们还需要一个概念：如果一个范畴是正则且可数完备，并且任意可数个正则满态射的积仍是正则满态射（因而态射之积的像等于各像之积），就称它为**正则可数完备**。

命题 3.18。 范畴**SAn** 是正则可数完备且可数广扩张的（因而可数相干），底层集合函子 $\mathbf{SAn} \to \mathbf{Set}$ 也是正则可数完备且可数广扩张的（含义见下文）；此外，**SAn** （以及 **SBor**）中的满态射恰好是满射，并且都是正则的。

证明。 **SAn** 是正则的，这是因为它是有限极限范畴**SBor**在 $\mathcal{E}$ 中的像闭包。接下来，**SAn** 具有稳定的可数余积，理由类似：**SBor**有可数余积，而且在任意格罗滕迪克拓扑斯中，单态射、满态射及其像都对任意余积封闭；此外，这些余积是不相交的，因为它们在 $\mathcal{E}$中是不相交的。为证明**SAn**有可数积，给定**SBor**中的解析子集 $A_i \subset X_i \in$，我们有解析子集 $\prod_i A_i \subset \prod_i X_i$（它是 $\prod_i f_i$的像，而 $\prod_i f_i$是 f_i的像： $Y_i \to X_i$，其中 $Y_i \in$ **SBor**），由命题 3.15 可立即得出它具有积的泛性质。正则满态射对可数积封闭这一点，一旦我们证明它们恰好是满射，且 $U\colon \mathbf{SAn} \to \mathbf{Set}$ 保积，便可立即得出。

现在， U 保极限这一点显然成立，因为它与从终对象出发的同态函子$\mathbf{SAn}(\mathbf{1}, –)$同构；而它保可数余积，则由此以及余积不相交且**1**没有非平凡余积分解这两项事实可知。只要证明正则满态射就是满射，就能得出 U 保像。

每个满射都是满态射，这显然成立；反过来，若 $f\colon X \to Y$不是满射，取$y \in Y - \mathrm{im}(f)$和 $g_0, g_1\colon Y \to \mathbf{2}$，使得 $g_0(Y - \{y\}) = g_1(Y - \{y\}) = 0$且 $g_i(y) = i$；那么 $g_0 f = g_1 f$，但 $g_0 \neq g_1$。接下来需要证明每个满态射都是正则的，即若 $f\colon X \to Y$是满态射，则 $X \times_Y X \rightrightarrows X \to Y$ 是一个余等化子。在**SBor**中，这是拓扑 $J_{\mathbf{SBor}}$子典范性的一个实例；我们已在第3节验证了这一点。在**SAn**中的验证类似，使用命题 3.15。□

接下来，我们将证明，在适当的意义下，**SAn** 是**SBor**的完备化；事实上，这在多种不同意义下都成立。它是正则完备化，同时也是正则可数完备、可数广扩张完备化。对于前者，我们的意思是，**SAn** 是正则的，包含函子 $i\colon \mathbf{SBor} \hookrightarrow \mathbf{SAn}$ 是正则的（即保有限极限以及**SAn**中存在的像），并且对于任意其他正则范畴 $\mathcal{C}$，前复合 i 会在正则函子范畴之间诱导一个等价

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{reg}}(\mathbf{SAn}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{reg}}(\mathbf{SBor}, \mathcal{C}) \tag{2}$$

。对于后者，我们的意思相同，只是将“正则”替换为“正则、可数完备、可数广扩张”。这里，“可数完备”函子和“（可数）广扩张”函子分别指保可数极限和（可数）余积的函子。类似地，“（可数）相干”函子是保子对象的（可数）并的正则函子。

事实上，我们将看到，**SAn**也是**SBor** 在“正则”与“正则可数完备、可数广扩张”之间若干种中间概念下的完备化，即“正则可数完备”、“相干”、“可数相干”、“正则且广延”以及“正则且可数广延”的任意组合。我们注意到，“范畴 $\mathcal{C}$ 在 X 下的完备化”这一说法通常指向 $\mathcal{C}$ 自由添加 X（同时可能保留 $\mathcal{C}$ 中的某些其他结构），而在此处，我们始终指向 $\mathcal{C}$ 添加 X，同时保留任何 X在 $\mathcal{C}$中已经存在的 $\mathcal{C}$。尽管如此，我们给出的完备化构造——也就是在一个层范畴中取闭包——是常见的构造，例如，它用于 [Lac99] 中正则范畴的精确完备化。

定理 3.19. SAn 是**SBor**的正则完备化、**SBor**的正则可数完备且可数广延完备化，也是**SBor**在上述所有中间意义下的完备化。

证明请参见附录 B。

注记 3.20。 从**SBor**转向其相干完备化**SAn**，意味着允许解释存在量词，以及**SBor**中原本就可用的合取和析取（注意，否定在**SBor**中也是可用的，但在**SAn**中则不再如此）。由于拓扑斯 $\mathcal{E}$ 显然是相干的，我们得到一个诱导函子$\mathbf{SAn} \to \mathcal{E}$；正如我们上面所观察到的，它是全忠实的，这使我们能够将相干完备化识别为 $\mathcal{E}$的一个全子范畴。现在在 $\mathcal{E}$ 中，我们还可以解释一阶逻辑的其余部分，即全称量词和蕴涵。相应地，我们可以考虑 *Heyting* 完备化 $\mathcal{C}$，它是**SBor**的Heyting 完备化，并且将带有一个

函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$。我们再次可以询问它是否是全忠实的，从而使得 Heyting 完备化能够被恢复为**SBor** 在 $\mathcal{E}$ 中关于 Heyting运算的闭包；我们不知道这是否成立。

正如注记3.3中所承诺的，我们通过观察以下事实来结束本节： $\mathcal{E}$ 等价于层位**SAn**上的可数相干拓扑的层拓扑斯；这正是预拓扑 $J_{\mathbf{SAn}}$ ，其中覆盖再次是可数联合满射族（并且与 $J_{\mathbf{SBor}}$一样，它也是 ω_1-预典范拓扑）。更准确地说，由于 $J_{\mathbf{SAn}}$ 到**SBor** 的限制是 $J_{\mathbf{SBor}}$，所以$(\mathbf{SAn}\ J_{\mathbf{SAn}})$上的每个层都限制为$(\mathbf{SBor}\ J_{\mathbf{SBor}})$上的一个层，从而给出一个限制函子$\mathrm{Sh}(\mathbf{SAn}\ J_{\mathbf{SAn}}) \to \mathcal{E}$。

命题3.21。 限制函子$\mathrm{Sh}(\mathbf{SAn}\ J_{\mathbf{SAn}}) \to \mathcal{E}$ 是一个等价。

证明。 这立即由稠密子网站的“比较引理” [AGV72，定理III.4.1]得到。□

3.3. **其他拓扑斯论性质**。 我们汇集一些关于拓扑斯 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$的其他事实。再次令 $\mathcal{D}$ 表示其中任意一个。

命题3.22。 $\mathcal{D}$ 是二值的，也就是说，终对象恰有两个子对象。

证明。 $\mathcal{D}$ 中的终对象由**SBor**中的单点空间**1** 表示，事实上只有两个筛 $R \subset \widehat{\mathbf{1}}$ （它们都是子层）。□

命题3.23。 $\mathcal{D}$ 不是布尔的（即 $\mathcal{D}$ 中的子对象格并非全都是布尔代数）。

证明。 这由注记3.13得出，其中给出了不可判定子对象的例子。□

推论3.24。

(i) $\mathcal{D}$ 不满足选择公理（即 $\mathcal{D}$ 中的满态射并非都有截面）。(ii) $\mathcal{D}$不是良点化的（即存在不同的平行态射 $f, g\colon\ X \to Y$，使得对每个 $a\colon\ \mathbf{1} \to X$都有 $f \circ a = g \circ a$）。

Pro因此。 这些分别由 [Joh77、定理 5.23 和命题 9 得出。33], . □

注 3.25。 尽管有上述命题， $\mathcal{D}$中仍成立某种有限形式的选择；见 §4.2.6。

命题 3.26。 马尔可夫原理 *[Hyl82，§8]* 在 $\mathcal{E}$中成立；也就是说：

$$\mathcal{E} \vDash \forall P : \mathcal{P}(\widehat{\mathbb{N}}).\ (\forall n : \mathbb{N}.\ n \in P \vee \neg n \in P) \wedge \neg\neg \exists n : \mathbb{N}.\ n \in P \to \exists n : \mathbb{N}.\ n \in P.$$

这里我们回顾一下，幂层 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$（它是 §2.3 意义下的幂对象） 是这样一个层：它将 $U \in \mathbf{SBor}$ 映到 $U \times \mathbb{N}$的子层集合 $\mathrm{Sub}(U \times \mathbb{N})$，并将一个态射 $f\colon\ U \to V$映到原像映射 $(f \times \mathrm{id})^{-1}\colon \mathrm{Sub}(\widehat{V} \times \widehat{\mathbb{N}}) \to \mathrm{Sub}(\widehat{U} \times \widehat{\mathbb{N}})$。 子层 $\in \hookrightarrow \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 将 $U \in \mathbf{SBor}$ 映到 $\mathbf{SBor}(U, \mathbb{N}) \times \mathrm{Sub}(U \times \mathbb{N})$ 的子集，该子集由满足 $\langle \mathrm{id}\ f \rangle\colon\ U \to U \times \mathbb{N}$经由.....分解 $R \hookrightarrow U \times N$的那些对 (f, R) 组成。

证明。 我们必须证明，对于任意 $U \in \mathbf{SBor}$，任意满足以下条件的 $P\colon U \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$U \Vdash \forall n : \mathbb{N}.\ n \in P \vee \neg n \in P \tag{3}$$

and

$$U \Vdash \neg\neg\exists n : \mathbb{N}.\ n \in P \tag{4}$$

也满足

$$U \Vdash \exists n : \mathbb{N}.\ n \in P. \tag{5}$$

根据命题 3.11，条件 (3) 等价于：$U \times \mathbb{N}$ 所分类的 U 的子层是 R 的形式，其中 $R \subset U \times \mathbb{N}$是某个博雷尔子集。由于每个非空的$U \in \mathbf{SBor}$ 都有一个从 $\mathbf{1}$ 出发的态射，并且每个带有 U 非空 $U \to \mathbf{1}$ 的对象都是一个覆盖，因此条件 (4) 等价于：对于每个 $u\colon \mathbf{1} \to U$，存在某个 $n\colon \mathbf{1} \to \mathbb{N}$，使得 $\langle u, n\rangle\colon \mathbf{1} \to U \times \mathbb{N}$属于 R——换言之，复合映射 $R \overset{i_R}{\hookrightarrow} U \times\mathbb{N} \xrightarrow{\pi_U}$ 是满射。最后，我们希望证明的条件 (5) 断言，存在 U的某个覆盖——即某个博雷尔满射 $p\colon U' \to U$——使得令 $R' = (p \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}})^{-1}(R) \subset U' \times \mathbb{N}$后，复合映射 $R' \overset{i_{R'}}{\hookrightarrow} U' \times \mathbb{N} \xrightarrow{\pi_{U'}} U'$有一个截面。但由于我们假设 $\pi_U \circ i_R$ 是满射，我们可以直接取 $U' = R$ 和 $p = \pi_U \circ i_R$。于是$R' = \{((u,m)\ n) \in R \times \mathbb{N} \mid (u,n) \in R\}$，因此 $\pi_{U'} \circ i_{R'}\colon R' \to R$有一个博雷尔截面 $R \xrightarrow{\langle \mathrm{id}_R,\ \pi_{\mathbb{N}} \circ i_R\rangle} R' \subset R \times \mathbb{N}$，。□

注记 3.27。 我们猜想，马尔可夫原理在 $\mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$ 中不成立，但尚未对此进行验证。

3.4. **双重否定子拓扑斯**。 固定一个格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{D}$。回顾（[MM94，§V.1]），如果对于每个 $X \in \mathcal{D}$ 以及满足 $\neg\neg R = X$ 的每个子层 $R \subset X$，沿包含映射 $i_R\colon R \hookrightarrow Y$ 的复合诱导出一个双射 $i_R^* \mathcal{D}(X,\ Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(R,\ Y)$，则称对象 $Y \in \mathcal{D}$ 为双重否定层。由双重否定层组成的全子范畴 $\mathcal{D}_{\neg\neg}$ 本身是一个格罗滕迪克拓扑斯，而包含映射 $\mathcal{D}_{\neg\neg} \hookrightarrow \mathcal{D}$ 具有一个保持有限极限的左伴随$\mathcal{D} \to \mathcal{D}_{\neg\neg}$（“双重否定层化”）。

引理 3.28。 对象 $Y \in \mathcal{D}$ 是双重否定层，当且仅当它对可表层 $X \in \mathcal{D}$ 的所有子层 $R \subset X$ 都满足上述条件 $\neg\neg R = X \Rightarrow \mathcal{D}(X,\ Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(R,\ Y)$。

证明。 一个方向是显然的。另一个方向可通过注意到满足此条件的对象类 X 在余极限下封闭，且每个 $X \in \mathcal{D}$ 都是可表对象的余极限而得。□

现在我们再次专门考虑 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{E}$ 或 $\mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$ 的情形。在 $\mathbf{SBor}$ 上，考虑预拓扑 $J^{\neg\neg}_{\mathbf{SBor}}$，其中覆盖是任意的（不一定是可数的）联合满射族。因此 $J_{\mathrm{inc}\mathbf{SBor}} \subset J_{\mathbf{SBor}} \subset J^{\neg\neg}_{\mathbf{SBor}}$，从而 $\mathrm{Sh}(\mathbf{SBor}\ J^{\neg\neg}_{\mathbf{SBor}}) \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$。

命题 3.29。 在 $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ 或 $\mathcal{D} = \mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$ 中，双重否定子拓扑斯 $\mathcal{E}_{\neg\neg}$ 等于 $\mathrm{Sh}(\mathbf{SBor}\ J^{\neg\neg}_{\mathbf{SBor}})$，也等于“离散空间”函子$\nabla\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{SBor}$的本质像，因此等价于 $\mathbf{Set}$。

证明。 我们断言，由预拓扑 $J_{\mathbf{SBor}}^{\neg\neg}$ 在 $\mathbf{SBor}$ 上生成的拓扑，也由覆盖族的集合 K 生成；这些覆盖族 $\mathbf{A} \in \mathrm{Fam}(X)$由所有点的包含映射组成，即 X 中的每个点（也就是说，对于 $a \in \mathbf{A}$， U_a 都是单元素集合，且 a的像： $U_a \to X$两两不相交）。事实上， $K \subset J^{\neg\neg}_{\mathbf{SBor}}$，根据 §2.1 中的公理（T4）， $J_{\mathbf{SBor}}^{\neg\neg} \subset \langle K\rangle$，从而 $\langle K\rangle = \langle J_{\mathbf{SBor}}^{\neg\neg}\rangle$。

因此，由于 K满足公理 (T2)，$\mathrm{Sh}(\mathbf{SBor}\, J_{\mathbf{SBor}}^{\neg\neg})$ 由以下预层F组成：$\mathbf{SBor}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$，它们相对于 K 是层。但任何这样的预层显然都由 $F(\mathbf{1})$ 决定，因为根据层条件， $F(X) \cong \prod_{x\in X} F(\mathbf{1})$，因此它同构于 $\nabla\big(F(\mathbf{1})\big)$——反过来，对于任意 $Z \in \mathbf{Set}$， ∇Z 显然是一个 K-层。因此，$\mathrm{Sh}(\mathbf{SBor}\, J_{\mathbf{SBor}}^{\neg\neg})$ 是 ∇ 的本质像。

剩下要证明的是， $Y \in \mathcal{D}$ 是双重否定层，当且仅当它是相对于 $J_{\mathbf{SBor}}^{\neg\neg}$ 的层。一般而言，任意态射族 A $\in \mathrm{Fam}(X)$ 都生成一个筛 i_R： $R \hookrightarrow X$ （由那些 $Y \to X$ 可经由 A 中某个 a: $U_a \to X$ 分解的态射组成），而预层 $F \in \mathrm{SBor}$ 是相对于 A 的层，当且仅当 i_R^*: $\mathrm{SBor}(X, F) \to \mathrm{SBor}(R, F)$ 是一个双射。根据层化的泛性质，可推出， $F \in \mathcal{D}$ 是相对于 A 的层，当且仅当 $i_{R'}^*$: $\widehat{\mathrm{SBor}}(\widehat{X}, F) \to \widehat{\mathrm{SBor}}(R', F)$ 是一个双射，其中 $R' \in \mathcal{D}$ 是 R 的层化。

根据推论 3.10，可表对象的子层 $R \subset X$ 满足 $\neg\neg R = X$，当且仅当每个点 $\mathbf{1} \to X$ 都属于 R；这等价于它是由某个联合满射族生成的筛的层化。因此， $Y \in \mathcal{D}$ 是双重否定层，当且仅当它是关于 $J_{\mathbf{SBor}}^{\neg\neg}$的层，正如所需。□

3.5. **SBor 上的典范拓扑**。 SBor 上还可以考虑另一种自然拓扑，即$\mathbf{SBor}$上的典范拓扑；根据定义，它是最大的子典范拓扑，也就是说，在该拓扑下每个可表函子都是层 [Joh77，第 15] 页。

本节将证明：

定理 3.30。 假设连续统假设成立，则典范拓扑等于$J_{\mathbf{SBor}}$。

下文将说明，此处连续统假设的假设是必要的，也就是说，与 $\neg$连续统假设相容的是，$J_{\mathbf{SBor}}$ 不是典范拓扑。

回忆一下，$\mathbf{A}$是一个层。典范拓扑有效满态这样的族 $\mathbf{A}$ 当每个可表对象：它们是有效满态的，并且对于每个 f: $X' \to X$ in $\mathbf{SBor}$，拉回族 $f^*\mathbf{A} \in \mathrm{Fam}(X')$ 也是有效满态的。

给定 $X, Y \in \mathbf{SBor}$ 和一个解析子集 $U \subset X$，回忆一下第3节.2 中，函数f: $U \to Y$ 是博雷尔 的，当且仅当每个博雷尔集在 f 下的原像都是解析的；等价地，对于任意 $Z \in \mathbf{SBor}$ 以及像为 U 的博雷尔 g: $Z \to X$，$f \circ g$: $Z \to Y$都是博雷尔的。我们有以下关于$\mathbf{SBor}$中有效满态族的刻画，这可直接由定义得到。

命题 3.31。 固定一个$\mathbf{A} \in \mathrm{Fam}(X)$ 中的族，其中$\mathbf{SBor}$，并考虑由此得到的解析子集族$\mathcal{U} = \{a(U_a) \mid a \in \mathbf{A}\}$，它们是 X 的解析子集。那么，$\mathbf{A}$ 是有效满态，当且仅

当 $\bigcup \mathcal{U} = X$，并且对于任意函数 $f\colon X \to Y$，若 $Y \in \mathbf{SBor}$，且 f 在每个 $U \in \mathcal{U}$ 上的限制都是博雷尔的，则 f 是博雷尔的。

因此，定理 3.30 可归结为：

命题 3.32。（假设 连续统假设。）给定 $X \in$**SBor** 以及一个由解析集构成的不可数覆盖 $\mathcal{U}$，覆盖 X 且没有可数子覆盖，则存在一个博雷尔映射 $g\colon X' \to X$ 和一个函数 $f\colon X' \to Y$，满足 $Y \in \mathbf{SBor}$，该函数不是博雷尔函数，但对每个 $U \in \mathcal{U}$，其在 $g^{-1}(U)$ 上的限制都是博雷尔函数。

事实上，我们可以取 $g = \mathrm{id}_X$ 和 $Y = \{0, 1\}$。

证明。我们将构造一个集合 $W \subseteq X$，并令 f 为 W 的示性函数。我们将确保 W 不是博雷尔集，但对每个 $U \in \mathcal{U}$，$W \cap U$ 都是可数的，因而是博雷尔集。这足以确保 f 不是博雷尔集，但其在每个 $U \in \mathcal{U}$ 上的限制都是博雷尔集。

我们将通过长度为 ω_1的相当标准的超限递归来构造 W。注意，X 有连续统多个博雷尔子集，同时X有连续统多个解析子集。因此，根据连续统假设，我们可以固定长度为 ω_1 的枚举 $\{U_\alpha\}_\alpha$ 和 $\{V_\alpha\}_\alpha$，分别枚举$\mathcal{U}$ 的元素和 X的博雷尔子集（注意，由于 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个没有可数子覆盖的覆盖，我们必有 $\#\mathcal{U} = \omega_1$，尽管这一点实际上并不重要）。

在超限递归的每一步中，我们至多向 W 中加入一个点，并选取至多一个点，承诺今后不再将其加入 W。除了我们已经决定永不加入 W的点之外，我们还要求，对每个 $\alpha < \omega_1$，在 α之后的任何一步中，都不将 U_α 中的任何点加入 W。由于截至第 α 步，W 中至多加入了可数多个点（每个 $\beta < \alpha$至多加入一个点），这将确保 $W \cap U_\alpha$ 是可数的。

现在我们来描述超限递归第 α 步会发生什么。回想一下，我们需要 W 不是博雷尔集。为确保这一点，在第 α 步，我们将采取行动确保 $W \neq V_\alpha$。需要考虑两种情况，取决于 V_α 是否可数。

首先，假设 V_α 不可数。注意，到目前为止，我们只向 W 中添加了可数多个点。因此，我们可以在 $V_\alpha \setminus W$ 中选取一个点，并承诺今后绝不将它添加到 W 中。这样便能确保 $W \neq V_\alpha$。

接下来，假设 V_α 可数。令 Z 表示我们已经承诺不将其添加到 W 中的那些可数多个元素。我们断言，X 中存在某个点不属于 $Z \cup V_\alpha \cup \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$——换言之，$X \setminus V_\alpha$ 中存在某个点，可以在这一步合法地将其添加到 W 中。否则，$Z \cup V_\alpha \cup \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$ 就覆盖了 X。由于 $Z \cup V_\alpha$ 可数，我们可以从 $\mathcal{U}$ 中选取可数多个元素来覆盖它；这些元素与 $\{U_\beta\}_{\beta<\alpha}$ 一起，构成了由 $\mathcal{U}$ 中的元素组成的 X 的可数覆盖。但这与我们关于 $\mathcal{U}$ 的假设矛盾。因此，我们可以在 X 中选取一个不属于 V_α 的点，并将其添加到 W 中，从而确保 $W \neq V_\alpha$。

这就完成了我们对 W的描述。我们对 W 的构造确保它不等于任何 V_α，因此不是博雷尔集。正如我们已经解释的，对于每个 $U \in \mathcal{U}$，$W \cap U$ 都是可数的。□

接下来讨论上述连续统假设的必要性：

命题 3.33 (Hou)。以下情形与 *ZFC* 相容：存在一个由解析集构成的不可数覆盖 $\mathcal{U}$ $\mathbb{R}$，且没有可数子覆盖；并且，对于任意博雷尔映射 $g\colon X \to \mathbb{R}$ 和任意函数 $f\colon X \to Y$，若 X、$Y \in \mathbf{SBor}$，且对每个 $U \in \mathcal{U}$，f 在 $g^{-1}(U)$ 上的限制都是博雷尔映射，那么 f 也是博雷尔映射。

这个命题的证明归功于 Edward Hou，可见附录 A；相关论证请参见 [Hou25] 。

3.6. **Van Osdol 拓扑斯**。在 [Van81], 中考虑了另一个“博雷尔拓扑斯”。它是层位 $\mathcal{S}, J_{\mathcal{S}}$ 上的层范畴 $\mathsf{Sh}(\mathcal{S}, J_{\mathcal{S}})$，其中层位是非满范畴 $\mathcal{S} \subset \mathbf{SBor}$，由单位区间 $[0,1]$, 的博雷尔子集及其之间的包含函数组成，而 $J_{\mathcal{S}}$ 是由可数覆盖给出的拓扑。

从我们的观点来看，这个拓扑斯的问题在于——与文献中所声称的相反——自然函子 $\Phi\colon \mathsf{SBor} \to \mathsf{Sh}(\mathcal{S}, J_{\mathcal{S}})$ 将 $X \in \mathsf{SBor}$ 映射到 $\mathsf{SBor}(-, X)\colon \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$，并不是全忠实的；具体而言，它不是满的。为了解释原因，令 $X, Y \in \mathsf{SBor}$，并固定一个博雷尔函数 $F\colon [0,1] \times X \to Y$。于是，我们可以通过定义 $\alpha_U\colon \mathsf{SBor}(U, X) \to \mathsf{SBor}(U, Y)$（对每个博雷尔 $U \subseteq [0,1]$），将 $g\colon U \to X$ 映射到复合映射 $U \xrightarrow{\langle \mathrm{id}, g \rangle} [0,1] \times X \xrightarrow{F} Y$，从而定义一个自然变换 $\alpha\colon \Phi X \to \Phi Y$。然而，只有当 F 经由投影 $[0,1] \times X \to X$ 分解时，它才属于 Φ 的像——例如，取 $U = [0,1]$ 和 $g = \mathsf{const}_x$，其中 $x \in X$ 满足：对某些 $t, t' \in [0,1]$, $F(t, x) \neq F(t', x)$, 即可看出这一点。

4. Borel mathematics and the internal logic of $\mathcal{E}$

4.1. **内在黑田 = 外在博雷尔**。我们回顾黑田双重否定翻译；概述双重否定翻译请参见 [FO12] 。

对于公式 φ，定义公式 $\varphi^{\leftarrow}$：将每个 $\forall x\, \psi$ 替换为 $\forall x\, \neg\neg\psi$（这是一个递归定义）。公式 $\neg\neg\varphi^{\leftarrow}$ 称为 φ 的**黑田（双重否定）翻译**。Kuroda 指出（参见 [Kur51]），一阶公式是经典有效式，当且仅当其黑田翻译是直觉主义有效式。

De定义 4.1。我们如下定义三阶算术的语言 $\mathcal{L}_{3\mathrm{OA}}$：

- $\mathcal{L}_{3\mathrm{OA}}$ 有五种型：$\mathbb{N}$、$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$、$(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})}$、$(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$，以及 $\mathbb{N}^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})}$。
- 对于每个形如 B^A 的型，都有一个二元函数符号 $\mathsf{ev}_{A,\,B}$，其元数为 $\mathsf{ev}\colon B^A \times A \to B$。
- 存在一个常量符号 $0\colon \mathbb{N}$ 以及一个元数为 s 的一元函数符号 $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。

注 4.2。注意，我们从 $\mathcal{L}_{3\mathrm{OA}}$ 中省略了幂类型。原因在于，我们只关注可判定谓词，而型为 $\mathcal{P}(X)$ 的可判定谓词与型为 $\mathbf{2}^X$ 的对象（我们已经拥有）存在双射（这在直觉主义高阶逻辑中是可证明的）。如果我们要纳入类型 $\mathcal{P}(X)$，那么除了黑田翻译之外，还必须在下面的定理 4.3 中进行进一步的经典不可见翻译；在该翻译中，我们将所有幂类型上的量词相对化，使其仅遍历可判定谓词。

我们将在下文 §4.1.1 中讨论 $\mathcal{L}_{3\mathrm{OA}}$ 的其他扩展。

除了利用指数对象，在任何具有自然数对象的初等拓扑斯 $\mathcal{D}$ 中对 $\mathcal{L}_{3\mathrm{OA}}$ 的解释之外，还有一种自然的博雷尔解释。它与显然的集合论解释（即拓扑斯 $\mathcal{D}=\mathbf{Set}$ 中的解释）的区别仅在于：对于 A 或 $\mathbb{N}$，我们将 $A^{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})}$ 解释为博雷尔映射 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to A$ 的集合。

如上，令 $\mathcal{D}$ 表示 $\mathcal{E}$ 或 $\mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$中的任一个。我们将证明如下：

定理 4.3（内在黑田 =外在博雷尔）。设 φ 是 $\mathcal{L}_{3\mathrm{OA}}$中的一个句子。$\varphi$ 的博雷尔解释成立，当且仅当 $\mathcal{D}\Vdash\neg\neg\varphi^{\backsim}$。

证明。这由下文更一般的定理 4.5 推出。 □

根据拓扑斯的内在逻辑相对于直觉主义高阶算术的可靠性（见 §2.3），我们得出：

推论 4.4。给定 $\mathcal{L}_{3\mathrm{OA}}$中的一个句子 φ，如果 $\neg\neg\varphi^{\backsim}$是直觉主义高阶算术中的一个定理，那么 φ 的博雷尔解释成立。

我们将在下文 §4.2 中给出几个例子，用以说明这一一般原则：博雷尔数学中的陈述往往可以用 $\mathcal{L}_{3\mathrm{OA}}$表达，因此也就受上述定理 4.3 的制约。

我们将从下面这个更一般的陈述中推导出定理 4.3。给定一个小的子典范预层站（$\mathcal{C}$, J），令 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$为这样一种语言：对于每个 A，$B\in\mathcal{C}$，都有一个型 B^A；对于 A，B，$C\in\mathcal{C}$，都有函数符号$\circ=\circ_{A,\ B,\ C}$：$C^B\times B^A\to C^A$；并且对于 f：$A\to B$ in $\mathcal{C}$中的每一个 f，都有一个常元 $\bar{f}$：B^A。同样，我们对 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$有两种自然解释：一种是内部语言中的解释 $\mathcal{L}_{\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)}$，其中 B^A 被解释为可表对象之间的指数对象$\widehat{B}^{\widehat{A}}$；另一种是通常的集合论解释，其中 B^A 被解释为态射的集合 $\mathcal{C}(A,\ B)$，其中态射 $A\to B$ 属于 $\mathcal{C}$。

如果对象 $X\in\mathcal{C}$ 被空族覆盖，我们就称其为 **空的**；或者等价地，根据引理 2.1，如果 $X\in\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)$ 是初始对象。注意，根据子典范性，终对象 $\mathbf{1}\in\mathcal{C}$ 非空。现在我们有：

定理 4.5. 设$(\mathcal{C},J)$是一个小预层位点，并假设 J 是子典范的，且每个非空的 $X\in\mathcal{C}$ 都至少有一个来自终对象的态射 $\mathbf{1}\to X$。

那么，句子 φ 在 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ 中成立（相对于 $\mathcal{C}$ 中的态射），当且仅当 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)\Vdash\neg\neg\varphi^{\backsim}$。

我们注意到，定理 4.3 可由定理 4.5 立即推出，因为语言$\mathcal{L}_{3\mathrm{OA}}$ 嵌入到 $\mathcal{L}_{\mathbf{SBor}}$ 中，并且根据推论 3.6 和命题 3.7，定理 4.5 中考虑的两种解释限制为定理 4.3 中考虑的两种解释。

引理 4.6。设$(\mathcal{C},J)$如定理 *4.5* 中所述，并设 φ 是 $\mathcal{L}_{\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)}$ 中的一个公式，其自由变量属于 $\vec{x}:\ X$。

(*1*) 给定任意 $\mathbf{1}\to\prod_i X_i$ 和非空 $U\in\mathcal{C}$，有 $\mathbf{1}\Vdash\varphi$ 当且仅当 $U\Vdash\widehat{\varphi}$。

(*2*) 对于任意$U\to\prod_i X_i$，有 $U\Vdash\neg\neg\varphi$ 当且仅当对于所有 $\mathbf{1}\to U$，$\mathbf{1}\Vdash\varphi$。

证明。 第一个断言直接由以下假设得到：任意非空 U 都存在一个态射 $\mathbf{1} \to U$。

对于第二个断言，假设 $U \Vdash \neg\neg\varphi$ 并给定 $\mathbf{1} \to U$，我们有 $\mathbf{1} \Vdash \neg\neg\varphi$，这意味着对于每个非空的 $U' \to \mathbf{1}$，都存在一个非空的 $U'' \to U'$，使得 $U'' \Vdash \varphi$。特别地，取 $U' = \mathbf{1}$，我们得出对于某个非空的 U''，有 $U'' \Vdash \varphi$，因此根据引理的第一部分，$\mathbf{1} \Vdash \varphi$ 。

反过来，假设对所有 $\mathbf{1} \to U$都有 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$，并给定一个非空的 $U' \to U$，我们必须找到一个非空的$U'' \to U'$，使得 $U'' \Vdash \varphi$。但根据假设，存在一个态射 $\mathbf{1} \to U'$，因此我们只需取 $U'' = \mathbf{1}$。□

定理 4.5 可直接由 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$ in Sh($\mathcal{C}$, J) 的以下归纳描述推出：

命题 4.7。 设 $(\mathcal{C}, J)$ 如定理 *4.5* 中所述，设 φ和 ψ是 $\mathcal{L}_{\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)}$中的公式，其自由变量属于 $\vec{x}$: $\vec{X}$，并固定一个态射 $\mathbf{1} \to \prod_i X_i$。以下结论在$\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$中成立：

(1) $\mathbf{1} \Vdash \top$。*(2)* $\mathbf{1} \nVdash \bot$。*(3)* $\mathbf{1} \Vdash \varphi \wedge \psi$ 当且仅当 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$ 和 $\mathbf{1} \Vdash \psi$。*(4)* $\mathbf{1} \Vdash \bigvee_i \varphi_i$ 当且仅当存在某个 i 使得 $\mathbf{1} \Vdash \varphi_i$。
(5) $\mathbf{1} \Vdash \varphi \to \psi$ 当且仅当 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$ 蕴含 $\mathbf{1} \Vdash \psi$。*(6)* $\mathbf{1} \Vdash \exists x$: X. φ 当且仅当存在某个 $\mathbf{1} \to X$ 使得 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$。*(7)* $\mathbf{1} \Vdash \forall x$: X. $\neg\neg\varphi$ 当且仅当对于所有 $\mathbf{1} \to X$，都有 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$。

证明。
(1)-(3) 由命题 2.2 (v) 立即得出。(4) 我们有 $\mathbf{1} \Vdash \bigvee_i \varphi_i$ 当且仅当存在一个覆盖 A $\in J$ (1)，使得对每个 $a \in$ A，都有 $U_a \Vdash \varphi_i$ 对某个 i 成立。一个方向上，若 $\mathbf{1} \Vdash \varphi_i$，则可取 A 为平凡覆盖 $\{\mathrm{id}_{\mathbf{1}}\}$。反过来，给定 A $\in J$(1)，由于 1 非空，某个 U_a 必须非空；因此，由于对某个 i 有 $U_a \Vdash \varphi_i$ ，根据引理可得 $\mathbf{1} \Vdash \varphi_i$ 。(5) 我们有 $\mathbf{1} \Vdash \varphi \to \psi$ 当且仅当对所有 $U \to \mathbf{1}$，若 $U \Vdash \varphi$ ，则有 $U \Vdash \psi$。当 U 为空时，我们有 $U \Vdash \psi$；当 U 非空时，根据引理，这等价于若 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$，则有 $\mathbf{1} \Vdash \psi$ ，所以结论成立。(6) 我们有 $\mathbf{1} \Vdash \exists x\, \varphi$ 当且仅当存在某个 A $\in J$(1) 以及态射 $U_a \to X$，其中 $a \in$ A，并且对所有 a 都有 $U_a \Vdash \varphi$ 。若此条件成立，则某个 U_a 必须非空，因此根据引理可得 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$ 。反过来，若存在某个 $\mathbf{1} \to X$ 使得 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$，则只需取 A 为平凡覆盖 $\{\mathrm{id}_{\mathbf{1}}\}$。(7) 我们有 $\mathbf{1} \Vdash \forall x\, \neg\neg\varphi$ 当且仅当对所有 $U \to X$，都有 $U \Vdash \neg\neg\varphi$；根据引理，这当且仅当对所有 $\mathbf{1} \to U$ 和 $U \to X$，都有 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$；也当且仅当对所有 $\mathbf{1} \to X$，都有 $\mathbf{1} \Vdash \varphi$。□

定理 4.5 的证明。 该断言可由命题 4.7 运用归纳法得出。基例涉及进一步的简单归纳，证明对于项 $t : B^A$ in $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ with free

~变量属于 $\vec{x}$ where $x_i\colon {B_i}^{A_i}$，且给定 $f_i \in \mathcal{C}(A_i,\ B_i) \cong \mathrm{Sh}(\mathcal{C},\ J)(\mathbf{1},\ \widehat{B_i}^{A_i})$，$[\![t]\!]_{\vec{x},\ \vec{f}\colon\ \mathbf{1} \to \widehat{B}^{\widehat{A}}}$ 中 t 在 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},\ J)$ 中的解释，与 $\mathcal{C}$ 中以态射表示的解释一致（相对于双射 $\mathcal{C}(A,\ B) \cong \mathrm{Sh}(\mathcal{C},\ J)(\mathbf{1},\ \widehat{B}^{\widehat{A}})$）。□

4.1.1. 定义扩张。 定理 4.3 确立了，对于定义 4.1 的最小三阶算术语言中的句子，博雷尔解释与博雷尔拓扑斯中的解释是一致的。原则上，这足以表达所有我们感兴趣的博雷尔数学陈述；然而在实践中，允许对该语言进行某些定义扩张 会方便得多（见 §2.3）。

这里可用的扩张如下获得。首先，我们有二阶算术 （2OA），其类型为 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，二者都可以在范畴 **SBor**中解释。接着，我们考虑 2OA 的任意定义扩张 $\mathcal{L}$ ，该扩张仍由（即可以在） **SBor** 支持。最后，我们通过在其任意两个类型之间引入指数类型，将 $\mathcal{L}$ 进一步扩张。这种扩张无法再直接在 **SBor** 中解释，但仍可以利用**SBor**的态射集进行解释。

我们将描述一种特定的此类扩展，它既方便又足以满足我们的所有需求，并且可用于说明一般原理，但除此之外并无特别之处。我们将在下文的注记 4.11 中简要评论一类更全面的扩展。

定义 4.8. 我们如下定义语言 $\mathcal{L}^+_{2\ \mathrm{OA}}$ 和 $\mathcal{L}^+_{3\ \mathrm{OA}}$。语言 $\mathcal{L}^+_{2\ \mathrm{OA}}$具有

- 基型 $\mathbb{N}$，以及对每个自然数 $n \geq 0$ 的 $\mathbb{N}_{<n}$，还有
- 型 $A \times B$、 $A + B$、 B^A，以及对任意型 A 和 B 的 $A^{<\mathbb{N}}$，

以及以下函数符号：

- 型 $\mathbb{N}$ 的常元 $\underline{0}$，$\underline{1}$，以及函数符号 $+$，$\times\colon\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
- 型为 $\mathbb{N}_{<n}$ 的常量符号 $\underline{0}$，……，$\underline{n-1}$，对应每个 n,
- 函数符号 $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$ 和 $A \xrightarrow{i_A} A + B \xleftarrow{i_B} B$，对应每对类型 A 和 B,
- 函数符号 $\langle -,\ - \rangle$，其元数为 $A \times B \to A \times B$；以及 $\mathrm{ev}_{A,\ B}$，其元数为 $B^A \times A \to B$，对应每个 A和 B,
- 常元 $\mathrm{nil}_A\colon\ A^{<\mathbb{N}}$，以及函数符号 $\mathrm{cons}_A\colon\ A \times A^{<\mathbb{N}} \to A^{<\mathbb{N}}$，适用于任意类型 A。

接着，我们将 $\mathcal{L}^+_{3\ \mathrm{OA}}$ 定义为 $\mathcal{L}^+_{2\ \mathrm{OA}}$ 的扩张，通过引入一个型 B^A 和一个函数符号 $\mathrm{ev}_{A,\ B}$，如上所述，对应于 $\mathcal{L}^+_{2\ \mathrm{OA}}$中的每对类型 A 和 B。

语言 $\mathcal{L}^+_{3\ \mathrm{OA}}$ 只是高阶算术的一个定义扩张的片段（其含义见 §2.3），因此可以解释到任意初等拓扑斯中（关于类型 $A^{<\mathbb{N}}$的解释，它们被解释为列表对象，详见 §4.3）。同样，我们还有对 $\mathcal{L}^+_{3\ \mathrm{OA}}$的第二种自然解释：其中$\mathcal{L}^+_{2\ \mathrm{OA}}$ 中的每个类型都解释为某个标准博雷尔空间的点集，因此$\mathcal{L}^+_{3\ \mathrm{OA}}$ 中的每个类型都解释为两个标准博雷尔空间之间的博雷尔映射集。

因此，定理 4.3 和推论 4.4 的证明同样适用，可得：

定理 4.9。设 φ 是 $\mathcal{L}_3^+$ OA 中的一个句子。φ 的博雷尔解释成立，当且仅当 $\mathcal{D} \Vdash \neg\neg\varphi^\leftarrow$。

推论 4.10。给定句子 φ 属于 $\mathcal{L}_3^+$ OA，如果 $\neg\neg\varphi^\leftarrow$是直觉主义高阶算术的定理，那么 φ 的博雷尔解释成立。

定理 4.9 的证明。 证明与定理 4.3 的证明相同，唯一不同之处在于，定理 4.5 不能直接适用，因为不存在从$\mathcal{L}_2^+$ OA 到 $\mathcal{L}_{\mathbf{SBor}}$的解释。不过，可以通过对定理 4.5 中出现的语言 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ 进行小幅修改来解决这一问题：除了类型 B^A 和函数符号 $C^B \times B^A \to C^A$之外，我们还加入函数符号 $A_1{}^{\mathbf{1}} \times \cdots \times A_n{}^{\mathbf{1}} \to B^{\mathbf{1}}$，其中$\mathbf{1}$ 是终对象，对 $\mathcal{C}$中的每个态射 $f\colon \prod_{i=1}^n A_i \to B$ 均如此，正如范畴的通常内部语言中那样（见 §2.3）。定理 4.5 中出现的两个 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ 解释可以扩展到这一更大的语言，而利用命题 4.7 的相同证明表明，定理对于这一修改后的 $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$定义仍然成立。由此，利用现已可用的从$\mathcal{L}_2^+$ OA到 $\mathcal{L}_{\mathbf{SBor}}$ 的解释，并结合对 $\mathcal{L}_{\mathbf{SBor}}$所作的修改，便可立即推出我们的断言。□

注 4.11。在当前语境下，更系统地描述$\mathcal{L}_{3\mathrm{OA}}$ 的可用定义扩张，需要使用（可数）无穷逻辑。这样一来，我们就不必只引入指数类型 $X^{\mathbb{N}}$，而可以更一般地引入类型的可数乘积 $\prod_n X_n$（以及余积 $\coprod_n X_n$），并将类型 $X^{<\mathbb{N}}$ 定义为 $X^{\mathbb{N}}$的子类型，由公式 $\varphi(x) \equiv \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \pi_n(x) = \pi_k(x)$ 给出。

4.2. **博雷尔数学中的例子**。现在我们考察博雷尔数学中一些众所周知的陈述，注意到它们可以用三阶算术（即 $\mathcal{L}_3^+$ OA——见 §4.1.1）来表述，并由此得出结论：它们在博雷尔拓扑斯 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^{\mathrm{inc}}$中成立。

4.2.1. 连续统假设。连续统假设在经典逻辑中等价于各种彼此不等价的直觉主义陈述，其中一些在 $\mathcal{D}$ 中成立，另一些则不成立。

例如，考虑以下形式：“对于所有 $f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2$，要么存在$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得对于所有满足 $f(x) = 0$ 的 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，都存在满足$g(n) = x$ 的 $n \in \mathbb{N}$；要么存在 $h\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得对于所有 $\alpha \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，我们都有 $(f \circ h)(\alpha) = 0$。”

这在 $\mathcal{D}$ 中不成立，因为这意味着对于每个标准博雷尔空间U 以及 $U \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的每个博雷尔子集 R，集合 $\{u \in U\colon R_u \text{ 可数}\}$ 都是博雷尔集，但情况并非总是如此。不过，由于根据完美集定理 [Kec95, Theorem 29.1], ，这对博雷尔映射成立，因此它的黑田翻译在 $\mathcal{D}$ 中成立。

4.2.2. 博雷尔决定性。考虑句子 φ_{det}，其内容如下：对于每个$f\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2$，存在 $i : 2$ 和 $\sigma : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$，使得对于每个 $\alpha\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，如果每个 $n\colon \mathbb{N}$ 满足 $n \equiv i \,(\text{模 } 2)$，则 $\alpha{\restriction}(n+1) = (\alpha{\restriction}n)^\frown\sigma(\alpha{\restriction}n)$，那么 $f(\alpha) = i$。

那么，对于博雷尔映射，φ_{det} 成立；这就是马丁的博雷尔决定性定理（参见[Kec95，定理 20.5]）。因此，在内部，φ_{det} 的黑田翻译在 $\mathcal{D}$中成立。

然而，φ_{det} 在 $\mathcal{D}$中并不成立，因为给定一个参数化游戏族，玩家 I 获胜的集合不一定是博雷尔子集（它可以是任意解析集）。

4.2.3. *Wadge*层级的良基性。给定 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$的两个子集 A 和 B，从 A 到 B 的**Wadge归约**是一个连续函数 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，在该函数下， B 的原像是 A；如果存在从 A到 B的Wadge归约，我们就称 A 可**Wadge归约**到 B，记作 $A \leq_W B$。Wadge可归约性是$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$的子集上的一个预序，而Martin-Monk定理表明，它对博雷尔子集的限制是良基的[Kec95, 定理 21.15]。在经典数学中，假设依赖选择，这等价于说：对于 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$的博雷尔子集的所有序列（A_n）$_n$，存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 A_{n+1} 不Wadge归约到 A_n。换言之，以下句子的黑田翻译在博雷尔拓扑斯中成立：“对于所有函数 $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2$，存在某个$n \in \mathbb{N}$，使得对于所有连续函数 $g\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，都有 $f_{n+1} \neq f_n \circ g$。”注意，连续性可以用这种语言表达：函数 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是连续的，当且仅当它与投影的复合是连续的；函数 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ 是连续的，当且仅当 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的每个元素都有一个初始段，使得 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中具有该初始段的每个元素都映射到同一个值。

4.2.4. 该 E_0 二分法。考虑定义在 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 上的等价关系 E_0 如下：x 和 y 是 E_0相关的，当且仅当存在一个自然数 n，使得对于所有自然数$k > n$，都有 $x_k = y_k$。

考虑命题“对于每个定义在 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$上的等价关系 E，要么存在从 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/E$ 到 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$的单射，要么存在从 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}/E_0$ 到 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/E$的单射。”该命题的黑田翻译在博雷尔拓扑斯中成立：这个命题的外部版本就是Harringon-Kechris-Louveau的E_0 二分定理 [HKL90]。

类似地，我们也可以考虑Silver定理 [Kec95, 定理35，20], 该定理指出，每个Borel等价关系要么只有可数多个等价类，要么存在一个由等价类构成的完美集。

4.2.5. *Borel*组合学。考虑命题“每个 d-正则图（$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$）$^2 \to 2$ 在$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上都有一个适当的（$d+1$）-着色”。我们将一个函数（$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$）$^2 \to 2$ 视为顶点集为 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的图，其中边集是 $\mathbf{1}$ 的原像；如果每个顶点都有 d 个邻点，则称图为 d-正则图；适当的（$d+1$）-着色是一个函数 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to d+1$，使得相邻顶点获得不同的颜色。其黑田翻译在博雷尔拓扑斯中成立，因为从外部看，每个定义在 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上的 d-正则博雷尔图都有一个博雷尔适当的（$d+1$）-着色（[KST99]）。

另一方面，考虑命题“每个 d-正则无环图（$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$）$^2 \to 2$在 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上都有一个适当的 d-着色”，其中，如果一个图没有环，则称其为无环图。其黑田翻译在博雷尔拓扑斯中不成立，因为相应的外部命题是：每个定义在 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上的 d-正则无环博雷尔图都有一个博雷尔适当的 d-着色，而这为假（ [Mar16]）。

4.2.6. 可数集族的选择。考虑命题：“对于每个满射$f\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，若对每个 $y \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，都存在 $h\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$，使其在 y上方的 f-纤维上是单射，那么就存在 $g\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，且 $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$。”这是可数集族的选择公理的一种形式。根据 Lusin-Novikov 定理 [Kec95, Theorem 18.10], ，其博雷尔解释成立，因此其黑田翻译在博雷尔

拓扑斯中成立。实际上，即使不经过黑田翻译，它在博雷尔拓扑斯中也已经成立。为此，固定 U_0 和一个博雷尔 $f\colon U_0 \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，并假设 U_0 强制“f 是满射，且对每个 $y \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，都存在 $h\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$，在其 f-纤维上是单射”。我们需要证明U_0 强制“存在 f的一个截面 g。”

现在， f 诱导出一个函数 $U_0 \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，我们断言，诱导函数 $U_0 \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to U_0 \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的每个纤维都是可数的。为此，设 $z \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$。由于 U_0 迫使“f 是满射”，因此存在某个覆盖 $U_1 \to U_0$ 以及某个博雷尔 $x\colon\ U_1 \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，使得 U_1 迫使“$f(x) = z$”。现在，由于 U_0迫使“对于每个 $y \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，都存在 h：它在其f纤维上是单射”，因此存在某个覆盖 $U_2 \to U_1$以及某个博雷尔 $h\colon U_2 \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$，使得 U_2迫使“h 在 z的 f纤维上是单射”。现在设 $u \in U_2$。我们断言，映射 $U_2 \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to U_2 \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ （由 f 诱导）下，(u, z)的纤维是可数的，这就推出了关于 U_0的结论。假设(u, x_0)和(u, x_1)都映射到(u, z)，且假设 $h(u, x_0) = h(u, x_1)$。考虑 $x\colon\ U_2 \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，并令 $x'_0, x'_1\colon U_2 \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$为除分别将 u映到x_0和 x_1之外都相同的函数。于是 U_2迫使“$f(x'_0) = f(x'_1) = z$”以及“$h(x'_0) = h(x'_1)$”，因此，由于U_2 迫使“h 在该纤维上是单射”，它便迫使“$x'_0 = x'_1$”；这尤其意味着$(u, x_0) = (u, x_1)$，证毕。

因此，根据（外部）Lusin-Novikov 定理，这有一个博雷尔截面，而这证明了 U'强制“存在一个从 f到 g的截面”。

相比之下，选择公理通常在博雷尔拓扑斯中不成立；见第3节.3。

4.3. **Borel 近视**。 丘奇–图灵论题是一种非正式说法，意指自然数上的可计算函数恰好是那些其函数值可以通过确定性过程在有限时间内计算出来的函数。初等拓扑斯理论，乃至更广泛的直觉主义集合论，有一项引人注目的应用：这种非正式说法可以有一个形式化对应物——存在一些拓扑斯，其中“每个函数 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$都是可计算的”这一说法（在经典集合论中显然为假）在内部成立。 [Hyl82; Nas24]

在当前的博雷尔拓扑斯背景下，自然会问相应的问题“每个函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 都是博雷尔的吗？”是否在内部成立；我们将称这种拓扑斯为 Borel近视的。经典地，这个问题等价于“每个子集 $X \subset \mathbb{R}$都是博雷尔的吗？”直觉主义地，情况更为微妙。首先，我们将不再问 $\mathbb{R}$，而是询问关于 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的问题（两者可能不再等价）。其次，每个函数 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 都是博雷尔的这一说法，结果等价于每个$\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的可判定子集都是博雷尔的。确实，正向蕴含显然成立，因为我们可以在任意可判定子集上取一个示性函数 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2} \hookrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$。反向蕴含也成立，因为只要映射 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的每个分量 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}$ 都是博雷尔的，该映射就是博雷尔的。[4] 我们将把这些等价说法——所有函数 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$都是博雷尔的，或所有可判定子集 $A \subseteq \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$都是博雷尔的——作为 Borel 近视的定义。

我们现在必须处理“博雷尔集”一词可能存在的歧义——这种歧义在经典数学中并不存在，但在直觉主义语境中，以及更一般地说，在缺少选择公理时，却确实存在。博雷尔集最直接的定义是

[4]在可计算性的语境中也存在类似的情况：每个函数 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 都是可计算的，这在直觉主义地看来，等价于每个 *decidable* $\mathbb{N}$ 子集都是可计算的。

属于包含基本开集的最小 σ-代数 $\mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 的集合——也就是说，由具有固定初始段的序列组成的集合。不过，我们还可以考虑 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$的子集，它们具有博雷尔编码：这是一棵可数分支标记树，用来编码给定集合如何通过补集、可数并和可数交由基本开集构造而成。利用选择公理，我们总能从任意给定的博雷尔集重构出一个博雷尔编码：将其表示为一个否定、可数并或可数交，并递归地为每个组成博雷尔集选择一个博雷尔编码。但在缺少选择公理时，这两个概念并不相同。我们将具有博雷尔编码的博雷尔集称为**一致博雷尔**集；显然（即使没有选择公理或排中律），任何一致博雷尔集都是博雷尔集。

对我们而言，这一区别的重要性在于：如果采用较弱的博雷尔概念，那么存在一些集合论模型，其中每个$\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的子集——而不只是每个可判定子集——都是博雷尔集。我们可以将这一性质称为**强博雷尔近视**。例如，存在一个由 Feferman 和 Levy 提出的 ZF 模型，其中 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 是可数个可数集的并 A_n [Jec73，定理 10.6]。因此，对于任意 $X \subset \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，我们有 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \cap A_n)$ 本身是可数个可数集的并，因而是博雷尔集。然而， X 不一定是一致博雷尔的，因为这需要枚举各个集合 $X \cap A_n$。[5]

事实上，正如我们将在下文的注 4.16 中证明的，不存在满足强一致博雷尔近视的拓扑斯，也就是说，不存在其中 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的每个子集都是一致博雷尔的拓扑斯。原因很简单：我们可以（直觉主义地）明确构造出一个并非一致博雷尔的集合。因此，我们得到以下四种博雷尔近视，它们由图示的蕴涵联系起来，并具有图示的模型：

Borel 近视的类型

	普通	⇐ 一致
可判定	Feferman-Levy，$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$
⇑		
强	Feferman-Levy	None

我们还想考察另外两个性质，即可判定 Borel 近视的逆命题：每个博雷尔集，以及每个一致 Borel 集都是可判定的。结果表明，这两个性质在 $\mathcal{E}$中都成立：

Borel 近视的逆命题

所有普通博雷尔集都是可判定的 ⇒	所有一致 Borel 集都是可判定的
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$

（当然，逆命题在 Feferman-Levy 中也成立，原因很简单：它满足排中律。）因此，总而言之，在 $\mathcal{E}$中， $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的博雷尔集、一致 Borel 集和可判定子集都彼此相同。

现在我们转而讨论如何在一个拓扑斯中表达这些性质——也就是说，在高阶算术中表达这些性质。为此，使用高阶逻辑的某个定义扩张将会很有帮助（参见 §2.3）。具体而言，我们考虑基于以下型的语言

[5]大概，不仅存在 ZF 的模型，也存在这样的拓扑斯，其中 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 是可数并 of 可数个集 合，因此其中每个子集都是博雷尔集，不过我们尚未核实这一点。

型 $\mathbb{N}$、 $\mathbb{N}_{<\mathbb{N}}$ 以及型构造器 $A\times B$、 $A+B$、 B^A 和 $A^{<\mathbb{N}}$，如定义 4.8 中所述；此外还有 $\mathcal{P}(A)$。函数符号和关系符号包括定义 4.8 中出现的全部符号，以及对于每个型 A，还包括元关系 $\in_A$，其元数为 $A\times\mathcal{P}(A)$。我们把定义这些型以及关系符号和函数符号的相关公式留给读者，具体可参见 §2.3。下面我们还将向该扩张中引入一些可定义函数。

作为高阶算术的定义扩张，这种语言可以解释到任何带有自然数对象的初等拓扑斯中 $\mathcal{C}$。具体而言，各种类型分别解释为使用自然数对象、积、余积（其中 $\mathbb{N}_{<\mathbb{N}}$ 终对象的 n-重余积）、指数对象以及 $\mathcal{C}$的幂对象，并使用列表对象 来解释类型 $A^{<\mathbb{N}}$。

给定范畴 $\mathcal{C}$中的一个对象 X， X 上的**列表对象** 是一个对象 $X^{<\mathbb{N}}$，配备了态射 $\mathbf{1}\xrightarrow{\mathsf{nil}}X^{<\mathbb{N}}\xleftarrow{\mathsf{cons}}X\times X^{<\mathbb{N}}$，并满足显然的泛性质：给定另一个对象 Y以及态射 $\mathbf{1}\xrightarrow{a}Y\xleftarrow{f}X\times Y$，存在唯一的态射 g 使下图交换。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{1} & \xrightarrow{\mathsf{nil}} & X^{<\mathbb{N}} & \xleftarrow{\mathsf{cons}} & X\times X^{<\mathbb{N}} \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times g} \\
\mathbf{1} & \xrightarrow{a} & Y & \xleftarrow{f} & X\times Y.
\end{array}$$

在具有自然数对象的初等拓扑斯中，每个对象都具有一个列表对象[Joh02, 定理A2.5.17]。

进一步赋予我们自己函数符号 $\bigcap,\bigcup\colon \mathcal{P}(X)^A\to\mathcal{P}(X)$ 和 $\neg\colon \mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ 将会很方便；这些显然也是可定义的，即通过

$$\begin{aligned}
\textstyle\bigcap f = p &\leftrightarrow \Big(\forall x:X.\ x\in p\leftrightarrow\big(\forall a:A.\ x\in \mathrm{ev}(f,a)\big)\Big)\\
\textstyle\bigcup f = p &\leftrightarrow \Big(\forall x:X.\ x\in p\leftrightarrow\big(\exists a:A.\ x\in \mathrm{ev}(f,a)\big)\Big)\\
\neg q = p &\leftrightarrow \Big(\forall x:X.\ x\in p\leftrightarrow \neg x\in q\Big).
\end{aligned}$$

最后，我们引入一个函数符号 $i_{\mathsf{basic}}\colon \mathbf{2}^{<\mathbb{N}}\to\mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$，对应于该定义

$$\begin{aligned}
&\forall x:\mathbf{2}^{\mathbb{N}}.\ x\in i_{\mathsf{basic}}(\text{空})\ \wedge\\
&\qquad \forall n:\mathbf{2}.\ \forall a:\mathbf{2}^{<\mathbb{N}}.\ x\in i_{\mathsf{basic}}\big(\mathsf{cons}(n,a)\big)\leftrightarrow\\
&\qquad\qquad \Big(\mathrm{ev}(x,0)=n\wedge\exists b:\mathbf{2}^{\mathbb{N}}.\ b\in i_{\mathsf{basic}}(a)\wedge\forall m:\mathbb{N}.\ \mathrm{ev}(b,m)=\mathrm{ev}\big(a,s(m)\big)\Big).
\end{aligned}$$

下面定义一致博雷尔近视时，我们还会引入一个小的定义扩张；但首先，让我们定义普通博雷尔近视：

定义 **4.12.** 我们定义公式 $\mathsf{cl}_\cap(P),\mathsf{cl}_\cup(P)$，其自由变量的型为 $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})\big)$ ：

$$\mathsf{cl}_\cap(P):\equiv\forall Q:\mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}.\ \big(\forall n:\mathbb{N}.\ \mathrm{ev}(Q,n)\in P\big)\to\textstyle\bigcap Q\in P.$$

公式 $\mathsf{cl}_\cup(P)$ 的定义方式相同，只是用 $\bigcup$ 替代 $\bigcap$。类似地，我们将 $\mathsf{cl}_\neg(P)$ 定义为

$$\mathsf{cl}_\neg(P) :\equiv \forall q : \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ q \in P \to \neg q \in p$$

以及 $\mathsf{cl}_{\mathsf{basic}}(P)$ 作为

$$\mathsf{cl}_{\mathsf{basic}}(P) :\equiv \forall b : \mathbf{2}^{<\mathbb{N}}.\ i_{\mathsf{basic}}(b) \in P.$$

我们将带有 p 的公式 $\mathsf{Bo}(p)$：$\mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 定义为

$$\mathsf{Bo}(p) :\equiv \forall P : \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})\big).\ \big(\mathsf{cl}_\cup(P) \wedge \mathsf{cl}_\cap(P) \wedge \mathsf{cl}_\neg(P) \wedge \mathsf{cl}_{\mathsf{basic}}(P)\big) \to p \in P.$$

现在我们称一个拓扑斯 $\mathcal{C}$ 满足**朴素博雷尔近视性**，如果

$$\mathcal{C} \vDash \forall p : \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ (\forall x : \mathbf{2}^{\mathbb{N}}.\ x \in p \vee x \notin p) \to \mathsf{Bo}(p)$$

并且 $\mathcal{C}$ 满足**朴素博雷尔近视性的逆命题**，如果

$$\mathcal{C} \vDash \forall p : \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ \mathsf{Bo}(p) \to (\forall x : \mathbf{2}^{\mathbb{N}}.\ x \in p \vee x \notin p).$$

现在我们转而讨论一致博雷尔近视。首先需要定义博雷尔编码。如上所述，我们将博雷尔编码视为一棵带标签的可数分支树，并将其解释为一个函数：从 $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 中根节点出发的有限路径集合映射到标签集合。标签要么是基本开子集的代码——也就是$\mathbf{2}^{<\mathbb{N}}$的一个元素——要么是表示“交集”“并集”或“补集”的标签——也就是$\mathbb{N}_{<3} = \{0, 1, 2\}$的一个元素。严格来说，这种树应当至多是可数分支的：标记为 $a \in \mathbf{2}^{<\mathbb{N}}$ 的节点不应有子节点，而标记为“2”（“补集”）的节点应有一个子节点。我们采用如下约定：在第一种情形中，给定节点的所有后代也都带有标签 a；在第二种情形中，该节点的所有子节点都相同。

因此，并非所有函数 $\mathbf{2}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}_{<3} + \mathbf{2}^{<\mathbb{N}}$ 都能作为博雷尔编码，只有满足上述两个约束的函数才可以。不过，我们不会单独定义“博雷尔编码”这一概念，而只定义“编码的博雷尔集”这一概念。

我们定义型

$$\mathsf{code} :\equiv (\mathbb{N}_3 + \mathbf{2}^{<\mathbb{N}})^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$$

现在我们再引入四个函数符号：$f_\cap, f_\cup$：代码$^{\mathbb{N}} \to$代码，$\varphi_\neg$：代码 $\to$代码，以及 f_{basic}：$\mathbf{2}^{<\mathbb{N}} \to$代码，它们分别对应以下定义：

$$f_\cap(T) = t \leftrightarrow \mathrm{ev}(t, \mathsf{nil}) = i_{\mathbb{N}_3}(0) \wedge \forall n : \mathbb{N}.\ \forall a : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.\ \mathrm{ev}\big(t, \mathsf{cons}(n, a)\big) = \mathrm{ev}\big(\mathrm{ev}(T, n), a\big)$$
$$f_\neg(s) = t \leftrightarrow \mathrm{ev}(t, \mathsf{nil}) = i_{\mathbb{N}_3}(2) \wedge \forall n : \mathbb{N}.\ \forall a : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.\ \mathrm{ev}\big(t, \mathsf{cons}(n, a)\big) = \mathrm{ev}(s, a)$$
$$f_{\mathsf{basic}}(b) = t \leftrightarrow \forall a : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.\ \mathrm{ev}(t, a) = i_{\mathbf{2}^{<\mathbb{N}}}(b).$$

$f_\cup$ 的公式与 $f_\cap$ 的公式相同，只是用 $\mathrm{ev}(t,\mathsf{nil}) = i_{\mathbb{N}_3}(1)$ 替代了 $\mathrm{ev}(t,\mathsf{nil}) = i_{\mathbb{N}_3}(0)$。

定义 4.13。 我们定义公式 $\widetilde{\mathsf{cl}}_{\cap}(A)$ $\widetilde{\mathsf{cl}}_{\cup}(A)$ $\widetilde{\mathsf{cl}}_{\neg}(A)$ $\widetilde{\mathsf{cl}}_{\mathsf{basic}}$，其中 A 的型为 $\mathcal{P}\big($代码 $\times \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})\big)$ ：

$$\widetilde{\mathsf{cl}}_{\cap}(A) :\equiv \forall T\colon \text{代码}^{\mathbb{N}}.\ \forall P\colon \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}.\ \big(\forall n\colon \mathbb{N}.\ \langle T(n)\ P(n)\rangle \in A\big) \to \langle f_{\cap}(T)\ \bigcap(P)\rangle \in A$$

$$\widetilde{\mathsf{cl}}_{\neg}(A) :\equiv \forall t\colon \text{代码}.\ \forall p\colon \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}.\ (\langle t,\ \ p\rangle \in A) \ \to \langle f_{\neg}(t)\ \neg p\rangle \in A$$

$$\widetilde{\mathsf{cl}}_{\mathsf{basic}}(A) :\equiv \forall b\colon \text{基本对象}.\ \langle f_{\mathsf{basic}}(b)\ i_{\mathsf{basic}}(b)\rangle \in A$$

（并且 $\widetilde{\mathsf{cl}}_{\cup}$ 的定义与 $\widetilde{\mathsf{cl}}_{\cap}$类似）。然后我们定义 $\mathsf{cBo}(q)$（“$q\colon$ 代码 $\times\ \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 是一个编码的博雷尔集”）和 $\mathsf{uBo}(p)$（“$p\colon\ \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 是一个一致博雷尔集”）如下：

$$\mathsf{cBo}(q) :\equiv \forall Q\colon \mathcal{P}\big(\mathsf{code} \times \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})\big).\ \big(\widetilde{\mathsf{cl}}_{\cup}(Q) \wedge \widetilde{\mathsf{cl}}_{\cap}(Q) \wedge \widetilde{\mathsf{cl}}_{\neg}(Q) \wedge \widetilde{\mathsf{cl}}_{\mathsf{basic}}(Q)\big) \to q \in A,$$

$$\mathsf{uBo}(p) :\equiv \exists t\colon \mathsf{code}.\ \mathsf{cBo}(\langle t, p\rangle).$$

于是我们称拓扑斯 $\mathcal{C}$ 满足**一致博雷尔近视**，如果

$$\mathcal{C} \vDash \forall p\colon \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ (\forall x\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}}.\ x \in p \vee x \notin p) \to \mathsf{uBo}(p)$$

并且满足**一致博雷尔近视的逆命题**，如果

$$\mathcal{C} \vDash \forall p\colon \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ \mathsf{uBo}(p) \to (\forall x\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}}.\ x \in p \vee x \notin p).$$

Let 我们记录一下上文提到的朴素变体与一致变体之间的关系 ：

P命题 4.14。任何具有自然数对象 $\mathcal{C}$ 的初等拓扑斯都满足 s

$$\mathcal{C} \vDash \forall p\colon \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ \mathsf{uBo}(p) \to \mathsf{Bo}(p).$$

因此，如果 $\mathcal{C}$ 满足一致博雷尔近视，那么它也满足朴素博雷尔近视；如果它满足朴素博雷尔近视的逆命题，那么它也满足一致博雷尔近视的逆命题。

现在我们的主定理是：

定理 4.15. 博雷尔拓扑斯 $\mathcal{E}$ 满足一致博雷尔近视以及普通博雷尔近视的逆命题；即，

$$\mathcal{C} \vDash \forall p\colon \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ \mathsf{uBo}(p) \leftrightarrow \mathsf{Bo}(p) \leftrightarrow \forall x\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}}(x \in p \vee x \notin p).$$

命题 4.14 的证明. 我们来证明，所讨论的句子可在直觉主义高阶算术中证明。由概括可得

$$\vdash \exists Q\colon \mathcal{P}\big(\mathsf{code} \times \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})\big).\ \forall x\colon \mathsf{code} \times \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ x \in Q \leftrightarrow \mathsf{Bo}\big(\pi_{\mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})}(x)\big).$$

现在，从 Bo 和各种 cl 公式的定义显然可知

$$\vdash \Big(\forall x\colon \mathsf{code} \times \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ x \in Q \leftrightarrow \mathsf{Bo}\big(\pi_{\mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})}(x)\big)\Big) \to (\widetilde{\mathsf{cl}}_{\cup}(Q) \wedge \widetilde{\mathsf{cl}}_{\cap}(Q) \wedge \widetilde{\mathsf{cl}}_{\neg}(Q) \wedge \widetilde{\mathsf{cl}}_{\mathsf{basic}}(Q)).$$

因此，由 cBo 的定义可知

$$\vdash \forall p \in \mathsf{code} \times \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ \mathsf{cBo}(p) \to \mathsf{Bo}\big(\pi_{\mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})}(p)\big)\big),$$

这意味着

$$\vdash \forall p \in \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}).\ \big(\exists t \in \mathsf{code}.\ \mathsf{cBo}(\langle t, p\rangle)\big) \to \mathsf{Bo}(p),$$

如所愿。 □

定理 4.15 的证明。 首先，让我们在特定的拓扑斯 $\mathcal{E}$ 中，展开构成博雷尔近视命题的所有一般定义：

- 根据推论 3.6， $\mathcal{E}$ 中的自然数对象正是可表对象 $\mathbb{N}$。
- 根据命题 3.7，指数对象“$\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$”正是可表对象 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$。
- 态射 $i_{\text{基本对象}}\colon \mathbf{2}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 对应于 $\mathbf{2}^{<\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的可表子对象（即博雷尔子集），该子对象由满足以下条件的 $(a,\ x) \in \mathbf{2}^{<\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 组成：a 是 x的初始段。特别地，这是 $\mathbf{2}^{<\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的一个可判定 子对象（根据命题 3.11），因此 $i_{\text{基本对象}}$ 经由 $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}} \rightarrowtail \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$分解。

  态射 i_{basic} 是单态射；给定 $U \in \mathbf{SBor}$，对一个将子对象 $A \rightarrowtail \widehat{U} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 分类的态射 $a\colon \widehat{U} \to \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$，它经由像 i_{basic} 分解，当且仅当 A 由下列形式的博雷尔子集 $B \subset U \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 表示：存在一个可数不交覆盖 $U = \bigcup_n U_n$ 和基本开集 $V_n \subset \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，使得 $B = \bigcup_n U_n \times V_n$。

- 在 **Set** 中，对于任意对象 X，列表对象 $X^{<\mathbb{N}}$ 由 X 中有限序列的通常集合给出（因此 $X^{<\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N} \times X)$）。同样，在 **SBor** 中，列表对象也由相同的构造给出：将其视为可数余积 $\coprod_{n\geq 0} X^n$，从而赋予它一个博雷尔空间结构。由于积和可数余积在米田嵌入 よ: $\mathbf{SBor} \to \mathcal{E}$ 下保持不变，并且有限积在 **SBor**和 $\mathcal{E}$ 中都分配于可数余积，故よ也保持列表对象不变。

  利用よ也保持关于可数空间的指数对象这一事实（见命题 2.4），我们得出：$\mathcal{E}$ 中类型代码的解释是可表对象，即由空间代码 $= (\mathbb{N}_3 + \mathbf{2}^{<\mathbb{N}})^{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} \in \mathbf{SBor}$ 表示；代码$^{\mathbb{N}}$ 的解释同样是可表对象。

- 态射 $f\mathsf{basic}\colon \mathbf{2}^{<\mathbb{N}} \to \mathsf{code}$ 和 $f_{\neg}\colon \mathsf{code} \to \mathsf{code}$ 以及 $f_{\cap}, f_{\cup}\colon \mathsf{code}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ 定义如下：f basic 将 $a \in \mathbf{2}^{<\mathbb{N}}$ 映射到常元函数 $x \mapsto (1, a) \in (\mathbb{N}_3 \sqcup \mathbf{2}^{<\mathbb{N}})$；函数 $f_{\neg}$ 将 $t \in \mathsf{code}$ 映射到如下函数：将 $\mathsf{nil} \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 映射到 $(0, 2) \in (\mathbb{N}_3 \sqcup \mathbf{2}^{<\mathbb{N}})$，并将 $\mathsf{cons}(n, x) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 映射到 $t(x)$；函数 $f_{\cap}$ 将 $t \in \mathsf{code}^{\mathbb{N}}$ 映射到如下函数：将 $\mathsf{nil} \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 映射到 $(0, 0) \in (\mathbb{N}_3 \sqcup \mathbf{2}^{<\mathbb{N}})$，并将 $\mathsf{cons}(n, x) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 映射到$t(n)(x)$；而 $f_{\cup}$ 的定义类似，只是用 $(0, 1)$ 替代 $(0, 0)$。

- 固定 $U, X \in \mathbf{SBor}$ 及一个态射 $r\colon \widehat{U} \to \mathcal{P}(\widehat{X})^{\mathbb{N}}$——也就是说，由于 $\mathbb{N}$ 是 $\mathcal{E}$ 中的 $\mathbf{1}$ 的可数余积（见推论 3.6），因此 $\mathcal{P}(\widehat{X})^{\mathbb{N}}$ 是一个可数积，故有一个态射序列 $r_n\colon U \to \mathcal{P}(X)$——用于分类子对象 $A_n \rightarrowtail U \times X$。那么 $\bigcap r, \bigcup r\colon U \to \mathcal{P}(X)$ 分类由 $U \times X$ 的子对象格中 A_n 的交或并所给出的子对象 $A \rightarrowtail U \times X$。

  如果每个 r_n 都是可判定的，也就是说，经由 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathcal{P}(\widehat{X})$ 分解，因此 $A_n \to \widehat{U} \times \widehat{X}$ 表示 $U \times X$ 的一个博雷尔子集，那么 A 就只是这些博雷尔子集的交集或并集。这由命题 3.12 以及以下事实可知：博雷尔子集的嵌入 $\mathsf{Sub}_{\mathbf{SBor}}(X) \to \mathsf{AI}(X)$（从 X 到 σ- 理想）保可数交与并。

• 类似地，如果 $r\colon U \to \widehat{\mathcal{P}(X)}$ 分类了$\widehat{\ \ \ \

接下来要证明 Bo，uBo $\rightarrowtail \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 是等价的子对象。根据命题 4.14，我们有包含关系 uBo $\leq$ Bo。要证明另一个包含关系，根据 Bo 的定义，只需证明 uBo 包含 i_{basic} 的像，并且对 $\bigcap$、$\bigcup$ 和 $\neg$ 封闭。

首先这一点显然成立，因为 $i_{\mathsf{basic}}\colon \mathbf{2}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 经由 $\langle f_{\mathsf{basic}}, i_{\mathsf{basic}}\rangle\colon \mathbf{2}^{<\mathbb{N}} \to$代码 $\times\, \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 分解，因此也经由 cBo $\rightarrowtail$ 代码 $\times\, \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})}} \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 分解。对于在 $f_\neg$ 下的闭包，考虑 $U \in$ SBor 和一个态射 $p\colon \widehat{U} \to \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$，它经由 uBo 分解，因此存在某个满态射 $u\colon \widehat{U'} \to \widehat{U}$和 $t\colon \widehat{U'} \to$代码，使得 $\langle t, pu\rangle\colon \widehat{U'} \to$代码 $\times\, \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 经由 cBo 分解。我们需要证明 $\neg p\colon \widehat{U} \to \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 也经由 uBo 分解。不过，首先，$\neg pu$ 满足这一点，因为根据后者的定义，$\langle f_\neg t, \neg pu\rangle\colon \widehat{U'} \to$代码 $\times\, \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 经由 cBo 分解；这又意味着 $\neg p$ 也满足这一点，因为 u 是一个满态射。

$\widehat{\ }$关于对

$$f_\cap \qquad f_\cup \qquad\qquad p \quad U \to \text{and 的闭}$$
$$\mathcal{P}\,\mathbf{2}^{\mathbb{N}\ \mathbb{N}} \qquad\qquad \widehat{U} \to \mathcal{P}\,\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$$

性，论证是类似的。给定一个态射 : ( )——即一个态射序列 p_n: ( )——使得每个 p_n 经由 uBo 分解，我们需要证明 $\bigcap p\colon \widehat{U} \to \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 也具有这一性质。根据假设（并在外部使用可数选择公理），对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有满态射 $u_n\colon U_n \to U$ in$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$SBor，以及态射 $t_n\colon U_n \to$code，使得每个 $\langle t_n, p_n u_n\rangle\colon U_n \to$code $\times\, \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 都经由 cBo 分解。现在令 $\widehat{U'}$ 为所有 $\widehat{U_n}$ 在 $\prec U$ 上的纤维积，即对于所有 $k, l \in \mathbb{N}\}$，有 $U' = \{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \mid u_k(v_k) = u_l(v_l)$，从而映射 $u = \curlywedge\ \ \curlywedge u_n \pi_n\colon U' \to U$ 与 n 无关，并且（再次由选择公理）是一个满态射。于是我们有态射 $t'_n = t_n\pi_n\colon \widehat{U'} \to$code 和 $a'_n = a_n u_n \pi_n\colon \widehat{U'} \to \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$，使得对于所有 n，$\langle t'_n, a'_n\rangle\colon \widehat{U'} \to$code $\times\, \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 经由 cBo 分解。因此，根据 cBo 的定义可知，$\langle \bigcap\langle t'_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}, \bigcap\langle a'_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}\rangle\colon U' \to$code $\times\, \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 经由 cBo 分解，进而 $\bigcap\langle a'_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}\colon U' \to \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})$ 经由 uBo 分解。但由于 $\langle a'_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} = au$ and u 是满射，所以 $\bigcap a$ 同样经由 uBo 分解，正如所需。关于 $\bigcup$ 的论证完全相同。□

注 4.16。最后，让我们来看看，如上所述，没有任何拓扑斯能够满足强 一致博雷尔近视——也就是说，绝不可能每个 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的子集都是一致博雷尔。我们将非正式地说明这一论证，但显然它只用到了直觉主义高阶算术，因此在任何初等拓扑斯中都成立。断言归结为明确构造一个特定的、不是一致博雷尔的 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 子集，我们将通过通常的对角论证来做到这一点。

注意，复合映射 cBo $\rightarrowtail$ 代码 $\times\, \mathcal{P}(\mathbf{2}^{\mathbb{N}}) \to$ 代码是单态射（这可由归纳法得出），并固定一个单态射 code $\rightarrowtail \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$（例如，先固定一个单态射 $\mathbb{N}_3 + \mathbf{2}^{<\mathbb{N}} \rightarrowtail \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，再在指数对象中使用一个双射 $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$）。它们的复合是一个单态射 $f\colon$ cBo $\rightarrowtail \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$。现在定义

$$u = \{(x, y) \in (\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^2 | \exists \langle t, a\rangle : \mathsf{cBo}.\ (x = f(\langle t, a\rangle) \text{ and } y \in a)\}.$$

我们断言 $b = \{x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : (x,\ \ x) \notin u\}$ 不是一致博雷尔的。假设它是，那么存在带有 $\langle t,$ $b\rangle \in$ cBo 的 $t \in$代码。于是令 $x = f(\langle t,\ \ b\rangle)$，根据 u 的定义，我们有

$(x,\ x) \in u$ 当且仅当 $x \in b$（由于 f 是单态射，我们只需检查第二个条件）。然而，根据 b 的定义，我们有 $x \in b$ 当且仅当 $(x,\ x) \notin U$，由此得到所需的矛盾。

Appendix A. $J_{\mathbf{SBor}}$ is consistently not the canonical topology

在本附录中，我们将证明命题 3.33。也就是说，我们将证明：$J_{\mathbf{SBor}}$ 不是$\mathbf{SBor}$上的典范拓扑这一命题与 ZFC 相容。回顾一下，$J_{\mathbf{SBor}}$ 不是典范拓扑等价于存在一个由解析集组成的不可数覆盖 $\mathcal{U}$，它覆盖 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，但没有可数子覆盖，并且具有如下性质：给定任意博雷尔映射 $g\colon\ X \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，以及任意函数 $f\colon\ X \to Y$，满足 $X,\ Y \in \mathbf{SBor}$，如果 f不是博雷尔的，那么存在某个 $U \in \mathcal{U}$，使得将 f 限制在 $g^{-1}(U)$ 上所得的映射不是博雷尔的。因此，我们需要证明存在这样一个覆盖 $\mathcal{U}$ 与 ZFC 相容。

为了证明这一点，我们将描述一个 ZFC 模型，在该模型中，覆盖 $\mathcal{U}$ 可以直接取为 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的所有零测集博雷尔子集的集合（事实上，在我们所描述的模型中，甚至可以将 $\mathcal{U}$ 取为所有零测的 G_δ 集的集合）。我们将使用强迫来构造这个模型，并将使用强迫的标准术语和事实；关于强迫的参考资料见 [Kun80]。不过，在描述模型之前，我们先作一些简化性的观察。

（1）只需考虑 $X = Y = \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的情形。也就是说，只需证明（在我们所构造的 ZFC 模型中）：对于任意博雷尔映射 $g\colon\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 以及任意函数 $f\colon\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，如果 f 不是博雷尔集，那么存在某个 $U \in \mathcal{U}$，使得 f 对 g^{-1}（U）的限制不是博雷尔映射。这是因为所有不可数标准博雷尔空间都是博雷尔同构的。

（2）只需证明 $\mathcal{U}$ 能够检测集合而非函数的非博雷尔性。也就是说，只需证明：对于任意博雷尔映射 $g\colon\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 以及任意集合 $A \subseteq \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，如果 A 不是博雷尔集，那么存在某个 $U \in \mathcal{U}$，使得 $A \cap g^{-1}$（U）不是博雷尔集。要理解这一点为何足够，设这一结论成立，并令 $f\colon\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 为一个非博雷尔函数。那么必然存在某个博雷尔集 $V \subseteq \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，使得 f^{-1}（V）不是博雷尔集。因此必然存在某个 $U \in \mathcal{U}$，使得 f^{-1}（V）$\cap\, g^{-1}$（U）不是博雷尔集。由于 f^{-1}（V）$\cap\, g^{-1}$（U）等于 $f|_{g^{-1}}$ 对 V 的原像 $_{(U)}$，这说明 $f|_{g^{-1}(U)}$ 不是博雷尔集。

总而言之，为了证明与 ZFC 相容的是，$J_{\mathbf{SBor}}$ 并非典范的，只需找到一个 ZFC 模型，使得对于每个博雷尔函数 $g\colon\ \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 以及每个非博雷尔集 $A \subseteq \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，都存在某个 Lebesgue测度为零的博雷尔集 U，使得 $A \cap g^{-1}(U)$ 不是博雷尔集。

现在我们将描述一个具有该性质的 ZFC 模型。令 $\mathbb{P}$ 为添加 ω_2 个 Cohen 实数的强迫概念（即，$\mathbb{P}$ 由所有有限部分函数 $\omega_2 \times \mathbb{N} \to 2$组成，并按包含关系排序），令 G 为在 L 上的 $\mathbb{P}$-泛型，并令 $M = L[G]$。我们断言这个模型满足要求。[6]

[6]实际上，我们是在 L上进行强迫这一点并不重要。只要所添加的 Cohen 实数的数量大于基模型中连续统的基数，我们就可以在任意基模型上做同样的事情。

为了证明这一点，首先确立一些记号并回顾模型 M的一些标准事实会有所帮助。对于每个 $\alpha < \omega_2$，令 $G_{\leq\alpha}$ 表示由 G 添加的 Cohen 实数中的第一个 α，令 $G_{>\alpha}$ 表示由 G添加的其余 Cohen 实数。更确切地说，$G_{\leq\alpha} = G|_{(\alpha+1)\times\mathbb{N}}$ 和 $G_{>\alpha} = G|_{(\alpha+1,\omega_2)\times\mathbb{N}}$。令 X_α 表示 $(\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^{L[G_{\leq\alpha}]}$。

请注意，除非我们明确另行说明，以下所有内容都默认在 M 中进行。

引理 A.1。 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{\alpha<\omega_2} X_\alpha$。

证明。设 $r \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$；我们必须证明存在某个 $\alpha < \omega_2$，使得 $r \in X_\alpha$。设 $\dot{r}$ 是 r 的一个良名称，并注意到 $\dot{r}$ 的支集必定可数。因此，存在某个 $\alpha < \omega_2$，使得 r 的支集包含于 $\alpha \times \mathbb{N}$。显然，这意味着 $r \in L[G_{\leq\alpha}]$，从而 $r \in X_\alpha$。□

引理 A.2。对每个 α，X_α 的测度为零。

证明。注意，$G_{>\alpha}$ 是 $L[G_{\leq\alpha}]$ 上的 Cohen 泛型，并且 $L[G] = L[G_{\leq\alpha}][G_{>\alpha}]$。众所周知，加入一个 Cohen 泛型实数会使基模型实数成为一个零测集。此外，在 ZFC 的传递模型中，实数集具有零测度这一性质向上封闭，因此在 $L[G]$ 中，$L[G_{\leq\alpha}]$ 的实数集（即集合 X_α）是零测集。□

引理 A.3. 对于任意博雷尔函数 $g\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，对所有充分大的 α，$X_\alpha \subseteq g^{-1}(X_\alpha)$。

证明。设 r 是 g的博雷尔编码。由引理 A.1，存在某个 $\beta < \omega_2$ 使得 $r \in X_\beta$。现在固定 $\alpha \geq \beta$ 并令 $x \in X_\alpha$。注意，$g(x)$ 属于 $L[x, r]$。由于 x 和 r 都属于$L[G_{\leq\alpha}]$，我们必有 $g(x) \in L[G_{\leq\alpha}]$，因此 $g(x) \in X_\alpha$。所以 $x \in g^{-1}(X_\alpha)$。□

定理 A.4. 在 M中，$J_{\mathbf{SBor}}$ 不是**SBor**上的典范拓扑。

证明。在 M中进行论证。设 $g\colon \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$是一个博雷尔函数，并设 $A \subseteq \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$是任意一个集合，使得对于每个零测集博雷尔集 $U \subseteq \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，$A \cap g^{-1}(U)$ 都是博雷尔集。我们将证明 A 是博雷尔集。

我们从以下两个断言开始，它们说明对于每个 α，$A \cap X_\alpha$ 都必须相对简单。特别地，相对于 X_α，A不仅是博雷尔集，而且在 Borel层级 中具有有界的复杂度（其中该界与 α 无关）。

断言。对于每个 $\alpha < \omega_2$，A 相对于 X_α是博雷尔集。更确切地说，存在一个博雷尔集 B，使得 $A \cap X_\alpha = B \cap X_\alpha$。

证明。固定 α，并令 $\beta > \alpha$ 足够大，以便应用引理 A.3。根据引理 A.2，X_β 是零测集，因此存在某个博雷尔（实际上是 G_δ）集 U，其测度为 0，使得 $X_\beta \subseteq U$。根据我们对 A 的假设，$A \cap g^{-1}(U)$ 是博雷尔集。于是我们得到

$$X_\alpha \subseteq X_\beta \subseteq g^{-1}(X_\beta) \subseteq g^{-1}(U)$$

其中第二个包含关系依据引理 A.3 以及我们对 β的选择而得。因此

$$A \cap X_\alpha = A \cap (X_\alpha \cap g^{-1}(U)) = (A \cap g^{-1}(U)) \cap X_\alpha.$$

Hence $A \cap X_\alpha$ 是 X_α 与博雷尔集 $A \cap g^{-1}(U)$的交集，正如所需 d. □

断言。 存在某个固定的序数 $\eta < \omega_1$，使得对于每个 $\alpha < \omega_2$，相对于 X_α， A在博雷尔层级中的秩至多为 η。更确切地说，对于每个 $\alpha < \omega_2$，都存在一个 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$集 B，使得 $A \cap X_\alpha = B \cap X_\alpha$。

证明。 根据前一个断言，对于每个 $\alpha < \omega_2$，我们都可以选取某个 $\eta_\alpha < \omega_1$，使得存在一个 $\mathbf{\Sigma}^0_{\eta_\alpha}$ 集 B，满足 $A \cap X_\alpha = B \cap X_\alpha$。由鸽巢原理，必定存在一个共尾集 $S \subseteq \omega_2$，在该集合上 η_α 的值为常元。令 η 为这样一个常元值。

现在任取一个 $\alpha < \omega_2$。选取某个属于 S 的 $\beta > \alpha$。根据 η 的定义，存在一个$\mathbf{\Sigma}^0_\eta$集 B，使得 $A \cap X_\beta = B \cap X_\beta$。又因为 $X_\alpha \subseteq X_\beta$，所以 $A \cap X_\alpha = B \cap X_\alpha$也成立。□

在本证明的其余部分，令 η 如上述断言所述。固定一个通用的 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ Set$R \subseteq \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \times \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$。换言之，$R$ 是一个 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ Set，使得对于每个 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ Set $B \subseteq \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，都存在某个 $b \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$，使得 $B = R_b = \{x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \mid (x,\ b) \in R\}$。按照惯例，我们将 b称为 B的 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ **代码**。注意，我们可以假设 R 编码于 L中。

现在固定一个 A的名称 $\dot{A}$。通过修改 $\dot{A}$（同时保持 $\dot{A}[G] = A$不变），我们可以假设 $\mathbb{1}_\mathbb{P}$ 迫使对所有 $\alpha < \omega_2$， $\dot{A} \cap X_\alpha$ 都是 X_α 与某个 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ Set 的交集。选取一列良名称 $\{\dot{b}_\alpha\}_{\alpha<\omega_2}$，为这些集合给出 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ 代码。更确切地说，选取一列，使得对于所有 α， $\mathbb{1}_\mathbb{P}$ 迫使 $\dot{b}_\alpha$ 是某个 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ Set B 的 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ 代码，且$\dot{A} \cap X_\alpha = B \cap X_\alpha$。

我们的目标是设法将这些名称合并为一个集合$\dot{A}$的博雷尔编码。首先，我们将限制在 ω_2 的一个共终子集上，使得名称 $\dot{b}_\alpha$ 表现得特别良好。为此，我们先建立一些记号。

对于 $\mathbb{P}$中的每个条件 p， p的支集记为 supp(p)，它是满足以下条件的序数$\alpha < \omega_2$ 的集合：存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得(α, n)包含于 p的定义域中。对于任意名称 $\dot{x}$， $\dot{x}$的支集记为 supp($\dot{x}$)，它是 $\dot{x}$中出现的各条件的支集的并集。给定一个条件 $p \in \mathbb{P}$ 和一个映射 φ: supp(p) $\to \omega_2$，令 φ(p)表示由 $\varphi(p)(\alpha, n) = p(\varphi(\alpha)\ n)$定义的条件。类似地，对于一个名称 $\dot{x}$ 和一个映射 φ: supp($\dot{x}$) $\to \omega_2$，令 $\varphi(\dot{x})$表示将 $\dot{x}$ 中的每个条件 p 替换为 φ(p)后得到的名称。

注意，每个名称 $\dot{b}_\alpha$ 的支集都是可数的（因为它是实数的一个良名称）。因此，对 $\dot{b}_\alpha$的支集应用 Δ-系引理，可得一个可数集 $C \subseteq \omega_2$和一个共终集 $S_1 \subseteq \omega_2$，使得对所有 $\alpha \neq \beta \in S_1$，都有 supp($\dot{b}_\alpha$)∩supp($\dot{b}_\beta$) $= C$（即， C 是由 $\{\text{supp}(\dot{b}_\alpha) \mid \alpha \in S_1\}$构成的 Δ-系的茎）。

对每个中位于茎 C之外的支集 supp($\dot{b}_\alpha$)，我们可以将其进一步精细化为一个共终集 $S_2 \subseteq \omega_2$，使得若 $\alpha < \beta$ 属于 S_2，则 D_α 的每个元素都小于 D_β的每个元素。

现在注意到，每个 D_α 都是可数的，因此其序型小于 ω_1。根据鸽巢原理，我们可以将 S_2 限制为一个共终的子集 S_3，使得对于所有 α， $\beta \in S_3$、 D_α和 D_β 都具有相同的序型。

令 $\gamma_0 = \sup\{\alpha + 1 \mid \alpha \in C\}$，并令 γ_1 表示 D_α 在 $\alpha \in S_3$下唯一的序型。令 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$。对于每个 $\alpha \in S_3$，令 φ_α: supp($\dot{b}_\alpha$) $\to \gamma$ 为保持

C 并将 D_α 压缩为其序型。更精确地说，对于每个 $\beta \in C$，$\varphi_\alpha(\beta) = \beta$；对于每个 $\beta \in D_\alpha$，$\varphi_\alpha(\beta) = \gamma_0 + \beta'$，其中 β' 是将 D_α 压缩为其序型时 β 的像，γ_1。

注意，对于任意 $\alpha \in S_3$，$\varphi_\alpha(b_\alpha)$ 都是一个支集为 $\gamma < \omega_1$ 的可数名称，因此可以用一个实数进行编码。因此，当 α 遍历 S_3 时，$\varphi_\alpha(b_\alpha)$ 至多有 $|\mathbf{2}^{\mathbb{N}}|^L = \omega_1$ 个可能的值。于是，再次应用鸽巢原理，我们可以将限制在一个共尾集 $S_4 \subseteq S_3$ 上，使得 $\varphi_\alpha(b_\alpha)$ 在 S_4 上为常元。令 b 表示这个常元值。

其思想是，$\dot{b}$ 或多或少为我们提供了一个 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ 的 A 代码。不过，要使这一点严格成立，还需要做一些工作。

令 $\mathbb{P}_\gamma$ 表示添加 γ 个 Cohen 实数的强迫，并令 $\mathbb{P}_{\gamma_1}$ 表示添加 γ_1 个 Cohen 实数的强迫。注意，b 可以被看作 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 中某个元素的一个良好 $\mathbb{P}_\gamma$-名称。特别地，$\dot{b}$ 是一组形如 $(n,\ p)$ 的有序对，其中 $n \in \mathbb{N}$，且 p 是一个 $\mathbb{P}_\gamma$-条件。令 $\dot{c}$ 表示如下名称：从 b 中排除所有形如 $(n,\ p)$ 且 p 与 G_{γ_0} 不相容的有序对。注意，$\dot{c}$ 可以被看作 $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 中某个元素的一个良好 $\mathbb{P}_{\gamma_1}$-名称。

令 B 为满足以下条件的 $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ 的集合：$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\gamma_1}}$ 强迫 x 属于由 $\dot{c}$编码的 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ 集。我们断言，B 是一个博雷尔集，并且它等于 A。

断言。 集合 B 是博雷尔集。

证明。 注意，$\mathbb{P}_{\gamma_1}$ 的泛型滤子可以由一个实数编码。此外，科恩强迫允许名称的连续读取，因此存在一个连续函数 F，使得对于任意$\mathbb{P}_{\gamma_1}$-泛型的 h，$F(h) = \dot{c}[h]$。因此，判断 x 是否属于 B，等价于判断是否强迫$(x, F(h)) \in R$。由于 R是由 M编码的一个 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$集，对科恩强迫的标准分析表明，该性质

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\gamma_1}} \Vdash (x, F(h)) \in R$$

是博雷尔集。 □

断言。 $A = B$。

证明。 固定 $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$。我们将证明，若 $x \in A$，则 $x \in B$。若 $x \notin A$，则$x \notin B$ 的证明非常相似，因此略去。

假设 $x \in A$。由引理 A.1，我们可以选取 $\alpha < \omega_2$，使得 $x \in X_\alpha$。正如我们上文所观察到的，$L[G] = L[G_{\leq\alpha}][G_{>\alpha}]$。由于 $x \in A$ 在 $L[G_{\leq\alpha}][G_{>\alpha}]$中成立，因此必有某个 $G_{>\alpha}$中的条件强迫 $\check{x} \in A$ 在 $L[G_{\leq\alpha}]$ 上成立。令 p 为这样的条件。

注意，supp(p) 是有限的。因此，我们可以选取某个 $\alpha' < \omega_2$，使其大于 α、γ_0 以及 supp(p) 中的每个元素。取足够大的 $\beta \in S_4$，使得 D_β 中的每个元素都大于 α'（回想一下，S_4 在 ω_2 中是共终的，并且所有的 D_β 都是可数且不相交的）。令 $\mathbb{P}_{\leq\alpha'}$ 和 $\mathbb{P}_{>\alpha'}$ 分别表示显然的强迫概念，使得 $G_{\leq\alpha'}$ 是 $\mathbb{P}_{\leq\alpha'}$ 的泛型的，且$G_{>\alpha'}$ 在 $L[G_{\leq\alpha'}]$上是 $\mathbb{P}_{>\alpha'}$ 的泛型的。

由于 α' 大于 supp(p) 中的每个元素，并且 $G_{\leq\alpha'}$ 扩展了 p（因为 p 属于 $G_{>\alpha}$，且 $G_{\leq\alpha'}$ 在 supp(p) 上与 $G_{>\alpha}$ 一致），我们必须有：在 $L[G_{\leq\alpha'}]$中，$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{>\alpha'}}$ 迫使

that $\check{x} \in \dot{A}$。因此，根据我们对 $\dot{b}_\beta$ 的选择， $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\alpha'}}$ 也必然迫使 $\check{x}$ 属于由 b_β编码的 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$集。

注意到， $\mathbb{P}_{>\alpha'}$ 通过将 D_β 映射到 γ_1，与 $\mathbb{P}_{>\alpha'} \times \mathbb{P}_{\gamma_1}$ 同构。此外，此映射将 b_β 映射到 $\dot{c}$。因此，在 $L[G_{\leq\alpha'}]$中， $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{>\alpha'}\times\mathbb{P}_{\gamma_1}}$ 强制$\check{x}$ 属于由 $\dot{c}$编码的$\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ 集合。由于 $G_{>\alpha'}$ 是 $\mathbb{P}_{>\alpha'}$-泛型的，这意味着在 $L[G] = L[G_{\leq\alpha'}][G_{>\alpha'}]$中， $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\gamma_1}}$ 强制$\check{x}$ 属于由 $\dot{c}$编码的 $\mathbf{\Sigma}^0_\eta$ 集合。□

显然，上述两个断言足以完成证明。 □

Appendix B. Proof of Theorem 3.19

我们需要证明**SAn** 是**SBor**的正则完备化，是**SBor**的正则可数完备、可数广扩张完备化，并且是**SBor**在第3.2节所解释的所有中间意义下的完备化。

首先，根据命题 3.18，包含**SBor** $\hookrightarrow$ **SAn**是正则的、可数完备的且可数广扩张的。

现在设 $\mathcal{C}$ 是一个正则范畴，且 $F\colon \mathsf{SBor} \to \mathcal{C}$ 是一个正则函子。我们首先必须~证明，它可以扩展为一个正则函子 $F\colon \mathsf{SAn} \to \mathcal{C}$。对于每个 $A \in \mathsf{SAn}$，固定一个包含$i_A\colon A \hookrightarrow Y_A \in \mathsf{SBor}$ 和一个满态射 $q_A\colon X_A \to A$，其中 $X_A \in \mathsf{SBor}$（若 A 是 Borel，则取$i_A = q_A = \mathrm{id}_A$），选择一个正则满-单分解（即一个像）$FX_A \xrightarrow{\tilde{q}_A} \widetilde{A} \xrightarrow{i_A} FY_A$ in $\mathcal{C}$ of $F(i_A \circ q_A)\colon FX_A \to FY_A$，并令 $\widetilde{F}A = \widetilde{A}$；对于 A Borel，同样取$\widetilde{A} = FA$和 $\tilde{q}_A = \tilde{\imath}_A = \mathrm{id}_{FA}$。[7]接下来，对每个态射 $f\colon A \to B$，我们断言~存在唯一的态射 $f\colon FA \to FB$，满足 $\tilde{\imath}_B f q_A = F(i_B f q_A)\colon FX_A \to FY_B$；~然后我们将定义 $Ff = f$。 f的唯一性是显然的，因为 $\tilde{\imath}_B$ 是单态射，而 $\tilde{q}_A$ 是满态射。

$$\begin{array}{ccccc} X_A & \xrightarrow{q_A} & A & \xrightarrow{i_A} & Y_A \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ X_B & \xrightarrow{q_B} & B & \xrightarrow{i_B} & Y_B \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} FX_A & \xrightarrow{\tilde{q}_A} & \widetilde{F}A & \xrightarrow{\tilde{\imath}_A} & FY_A \\ & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \\ FX_B & \xrightarrow{\tilde{q}_B} & \widetilde{F}B & \xrightarrow{\tilde{\imath}_B} & FY_B \end{array}$$

~为证明 $F(i_B f q_A)$ 经由.....分解到 FB，我们在 **SBor** 中构造如下拉回。注意到 π_{X_A} 是命题 3.18 中的一个正则满态射，因此我们在 $\mathcal{C}$中得到相应的拉回方块和正则满态射。

$$(6) \qquad \begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\pi_{X_A}} & X_A & \xrightarrow{i_A q_A} & Y_A \\ & \searrow^{\pi_{X_B}} & & \searrow^{i_B f q_A} & \\ & & X_B & \xrightarrow{i_B q_B} & Y_B \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} FP & \xrightarrow{F\pi_{X_A}} & FX_A & \xrightarrow{\tilde{\imath}_A \tilde{q}_A} & FY_A \\ & \searrow^{F\pi_{X_B}} & & \searrow^{F(i_B f q_A)} & \\ & & FX_B & \xrightarrow{\tilde{\imath}_B \tilde{q}_B} & FY_B. \end{array}$$

[7]在范畴论中，证明自由构造的泛性质时经常会用到选择，但这并非必要，也就是说，可以通过使用 *anafunctors*（即 [Mak96]的意义下）来避免。

由于 $F(i_B f q_A)\pi_{X_A}$经由单态射 $\tilde{i}_B$分解，且 $F\pi_{X_A}$是正则满态射，因此可得$F(i_B f q_A)$也经由 $\tilde{i}_B$分解，正如所需。

接下来，由于 q_A是正则满态射，只需证明 $F(i_B f q_A)\pi_0 = F(i_B f q_A)\pi_1$：$FX_A \times_{\widetilde{F}A} FX_A \to FY_B$。由于 $\tilde{i}_A$是单态射，且 F保有限极限，典范态射

$$F(X_A \times_{Y_A} X_A) \to FX_A \times_{FY_A} FX_A \leftarrow FX_A \times_{\widetilde{F}A} FX_A$$

是同构，因此我们可以改为使用拉回 $F(X_A \times_{Y_A} X_A)$。但由于 $i_B f q_A$经由 $i_A q_A$的像 A 分解，可得 $i_B f q_A \pi_0 = i_B f q_A \pi_1$：$X_A \times_{Y_A} X_A \to Y_B$在**SBor**中成立，进而有 $F(i_B f q_A)F(\pi_0) = F(i_B f q_A)F(\pi_1)$：$F(X_A \times_{Y_A} X_A) \to F(Y_B)$，这正是所需。

我们已经确立了保持恒等态射这一点显然成立。为考察它需要证明 $\widetilde{F}$ 是一个函子。它保持恒等态射这一点显然成立。$\widetilde{F}f$；接下来需要证明，考虑**SAn**中的态射 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$，得到图表

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, two heads, "\pi_{X_A}"] \arrow[dr, "\pi_{X_B}"'] & X_A \arrow[r, two heads, "q_A"] & A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d, "f"] & Y_A \\
& X_B \arrow[r, two heads, "q_B"] & B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d, "g"] & Y_B \\
& X_C \arrow[r, two heads, "q_C"] & C \arrow[r, tail, "i_C"] & Y_C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FP \arrow[r, two heads, "F\pi_{X_A}"] \arrow[dr, "F\pi_{X_B}"'] & FX_A \arrow[r, two heads, "\tilde{q}_A"] & \widetilde{F}A \arrow[r, tail, "\tilde{i}_A"] \arrow[d, dashed, "\widetilde{F}f"] & FY_A \\
& FX_B \arrow[r, two heads, "\tilde{q}_B"] & \widetilde{F}B \arrow[r, tail, "\tilde{i}_B"] \arrow[d, dashed, "\widetilde{F}g"] & FY_B \\
& FX_C \arrow[r, two heads, "\tilde{q}_C"] & \widetilde{F}C \arrow[r, tail, "\tilde{i}_C"] & FY_C,
\end{tikzcd}$$

其中，我们如上文中的（6）一样构造了相同的拉回。为了证明 $Fg \cdot Fg = F(gf)$，只需在分别与满态射 $\tilde{q}_A \cdot F\pi_{X_A}$和单态射 $\tilde{i}_C$复合后证明这一点。首先，根据 P的定义，有 $\tilde{i}_B \cdot Ff \cdot \tilde{q}_A \cdot F\pi_{X_A} = \tilde{i}_B \cdot \tilde{q}_B \cdot F\pi_{X_B}$，因此由于 $\tilde{i}_B$ 是单态射，有 $Ff \cdot \tilde{q}_A \cdot F\pi_{X_A} = \tilde{q}_B \cdot F\pi_{X_B}$。利用 $\widetilde{F}$的定义，我们得到：

$$\tilde{i}_C \cdot \widetilde{F}g \cdot \widetilde{F}f \cdot \tilde{q}_A \cdot F\pi_{X_A} = \tilde{i}_C \cdot \widetilde{F}g \cdot \tilde{q}_B \cdot F\pi_{X_B} = F(i_C g q_B) \cdot F\pi_{X_B} = F(i_C g q_B \pi_{X_B})$$

and

$$\tilde{i}_C \cdot \widetilde{F}(gf) \cdot \tilde{q}_A \cdot F\pi_{X_A} = F(i_C g f q_A) \cdot F\pi_{X_A} = F(i_C g f q_A \pi_{X_A}).$$

因此，只需证明 $i_C g q_B \pi_{X_B} = i_C g f q_A \pi_{X_A}$属于**SBor**，或等价地，属于**SAn**。但这由 $q_B \pi_{X_B} = f q_A \pi_{X_A}$属于**SAn**可知，因为 $i_B q_B \pi_{X_B} = i_B f q_A \pi_{X_A}$属于**SBor**，因而也属于**SAn**，且 i_B 是单态射。

函子 $\widetilde{F}$的定义至此完成。接下来需要证明，如此定义的 F 是正则的。首先，对于每个态射 q_A：$X_A \to A$，根据中 F 的定义所选取的，我们显然有 $Fq_A = \tilde{q}_A$，而根据定义这是一个正则满态射。其次，**SAn** 中的任意满态射 f：$X \to Y$，其中 X 为博雷尔，同构于这样的一个 q_A，因此 Ff 同构于 $\tilde{q}_A$，从而同样是正则满态射。最后，对于一般的 g：$A \to B$ in **SAn**，我们可以选取一个满态射 f：$X \to A$，其中 X 为博雷尔；于是，根据我们刚刚证明的结果，$Fg \cdot Ff = F(gf)$：$X \to B$ 是一个正则满态射，因此 Fg 也是如此。

~还需要证明 F 保持有限极限。显然，它保持终对象。我们需要证明它保持拉回。

$$\begin{array}{ccccc} X' & \twoheadrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & = & B' \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \twoheadrightarrow & A & \longrightarrow & B & \rightarrowtail & Y \end{array}$$

考虑 **SAn** 中的一个拉回方块，其顶点为 A、B、A'、B'，如上所示。通过将右侧所示的方块与 $Y \in$**SBor**拼接，并利用拉回方块通常的二取三规则，我们可以归约到 $B \in$ **SBor** 的情形。接着，我们还可以通过拼接左侧所示的方块，并利用如下事实，进一步归约到 $A \in$ **SBor** 的情形：在正则范畴中，若左侧方块中的水平箭头是正则满态射，则“不寻常”的二取三规则（即左侧方块和外侧方块是拉回方块，蕴含右侧方块也是拉回方块）成立。用同样的方法，我们还可以进一步归约到 B' 的情形，因此 A' 也属于 **SBor**。这样便完成了，因为根据假设，$\widetilde{F}|_{\mathbf{SBor}} = F$ 保持有限极限。

我们已经证明，任意正则范畴 $\mathcal{C}$ 之间的自然变换 $\alpha\colon F \to F'$ 都可唯一延拓为给定正则延拓 $\widetilde{F}, \widetilde{F}'\colon \mathbf{SAn} \to \mathcal{C}$ 之间的一个自然变换 $\tilde{\alpha}\colon F \to F'$。给定 $A \in$**SAn**，如上选择一个满态射和单态射 $X \xrightarrow{q_A} A \xrightarrow{i_A} Y$，使得$X, Y \in$ **SBor**，并考察图表

$$\begin{array}{ccccc} FX_A & \xrightarrow{Fq_A} & \widetilde{F}A & \xrightarrow{Fi_A} & \widetilde{F}Y_A \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{X_A}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\alpha}_A} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{Y_A}} \\ F'X_A & \xrightarrow{F'q_A} & \widetilde{F}'A & \xrightarrow{F'i_A} & F'Y_A. \end{array}$$

然后我们注意到，由于 α的自然性，外部方形是交换的，并定义 $\tilde{\alpha}_A$ 为使整个图表交换的唯一虚线态射。此外，由所要求的自然性可知，这也是唯一可能的选择，无论是相对于 q_A 还是相对于 i_A。利用 α 相对于 $i_B f q_A\colon X_A \to Y_B$ 的自然性，通过类似论证可得，$\tilde{\alpha}$ 相对于 **SAn** 中的任意给定态射 $f\colon A \to B$ 都是自然的。

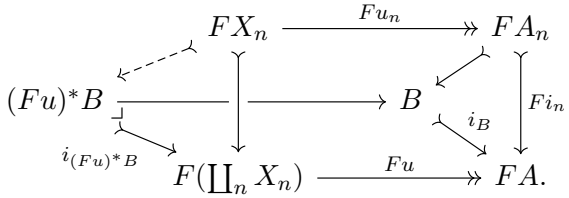
还需证明，若 $\mathcal{C}$ 另外具有正则可数积、有限稳定不交余积、可数稳定不交余积、有限稳定并或~可数稳定并，并且在每种情况下 F 都保留这些结构，那么 F也保留这些结构。

对于正则可数积：给出$\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \in$ **SAn**，为每个 n选择 $X_{A_n} \twoheadrightarrow A_n \rightarrowtail Y_{A_n}$；这就得到诱导映射 $\prod_n X_{A_n} \twoheadrightarrow \prod_n A_n \rightarrowtail \prod_n Y_{A_n}$，从而在其中得到一个图表

$$\begin{array}{ccccc} F\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n & \twoheadrightarrow & \widetilde{F}\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n & \rightarrowtail & F\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{n\in\mathbb{N}} FX_n & \twoheadrightarrow & \prod_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{F}A_n & \rightarrowtail & \prod_{n\in\mathbb{N}} FY_n \end{array}$$

在 $\mathcal{C}$ 中，我们利用 $\mathcal{C}$ 的正则可数完备性，得出左下水平态射是一个正则满态射。由于两个外侧的垂直态射都是同构，中央的垂直态射也同样是同构，正如所需。对于稳定不交余积的论证类似，只需利用正则满射和单态射在任意稳定不交余积下都封闭这一事实。

最后，我们考虑稳定并；有限情形和可数情形中的论证是相同的。设 $i_n\colon A_n \rightarrowtail A$ 是 **SAn** 中单态射的一个（有限或可数）族，其在 Sub(A) 中的并为 A——也就是说，A 被解析子集覆盖。我们必须证明，族 $Fi_n\colon FA_n \rightarrowtail FA$ 同样具有并 FA。选取满射 $u_n\colon X_n \twoheadrightarrow A_n$，使得 $X_n \in \mathbf{SBor}$，从而得到一个满射 $u = [i_n u_n]_n\colon \coprod_n X_n \twoheadrightarrow A$。现在设有某个 $i_B\colon B \rightarrowtail FA$，每个 FA_n 都经由它分解，并对每个 n 考虑如下图表，其中我们沿着 Fu 将 B 拉回：



于是，由后者的泛性质以及所显示方形的交换性，每个 FX_n 都经由 $(Fu)^*B$ 分解，如图所示。由于 $\coprod_n X_n$ 是 X_n 的并，根据假设，$FX_n \rightarrowtail F(\coprod_n X_n)$ 也具有同样性质；因此，既然这些都经由 $(Fu)^*B$ 分解，我们便得到 $i_{(Fu)^*B}$ 是一个同构，如图所示。由于 Fu 是正则满态射，因此 i_B 也是一个同构，正如所要求的。

References

[AGV72] M. Artin、A. Grothendieck 和 J. L. Verdier 编。拓扑斯理论与 ´*étale* 上同调 ´ 的图式 ´。第 *1* 卷：拓扑斯 ´理论。《数学讲义》，第 269 卷。S´几何´代数´研讨会´，Bois-Marie，1963–1964（SGA 4），由 M. Artin、A. Grothendieck 和 J. L. Verdier 主持。与 N. Bourbaki、P. Deligne 及 B. Saint-Donat 合作。Springer-Verlag，柏林—纽约，1972 年，第 xix+525 页。[Ber22] Anton Bernshteyn。“描述组合学与分布式算法”。载于：《美国数学会通告》69.9（2022），第 1496–1507 页。[Ber23] Anton Bernshteyn。“分布式算法、Lovász 局部引理与描述组合学”。载于：《发明数学》233.2（2023），第 495–542 页。URL：https://doi.org/10.1007/s00222-023-01188-3。[Che23] Ruiyuan Chen。“标准博雷尔空间的一个普适刻画”。载于：《符号逻辑杂志》88.2（2023），第 510–539 页。URL：https://doi.org/10.1017/jsl. 2022.85。[FO12] Gilda Ferreira 和 Paulo Oliva。“论各种否定平移之间的关系”。载于：逻辑、构造、计算。第 3 卷。Ontos 数学逻辑丛书。Ontos 出版社，霍伊森施塔姆，2012 年，第 227–258 页。

[HKL90] L. A. Harrington、A. S. Kechris 和 A. Louveau。“Borel 等价关系的 Glimm-Effros 二分定理”。载于：《美国数学会杂志》3.4（1990），第 903–928 页。URL：https://doi.org/10.2307/1990906。[Hou25] Edward Hou。关于“是否存在一个 Lebesgue 不可测集 E，使得$\mathbb{R}$ $E \cap A$ 对每个 Borel 零测集 A 都是 Borel 零测集？”的回答。2025 年。URL：https://mathoverflow.net/q/487943。[Hyl82] J. M. E. Hyland。“有效拓扑斯”。载于：《L.E.J. Brouwer 百年纪念研讨会》（诺德韦克豪特，1981）。第 110 卷。《逻辑与数学基础研究》。北荷兰出版社，阿姆斯特丹—纽约，1982 年，第 165–216 页。[Jec73] Thomas J. Jech。《选择公理》。《逻辑与数学基础研究》，第 75 卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—伦敦；American Elsevier Publishing Co., Inc.，纽约，1973 年，第 xi+202 页。[Joh02] Peter T. Johnstone。《大象素描：拓扑斯理论纲要》。第 1、2 卷。第 43、44 卷。《牛津逻辑指南丛书》。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，牛津，2002 年，第 xxii+468+621+71 页。[Joh77] P. T. Johnstone。《拓扑斯理论》。《伦敦数学会专著》，第 10 卷。Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich，出版社]„ 伦敦—纽约，1977 年，第 xxiii+367 页。[Joh 79] P. T. Johnstone。“论一个拓扑拓扑斯”。载于：《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）38.2（1979），第 237–271 页。URL：https://doi.org/10.1112/plms/s3-38.2.237。[Kec95] Alexander S. Kechris。《经典描述集合论》。第 156 卷。《数学研究生教材》。Springer-Verlag，纽约，1995 年，第 xviii+402 页。URL：https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4190-4。[KST99] A. S. Kechris、S. Solecki 和 S. Todorcevic。“Borel 色数”。载于：《数学进展》141.1（1999），第 1–44 页。URL：https://doi.org/10.1006/aima. 1998.1771。[Kun80] Kenneth Kunen。《集合论》。第 102 卷。《逻辑与数学基础研究》。独立性证明导论。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约，1980 年，第 xvi+313 页。[Kur51] Sigekatu Kuroda。“形式主义逻辑的直觉主义研究”。载于：《名古屋数学杂志》2（1951），第 35–47 页。URL：http://projecteuclid.org. libproxy.berkeley.edu/euclid.nmj/1118764737。[Lac99] Stephen Lack。“关于正则范畴的精确完备化及其无穷推广的一点注记”。载于：《范畴论及其应用》5（1999），第 3 号，第 70–80 页。[LS86] J. Lambek 和 P. J. Scott。《高阶范畴逻辑导论》。第 7 卷。《剑桥高等数学研究》。剑桥大学出版社，剑桥，1986 年，第 x+293 页。[Mac98] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。第二版。第 5 卷。《数学研究生教材》。Springer-Verlag，纽约，1998 年，第 xii+314 页。[Mak13] M. Makkai。《基于带依赖类型的一阶逻辑的抽象集合理论》。2013 年。URL：https : / / www . math . mcgill . ca / makkai / Various / MateFest2013.pdf。

[Mak96] M. Makkai。“在一般范畴论中避免选择公理”。载于：*J.Pure Appl. Algebra*108.2（1996），第 109–173 页。 URL：https :/ /doi .org / 10. 1016/0022-4049(95)00029-1。[Mar16] Andrew S. Marks。“一种处理 Borel组合学的决定性方法”。英文。载于：*J. Am. Math. Soc.*29.2（2016），第 579–600 页。[MM94] Saunders Mac Lane 和 Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层》。Universi-text。托pos理论的第一本入门著作，1992 年版本的修订重印本。Springer-Verlag，纽约，1994 年，第 xii+629 页。[MR77] Michael Makkai 和 Gonzalo E. Reyes。“一阶范畴逻辑”。载于：《数学讲义》，第 611 卷（1977）。拓扑斯理论及相关范畴中的模型论方法，第 viii+301 页。[MR91] Ieke Moerdijk 和 Gonzalo E. Reyes。《光滑无穷小分析的模型》。Springer-Verlag，纽约，1991 年，第 x+399 页。 URL：https://doi.org/10.1007/ 978-1-4757-4143-8。[Nas24] Sherif Wagdy Nashaat。“直觉主义集合论的 Powell 值模型”。论文（博士）——麦吉尔大学（加拿大）。博士论文。2024 年，第 152 页。 URL：https : / / www . proquest . com / dissertations - theses / powell - valued - models-intuitionistic-set-theory/docview/3167808555/se-2。[Rob12] David Michael Roberts。“内部范畴、ana 函子与局部化”。载于：*Theory Appl. Categ.* 26（2012），第 29 号，788–829。[Sha21] Assaf Shani。“博雷尔可约性与对称模型”。载于：*Trans. Amer. Math.Soc.*374.1（2021），第 453–485 页。 URL：https://doi.org/10.1090/tran/8250。[Van 81] Donovan H. Van Osdol。“一个博雷尔拓扑斯”。载于：*Cahiers Topologie G´eom. Diff´erentiell*

e

22.2（1981）。第三届范畴学术讨论会，第三部分（亚眠，1980），第 123–128 页。