arXiv:2611.31827v1 [math.GT] 24 Nov 2026

谱求和与牛顿纽结不变量的临界渐近

HONGHUAI FANG

摘要。纽结的对称着色不变量定义在整数颜色上，而牛顿插值将其汇集为连续颜色变量的形式函数。我们通过 q-Borel–Laplace 求和对其求和，并利用所得解析函数研究这些不变量在 $q \to 1$ 时的性质。对于每个纽结和每个秩，临界求和层级都是由着色不变量的增长决定的有理数；当其为正时，临界博雷尔变换在整个复平面上都是亚纯的。当牛顿系数具有解析尾项时，博雷尔变换由沿等比数列排列的简单极点的收敛和构成；对于此类求和，拉普拉斯和的斯托克斯跳跃决定每一个极点及其留数。对于包含八字结的扭结无限族，一个正的马尔可夫核给出了牛顿级数余项的精确公式。借助该公式，我们证明，在亚历山大多项式的一个根附近，缩放后的解析插值一致收敛于高斯型和 Scorer型轮廓，其中缩放颜色可以取任意复数值；同时确定秩在这些极限发生变化之前所能增长的速度。最后，对 $\log q$ 进行解析延拓会产生对数单值化，其系数是同一组 Borel 留数的一个收敛配对，而这些留数也决定了斯托克斯跳跃。对于八字结，在每个秩上，该系数的渐近行为都由双曲体积所支配。

目录

1. 引言 1 2. 牛顿插值与临界 Borel 级 10 3. 谱求和与斯托克斯数据 23 4. 扭结与正谱核 30 5. Alexander 根处的临界极限 37 6. 秩增长下的一致临界渐近 48 7. 对数单值化与几何周期 53 附录 A. 边界值与次临界增长 62 附录 B. 外围特征与秩二挠率 65 附录 C. 节点除子的模形式 66 AI 使用声明 67 参考文献 67

1. 引言

纽结的着色量子不变量由整数颜色索引，但其许多最有趣的特征出现在颜色与量子参数共同变化的极限中：平凡参数 [14, 13],附近的 Melvin–Morton–Rozansky 展开，以及由双曲几何支配的指数增长，其背后的复苏结构为 [30, 9, 10]。在这类极限中，人们希望将颜色视为连续变量，

2020 数学主题分类。主要分类：33D15、39A13、57K14；次要分类：30D15、41A60。关键词和短语。着色HOMFLY–PT多项式、牛顿插值、谱求和、斯托克斯数据、临界渐近、增长秩、几何周期。

为此，需要一个关于颜色的解析函数，使其在整数颜色处取给定值。这样的函数远非唯一，因为可以在其中加上任意一个在整数颜色处为零的整函数。牛顿插值给出了一个自然的候选函数，但它只是一个形式级数，而且通常会发散。本文讨论如何对这个级数求和，以及由此得到的函数能告诉我们关于这些不变量的什么信息。

主要结果如下。对于固定秩下的任意纽结，我们确定了 q-博雷尔求和的临界层级，并证明临界博雷尔变换在整个复平面上都是亚纯的（定理 A）。对于具有解析尾项的牛顿系数，我们通过收敛的预解式展开描述博雷尔奇点、拉普拉斯和及其斯托克斯跳跃，并证明该跳跃能够确定博雷尔变换的极点与留数（定理 B）。对于包含八字结的一个无限扭结族，正核给出了牛顿级数余项的精确公式。借助该公式，我们证明了亚历山大多项式的根处的高斯极限和 Scorer 型极限（定理 C），并确定这些极限随秩增长而发生的变化（定理 D）。最后，我们将求和结果延拓为 $\log q$ 的函数，并证明所得对数单值化的系数是 Borel 留数的收敛配对；对于八字结，其渐近行为由双曲体积控制（定理 E）。

1.1. 牛顿插值及其求和。 设 $J_r^{(n)}(K;\,q)$ 为纽结 $K \subset S^3$ 以 $\mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^n)$ 着色后的约化零框架量子不变量，即将对称着色 HOMFLY–PT 多项式在 $A = q^n$ 处特化所得，并令 $Q = q^2$。我们在以下节点处进行插值

$$x_r^{(n)} = q^{n+2r} + q^{-n-2r}, \qquad r = 0, 1, 2, \dots,$$

在牛顿基 $B_k^{(n)}(X) = \prod_{j=0}^{k-1}(X - x_j^{(n)})$ 中。牛顿系数 $c_{K,n,k}$ 由以下三角方程组确定

$$J_r^{(n)}(K;q) = \sum_{k=0}^{r} c_{K,n,k} B_k^{(n)}(x_r^{(n)}), \qquad r \geq 0,$$

而形式级数

$$F_{K,n}(X) = \sum_{k \geq 0} c_{K,n,k} B_k^{(n)}(X)$$

在 $X = x_r^{(n)}$ 处取值为 $J_r^{(n)}(K;\,q)$，因为所有含 $k > r$ 的项在该处均为零。根据 [6]，的分圆展开，这些系数是关于 q 的劳朗多项式，而 $F_{K,n}$ 是 [5] 的牛顿完备化中的一个元素。我们称 X 为颜色变量，并将这些节点称为量子颜色。

在量子颜色 $F_{K,n}$ 是有限和；在其他颜色处，它是一个无穷级数，其各项通常增长极快。事实上，该基的因子可分解为 q-波赫哈默符号，而对于任何不是节点的颜色 X

$$B_k^{(n)}(X) \sim (-1)^k q^{-k^2-(n-1)k} E_n(X), \qquad E_n(X) = \prod_{j \geq 0} (1 - q^{n+2j}X + q^{2n+4j}) \tag{1.1}$$

如 $k \to \infty$ (定理 2.4)。整函数 E_n 的单零点恰好位于节点处。因此，级数只有在 $c_{K,n,k} q^{-k^2-(n-1)}$ $k \to 0$ 时，才能在非节点颜色处收敛；对于下文研究的扭结，其各项的大小为 q^{-k^2}，至多相差指数因子。

为了对其求和，我们将颜色与各项的大小分开。引入辅助变量 z，令

$$\widehat{F}_{K,n}(X, z) = \sum_{k \geq 0} c_{K,n,k} B_k^{(n)}(X) z^k.$$

对于 $0 < q < 1$，该级数的系数受 k 的二次函数的指数函数界定（推论 2.10），这正是 q-Borel–Laplace 求和的自然框架

[3, 28, 4]。我们使用 Kashaev、Mangazeev 和 Mariño 的矩与核 [20]：对于$0 < p < 1$,

$$M_k(p) = (p;p)_k p^{-k(k+1)/2}, \qquad \mathcal{B}_p\Big(\sum_k a_k z^k\Big)(\xi) = \sum_k \frac{a_k}{M_k(p)}\,\xi^k,$$

$$\mathcal{L}_p g(z) = \frac{1}{-\log p}\int_0^\infty \frac{g(zt)}{(-t;p)_\infty}\,dt.$$

由于

$$\frac{1}{-\log p}\int_0^\infty \frac{t^k\,dt}{(-t;p)_\infty} = M_k(p) \qquad (k \ge 0)$$

$\widehat{\ }$（定理 2.2），$\mathcal{L}_p\mathcal{B}_p$ 是 z上多项式的恒等映射。在节点$F_{K,\,n}$ 是 z中的一个多项式，而其在 $z = 1$ 处的和就是着色不变量。因此，只要该和在$z = 1$处有定义，它在该处的值就是颜色的一个函数，并且对着色不变量进行插值；在下文讨论的情形中，它是整函数。两个关于颜色均为整函数的插值相差 E_n 的一个整函数倍数（定理 3.9）。

现在出现了三个问题。应当在哪个基数 p 处进行求和，以及博雷尔变换在那里呈现何种形式？博雷尔变换具有极点，而拉普拉斯和会沿穿过这些极点的射线发生跳跃；这些斯托克斯跳跃记录了什么？解析插值在 $q \to 1$时表现如何，尤其是在经典极限奇异之处，以及解析延拓到 q的复数值之后又如何？对于每个纽结，我们回答第一个问题；对于具有解析尾项的牛顿系数，我们回答第二个问题；对于第1.4节中的扭结，我们回答第三个问题。

1.2. 任意纽结的临界层级。 固定 $0 < q < 1$ 和 $n \ge 2$，并记 $h = -\log Q$。不变量和牛顿级数的二次增长由下式衡量

$$\delta_{K,n} = \max\left\{0, \limsup_{r\to\infty} \frac{2\log|J_r^{(n)}(K;q)|}{hr^2}\right\},$$

$$\beta_{K,n} = \max\left\{0, \limsup_{k\to\infty} \frac{2\log|c_{K,n,k}B_k^{(n)}(X)|}{hk^2}\right\},$$

其中 X 是任意一个非节点的颜色，且 $\log 0 = -\infty$；由 (1.1) 可知，$\beta_{K,\,n}$ 与$\sim X$无关。若 $\beta_{K,\,n} > 0$，则 $F_{K,\,n}$ 的 Q^s-博雷尔变换在 $s < \beta_{K,\,n}$时的收敛半径为零，而在 $s > \beta_{K,\,n}$时是整函数。因此，$Q^{\beta_{K,\,n}}$ 是博雷尔变换可能具有正的有限收敛半径的唯一基数，我们称$\beta_{K,\,n}$ 为临界层级。

定理 A。 设 K 是一个纽结，且 $n \ge 2$。则

$$\beta_{K,n} = \max\{\delta_{K,n} - 1, 0\},$$

且$\beta_{K,\,n}$ 是有理数。牛顿项在临界指数本身也满足该界：存在$R > 0$，使得对任意颜色紧集 $\mathcal{K}$,

$$\sup_{X\in\mathcal{K}} |c_{K,n,k}B_k^{(n)}(X)| \le C_{\mathcal{K}} R^k Q^{-\beta_{K,n}k^2/2}.$$

如果 $\beta_{K,\,n} > 0$，临界 $Q^{\beta_{K,\,n}}$-博雷尔变换具有正的有限收敛半径；对于所有不是节点的颜色，该收敛半径都相同；并且它可亚纯地延拓到整个复平面，其极点的阶有界，且位于有限个等比数列上。在其收敛圆周上的每个极点处，主部是 $E_n(X)/E_n(0)$ </style>在 $X = 0$ 处主部的倍数。

恒等式 $\beta = \max\{\delta - 1, 0\}$ 对任意复数节点值都成立（定理 2.6），并可由一个以节点值表示牛顿系数的显式公式推出。这个平移量为一源于所用的基：在对角线上，$B_r^{(n)}(x_r^{(n)})$的二次阶为二，比其他颜色处的 $B_r^{(n)}(X)$多一阶。然而，对于任意节点值，有限的二次阶并不一定能保证博雷尔变换在临界基数处具有正半径。对于纽结，这一性质由 q-全纯性 [12, 15]保证：牛顿系数再次满足一个线性 q差分方程

，而这类方程的整函数解所满足的 Ramis 增长定理 [27] 表明，临界层级是有理数，并且该界在临界指数处本身也成立（定理 2.13）。同一个差分方程还给出了亚纯延拓（定理 2.11）。主部中的因子$E_n(X)$恰好在节点处消失，此时博雷尔变换是多项式（命题 2.14）。更一般地，基的因式分解将延拓的Borel变换从颜色 $X=0$ 传递到所有颜色，而可能的极点集合与颜色无关（命题 2.15）。

约化不变量在连通和下具有乘法性，因此连通幂的节点阶为 $\delta_{\#^M K,\ n} = M\delta_{K,\ n}$，定理 A 给出 $\beta_{\#^M K,\ n} = \max\{M\delta_{K,\ n}-1,\ \ 0\}$（推论 2.19）。例如 $\beta_{\#^M 4_1,\ n} = 2M-1$，因此每个正奇整数都是某个纽结的临界层级。定理 A 只涉及博雷尔变换。要在临界层级处取拉普拉斯和，还需要控制博雷尔变换沿积分射线的增长。我们给出一个基于差分方程的判据（命题 2.17），只需在单一颜色 $X=0$ 处检验（推论 2.16）；仅有全纯性并不能提供这种控制（注 2.18）。

1.3. 谱求和与斯托克斯数据。对于下文详细讨论的纽结，还存在更多结构：它们的牛顿系数具有解析尾项。这意味着，从某个指标开始，

$$c_k = \sum_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu^k P_\nu(k) f_\nu(Q^k),$$

其中 $\lambda_\nu \neq 0$， P_ν 是多项式，而 f_ν 在零点附近全纯。这个类很自然，因为只需一行计算即可看出这一点。若 $c_k = \alpha^{-k} b(Q^k)$ 满足 $b(t) = \sum_m b_m t^m$，那么展开 $b(Q^k)$，并对 k 中的几何级数求和，得到

$$\sum_{k\geq 0} \alpha^{-k} b(Q^k)\, \xi^k = \sum_{m\geq 0} \frac{b_m}{1 - Q^m \xi/\alpha} =: (\mathfrak{R}_\alpha b)(\xi).$$

因此，符号 b的泰勒系数变成了留数：预解式 $\mathfrak{R}_\alpha b$ 在点 αQ^{-m} 处有简单极点，其留数为 $-\alpha Q^{-m} b_m$。基产生的 q-Pochhammer 因子本身是 Q^k的解析函数。因此，除去有限个初始项后，带有解析尾项的牛顿级数的博雷尔变换是预解式及其欧拉导数的有限线性组合，这些导数对应于多项式 P_ν（定理 3.8）。

对于预解式，求和与斯托克斯数据都是显式的。设 $\mathscr{W}_R$, $R>1$ 是幂级数 $b(t) = \sum_m b_m t^m$ 所成的 Banach代数，满足 $\sum_m |b_m| R^m < \infty$，并令 $h_p = -\log p$ 和$w_p(t) = 1/(-t;p)_\infty$。

定理 B。 设 $0<p<1$、 $\alpha \neq 0$、 $R>1$ 和 $b \in \mathscr{W}_R$，并令 $H = \mathfrak{R}_\alpha b$。

(i) 拉普拉斯和 $L_p H(z)$ 在避开射线 $\alpha\mathbb{R}_{>0}$ 的 $z \neq 0$ 上全纯。在避开该射线的闭扇区上，它具有渐近展开 $\sum_k \alpha^{-k} b(Q^k) M_k(p) z^k$，而截取 N 项后的余项至多为 $C\, M_N(p) |z/\alpha|^N$。

(ii) $L_p H$ 在该射线上存在两个侧向极限。在 $z = e^{i\arg\alpha} r$ 处，从辐角递减一侧趋近的极限减去从辐角递增一侧趋近的极限，等于

$$\Delta_b(z) = -\frac{2\pi i}{h_p} \sum_{m\geq 0} b_m\, \tau_m w_p(\tau_m), \qquad \tau_m = \frac{|\alpha| Q^{-m}}{r}.$$

(iii) 跳跃决定符号。若 b_{m_0} 是 b 的第一个非零系数，则当 $r \downarrow 0$ 时， $\Delta_b(z) \sim -(2\pi i/h_p)\, b_{m_0} \tau_{m_0} w_p(\tau_{m_0})$，并减去这一项后重复此过程，即可恢复每一个 b_m。

定理 B 汇集了定理 3.1、3.2 和 3.5，而命题 3.4 将第 (i) 和 (ii) 部分扩展到了欧拉导数。在预解式类中，斯托克斯跳跃作为奇异射线上的模数函数，不会丢失任何信息：它决定了博雷尔变换的每一个极点和留数。跳跃无法识别的是添加到博雷尔变换中的多项式，

也就是说，有限个系数的改变。该演算同样具有乘法性。如果 $g \in \mathscr{W}_R$且 T 是伸缩算子 (Tf)(ξ) $= f(Q\xi)$, 那么 g(T)$\mathfrak{R}_\alpha b = \mathfrak{R}_\alpha(gb)$，而同一个算子 g(T) 作用于 z 的函数时，会变换拉普拉斯和与跳跃。

对于带有解析尾项的牛顿级数，定理 3.8 将其转化为关于颜色的陈述。和式 $S(X,\ z)$ 是关于 X 的整函数，并且在每个节点处都等于终止的牛顿多项式；它在每条奇异射线上都有侧向极限，且关于颜色局部一致；其跳跃是留数的正规收敛和。

解析尾项与 Askey–Wilson 演算[18]的差商相容。式 (3.12) 的 q-差商 $\mathcal{D}_q$ 对节点参数为 A 的牛顿基的作用为 $\mathcal{D}_q B_k^{(A)} = [k]_q B_{k-1}^{(qA)}$；它使指标降低，并且由于 $A = q^n$，使秩增加一。因此，将解析尾项的秩提高 d，相当于对其和式作用 $z^{-d}\mathcal{D}_q^d/[d]_q!$ (定理 3.12)。对于八字结，牛顿系数是 q-二项系数

$$c_{4_1,n,k} = \frac{[k+n-2]_q!}{[k]_q!\,[n-2]_q!},$$

它们正是以这种方式由秩二的常数序列得到的。因此，所有秩的八字形求和都由秩二的求和生成：

$$S_n(X,z) = \frac{z^{-(n-2)}}{[n-2]_q!}\,\mathcal{D}_q^{n-2} S_2(X,z), \tag{1.2}$$

侧向和及其跳跃也满足相同的恒等式（定理 3.13）。我们将 (1.2) 称为秩阶梯。

1.4. 扭结与正核。 令 K_p 为 Kawagoe [21], 约定下的扭结，并令 $L_m = K_{\underline{-m}}$ 表示 $m \geq 1$; 因此 $L_1 = 4_1$ 且 $L_2 = 6_1$。牛顿系数可分解为

$$c_{L_m,n,k} = D_{n,k}\, g_{m,k}^{(n)}, \qquad D_{n,k} = \frac{[k+n-2]_q!}{[k]_q!\,[n-2]_q!},$$

其中 $D_{n,k}$ 是八字结系数，$g_1^{(n)}{}_{,k} = 1$，并且

$$g_{m,k}^{(n)} = \sum_{j=0}^{k} Q^{j(j+n-1)} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_Q g_{m-1,j}^{(n)} \qquad (m \geq 2)$$

（命题 4.1）。因子 $g_m^{(n)}{}_{,k}$ 具有简单的组合意义。它是对词 $w = (w_1, \ldots, w_k) \in \{1, \ldots, m\}^k$ 的求和，

$$g_{m,k}^{(n)} = \sum_{w} Q^{E_{m,n}(w)}, \qquad E_{m,n}(w) = \operatorname{inv}(w) + \sum_{s=1}^{m-1} N_s(w)\big(N_s(w) + n - 1\big),$$

其中 inv(w) 是 w 的逆序数，而 N_s(w) 是 w 中不大于 s 的字母个数（引理 5.1）。特别地，$1 \leq g_m^{(n)}{}_{,k} \leq m^k$。

这些系数的两种解析性质推动了渐近分析。首先，$g_m^{(n)}{}_{,\,k}$ 是整函数在 Q^k 处的取值（引理 4.2），因此 L_m 的牛顿级数具有解析尾项，前述结果均适用。其基数为 Q 的博雷尔变换，记作 $H_{m,\,n,\,h}(X,\ \xi)$，可能的极点仅位于 $\xi = -Q^{n-2-j}$、$j \geq 0$，且均为单极点；其在 $z = 1$ 处的和，

$$S_{m,n,h}(X) = \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{H_{m,n,h}(X,t)}{(-t;Q)_\infty}\,dt, \qquad Q = e^{-h},$$

是关于颜色的整函数，对于所有 r，$S_{m,\,n,\,h}(x_r^{(n)}) = J_r^{(n)}(L_m;\ q)$（定理 4.6）。其次，这些系数具有正谱表示。记 $g_{m,\,k}(A;Q)$ 为

由相同的递推关系定义、但将 Q^n 替换为 A^2 的系数，因此 $g_{m,\,k}^{(n)} = g_{m,\,k}(q^n;Q)$。对于独立的 $0<a,\ Q<1$,

$$(a;Q)_k\, g_{m,k}(\sqrt{a};Q) = \sum_{\ell\ge 0} p_{m,\ell}^{(a)} Q^{k\ell}, \qquad p_{m,\ell}^{(a)} \ge 0, \quad \sum_{\ell} p_{m,\ell}^{(a)} = 1$$

（命题 4.4）。概率分布 $p_m^{(a)}$由一个显式的马尔可夫核生成，该核与 [2], 的 q-beta-二项分布权重互为对偶；这些权重是通过 Heine 变换 [16, 25]的一个合流形式得到的。

在 $a = Q^n$ 这一表示中，结合一个权重全变差有界的秩因子，可以精确给出截断牛顿级数所产生的误差公式（定理 4.6）。对于 $K \ge 1$ 和 $|X-2| < 2\cosh((K+n/2)h) - 2$, $S_{m,\,n,h}(X)$ 与其 $K-1$ 次牛顿多项式之差，等于第 K 个牛顿项乘以下列平均值的线性组合

$$\mathbb{E}\,\frac{1}{1+Q^{2-n+j}\,T_K}, \qquad j=0,1,2,\dots,$$

其中， T_K是一个密度与 $t^K/(-t;\,Q)_\infty$成正比的正随机变量。该线性组合的系数之和为一，且其全变差有显式上界。每个平均值都介于零与一之间，因此余项有界于下一项牛顿项乘以显式因子。在秩二情形下，对于满足 $0 \le X-2 < 2\cosh((K+1)h) - 2$的实颜色，所有系数均非负，且归一化余项是某个概率测度的 Stieltjes 变换。这些界关于 h一致，因此该公式将解析函数$S_{m,n,h}$ 化为有限牛顿和，并在下文使用的所有 h 和 X 范围内提供显式控制。

扭结因子也作用于斯托克斯数据。 L_m 的博雷尔变换与八字结的博雷尔变换相同，只是其符号乘上了一个插值 $g_{m\,k}^{(n)}$的整函数；这种影响在第一个极点处便已显现：对于 $1 \le i < j$, L_i 和 L_j 的跳跃在模数较小时相差一个明确的非零首项（命题 4.7）。特别地，对于每个固定秩以及每个非节点颜色，斯托克斯跳跃都能区分所有纽结 L_m。

1.5. 亚历山大根处的临界极限。 现在令 $q \to 1$，将 $Q = e^{-h}$ 和 $q = e^{-h/2}$写成 $h \to 0^+$。对于每个固定的 k,

$$D_{n,k} \to \binom{k+n-2}{n-2}, \qquad g_{m,k}^{(n)} \to m^k, \qquad B_k^{(n)}(X) \to (X-2)^k,$$

因此，逐项来看， L_m 的牛顿级数趋于

$$\sum_{k\ge 0} \binom{k+n-2}{n-2} \big[m(X-2)\big]^k = \big[1-m(X-2)\big]^{-(n-1)}.$$

在迹坐标 $X = t + t^{-1}$中，函数 $\Delta_m(X) = 1 - m(X-2)$是 L_m的亚历山大多项式，且规范化为在 $t=1$处取值为一。在秩二情形下，该极限是 Melvin–Morton–Rozansky 展开 [14, 13] 中出现的逆亚历山大多项式。几何级数仅在 $|m(X-2)| < 1$时收敛，其和在该根处发散

$$X_m = 2 + \frac{1}{m}.$$

在 X_m 附近取代它的是什么，取决于在极限中保留下来的第一个衰减因子；这里有两种不同的机制。

对于 $m \ge 2$，截断来自扭曲系数。在词模型中， $g_{m\,,\,k}^{(n)}/m^k$ 是对均匀随机词的$e^{-hE_{m,\,n}(w)}$ 均值，而能量集中在其均值 $\alpha_m k^2 + O(k)$ 附近，其中

$$\alpha_m = \frac{(m-1)(4m+1)}{12m}.$$

因此 $g_m^{(n)}{}_{,\,k}/m^k \approx e^{-\alpha_m h k^2}$，在 k 处出现阶为 $h^{-1/2}$的高斯截断。对于八字结，扭曲系数恒等于一，因此首次衰减反而来自牛顿乘积。在根 $X_1 = 3$处，

$$\log B_k^{(n)}(3) = \sum_{j<k} \log\bigl(1 - \tau((j+n/2)h)\bigr) \approx -\frac{h^2 k^3}{3}, \qquad \tau(v) = 2\cosh v - 2,$$

在 k处采用阶数为 $h^{-2/3}$ 的三次截断。在窗口 $X = X_m + \sqrt{h}\,s$和 $X = 3 + h^{2/3}s$ 内对 Newton 项求和，可得到整函数的黎曼和

$$\mathcal{G}_{m,n}(s) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^\infty t^{n-2} e^{mst - \alpha_m t^2}\,dt \qquad (m \ge 2), \tag{1.3}$$

$$\mathcal{H}_n(s) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^\infty t^{n-2} e^{st - t^3/3}\,dt. \tag{1.4}$$

定理 C. 固定 m 和 n。当 $h \to 0^+$ 时，

$$\begin{aligned} h^{(n-1)/2} S_{m,n,h}(X_m + \sqrt{h}\,s) &= \mathcal{G}_{m,n}(s) + O(\sqrt{h}), && m \ge 2,\\ h^{2(n-1)/3} S_{1,n,h}(3 + h^{2/3}s) &= \mathcal{H}_n(s) + O(h^{2/3}). \end{aligned}$$

当 s 取遍 $\mathbb{C}$ 的紧子集时，误差是一致的；对于任意固定阶数的 s 导数，同样的估计也成立。

为使启发式论证严谨，我们利用余项公式控制临界窗口之外的解析和，并利用词能量的集中估计控制扭曲系数（定理 5.5 和 5.9）。这些剖面是经典特殊函数。秩二时，$\mathcal{G}_{m,\,2}$是一个误差函数积分，而 $\mathcal{H}_2 = \pi\,\mathrm{Hi}$，其中 $\mathrm{Hi}(s) = \pi^{-1}\int_0^\infty e^{st-t^3/3}\,dt$ 是 Scorer 函数，是非齐次 Airy 方程 $y'' - sy = 1/\pi$的一个解。高秩 Scorer 剖面是秩二剖面的导数，

$$\mathcal{H}_n = \frac{\partial_s^{\,n-2}\mathcal{H}_2}{(n-2)!},$$

这就是秩阶梯 (1.2) 在临界缩放下的形式，此时 q-差商变为 ∂_s。我们利用这一点，从秩二推导出所有秩下的 Scorer 极限。将 s 旋转一个单位根，可将 $\mathcal{H}_n$ 与 Airy 函数的导数 (5.35) 联系起来；根据定理 C，对于复着色下的解析和，这一关系在渐近意义下同样成立。

对于量子颜色，该定理给出了不变量本身的增长律。令 $u_m = \operatorname{arccosh}(1 + 1/(2m))$ 和 $h_r = u_m/(r + n/2)$。那么节点 $x_r^{(n)}$ 恰好是 X_m，而定理 C 在 $s = 0$ 处给出，当 $r \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned} J_r^{(n)}(L_m; e^{-h_r/2}) &\sim \frac{\Gamma((n-1)/2)}{2(n-2)!\,\alpha_m^{(n-1)/2}}\, h_r^{-(n-1)/2} && (m \ge 2),\\ J_r^{(n)}(4_1; e^{-h_r/2}) &\sim \frac{3^{(n-4)/3}\,\Gamma((n-1)/3)}{(n-2)!}\, h_r^{-2(n-1)/3}, \end{aligned}$$

相对误差分别为 $O(h_r^{1/2})$ 和 $O(h_r^{2/3})$（推论 5.10）。在秩二的情形下，这些增长律关于表示的维数 $N = r + 1$ 分别为 $\sqrt{N}$ 阶和 $N^{2/3}$ 阶。对于秩二的八字结，Hikami 和 Murakami [17] 证明了在 Alexander 根处存在多项式增长。

在根下方的实轴上，逆 Alexander 表达式再次是很好的近似，而解析和则在这两种情形之间插值。令 $\eta = 1 - m(X-2)$，于是

tha经典极限为 $\eta^{-(n-1)}$。对于固定的 m和 n，在所示范围内一致成立 s,

$$\eta^{n-1}S_{m,n,h}(X) = 1 - \alpha_m n(n-1)\frac{h}{\eta^2} + O\Big(\frac{h}{\eta} + \frac{h^2}{\eta^4}\Big), \qquad \sqrt{h} \le \eta \le \tfrac{1}{8}, \quad m \ge 2,$$

$$\eta^{n-1}S_{1,n,h}(3-\eta) = 1 - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\,\frac{h^2}{\eta^3} + O\Big(\frac{h^2}{\eta^2} + \frac{h^4}{\eta^6}\Big), \qquad h^{2/3} \le \eta \le \tfrac{1}{8}$$

（定理 5.13）。剖面的左尾部具有完全相同的首个修正项（命题 5.12），因此在同时极限 $u \to \infty$, $\sqrt{h}\,u \to 0$ （分别为 $\underline{h}^{2/3}u \to 0$）下，解析和与$\mathcal{G}_{m,\,n}(-u)$ 及$\mathcal{H}_n(-u)$ 相匹配，其中也包含首个修正项（推论 5.14）。因此，在实轴上根的下方，逆 Alexander 表达式与临界剖面描述了重叠范围内的解析插值。

1.6. **增长秩**。 剖面取决于秩，自然会问秩在多大时定理 C 才会失效。在高斯情形中，临界窗口以 $k \approx \sqrt{n/(2\alpha_m h)}$ 为中心；当 hn^3 的量级为 1 时，固定秩下所作的近似便会失效。在 Scorer 情形中，窗口以 $k \approx (n/h^2)^{1/3}$ 为中心，相应的参数为 $h^{2/3}n^{5/3}$。在这些尺度下会出现一个修正因子。令

$$c_m = -\frac{(4m+1)(3m^3+3m^2+8m-2)}{180m^2(2\alpha_m)^{3/2}} < 0.$$

Theo回想 D. 令 $n = n(h) \to \infty$ 当 $h \to 0^{+}$时，其中 m 固定。若 $m \ge 2$ 且 $hn^3 = O(1)$，则 en

$$\frac{h^{(n-1)/2}S_{m,n,h}(X_m + \sqrt{h}\,s)}{\mathcal{G}_{m,n}(s)} - e^{c_m\sqrt{h}\,n^{3/2}} \longrightarrow 0.$$

若 $m = 1$ 且 $h^{2/3}n^{5/3} = O(1)$，则

$$\frac{h^{2(n-1)/3}S_{1,n,h}(3 + h^{2/3}s)}{\mathcal{H}_n(s)} - e^{-3h^{2/3}n^{5/3}/40} \longrightarrow 0.$$

对于 s 属于 $\mathbb{C}$ 的紧子集，收敛是一致的；在这样的集合上，只要 h 足够小，分母就没有零点。

修正项的指数分别汇集了临界窗口中心处阶为 $\sqrt{h}\,n^{3/2}$ 和 $h^{2/3}n^{5/3}$ 的各项。在高斯情形中，这些项来自秩因子$D_{n,k}$、均值词能量中依赖于秩的部分，以及能量方差，其首项系数为

$$V_m = \frac{(m-1)(m+1)(16m^2+1)}{180m^2},$$

还来自牛顿乘积的三次项；能量的高阶累积量由依赖图界 [8] 控制。在 Scorer 情形中，这些项仅来自秩因子和牛顿乘积（定理 6.1 和 6.2）。因此，只要高斯情形下 $n = o(h^{-1/3})$ 且 Scorer 情形下$n = o(h^{-2/5})$，固定秩极限仍然成立，其相对误差为 $o(1)$。这些范围是尖锐的：当 $n \sim ah^{-1/3}$ 且 $n \sim ah^{-2/5}$ 时， $s = 0$ 处的极限比值分别为 $e^{c_m a^{3/2}}$ 和 $e^{-3a^{5/3}/40}$。在两种情形下都有 $nh \to 0$，因此 $q^n \to 1$。

1.7. **对数单值化与几何周期**。 到目前为止 q 一直取实数。为了在变形参数上作解析延拓，我们使用坐标 $Y = Q^{n/2}X$，它消去了 Borel 变换中 Q 的半整数幂。对于满足 $0 < |Q| < 1$ 的复数 Q ，Borel 变换关于 Borel 变量是亚纯的，其可能的极点均为简单极点，且位于 $-Q^{n-2-j}$, $j \ge 0$ 处（引理 7.1）。正实轴不再适合作为拉普拉斯积分路径：对于适当的复数 $h = -$，在正实轴周围任意扇形区域内，都有 log Q 任意接近零，使得核 $1/(-t;Q)_\infty$ 在其上有一个极点（命题 7.3）。因此，我们改为沿对数螺线 $\{e^{hx} : x \in \mathbb{R}\}$积分；这条螺线避开了核和 Borel^变换的极点。由此得到和的全纯延拓 $S_{m,n}(h,Y)$，定义在半平面

$\mathrm{Re}\, h > 0$（定理 7.2）。该解析延拓关于 $Q = e^{-h}$并非单值的，但它对 $\log Q$ 的依赖非常简单。

定理 E。 存在函数 $A_{m,n}(Q,Y)$ 和 $B_{m,n}(Q,Y)$，它们关于 $0<|Q|<1$ 单值且全纯，并且关于 Y 是整函数，使得

$$\widehat{S}_{m,n}(h,Y) = \mathcal{A}_{m,n}(e^{-h},Y) + \frac{1}{h}\,\mathcal{B}_{m,n}(e^{-h},Y).$$

Th系数 $B_{m,n}$ 在节点 $Y = Q^{-r}+Q^{n+r}$, $r\ge 0$ 处消失。对于实数 $0<Q<1$ ，

$$\mathcal{B}_{m,n}(Q,Q^{n/2}X) = \sum_{\ell\ge 0} Q^{\ell}\rho_{\ell}R_{\ell}(X), \qquad \rho_{\ell} = \frac{(-1)^{\ell}Q^{\ell(\ell-1)/2}}{(Q;Q)_{\ell}(Q;Q)_{\infty}},$$

其中 $R_{\ell}(X)$ 是 $H_{m,n,h}(X,\xi)$ 在 $\xi=-Q^{-\ell}$ 处的留数，并且该级数在颜色的紧集上一致收敛。固定 Q 时，斯托克斯跳跃作为模数的函数，决定了所有这些留数，进而决定 $B_{m,n}$。

由于 $\mathcal{A}_{m,n}$ 和 $\mathcal{B}_{m,n}$ 关于 Q 是单值的，因此因子 $1/h$ 是多值性的唯一来源，而覆盖变换 $h\mapsto h+2\pi i$ 的作用为

$$\widehat{S}_{m,n}(h+2\pi i,Y) - \widehat{S}_{m,n}(h,Y) = -\frac{2\pi i}{h(h+2\pi i)}\,\mathcal{B}_{m,n}(e^{-h},Y)$$

（定理 7.4）。我们称 $\mathcal{B}_{m,n}$ 为对数单值化的系数。该分解源于将拉普拉斯被积函数乘以 log$(-t)$ 后应用留数定理：博雷尔变换在 $-Q^{-\ell}$, $\ell\ge 0$ 处的极点与核的极点重合，由此产生的二阶极点给出项 $\mathcal{B}_{m,n}/h$。在秩二情形下，对于八字结，这一分解由 Kashaev、Mangazeev 和 Mariño [20] 发现。定理 E 表明，问题中的两种不连续性——固定 Q 时辅助变量 z 上的斯托克斯跳跃，以及 h 上的对数单值化——是同一列博雷尔留数对应的两个不同线性泛函（命题 7.6）。

系数 $\mathcal{B}_{m,\,n}$ 也有一个闭合的围道积分表示，其中 $(w^{-1};Q)_{\infty}$ 的欧拉展开汇集了 Borel 留数（定理 7.7）。对于颜色为 $X=2$ 的八字结，被积函数是由 q-波赫哈默符号构成的比值，其经典相位有两个临界值 $\pm iV$，其中

$$V = 2\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Li}_2(e^{i\pi/3}) = \mathrm{Vol}(S^3\setminus 4_1)$$

是补空间的双曲体积。令 $d=n-2$，我们证明，在每个闭扇形 $\delta\le \arg h\le \pi/2-\delta$, $0<\delta<\pi/4$ 中，

$$\mathcal{B}_{1,n}(e^{-h},2e^{-nh/2}) = \frac{(-1)^d h^{1/2-2d}e^{iV/h-i\pi/4}}{d!\,\Gamma(n/2)^2\sqrt{2\pi}\,3^{1/4}}\left(1-\frac{i(27d^2+11)}{72\sqrt{3}}\,h+O(|h|^2)\right),$$

并且，下方扇形区域中的公式可通过复共轭得到（定理 7.8）。在秩二的情形，作用量和前两个系数与在 [20], 中计算得到的几何微扰周期一致，而首项因子是几何表示（附录 B）的经~~手~~~~乎~~线~~归~~一化的伴随挠率因子$\sqrt{-h/(4\pi\tau_{\mu})}$。在更高秩的情形，被积函数是在秩二情形的基础上乘以一个显式因子，而秩每增加二，其便乘以一个 Laurent 多项式（推论 7.9）。因此，几何作用量在每个秩上都相同；秩只改变 h 的幂次和系数。在正实轴上， $X=2$ 处的行为则截然不同：在那里，余项公式给出了 $S_{m\,的n,\ h}(2)$ 关于 h 的完整渐近展开（命题 7.10）。最后，节点除子 E_n（其整除 $\mathcal{B}_{m,\,n}$）可用对偶 nome $e^{-4\pi^2/h}$ 表示为一个简单形式（附录 C）。

1.8. **与早期工作的关系**。牛顿插值及其差商属于 Ismail 和 Stanton [18] 的 Askey–Wilson 演算。关于在秩上保持一致的彩色不变量的牛顿展开，以及这些展开所处的完备化空间，见 [6, 5]。对于扭结，圆分公式可追溯至 Masbaum [22]；我们将 Kawagoe 公式用于对称着色 HOMFLY–PT 多项式 [21]，并结合 [19, 23, 1] 的微分展开。扭结族的有限归一化权重是 q-beta-二项分布权重 [2, 附录 A。2], 而 Heine 变换 [16, 25]产生了余项公式所需的无限对偶核。

求和矩来自 Kashaev、Mangazeev 和 Mariño [20], ，他们的解析量子不变量是本研究的起点；关于一般的 q 求和和 q 差分方程的局部理论，参见 [3, 28, 4]。任意纽结的临界层级结合了显式的牛顿反演、彩色不变量的 q全纯性 [12, 15] 以及 Ramis 增长定理 [27]。

在渐近行为方面，Hikami 和 Murakami 证明了八字结不变量在 Alexander 根处、秩二时呈多项式增长 [17], ；Murakami 和 Tran 研究了超出这一范围后的实指数渐近 [24], ；Wong 和 Au 则在另一种复数域情形下研究了固定的偶数秩 [31]。平凡参数附近的逆 Alexander 极限属于解析的 Melvin–Morton–Rozansky 理论 [14, 13]。我们的临界估计关注的是解析插值，而非仅仅是不变量；这些估计适用于复着色，并给出了误差界以及针对增长秩的修正项。

在秩二情形下，8 字结求和的对数分解及其对应的几何级数见于 [20], ，而同一 q 级数也出现在 Garoufalidis 和 Kashaev 对态积分所作的因式分解中 [11]。Fantini 和 Wheeler 证明了非阿贝尔态积分（包括 4_1 和 5_2 [7] 的态积分）的可求和性及斯托克斯关系；更广泛的复苏背景见于 [30, 9, 10]。本文涉及两种不同的不连续性。固定 q 时，Stokes 现象发生在辅助变量 z 中；而对数单值化则是 $h = -\log Q$ 中的覆盖变换。定理 E 通过 Borel 留数将二者联系起来，而上述几何渐近行为涉及第二者的系数 $\mathcal{B}_{m,\,n}$。

1.9. **结构安排**。 第 2 节介绍求和方法，并证明关于任意结临界层级的结果。第 3 节阐述谱求和、斯托克斯跳跃与升秩。第 4 节讨论扭结：其牛顿系数、正核、余项公式以及斯托克斯数据的分离。第 5 节证明高斯极限和 Scorer 极限，并说明其与逆 Alexander 区域的匹配；第 6 节则令秩增长。第 7 节沿变形参数对这些和作解析延拓，并研究对数单值化及其几何渐近行为。附录 A 给出侧向和的边界值估计，附录 B 比较伴随挠率，附录 C 则介绍节点除子的模形式。

2. 牛顿插值与临界 Borel 级

本节讨论固定秩下的任意纽结。我们首先证明，牛顿级数的二次增长由其在量子颜色处的取值增长所决定（定理 2.6）。对于着色纽结不变量，q-全纯性意味着临界 Borel 级是有理数且能够达到，并且临界博雷尔变换可亚纯地解析延拓至整个复平面（定理 2.13）。牛顿基的因式分解将这一解析延拓及其增长估计从单个颜色 $X = 0$ 推广到所有颜色（命题 2.15）。

我们使用 $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$。对于 $0 < p < 1$ 令

$$(a;p)_k = \prod_{j=0}^{k-1}(1-ap^j), \qquad (a_1,\ldots,a_s;p)_k = \prod_{i=1}^{s}(a_i;p)_k,$$

其中空乘积等于 1。下标 ∞ 表示收敛的无穷乘积。我们使用高斯二项式系数

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_Q = \frac{(Q;Q)_k}{(Q;Q)_j (Q;Q)_{k-j}} \quad (0 \le j \le k),$$

对于其他 j，这些项均为零，而 $[s^j]f$ 表示幂级数 f 中 s^j 的系数 .

首先令 q 为不定元，并令 $R = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$。 [5] 的牛顿完备化定义为

$$x_j^{(n)} = q^{n+2j} + q^{-n-2j}, \quad B_k^{(n)}(X) = \prod_{j=0}^{k-1} (X - x_j^{(n)}), \quad \mathcal{C}_n = \varprojlim_k R[X]/(B_k^{(n)}). \tag{2.1}$$

复数域$_n$ 中的每个元素都有唯一展开式

$$F = \sum_{k \ge 0} c_k(q) B_k^{(n)}(X), \qquad c_k(q) \in R. \tag{2.2}$$

事实上， $B_k^{(n)}$ 是 k 次首一多项式，因此 $B_0^{(n)}, \dots, B_{k-1}^{(n)}$ 构成次数小于 k 的多项式的一个基。 $R[X]/(B_k^{(n)})$ 中的一个元素可由一个次数小于 k 的唯一余项表示，而该余项在这个基下具有唯一坐标。从 k 过渡到 $k+1$ 时，前 k 个坐标保持不变，从而得到（2.2）。在节点 $x_r^{(n)}$ 处，只有满足 $k \le r$ 的项非零。

对于解析结果，我们将系数特化并固定

$$0 < q < 1, \qquad Q = q^2, \qquad h_Q = -\log Q > 0. \tag{2.3}$$

将 q^n 替换为一个独立参数 $0 < A < 1$ 并记为 te

$$x_j^{(A)} = AQ^j + A^{-1}Q^{-j}, \qquad B_k^{(A)}(X) = \prod_{j=0}^{k-1} (X - x_j^{(A)}).$$

秩为n 的基对应于情形 $A = q^n$，未指定其他取值时，均默认取 A 的这一取值。我们记 $X(y)$ $= y + y^{-1}$ 并

$$E_A(X) = (Ay, A/y; Q)_\infty = \prod_{j \ge 0} (1 - AQ^j X + A^2 Q^{2j}), \qquad E_n = E_{q^n}.$$

诸如 E_A 这样的表达式在 $y \mapsto y^{-1}$ 下对称，因此只依赖于 X。对于纽结K，令 $J_r^{(n)}(K;\, q)$表示其由$\mathrm{Sym}^r(\mathbb{C}^n)$着色的约化零框架量子不变量。其牛顿系数由下式刻画

$$J_r^{(n)}(K;q) = \sum_{k=0}^{r} c_{K,n,k}(q) B_k^{(n)}(x_r^{(n)}).$$

[6] 的分圆展开给出相应的牛顿元$F_{K,n}$；下文的解析论证使用其特化后的系数。对于任意牛顿级数 F，其辅助级数为

$$\widehat{F}_n(X,z) = \sum_{k \ge 0} c_k(q) B_k^{(n)}(X) z^k. \tag{2.4}$$

$\widehat{\ }$对于独立节点参数 A，我们将同一构造记作 F_A 。当下文构造的和在 $z = 1$处有定义时，其在该处的值是一个关于颜色的函数，该颜色在各节点处取值为 F。我们将 $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2.1. **求和方法**。对于实数 $0<p<1$ 令

$$M_k(p)=(p;p)_k p^{-k(k+1)/2},\qquad w_p(t)=\frac{1}{(-t;p)_\infty},\qquad h_p=-\log p. \tag{2.5}$$

我们使用 [20, §2] 的变换：

$$\mathcal{B}_p\left(\sum a_k z^k\right)(\xi)=\sum_{k\ge 0}\frac{a_k}{M_k(p)}\xi^k,\qquad \mathcal{L}_p g(z)=\frac{1}{h_p}\int_0^\infty g(zt)w_p(t)\,dt, \tag{2.6}$$

并在积分存在时记作 $\mathcal{S}_p=\mathcal{L}_p\mathcal{B}_p$。

定义 2.1. 若辅助牛顿级数的博雷尔变换 $\mathcal{B}_pF$ 在零点附近收敛，且可延拓为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，并在该扇形区域上全纯，且在每个闭子扇区上至多呈多项式增长，则称该级数在一个开扇形区域上亚纯地 p-可求和$\widehat{\ }$。其$\widehat{\ }$和定义为：对于扇形区域内的 z，取$\mathcal{L}_p\mathcal{B}_pF$。

由以下核估计可知，在较弱的界 $|g(\xi)|\le C\exp\{\kappa\log^2|\xi|\}$ 且$\kappa<1/(2h_p)$下，拉普拉斯积分也收敛。

定理 2.2. 对于固定的 $0<p<1$,

$$\log(-t;p)_\infty=\frac{(\log t)^2}{2h_p}+\frac{\log t}{2}+O_p(1)\qquad (t\to+\infty), \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{h_p}\int_0^\infty t^k w_p(t)\,dt=M_k(p)\qquad (k\ge 0)。 \tag{2.8}$$

设 g 在零点附近以及从原点出发的一条射线上是全纯的，并假设在该射线上，当 $|\xi|\ge 1$ 时，有 $|g(\xi)|\le C\exp\{\kappa(\log|\xi|)^2\}$，且 $\kappa<1/(2h_p)$。那么，g沿该射线的拉普拉斯积分绝对收敛。特别地，多项式增长已足够。

证明。令 $x=\log t>0$和 $J=\lfloor x/h_p\rfloor$，从而 $\log(-t;p)_\infty=\sum_{j\ge0}\log(1+e^{x-h_pj})$。对于 $j\le J$，写作 $\log(1+e^{x-h_pj})=(x-h_pj)+\log(1+e^{-(x-h_pj)})$。第二项以及含有 $j>J$ 的项，都可由公比为 $e^{-h_p}=p$ 的几何级数控制，因此它们合起来是 $O_p(1)$。主要部分为 $\sum_{j=0}^{J}(x-h_pj)=x^2/(2h_p)+x/2+O_p(1)$，这就证明了 (2.7)。

函数方程 $w_p(pt)=(1+t)w_p(t)$ 给出 $tw_p(t)=w_p(pt)-w_p(t)$，因此

$$\int_0^\infty w_p(t)\,dt=\int_0^\infty\frac{w_p(pt)-w_p(t)}{t}\,dt=h_p.$$

为计算最后一个积分，在 $[\epsilon,R]$ 上积分，并在第一项中代入 $u=pt$。由此得到 $\int_{p\epsilon}^{\epsilon}w_p(u)\,du/u-\int_{pR}^{R}w_p(u)\,du/u$，当 $\epsilon\to0$和$R\to\infty$时，它趋于 $w_p(0)\log(1/p)=h_p$，因为 w_p 在零点连续，且在无穷远处衰减。根据 (2.7)，所有积分都收敛。若 $I_k=\int_0^\infty t^k w_p(t)\,dt$，同一个函数方程给出 $I_{k+1}=\int_0^\infty t^k(w_p(pt)-w_p(t))\,dt=(p^{-k-1}-1)I_k$，以及 $M_{k+1}(p)=(p^{-k-1}-1)M_k(p)$；由归纳法可证 (2.8)。最后，取 $t=e^x$，对 g 的界以及 (2.7) 表明，当 x较大时，被积函数至多为 $\exp\{(\kappa-1/(2h_p))x^2+O(x)\}$，而负的二次项系数使积分收敛。□

定义 2.3. 系数序列 (u_k) 的二次阶为

$$\beta(u)=\max\left\{0,\limsup_{k\to\infty}\frac{2\log|u_k|}{h_Qk^2}\right\},$$

满足 $\log 0=-\infty$；有限支撑序列的阶为零。若 $|u_k|=\exp(\frac12h_Q\beta k^2+O(k))$ 且满足 $\beta>0$，则基数为 $p=Q^\beta$ 处的博雷尔变换具有正且有限的收敛半径，而对于每个满足 $0<\beta'<\beta$ 的基数 $Q^{\beta'}$，收敛半径均为零。

2.2. **基底分解与解析增长**。牛顿基可分解为 q- 波赫哈默符号。这给出了其在节点之外的大小，以及基数为 Q处博雷尔变换的闭式。

定理 2.4。 对于 $0<A<1$，选取 $y\in\mathbb{C}^\times$ 使得 $X=y+y^{-1}$，并令 $a=Ay$, $b=A/y$。则

$$B_k^{(A)}(X)=(-1)^kA^{-k}Q^{-k(k-1)/2}(a,b;Q)_k, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{B}_Q\widehat{F}_A(X,\xi)=\sum_{k\ge0}c_k(q)\frac{(a,b;Q)_k}{(Q;Q)_k}\left(-\frac{Q}{A}\xi\right)^k. \tag{2.10}$$

将 y 替换为 y^{-1} 时，等式右边均保持不变。对于 $A=q^n$ 且 X 不是节点的情形，有

$$B_k^{(n)}(X)\sim(-1)^kq^{-k^2-(n-1)k}E_n(X),\qquad E_n(X)\neq0. \tag{2.11}$$

证明。 对于每个 j,

$$X-AQ^j-A^{-1}Q^{-j}=-A^{-1}Q^{-j}(1-AQ^jy)(1-AQ^j/y).$$

对 $0\le j<k$ 取乘积得到 (2.9)。除以矩后得到

$$\frac{B_k^{(A)}(X)}{M_k(Q)}=(-1)^k(Q/A)^k\frac{(a,b;Q)_k}{(Q;Q)_k},$$

这就证明了 (2.10)。当 $A=q^n$ 时，乘积 $(a,\ b;Q)_k$ 收敛到 $E_n(X)$，而 $(-1)^kA^{-k}Q^{-k(k-1)/2}=(-1)^kq^{-k^2-(n-1)k}$。极限 $E_n(X)$ 恰好在 a 或 b 对某个 $r\ge0$ 等于 Q^{-r} 时为零，即当 $X=x_r^{(n)}$ 时为零。□

因此，牛顿基在基数 Q 处的二次阶为 1（对每个非节点颜色而言），而秩 n 仅出现在指数的线性项中。

2.3. **从节点值恢复增长**。 在本小节中， $0<A,\ Q<1$ 固定，且 $(J_r)_{r\ge0}$ 是任意复数序列，其牛顿系数由$J_r=\sum_{k=0}^r c_kB_k^{(A)}(x_r^{(A)})$确定。我们证明，牛顿级数的二次阶由其节点值 J_r的二次阶决定。

引理 2.5. 对每个 $k\ge0$,

$$c_k=A^kQ^{k(k+1)/2}\sum_{r=0}^{k}\frac{(-1)^{k-r}J_rQ^{r(r-1)/2}(1-A^2Q^{2r})}{(Q;Q)_r(Q;Q)_{k-r}(A^2Q^r;Q)_{k+1}}. \tag{2.12}$$

对于每个紧致颜色集 K，都存在一个常数 $C_{\mathcal{K}}$，且与 k无关，使得

$$\sup_{X\in\mathcal{K}}|c_kB_k^{(A)}(X)|\le C_{\mathcal{K}}Q^k\sum_{r=0}^{k}|J_r|Q^{r(r-1)/2}. \tag{2.13}$$

证明。 系数 c_k 是次数为 k的拉格朗日插值多项式的首项系数，因此$c_k=\sum_{r=0}^k J_r/\prod_{j\neq r}(x_r-x_j)$。由于 $x_r-x_j=A^{-1}(Q^{-r}-Q^{-j})(1-A^2Q^{r+j})$，差的乘积为

$$\prod_{\substack{0\le j\le k\\ j\neq r}}(x_r-x_j)=(-1)^{k-r}A^{-k}Q^{-k(k+1)/2-r(r-1)/2}\frac{(Q;Q)_r(Q;Q)_{k-r}(A^2Q^r;Q)_{k+1}}{1-A^2Q^{2r}},$$

这就证明了 (2.12)。分母中的三个波赫哈默符号均有正下界，且该下界与 k 和 r 无关。由 (2.9),

$$B_k^{(A)}(X)=(-1)^kA^{-k}Q^{-k(k-1)/2}\prod_{j<k}(1-AXQ^j+A^2Q^{2j}),$$

并且当 $X \in \mathcal{K}$ 时，最后一个乘积关于 k 一致有界。相乘后， A 的幂次相消，而 Q 的幂次留下 $Q^k Q^{r(r-1)/2}$，这就证明了 (2.13)。□

令 $h = h_Q$ 定义

$$\delta(J) = \max\left\{0, \limsup_{r\to\infty} \frac{2\log|J_r|}{hr^2}\right\}, \qquad \beta(F) = \max\left\{0, \limsup_{k\to\infty} \frac{2\log|c_k B_k^{(A)}(X)|}{hk^2}\right\},$$

其中， X 是任意一个不是节点的颜色，$\log 0 = -\infty$，且有限支撑的序列的阶数为零。由 (2.11) 可知， $\beta(F)$ 不依赖于 X 的选择。

定理 2.6. 对于任意复数节点值（允许无限阶数），

$$\beta(F) = \max\{\delta(J) - 1, 0\}. \tag{2.14}$$

证明。 假设 $\delta < \infty$。对于每个 $\epsilon > 0$ ，我们都有 $|J_r| \le C_\epsilon Q^{-(\delta+\epsilon)r^2/2}$，因此 (2.13) 右侧的第 r 项至多为 $C_\epsilon Q^{-(\delta+\epsilon-1)r^2/2+O(r)}$ 。若 $\delta + \epsilon > 1$，这些项中最大的一项在相差因子 $e^{O(k)}$ 的意义下是最后一项；否则它们均被 $e^{O(k)}$ 所界。因此 $\beta \le \max\{\delta + \epsilon - 1,\ 0\}$，令 $\epsilon \downarrow 0$，便得到 $\beta \le \max\{\delta - 1,\ 0\}$。

反过来，假设 $\beta < \infty$。对于一个不是节点的固定颜色，(2.9) 中的乘积收敛到一个非零极限，因此

$$|c_k| \le C_\epsilon A^k Q^{k(k-1)/2-(\beta+\epsilon)k^2/2}.$$

在节点处，有如下精确公式

$$B_k^{(A)}(x_r^{(A)}) = A^{-k}Q^{-rk}(Q^{r-k+1};Q)_k(A^2Q^r;Q)_k, \qquad k \le r,$$

并且右侧的两个乘积都不超过 1。因此，将 k项$J_r = \sum_k c_k B_k^{(A)}$ ($x_r^{(A)}$)的对数除以 h ，可得其不超过

$$\tfrac{1}{2}(\beta + \epsilon - 1)k^2 + rk + \tfrac{1}{2}k + O(1).$$

此上界在 $0 \le k \le r$ 上递增，因此不超过 $\frac{1}{2}(\beta+\epsilon+1)r^2 + O(r)$，对$k \le r$ 求和可得 $\delta \le \beta + 1$。若 $\delta > 1$，则由此及第一部分可得 $\beta = \delta - 1$；若 $\delta \le 1$，则第一部分可得 $\beta = 0$。最后，若 $\delta = \infty$，则第二部分表明 β 不可能有限。□

2.4. 固定秩下的全纯延拓。 在固定秩下，彩色不变量的 q-全纯性会经由牛顿变换传递，因此，每个在原点附近收敛的有理层级博雷尔变换都可亚纯延拓到整个复平面（定理 2.11）。命题 2.17 给出了检验无穷远处增长的递推检验。

命题 2.7。 固定一个整数 $n \ge 2$。令 q 为不定元，数列 $k \mapsto c_{K,n,k}(q)$ 和$k \mapsto c_{K,n,k}(q)B_k^{(n)}(X)$ 分别在 $\mathbb{C}(q)$ 和 $\mathbb{C}(q, X)$上是 q-全纯的。令 $s = a/b > 0$为有理数，且 a, b 为正整数，设 $\rho = q^{1/b}$ 和 $p = Q^s = \rho^{2a}$。那么

$$u_k(\rho, X) = \frac{c_{K,n,k}(\rho^b)B_k^{(n)}(X)}{M_k(\rho^{2a})}$$

在 k 中是 ρ-全纯的。将任意 $q_0 \in (0,1)$ 和任意 $X_0 \in \mathbb{C}$代入特化后，所得数值数列仍满足一个系数为 ρ_0^k 中多项式的非零递推关系，其中 $\rho_0 = q_0^{1/b}$ 。

证明。 根据 [12]，一行彩色 HOMFLY 序列是 q-全纯的。将其转为约化零框架归一化会乘上 q- 超几何因子，这一操作保持全纯性。其特化 $A = q^n$ 也有非零递推关系。为避免对特化作一般性假设，将递推关系写成系数属于 $\mathbb{C}[A^{\pm1}, q^{\pm1}, M^{\pm1}]$ 的形式，其中 M 表示 q^r，然后清除分母。在作代换前，将所有系数除以它们的最大公因子 $A - q^n$ 的幂。所得系数多项式在代换后并非全为零。每个彩色不变量作为不定元 q 的有理函数，在该处都是正则的，因此特化后的关系仍成立。

对于牛顿变换，使用引理 2.5。在 $A = q^n$ 处，其核（包括求和号外的因子）为

$$K_n(k,r) = \frac{(-1)^{k-r} q^{nk} Q^{k(k+1)/2 + r(r-1)/2} (1 - Q^{n+2r})(Q;Q)_{n+r-1}}{(Q;Q)_r (Q;Q)_{k-r} (Q;Q)_{n+r+k}}, \qquad 0 \le r \le k.$$

因此 $c_{K,\,n,\,k} = \sum_{r=0}^{k} K_n(k,\ r) J_r^{(n)}(K;\ q)$。所显示的核是一个 proper q-超几何项：其阶乘自变量是 $(k,\ r)$ 中的整仿射形式，而其单项式指数是二次的。在 $0 \le r \le k$之外将其延拓为零后，它是 q-全纯的；该限制由施加 $r \ge 0$ 和 $k - r \ge 0$的两个全纯阶跃函数给出。对于每个 k，对 r 的求和都是有限的，因此对乘积和有限和封闭，[15,定理 5.2 和 5.3] 证明了第一个断言。

该基满足一阶递推关系

$$B_{k+1}^{(n)}(X) = (X - q^{n+2k} - q^{-n-2k}) B_k^{(n)}(X),$$

因此乘以它仍保持全纯性，包括在其零点处。在 $q = \rho^b$之后，q-递推关系的每个系数都是 ρ^k的整数次幂的多项式。此外

$$\frac{M_k(p)}{M_{k+1}(p)} = \frac{p^{k+1}}{1 - p^{k+1}} = \frac{\rho^{2a(k+1)}}{1 - \rho^{2a(k+1)}},$$

这证明了关于有理博雷尔层级的断言。

最后，清除 u_k 的递推关系中的分母，使其系数成为关于（ρ，X，M）的多项式，其中现在 M 表示 ρ^k（负次幂通过单项式因子清除）。除去 $\rho - \rho_0$ 的最大公因子幂，然后特化 $\rho = \rho_0$。此时所有 u_k 都是正则的：牛顿公式和各矩中可能出现的分母对于 $0 < q_0 < 1$ 均非零。接着除去 $X - X_0$ 的最大公因子幂，并特化$X = X_0$。u_k 是关于 X 的多项式，因此这第二次特化也是合法的。此时，关于 M 的系数多项式并非全为零。非零多项式不可能在所有互不相同的点 ρ_0^k 处都为零；因此，所得递推关系作为数值序列的递推关系是非零的。有限个例外的初始指标可以略去。□

引理 2.8。设 $0 < \rho < 1$，并假设数列（u_k）$_{k\ge 0}$ 满足一个非零递推关系，其系数是关于 ρ^k 的多项式。若 H（ξ）$= \sum_{k\ge 0} u_k \xi^k$ 在零点附近收敛，则存在多项式D_0、…、D_e、R，且 $D_0 \ne 0$，使得

$$D_0(\xi) H(\xi) + \sum_{\ell=1}^{e} D_\ell(\xi) H(\rho^\ell \xi) = R(\xi). \tag{2.15}$$

函数 H 在 $\mathbb{C}$ 上有唯一的亚纯延拓。若 Z 是 D_0 的非零根所构成的有限集合，则其极点位于

$$\bigcup_{\alpha \in Z} \alpha \rho^{-\mathbb{N}_0}. \tag{2.16}$$

对于每个乘法轨道 $O = \alpha\rho^{\mathbb{Z}}$，该轨道中的每个极点的阶数至多为

$$\sum_{\alpha' \in Z \cap O} \operatorname{mult}_{\alpha'} D_0.$$

特别是，所有极点的阶数均至多为 次数 D_0。

证明。写出对 $k \ge k_0$ 有效的递推关系：

$$\sum_{j=0}^{d} \sum_{\ell=0}^{e} r_{j\ell} \rho^{\ell k} u_{k+j} = 0.$$

公共的 ρ^k 幂已被约去，因此有些 $r_{j0} \neq 0$。乘以 ξ^{k+d} 并求和可得（2.15），其中

$$D_\ell(\xi) = \sum_{j=0}^{d} r_{j\ell} \rho^{-\ell j} \xi^{d-j}.$$

省略的初始系数给出多项式 R。不同的幂 ξ^{d-j} 确保D_0 不为零。

若在 $|\xi| < r$ 中已知 H，则方程 (2.15) 可将其在 $|\xi| < \rho^{-1} r$ 中亚纯地定义，因为解出 $H(\xi)$ 后，右侧的每个自变量的模数都更小。在重叠区域上，它与原来的芽一致。迭代即可得到唯一的解析延拓。D_0 在原点处的零点不会造成问题：假设它在该处的芽是全纯的，并且在整个构造过程中都保持不变。

极点只能由 D_0 的非零根，或由某个收缩后的自变量处的极点产生。由此得证 (2.16)。沿着每条收缩自变量链，模数都严格递减。因此，D_0 的非零根至多遇到一次，其对极点阶数的贡献不超过其重数。取各分支上的最大阶数，即得所述上界；抵消只会降低阶数。□

引理 2.9。设 $0 < \rho < 1$，并假设对所有充分大的 r，

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(\rho^r) v_{r+j} = 0, \qquad d \geq 1, \quad a_d \neq 0,$$

其中 a_j 是多项式。舍去零系数，令 $\nu_j = \text{阶}_{t=0}\, a_j(t)$，并定义非负有理数

$$\tau = \max\left(0, \max_{0 \leq j < d,\ a_j \neq 0} \frac{\nu_d - \nu_j}{d - j}\right). \tag{2.17}$$

省略空的内层最大值。存在 $C, R > 0$ 使得

$$|v_r| \leq C R^r \rho^{-\tau r^2/2}. \tag{2.18}$$

若递推关系的阶为零，则其解最终为零，并且同一上界对$\tau = 0$仍成立。

证明。非零多项式 a_d 在点 ρ^r中只有有限个零点。对于所有充分大的 r，

$$\left|\frac{a_j(\rho^r)}{a_d(\rho^r)}\right| \leq C_0 \rho^{(\nu_j - \nu_d) r}.$$

设 $W_r = R^r \rho^{-\tau r^2/2}$。那么

$$\left|\frac{a_j(\rho^r)}{a_d(\rho^r)}\right| \frac{W_{r+j}}{W_{r+d}} \leq C_0 R^{j-d} \rho^{\{\nu_j - \nu_d + \tau(d-j)\} r + \tau(d^2 - j^2)/2} \leq C_0 R^{j-d}.$$

最后一个不等式利用了 (2.17) 和 $r \geq 0$。选取足够大的 R，使最后各项上界对 $j < d$ 求和后不超过一，并选取 C 来控制有限个初始值。利用递推关系进行归纳即可证明 (2.18)。□

推论 2.10. 对于每个纽结 K、固定秩 $n \geq 2$和 $q \in (0, 1)$，节点阶 $\delta(K, n; q)$和牛顿阶 $\beta(K, n; q)$都是有限的。更明确地，取一个非零的特化递推关系$\sum_j a_j(q^r) J^{(n)}_{r+j} = 0$，令 τ为 (2.17)，并设

$$s_0 = \max\{\tau/2 - 1, 0\}.$$

那么 $\delta(K, n;\ q) \leq \tau/2$, $\beta(K, n;\ q) \leq s_0$，并且对每个紧集 $\boldsymbol{K} \subset \mathbb{C}$，都存在 $C_{\mathcal{K}}$和$R_{\mathcal{K}}$，使得

$$\sup_{X \in \mathcal{K}} |c_{K,n,k} B^{(n)}_k(X)| \leq C_{\mathcal{K}} R^k_{\mathcal{K}} Q^{-s_0 k^2/2}. \tag{2.19}$$

若 $s_0 > 0$，则 Q^{s_0}-博雷尔变换的收敛半径为正，且关于 X 局部一致地成立，并具有定理 *2.11* 中的亚纯延拓。若 $s_0 = 0$，则未经变换的辅助级数在 $z = 0$ 附近收敛。层级 s_0 取决于所选的递推关系，是定理 *2.13* 中研究的临界层级 $\beta(K, n;\ q)$ 的上界。

证明。命题 2.7 的第一部分，包括其特化论证，给出了节点值的递推关系。将引理 2.9 应用于 $\rho = q$。由于 $Q = q^2$，其界为

$$|J_r^{(n)}| \le C R^r Q^{-\tau r^2/4},$$

从而得到 $\delta \le \tau/2$。将此估计代入 (2.13)，得到

$$\sup_{X\in\mathcal{K}} |c_k B_k^{(n)}(X)| \le C_{\mathcal{K}} Q^k \sum_{r=0}^{k} R^r Q^{-(\tau/2-1)r^2/2 - r/2}.$$

若 $\tau/2 > 1$，则用其在 $r = k$ 处的值估计二次部分；若 $\tau/2 \le 1$，则舍去其非负指数。在这两种情况下，剩余的指数因子和 $k+1$ 均可吸收到 $R_{\mathcal{K}}^k$ 中。这就证明了 (2.19)。对于 $s_0 > 0$，除以 $M_k(Q^{s_0})$ 后，由于 $(Q^{s_0}; Q^{s_0})_k$ 被一个正数下界所控制，仍可得到指数界。其余结论由引理 2.8 和根值判别法推出。□

定理 **m 2.11.** 设 K 为任意纽结，$n \ge 2$、$0 < q < 1$ 和 $s \in \mathbb{Q}_{>0}$。对于每个固定的 $X \in \mathbb{C}$，若

$$H_{K,n,s}(X, \xi) = \sum_{k\ge 0} \frac{c_{K,n,k}(q) B_k^{(n)}(X)}{M_k(Q^s)} \xi^k$$

具有正的收敛半径，并且可亚纯延拓至整个 ξ平面。其极点的阶数一致有界，且属于有限个等比数列，这些等比数列由引理 *2.8* 中的多项式差分方程确定。特别地，只要临界变换具有正的收敛半径，这一结论就适用于临界有理级别。若$s > \beta(K, n;\ q)$，则该变换是整函数。

证明。 应用命题 2.7 和引理 2.8。最后的断言直接由二次阶的定义得出：除以 $M_k(Q^s)$ 后，在 k 中仍有高斯衰减，当 $s > \beta$时。□

定理 2.11 对秩和颜色逐点成立。该定理允许的极点是湮灭方程的极点，其中一些可能并不存在；例如，在节点处，该变换是一个多项式。下面的命题 2.15 给出的可能极点集合与颜色无关。

2.5. **纽结的临界博雷尔层级**。 对于任意复数节点值，有限的二次阶 β 并不意味着在基数 Q^β 处的博雷尔变换具有正的收敛半径：这些项可能超出 $Q^{-\beta k^2/2}$，且超出的倍数增长速度快于任何指数函数。对于着色不变量，这种情况不会发生。它们是 q-全纯的，而 Ramis 增长定理关于线性 q差分方程整函数解的结论表明，临界层级是有理数且可以达到。

引理 2.12。 设 $0 < \rho < 1$，且 $(u_k)_{k\ge 0}$ 满足一个系数为 ρ^k 中多项式的非零递推关系。若该数列并非最终恒为零，则存在 $\lambda \in \mathbb{Q}$ 使得

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{2\log|u_k|}{(-\log\rho)k^2} = \lambda, \qquad |u_k| \le C R^k \rho^{-\lambda k^2/2} \tag{2.20}$$

对某些 C、$R > 0$ 成立。特别是，该界在精确的二次指数处成立，而不仅仅是在每个更大的指数处成立。

证明。 我们使用 [27,命题 2.1 和定理 4.8] 的以下系数形式。如果整函数 $G(\xi) = \sum_{k\ge 0} b_k \xi^k$ 不是多项式，且满足一个系数为多项式、非齐次项为多项式的非零线性 ρ-差分方程，那么存在$\gamma \in \mathbb{Q}_{>0}$ 使得

$$|b_k| \le C R^k \rho^{\gamma k^2/2}, \tag{2.21}$$

并且对于任意 $\gamma' > \gamma$，这种形式的估计都不成立。可以先通过应用 $\prod_{j=0}^{D}(T_\rho - \rho^j)$ 消去多项式非齐次项，其中 $(T_\rho f)(\xi) = f(\rho\xi)$，且 D 是其次数。由此得到的齐次差分算子非零，因为其最高位移项的系数是若干非零系数的乘积。将方程改写为伸缩基数为 $\bar{q} = \rho^{-1} > 1$ 的形式，并令 $h_\rho = -\log \rho$。用显式增长记号表示，Ramis 定理 4.8 给出一个有理数 $\kappa > 0$ 和常数 C，a，使得当 $|\xi|$ 充分大时，

$$|G(\xi)| \le C \exp\left\{ \frac{\kappa}{2h_\rho} \log^2 |\xi| + a \log |\xi| \right\},$$

对于更小的正数 κ，不存在这种形式的界。将柯西估计在 $\log r = h_\rho(k-a)/\kappa$ 处优化，可得 $|b_k| \le C' R^k \rho^{k^2/(2\kappa)}$。反过来，任何带有 $\gamma' > 1/\kappa$ 的界，通过对高斯系数界求和（等价地，通过命题 2.1），都会给出二次增长系数 $1/\gamma' < \kappa$。因此，(2.21) 在 $\gamma = 1/\kappa$ 时取到最优。Ramis 界中的项 $a\log|\xi|$ 只贡献指数因子 R^k。

引理 2.9 为 u_k 给出了一个有限的二次上界。取充分大的正整数 m，使得

$$G(\xi) = \sum_{k \ge 0} u_k \rho^{mk^2} \xi^k$$

是整函数。将数列乘以 ρ^{mk^2} 会保持全纯性，因为其相邻项之比为 $\rho^{m(2k+1)}$。引理 2.8 中的生成函数计算给出了 G 所需的方程。函数 G 不是多项式，因为 u_k 并非最终恒为零。

将 (2.21) 应用于 $b_k = u_k \rho^{mk^2}$，得到

$$|u_k| \le C R^k \rho^{-(2m-\gamma)k^2/2}.$$

此外，$\limsup 2\log|b_k|/((-\log\rho)k^2) = -\gamma$：若严格不等式成立，就会推出对某个 $\gamma' > \gamma$ 的界，这与最优性矛盾。因此，(2.20) 对 $\lambda = 2m - \gamma \in \mathbb{Q}$ 成立。λ 的值由所示的 limsup 确定，因此与辅助整数 m 无关。□

定理 2.13。设 K 是一个纽结，$n \ge 2$ 和 $0 < q < 1$，且 $\beta = \beta(K, n; q)$ 是在一个非节点颜色处的二次阶。则 $\beta \in \mathbb{Q}_{\ge 0}$，并且存在常数 $R > 0$，使得对每个紧致颜色集 $\mathcal{K}$，

$$\sup_{X \in \mathcal{K}} |c_{K,n,k}(q) B_k^{(n)}(X)| \le C_{\mathcal{K}} R^k Q^{-\beta k^2/2}. \tag{2.22}$$

因此：

(i) 若 $\beta = 0$，则辅助牛顿级数关于紧集中的 X 以及充分小的 z 正规收敛。*(ii)* 若 $\beta > 0$，则其临界 Q^β-博雷尔变换具有正且有限的半径 $R_{K,\,n,\,q}$，且与任何非节点颜色无关。它可亚纯地延拓至整个复平面，其极点在有限多个等比数列上，且阶数有界。在节点处，该变换是一个多项式。

证明。颜色 $X = 0$ 不是节点，因为所有节点都是正数且大于二。令 $u_k = c_{K,\,n,\,k}(q) B_k^{(n)}(0)$。根据命题 2.7，特化后这是一个 q-全纯数列。如果 u_k 最终为零，那么牛顿系数最终也为零，零阶情形中的所有结论便显而易见。否则，应用引理 2.12，其中 $\rho = q$。由于 $h_Q = 2(-\log q)$，其指数与本文所用的阶数相关，关系如下

$$\beta = \frac{\max\{\lambda, 0\}}{2}.$$

这证明了 $X = 0$ 处的有理性和临界界。

写作 $A = q^n$ 和 $P_k(A,\ X) = \prod_{j<k}(1 - AXQ^j + A^2Q^{2j})$。基的因式分解给出

$$\frac{B_k^{(n)}(X)}{B_k^{(n)}(0)} = \frac{P_k(A,X)}{P_k(A,0)}.$$

分子在每个紧致颜色集上关于 k 一致有界，而 $P_k(A,\ 0) \geq 1$。因此， $X = 0$ 处的界给出 (2.22)。若 $\beta = 0$，则 $z = 0$ 附近正规收敛。若$\beta > 0$，除以 $M_k(Q^\beta)$后得到指数界，因此临界博雷尔变换的半径为正，且关于 X局部一致。

令 H_0 为该变换在 $X = 0$处的值。它不可能是整函数。否则，设 $\beta = a/b$，由命题 2.7 可知，它将是一个满足 $\rho = q^{1/b}$的非多项式整函数，并满足一个 ρ-差分方程，而公式 (2.21) 将给出

$$|[\xi^k]H_0| \leq CR_1^k \rho^{\gamma k^2/2} \qquad (\gamma > 0).$$

于是，乘以 $M_k(Q^\beta)$后， u_k 在严格小于 β的二次阶上有界，这就产生了矛盾。因此，半径$R_{K,\ n,\ q}$ 是有限的。定理 2.11 给出亚纯延拓。

对于每个非节点颜色， $P_k(A,X)/P_k(A,0) \to E_A(X)/E_A(0) \neq 0$。因此，根值判别法给出的临界半径与在 $X = 0$ 处完全相同。在节点处，牛顿展开会终止。□

定理 2.13 仅涉及博雷尔变换。只要博雷尔变换沿积分射线增长得足够缓慢，临界拉普拉斯积分便收敛；例如，满足命题 2.17 的条件 (2.28) 即可。根据推论 2.16，只需在单个颜色 $X = 0$ 处检验这一界即可。

命题 2.14。 假设 $\beta(K,n;q) > 0$，并记 $H(X,\xi)$ 为临界博雷尔变换，且 $R_* = R_{K,n,q}$。那么芽

$$H(X,\xi) - \frac{E_n(X)}{E_n(0)} H(0,\xi) \tag{2.23}$$

在 $\mathbb{C}_X \times \{|\xi| < R_*/Q\}$ 上全纯。特别地，如果 α 是 $H(0,\xi)$ 的极点，且 $|\alpha| = R_*$，那么

$$\operatorname{PP}_{\xi=\alpha} H(X,\xi) = \frac{E_n(X)}{E_n(0)} \operatorname{PP}_{\xi=\alpha} H(0,\xi). \tag{2.24}$$

至少存在一个这样的极点。每个最近的极点在每个非节点颜色处都存在，且阶数相同，而在节点处则恰好消失。

证明。 无穷乘积尾项给出如下结果，且对 X 属于紧集的情形一致成立：

$$\frac{P_k(A,X)}{P_k(A,0)} - \frac{E_A(X)}{E_A(0)} = O(Q^k).$$

事实上， $P_k(A,\ X) - E_A(X) = O(Q^k)$在这类集合上一致成立；在 $X = 0$处也同样成立，此时有限乘积及其极限均远离零。分母中仅出现 $P_k(A,\ 0)$和$E_A(0)$，因此该估计在节点处也成立。

(2.23) 的第 k 个系数因此为 $O_{\mathcal{K}}(Q^k[\xi^k]H(0,\xi))$。由根值判别法，其级数在$|\xi| < R_*/Q$ 上正规收敛，这证明了第一个断言。由于 $H(0,\xi)$ 是亚纯函数，且其泰勒收敛半径有限，为 R_*，因此 $|\xi| = R_*$ 上的奇点是一个极点。减去全纯的比较项便得到 (2.24)。最后， E_n 恰好在节点处消失，而主部的非零标量倍数具有相同的极点阶数。□

2.6. 从一个参考颜色进行颜色传输。 牛顿基的因式分解将延拓的Borel变换从颜色 $X=0$ 传输到每一种颜色，且可能极点的集合与颜色无关。按上文记 $P_k(A,X)=\prod_{j<k}(1-AXQ^j+A^2Q^{2j})$。

命题 2.15. 固定 $A=q^n$，以及一个满足以下条件的博雷尔层级：

$$H(X,\xi)=\sum_{k\geq 0} b_k \frac{P_k(A,X)}{P_k(A,0)}\xi^k$$

在 $\xi=0$ 附近收敛。假设 $H_0(\xi)=H(0,\xi)$ 可解析延拓至 $\mathbb{C}$，其极点集为 Σ_0。那么 H 可亚纯延拓，并且除一个局部有限的公共可能极点集外，关于颜色是整函数

$$\Sigma_*=\bigcup_{m\geq 0} Q^{-m}\Sigma_0.$$

更确切地说，它在 $\mathbb{C}_X\times(\mathbb{C}_\xi\setminus\Sigma_*)$ 上联合全纯。若 Σ_0 包含于有限个等差序列 $\alpha\rho^{-\mathbb{N}_0}$ 和 $Q=\rho^d$ 中（公差为正整数 d），则 Σ_* 也满足同样性质。H_0 的极点阶数若有一致上界，则该上界也是每种颜色下 $H(X,\cdot)$ 的极点阶数上界。

存在次数至多为 m 的多项式 $v_m(X)$，仅依赖于 A,Q，使得每个主部系数都具有如下形式：

$$[(\xi-\alpha)^{-j}]H(X,\xi)=\frac{E_A(X)}{E_A(0)}\sum_{\substack{m\geq 0\\ Q^m\alpha\in\Sigma_0}} v_m(X)Q^{-mj}[(\xi-Q^m\alpha)^{-j}]H_0(\xi). \tag{2.25}$$

该和是有限和。因此，每个主部的每个系数都是 $E_A(X)$ 乘以一个关于 X 的多项式。除最近的极点外，该多项式在非节点的颜色处也可能为零。

证明。当 t 较小时，令

$$V_X(t)=\prod_{j\geq 0}\frac{1+A^2t^2Q^{2j}}{1-AXtQ^j+A^2t^2Q^{2j}}=\sum_{m\geq 0} v_m(X)t^m.$$

This 在 $t=0$ 附近解析，且关于取遍紧集的 X 一致。其函数方程为 s

$$(1-AXt+A^2t^2)V_X(t)=(1+A^2t^2)V_X(Qt),$$

因此，$v_0=1$、$v_{-1}=0$，并且对于 $m\geq 1$，

$$(1-Q^m)v_m=AXv_{m-1}-A^2(1-Q^{m-2})v_{m-2}.$$

这就证明了多项式断言。给定紧致颜色集 $\mathcal{K}$，选取 $r>0$，使得$V_X(t)$ 关于 $|t|\leq r$ 解析，且对取遍$\mathcal{K}$的 $X\in$ 一致；随后选取 $N\geq 1$，使得 $Q^N<r$。对于每个 $k\geq N$，乘积恒等式给出

$$\frac{P_k(A,X)}{P_k(A,0)}=\frac{E_A(X)}{E_A(0)}V_X(Q^k).$$

此恒等式在节点处也成立：对于所选的k 和紧集，$V_X(Q^k)$ 中的分母不会消失。

令 $H_{<N}(X,\xi)$ 表示 H 的前 N 个泰勒项，并令 $H_{0,<N}=H_{<N}(0,\cdot)$。在零点附近交换正规收敛级数，得到精确的延拓公式

$$\begin{aligned}H(X,\xi)&=H_{<N}(X,\xi)\\&\quad+\frac{E_A(X)}{E_A(0)}\sum_{m\geq 0} v_m(X)\big[H_0(Q^m\xi)-H_{0,<N}(Q^m\xi)\big].\end{aligned} \tag{2.26}$$

事实上，柯西估计给出 $|v_m(X)|\leq C_{\mathcal{K}}r^{-m}$，而括号中的项为 $O(Q^{mN})$，当 m 充分大时，这一结论在有界的 ξ 集上是一致的。因此，该级数在$\mathcal{K}\times(\mathbb{C}\setminus\Sigma_*)$ 的紧子集上正规收敛。集合 Σ_0 与零点保持正距离，因此只有有限多个 m 会作出贡献

有界圆盘中的极点。这证明了局部有限性、联合解析延拓以及关于极点阶数的断言。根据原始芽的唯一性，随着$\mathcal{K}$ N变化，这些解析延拓彼此一致。对有限个奇异项取主部即可得到 (2.25)；因子 Q^{-mj} 来自变量替换 $\xi \mapsto Q^m\xi$。□

推论 2.16. 在命题 *2.15* 中，假设 Σ_0 位于有限个等差序列 $\alpha\rho^{-\mathbb{N}_0}$上，且 $Q=\rho^d$ 满足 $d\ge 1$ 可积，并且极点阶数有界。假设在某个扇形区域内，或在 Σ_*周围固定的相对圆盘之外，

$$|H_0(\xi)| \le C(1+|\xi|)^a \exp\{\kappa \log^2(2+|\xi|)\}, \qquad \kappa \ge 0.$$

则对 X 的任意紧集上的取值， κ 仍是 $H(X,\xi)$的二次增长指数，且一致成立，只需调整常数和多项式因子。特别地，在 $X=0$ 处满足次临界界 $\kappa < 1/(2h_p)$ ，便可在相应的无极点扇形区域内，对每种颜色得到普通的 p-拉普拉斯和，且关于 X局部一致。如果该界在奇异射线周围的楔形区域内、固定的相对极点圆盘之外成立，那么也能得到该射线上的两个侧向和及斯托克斯跳跃。

证明。 所考察的区域在乘以 Q^m后保持不变。泰勒余项$G_N = H_0 - H_{0,<N}$ 在该区域内满足

$$|G_N(\xi)| \le C_N|\xi|^N(1+|\xi|)^{a_N}\exp\{\kappa\log^2(2+|\xi|)\}$$

对于某个 $a_N \ge 0$：在零点附近使用泰勒余项，在远离零点处则将有限多项式和因子 $|\xi|^{-N}$ 吸收进去。因此，在 (2.26) 中，第 m 个余项由所示右端乘以 Q^{mN} 后的结果所界。所得几何级数收敛，因为 $Q^N<r$。次临界界给出了每个此类扇形区域上的拉普拉斯积分。在奇异射线附近的楔形区域中，它也控制固定的相对绕行路径及其留数贡献，如命题 2.17 所述。□

对于处于临界有理层级的纽结，关于 H_0 的极点及其阶数的假设由定理 2.13 得出；增长界则必须单独建立。

2.7. **拉普拉斯积分路径上的增长。**

命题 2.17. 在引理 *2.8* 中，省略零点 D_ℓ 并令

$$h_\rho = -\log\rho, \qquad \mu = \max\left(0, \max_{\ell\ge 1}\frac{\deg D_\ell - \deg D_0}{\ell}\right),$$

若不存在正移位，则省略内层最大值。对于每个 $\kappa > \mu/(2h_\rho)$，存在常数 C_κ ，使得

$$|H(\xi)| \le C_\kappa \exp\{\kappa\log^2(2+|\xi|)\} \tag{2.27}$$

在式(2.16)中可能的极点周围固定相对半径的充分小圆盘之外。如果$\mu=0$，则也可以改为在该处取多项式界。因此，只要满足

$$\mu < \frac{h_\rho}{h_p}, \qquad h_p = -\log p. \tag{2.28}$$

在这个严格不等式下，侧向和也存在。它们的差是 $H(\xi)w_p(\xi/z)$的留数之收敛和，再乘以 $2\pi i/(h_p z)$，其定向由引理 *A.4* 指定。

证明。 对 (2.15) 中的 H 求解后，当 $|\xi|$ 足够大时， $H(\rho^\ell\xi)$ 的有理系数有界于 $C|\xi|^{d_\ell}$，其中 $d_\ell = \deg D_\ell - \deg D_0$。对于 $W(r) = \exp(\kappa\log^2 r)$，

$$r^{d_\ell}\frac{W(\rho^\ell r)}{W(r)} = \exp(\kappa\ell^2 h_\rho^2) r^{d_\ell - 2\kappa\ell h_\rho} \longrightarrow 0.$$

当 r 足够大时，这些比值之和小于 $1/2$。非齐次项是有理函数，且至多呈多项式增长，因此通过在环带上归纳可得 (2.27)。归纳过程始终在排除圆盘之外进行：若 $\rho^{\ell}\xi$ 位于可能的极点 $\alpha\rho^{-m}$ 周围的圆盘内，则 ξ 位于 $\alpha\rho^{-m-\ell}$ 周围具有相同相对半径的圆盘内。将重合极点视为同一点后，有限个轨道之间具有正的相对分离，因此可以选取互不相交的这些圆盘。有界的起始环带为归纳提供常数。

若 $\mu=0$，则所有 $d_{\ell}\le 0$。将 $W(r)$ 替换为 $(1+r)^{L}$，并令 L 足够大，使系数界乘以 $\rho^{\ell L}$ 的有限和小于 $1/2$；同时令 L 大于非齐次项的次数。这就证明了多项式增长。若没有正移位，则 H 是有理函数，两个结论都显然成立。

在 (2.28) 的条件下，选取严格介于 $\mu/(2h_{\rho})$ 与 $1/(2h_{p})$ 之间的 κ。于是，$w_{p}(t)$ 关于 $\log t$ 的高斯衰减将压过 $H(zt)$ 的增长。引理 A.4 在相同界下给出侧向极限和留数公式。□

注 2.18。(2.28) 中的增长条件不可省略。函数

$$H(\xi)=\sum_{k\ge 0}Q^{k^{2}}\xi^{k},\qquad H(\xi)=1+Q\xi H(Q^{2}\xi),$$

是整函数且为 q-全纯函数，但其带有 $p=Q^{3}$ 的 p-拉普拉斯积分对每个正的 z 都发散。事实上，所有项在正实轴上均非负，而 Tonelli 定理给出的积分等于发散级数 $\sum_{k\ge 0}Q^{k^{2}}M_{k}(Q^{3})z^{k}$。

2.8. **连通和**。对于纽结，我们使用由不可约表示着色的约化零框架量子不变量。将一个纽结剪开会得到一个 (1,1)-辫，其 Reshetikhin–Turaev 算子是该不可约表示的等变自同态，因此根据舒尔引理，它是一个标量，而这个标量就是约化不变量。将 K和 L 的辫复合，得到 $K\#L$的辫，并将标量 [29]相乘。因此

$$J_{r}^{(n)}(K\,\#\,L;q)=J_{r}^{(n)}(K;q)J_{r}^{(n)}(L;q). \tag{2.29}$$

牛顿级数由其在节点处的取值确定：如果所有取值都为零，依次在 $x_{0},x_{1},\dots$ 处求值，并利用 $B_{k}(x_{k})\neq 0$，即可证明每个系数都为零。乘积 $F_{K,n}F_{L,n}$ 在节点处的取值如 (2.29) 右侧所示，因此

$$F_{K\#L,n}=F_{K,n}F_{L,n}. \tag{2.30}$$

同样的论证在特化之前对整环 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$也成立。

记 δ_{K} 为 K 在节点处、固定秩和 q下的约化零框架不变量的二次阶，记 β_{K} 为其在一个非节点颜色处的辅助级数的二次阶。

推论 2.19。对于每个纽结 K、每个 $m\ge 1$ 以及每个固定秩，

$$\beta_{\#^{m}K}=\max\{m\delta_{K}-1,0\}. \tag{2.31}$$

若 $\beta_{K}>0$，则可写为 $\beta_{\#^{m}K}=m\beta_{K}+m-1$。对于纽结 K_{1}、…、K_{m}，总有

$$\beta_{K_{1}\#\cdots\#K_{m}}\le\max\{\delta_{K_{1}}+\cdots+\delta_{K_{m}}-1,0\},$$

且 当极限 $\limsup_{r\to\infty}2\log|J_{r}(K_{i})|/(h_{Q}r^{2})$ 存在且有限、非负时，等号成立。

证明。约化不变量在连通和下相乘。对于幂，$\log|J_{r}(K)^{m}|=m\log|J_{r}(K)|$，并且当 $J_{r}(K)=0$ 时也是如此，因此 $\#^{m}K$ 的节点阶恰为 $m\delta_{K}$，定理 2.6 适用。对于不同的纽结，和的上极限至多为各上极限之和；当极限存在时，二者相等。若不满足这一假设，各因子的最大增长可能出现在不同的子序列上，因此这个界未必能取到。□

3. 谱求和与斯托克斯数据

本节讨论沿等比数列分布的简单极点的收敛和所对应的博雷尔变换。对于这类变换，博雷尔奇点、拉普拉斯和以及斯托克斯跳跃都是显式的，且跳跃决定了变换（定理 3.5）。去掉有限个初始项后，系数具有解析尾项的每个牛顿级数的博雷尔变换，都是这类和及其欧拉导数的有限组合（定理 3.8）。本节末尾将证明，这种演算与牛顿基的差商相容，而差商会改变秩。

3.1. **预解式**。对于 $R>1$ 令

$$\mathscr{W}_R=\Big\{b(t)=\sum_{m\ge 0} b_m t^m:\ \|b\|_R=\sum_{m\ge 0}|b_m|R^m<\infty\Big\}.$$

在逐点乘法下，这是一个含单位元的 Banach代数，其元素在圆盘 $|t|<R$ 上全纯。对于 $\alpha\neq 0$ 和 $b\in\mathscr{W}_R$，令

$$(\mathfrak{R}_\alpha b)(\xi)=\sum_{m\ge 0}\frac{b_m}{1-Q^m\xi/\alpha},\qquad \alpha_m=\alpha Q^{-m}. \tag{3.1}$$

我们称 b 为 $\mathfrak{R}_\alpha b$ 的谱符号，称 α 为其极点种子。算子 $\mathsf{T}f(\xi)=f(Q\xi)$ 将（3.1）中的指标 m 平移一位，由此得到乘法规则（3.2）。

定理 3.1. 设 $b,\ g\in\mathscr{W}_R$。

(i) $\mathfrak{R}_\alpha b$ 在 $\mathbb{C}$上是亚纯函数。其极点均为简单极点，且位于点集 α_m中；当且仅当 $b_m\neq 0$时，α_m 是一个极点。此外

$$\operatorname{Res}_{\xi=\alpha_m}\mathfrak{R}_\alpha b=-\alpha_m b_m,\qquad [\xi^k]\mathfrak{R}_\alpha b=\alpha^{-k}b(Q^k).$$

(ii) 在与射线 $\alpha\mathbb{R}_{>0}$保持正角距离 θ 的每个闭扇形上，$|\mathfrak{R}_\alpha b|\le C_\theta\|b\|_R$关于 $|\xi|$一致。

(iii) 级数 $g(\mathsf{T})=\sum_{\ell\ge 0}g_\ell\mathsf{T}^\ell$ 在此类函数上正规收敛，并且

$$g(\mathsf{T})\mathfrak{R}_\alpha b=\mathfrak{R}_\alpha(gb). \tag{3.2}$$

若 R_m 是 $\mathfrak{R}_\alpha b$ 在 α_m处的留数，则 $g(\mathsf{T})\mathfrak{R}_\alpha b$ 的留数为

$$R'_m=\sum_{\ell=0}^{m} g_\ell Q^{-\ell}R_{m-\ell}. \tag{3.3}$$

证明。 在避开点 α_m的紧集上，(3.1)中的分母远离零，并且当 $m\to\infty$时一致趋于 1。由于 $\sum|b_m|<\infty$，该级数在此处正规收敛，且在 α_m处只有指标为 m 的项是奇异的，其留数为 $-\alpha_m b_m$。对于 $|\xi|<|\alpha|$，将每一项展开为几何级数，并先对 m 求和，便得到泰勒系数。若 $w=Q^m\xi/\alpha$ 满足 $|\arg w|\ge\theta$，则 $|1-w|\ge c_\theta(1+|w|)$，其中 $c_\theta>0$，由此得到(ii)。最后，T^ℓ 将指标为 m 的项替换为指标为 $m+\ell$的项，因此，$g(\mathsf{T})\mathfrak{R}_\alpha b$ 中$(1-Q^j\xi/\alpha)^{-1}$ 的系数为 $\sum_{\ell\le j}g_\ell b_{j-\ell}$，即 gb的第 j个泰勒系数。$\mathscr{W}_R$ 中的绝对收敛保证了重排的合理性，并证明了(3.2)。由于 $R_m=-\alpha_m b_m$且 $\alpha_m/\alpha_{m-\ell}=Q^{-\ell}$，因此得到(3.3)。$\square$

3.2. **拉普拉斯和与侧向极限**。 固定 $0<p<1$，使其与 Q 无关，并令 $\mathcal{L}_p$ 为 (2.6) 的拉普拉斯变换。根据定理 2.2，w_p 的归一化矩为 $M_k(p)$，且 w_p 的衰减速度快于 t 的任意幂。

定理 3.2。设 $H=\mathfrak{R}_\alpha b$ 满足 $b\in\mathscr{W}_R$。

(i) 积分 $L_pH(z)$ 在 $z\neq 0$ （射线 $\alpha\mathbb{R}_{>0}$ 除外）上收敛，并且在那里全纯。在与该射线的角距离为 $\theta>0$ 的每个闭扇形上，对于任意 $N\geq 0$，

$$\left|\mathcal{L}_pH(z)-\sum_{k=0}^{N-1}\alpha^{-k}b(Q^k)M_k(p)z^k\right|\leq C_\theta\|b\|_R M_N(p)|z/\alpha|^N. \tag{3.4}$$

(ii) L_pH 在射线两侧均有边界值，对于满足 $r>0$ 的 $z=e^{i\arg\alpha}r$，这些边界值局部一致。令 $\Delta_b(z)$ 表示从辐角减小的一侧取得的边界值减去从辐角增大的一侧取得的边界值；在负实轴上，这就是上侧值减去下侧值。令 $\tau_m=|\alpha|Q^{-m}/r$，

$$\Delta_b(z)=\frac{2\pi i}{h_p z}\sum_{m\geq 0}\operatorname{Res}_{\xi=\alpha_m}H(\xi)\,w_p(\alpha_m/z) \tag{3.5}$$

$$=-\frac{2\pi i}{h_p}\sum_{m\geq 0}b_m\tau_m w_p(\tau_m), \tag{3.6}$$

并且该级数在 r 属于 $(0,\infty)$ 的紧子集时正规收敛。

(iii) 令 T 按照 $z\mapsto Qz$ 作用于 z 的函数。对于每个 $g\in\mathscr{W}_R$，$L_p\mathfrak{R}_\alpha(gb)=g(\mathsf{T})L_p\mathfrak{R}_\alpha b$；侧向和与跳跃也同样成立：$\Delta_{gb}=g(\mathsf{T})\Delta_b$。

一般而言，$\mathcal{L}_pH$ 不能全纯延拓至 $z=0$；根据 (i)，它在此处的渐近展开为 $\sum_k\alpha^{-k}b(Q^k)M_k(p)z^k$。

证明。由定理 3.1(ii)，对闭扇形内的 z 及 $t>0$，$|H(zt)|\leq C_\theta\|b\|_R$，因此积分收敛且为全纯函数。对于余项，我们使用

$$\frac{1}{1-w}-\sum_{k<N}w^k=\frac{w^N}{1-w},\qquad w=Q^m\xi/\alpha,$$

其在扇形区域内的模数至多为 $C_\theta|\xi/\alpha|^NQ^{mN}$。对 m 求和可得，H 的 N 阶泰勒余项不超过 $C_\theta\|b\|_R|\xi/\alpha|^N$；再对 w_p 积分便得到 (3.4)，因为第 N 个归一化矩为 $M_N(p)$。

对于侧向极限，索引为 m 的项在 $\mathcal{L}_pH(z)$ 中为

$$\frac{b_m}{h_p}\int_0^\infty\frac{w_p(t)}{1-t/\tau}\,dt,\qquad \tau=\frac{\alpha_m}{z}.$$

当 z 沿射线趋近点 $e^{i\arg\alpha}r$ 时，τ 趋于 $\tau_m>0$；当 z 从辐角递减的一侧趋近时，是从上方趋近，否则则从下方趋近。由引理 A.1 及 $K=0$ 可知，这些积分在 m 内及射线附近一致有界，且其上方边界值与下方边界值之差为 $-2\pi i\tau_m w_p(\tau_m)$。对于 $(0,\infty)$ 的紧子集内的 r，τ_m 有正的下界，因此 $\sum|b_m|<\infty$ 允许我们逐项取边界值。这便得到 (3.6)，而 (3.5) 则由 $\operatorname{Res}_{\alpha_m}H=-\alpha_m b_m$ 和 $\alpha_m/z=\tau_m$ 得出。

(i) 和 (ii) 中的界关于 $\|b\|_R$ 是线性的，因此$\mathcal{L}_p$、侧向极限和 Δ 都是 $\mathscr{W}_R$ 上的连续线性映射。由于$\mathcal{L}_p(\mathsf{T}H)=\mathsf{T}\mathcal{L}_pH$，且 T 保持射线的两侧不变，将这些映射应用于 (3.2) 即可证明 (iii)。□

注记 3.3。定理 3.2 可推广至函数 $P(\xi)+(\xi/\alpha)^N\mathfrak{R}_\alpha b$，其中含有一个多项式 P和一个固定的 $N\geq 0$。因子 ξ^N 仅带来多项式增长，核具有所有阶的矩；在侧向论证中，$t^Nw_p(t)$取代了 $w_p(t)$，这正是引理 A.1 的情形 $K=N$。多项式会改变拉普拉斯和，但不会产生跳跃。由于 $\mathsf{T}^\ell(\xi^Nf)=Q^{N\ell}\xi^N\mathsf{T}^\ell f$，算子 $g(\mathsf{T})$ 会将尾项的符号 $b(t)$ 替换为 $g(Q^Nt)b(t)$。当系数为函数 g 的 $\alpha^{-k}g(Q^k)$，且该函数仅在 $t=0$ 附近全纯时，就会出现这种形式：带有 $k\geq N$ 的系数是 $(\xi/\alpha)^N\mathfrak{R}_\alpha b_N$ 的系数，其中 $b_N(t)=g(Q^Nt)$；当 N 足够大时，b_N 在半径大于一的圆盘上全纯。

指标 k 中的多项式因子对应于欧拉导数。

命题 3.4. 设 $\mathsf{E} = \xi\partial_\xi$，令 $b_0, \dots, b_d \in \mathscr{W}_R$，并设

$$H = \sum_{j=0}^{d} \mathsf{E}^j \mathfrak{R}_\alpha b_j .$$

则 $[\xi^k]H = \alpha^{-k}\sum_{j=0}^{d} k^j b_j(Q^k)$。函数 H 在点 α_m处的极点阶数至多为 $d+1$，在远离射线 $\alpha\mathbb{R}_{>0}$的闭扇区上有界，其拉普拉斯和与侧向和如定理 *3.2* 所述存在。算子 $g(\mathsf{T})$将每个 b_j 乘以 g，并且

$$\mathcal{L}_p(\mathsf{E}H) = (z\partial_z)\mathcal{L}_p H, \qquad \Delta_{\mathsf{E}H} = (z\partial_z)\Delta_H .$$

若 $h_{m,j}$ 是 H 在 α_m处主部中 $(\xi-\alpha_m)^{-j}$ 的系数，则

$$\Delta_H(z) = \frac{2\pi i}{h_p z}\sum_{m\ge 0}\sum_{j=1}^{d+1} \frac{h_{m,j}}{(j-1)!\, z^{j-1}} w_p^{(j-1)}(\alpha_m/z),$$

当 r 取遍 $(0,\infty)$ 的紧子集时正规收敛。

证明。由 $w = Q^m\xi/\alpha$ 可知 $\mathsf{E} = w\,d/dw$，因此 $\mathsf{E}^j(1-w)^{-1}$ 是 $(1-w)^{-1}, \dots, (1-w)^{-j-1}$ 的线性组合，其系数与 m无关。这些函数在远离 $w \in (0,\infty)$ 的闭扇区上有界，因此定理 3.1 对 H 的界成立，对积分号下求导即可得到 $\mathrm{L}p(\mathsf{E}H)$ 的公式。将 z旋转，使射线 $\alpha\mathbb{R}_{>0}$ 移至负实轴后，每个 $\mathrm{L}_p\mathfrak{R}_\alpha b_j$ 都是命题 A.3 所处理的那类和。该命题给出所有固定欧拉导数的边界值，这些边界值关于 r局部一致，并且恒等式 $\Delta_{\mathsf{E}H} = (z\partial_z)\Delta_H$成立，因为 $z\partial_z = r\partial_r$ 位于该射线上。 $\int_0^\infty f(t)(t-\tau)^{-j}\,dt$跨越 $\tau>0$的跳跃为 $2\pi i f^{(j-1)}(\tau)/(j-1)!$，将其应用于主部即可得到 Δ_H 的公式。最后，E 与 T 可交换，因此 $g(\mathsf{T})$ 分别作用于每个 b_j。□

3.3. **跳跃决定符号**。

定理 3.5. 固定 p、Q 和 α，映射 $b \mapsto \Delta_b$ 在 $\mathscr{W}_R$上是单射。更确切地说，若m_0 是满足 $b_{m_0} \neq 0$ 的最小指标，则

$$\Delta_b(e^{i\arg\alpha} r) \sim -\frac{2\pi i}{h_p} b_{m_0}\tau_{m_0} w_p(\tau_{m_0}) \qquad (r\downarrow 0), \tag{3.7}$$

因此，系数 b_m 可以从 Δ_b 中逐一读出。若 g、$b \in \mathscr{W}_R$ 非零，则$\Delta_{gb} \neq 0$。若 g 是 $\mathscr{W}_R$的单位元，则 $g(\mathsf{T})$ 可逆，其逆为 $g^{-1}(\mathsf{T})$，适用于博雷尔变换、拉普拉斯和与跳跃。

证明. 令 $f(\tau) = \tau w_p(\tau)$。于是

$$\frac{d\log f(\tau)}{d\log\tau} = 1 - \sum_{j\ge 0}\frac{\tau p^j}{1+\tau p^j},$$

当 $\tau\to\infty$时，它趋于 $-\infty$。因此，f最终递减，并且对每个固定的 $c>1$，$f(c\tau)/f(\tau) \to 0$。由于 $r\downarrow 0$，我们有 $\tau_{m_0}\to\infty$ 和 $\tau_m = Q^{-(m-m_0)}\tau_{m_0}$。将 (3.6) 除以$f(\tau_{m_0})$ 后，每个满足 $m > m_0$ 的项都趋于零，并最终由 $|b_m|$控制；控制收敛证明了 (3.7)，其右侧非零。减去指标为 m_0 的项并重复该论证，即可恢复其余系数。$\mathscr{W}_R$ 中的元素在圆盘上全纯，因此当 g 和 b 非零时，$gb \neq 0$。最后一个断言由定理 3.2(iii) 得出。□

在变换类 $\mathfrak{R}_\alpha b$ 中，单射性成立：向博雷尔变换中添加多项式会改变拉普拉斯和，但不会改变跳跃。

3.4. 带有解析尾项的系数。第 4 节中扭结的牛顿系数具有以下形式。

定义3.6。 对于固定的实数 $0 < q < 1$，若存在有限个数 $\lambda_\nu \neq 0$、多项式 P_ν、在$s = 0$附近全纯的函数 $f_\nu(s)$，以及一个整数 K，使得牛顿系数序列具有解析尾项，则称其具有解析尾项。

$$c_k(q) = \sum_\nu \lambda_\nu^k P_\nu(k) f_\nu(Q^k) \qquad (k \geq K).$$

整数 K 总可以增大，因此我们不妨假设所有点 Q^k, $k \geq K$ 都位于 f_ν 全纯的圆盘内。

引理3.7。 假设 g 在零点附近及某个开扇形区域上全纯，并且在每个闭子扇区上都被一个多项式所界。将 $g(\xi)$ 在零点附近写成 $= \sum b_k \xi^k$。在每个闭子扇区上，存在常数 C, D, N_0，使得对于 $N \geq N_0$ 以及该子扇区内所有 ξ，

$$\left| g(\xi) - \sum_{k<N} b_k \xi^k \right| \leq C D^N |\xi|^N.$$

因此，$L_p g$ 具有渐近展开 $\sum b_k M_k(p) z^k$：对于同一闭子扇区内的 z 及 $N \geq N_0$，

$$\left| \mathcal{L}_p g(z) - \sum_{k<N} b_k M_k(p) z^k \right| \leq C D^N M_N(p) |z|^N. \tag{3.8}$$

证明。选取 $0 < r < R$，使得 g 在 $|\xi| \leq R$ 上全纯。柯西估计给出$|b_k| \leq C_1 R^{-k}$，而对于 $|\xi| \leq r$，泰勒余项至多为 $C_2 R^{-N} |\xi|^N$。对于子扇形区域中的 $|\xi| \geq r$，我们分别估计 g 和前 N 个泰勒项，再除以 $|\xi|^N$。如果$|g(\xi)| \leq C_3(1 + |\xi|)^e$，那么对于 $N \geq e$

$$\frac{|g(\xi)|}{|\xi|^N} \leq C_3 (1 + r)^e r^{-N}, \qquad \sum_{k<N} \frac{|b_k \xi^k|}{|\xi|^N} \leq C_1 r^{-N} \sum_{k<N} (r/R)^k \leq \frac{C_1 r^{-N}}{1 - r/R}.$$

因此，第一个不等式在 $D = 1/r$ 下成立。对于子扇形区域中的 z，点 zt、$t > 0$ 也都位于其中。将该不等式用于 $\xi = zt$，对 $w_p(t)\, dt/h_p$ 积分，并利用 (2.8)，即可得到 (3.8)。□

定理 3.8。 假设一个牛顿元的系数具有解析尾项。那么，其辅助级数的Q-博雷尔变换可亚纯延拓至整个 *Borel* 平面，且极点仅位于

$$\xi = -\frac{A}{Q\lambda_\nu} Q^{-m}, \qquad m \geq 0.$$

来自第 ν 项的极点阶数至多为 $1 + \deg P_\nu$；在若干项的等差序列相交处，阶数至多为这些上界中的最大值。博雷尔变换在避开穿过这些极点的有限条射线的闭扇区上至多呈多项式增长，并且关于 X 局部一致地成立。其拉普拉斯和 S 是 X 的整函数，在每个节点处都等于终止的牛顿多项式；此外，每条奇异射线上的两个侧向和都存在，并且关于颜色及正模数局部一致地成立。它们的差为正规收敛的留数和

$$\Delta(X, z) = \frac{2\pi i}{h_Q z} \sum_{\alpha \in z\mathbb{R}_{>0}} \mathrm{Res}_{\xi=\alpha} \big(H(X, \xi) w_Q(\xi/z) \big),$$

其中 $H = \widehat{B_Q F}$，跳跃取辐角递减侧的值减去辐角递增侧的值。在避开奇异射线的每个闭扇形区域上，以及颜色的每个紧集上，它满足

$$\left| S(X, z) - \sum_{k<N} c_k B_k^{(A)}(X) z^k \right| \leq C D^N M_N(Q) |z|^N \qquad (N \geq N_0).$$

证明。 由 (2.10)，博雷尔变换为 $\sum_k c_k p_k v^k$ ，其中

$$p_k = \frac{(a,b;Q)_k}{(Q;Q)_k}, \qquad v = -\frac{Q}{A}\xi.$$

固定一个颜色紧集，并选取足够大的 K，使得 $|aQ^K|$， $|bQ^K| < 1$ 一致成立。无穷乘积相消后得到 $p_{K+\ell} = p_K C_K \Psi_K(Q^\ell)$，其中

$$C_K = \frac{(aQ^K, bQ^K; Q)_\infty}{(Q^{K+1}; Q)_\infty}$$

and

$$\Psi_K(s) = \frac{(Q^{K+1}s; Q)_\infty}{(aQ^K s, bQ^K s; Q)_\infty} = \frac{(Q^{K+1}s; Q)_\infty}{\prod_{j\geq 0}(1 - AQ^{K+j}sX + A^2Q^{2K+2j}s^2)}.$$

第二个表达式表明， Ψ_K、 p_K 和 C_K 都是关于 X的全纯函数；这里无需作出任何关于 y的选择。选取足够大的 K，使得对于紧集中的所有颜色， $\Psi_K(s)$和所有 $f_\nu(Q^K s)$都在一个半径大于一的公共圆盘上全纯。于是

$$\Psi_K(s) f_\nu(Q^K s) = \sum_{m\geq 0} e_{\nu,m} s^m, \qquad \sum_m |e_{\nu,m}| < \infty,$$

在紧集上一致成立。记 $\theta_v = v\, d/dv$，于是 $P(\theta_v)v^k = P(k)v^k$。当 $|v|$较小时，博雷尔变换中来自第 ν项的 $k \geq K$ 指标部分为

$$p_K C_K P_\nu(\theta_v) \left[(\lambda_\nu v)^K \sum_{m\geq 0} \frac{e_{\nu,m}}{1 - \lambda_\nu Q^m v} \right],$$

这是将 $(1 - \lambda_\nu Q^m v)^{-1}$ 展开为几何级数，并交换两个绝对收敛级数后得到的。方括号中的级数在点 $v = \lambda_\nu^{-1} Q^{-m}$ 之外正规收敛，且在这些点有简单极点；应用微分算子 $P_\nu(\theta_v)$至多会使极点阶数增加 $\deg P_\nu$。结合 $v = -(Q/A)\xi$，即可得到所述极点。在避开穿过这些极点的射线的闭扇形区域上， $|1 - \lambda_\nu Q^m v| \geq c(1 + |\lambda_\nu Q^m v|)$，并且 $(1 - \lambda_\nu Q^m v)^{-1}$关于 θ_v的每阶导数都被一个与 m无关的常数所界。因此， $P_\nu(\theta_v)$作用于方括号内的表达式后至多呈多项式增长，博雷尔变换也至多呈多项式增长。其余有限个指标 $k < K$ 则贡献一个关于 v的多项式。

根据定理 2.2，拉普拉斯积分在 X中绝对收敛且局部一致，因此 S是 X中的整函数。在节点处，对于节点索引之后的所有 k， $p_k = 0$ ，博雷尔变换是一个多项式，而矩恒等式 (2.8) 逐项再现终止的牛顿多项式。所示的尾项表示是有限个多项式前因子与预解式的欧拉导数的乘积之和，其符号绝对可和且按几何级数衰减。因此，定理 3.2、注记 3.3 和命题 3.4 给出了侧向极限和留数公式；旋转 z 即可处理每条奇异射线。最后，在每个闭子扇区上应用引理3.7，并取在颜色紧集上一致的常数，即可得到余项界。□

改变有限个系数，会在 z 中向形式级数及其和都加上同一个多项式，这由矩恒等式 (2.8) 得出。

3.5. **节点除子**。

定理 3.9. 乘积

$$E_n(X) = \prod_{j\geq 0}(1 - AQ^j X + A^2 Q^{2j}) \tag{3.9}$$

是一个整函数，其单零点恰好位于节点 $x_j^{(n)}$ ，并且

$$E_n(X) = -A(X - x_0^{(n)})E_{n+2}(X). \tag{3.10}$$

如果两个整函数在所有节点处取值相同，那么它们的差为 $E_n(X)H(X)$，其中 H 是唯一的整函数。因此，在所有节点处消失的整函数构成主理想 $E_n\mathcal{O}(\mathbb{C})$。

证明。在 $|X| \le R$ 处，第 j 个因子与 1 的差至多为 $AQ^jR + A^2Q^{2j}$，该项关于 j 可求和，因此该乘积正规收敛且为整函数。第 j 个因子等于$-AQ^j(X - x_j^{(n)})$，因此它只有一个零点 $x_j^{(n)}$；由于这些节点随 j 严格递增，故节点彼此不同。去掉含有 $j = 0$ 的因子，并注意到剩余乘积为 E_{n+2}，即可证明（3.10）。如果一个整函数在所有节点处都为零，那么它除以 E_n 后，在 E_n 的单零点处具有可去奇点，且没有其他奇点。□

特别地，如果不同扇区中的两个和式关于颜色都是整函数，并且在这些节点处都等于终止牛顿多项式，那么它们的差属于 $E_n\mathcal{O}(\mathbb{C})$。

3.6. **求和下的多项式运算**。求和与关于辅助变量的多项式乘法以及正伸缩相交换。这两个事实都用于升秩。

引理 3.10. 假设 $g = B_p f$ 在零点附近及某个开扇区上全纯，并且在每个闭子扇区上具有多项式增长。那么，对于扇区中的 z，

$$\mathcal{S}_p(P(z)f(z)) = P(z)\mathcal{S}_p f(z), \qquad P \in \mathbb{C}[z]. \tag{3.11}$$

求和与每个正实数 c所确定的伸缩算子 $z \mapsto cz$ 也可交换，特别是与 $z \mapsto p^\ell z$ 对 $\ell \in \mathbb{Z}$时可交换。

证明。只需考虑 $P(z) = z$。比较系数，并利用 $M_{k+1}(p) = M_k(p)(1 - p^{k+1})/p^{k+1}$，可得

$$\mathcal{B}_p(zf)(\xi) = \xi \sum_{r \ge 1} p^r g(p^r \xi).$$

该级数正规收敛。若在某个闭子扇区上 $|g(\xi)| \le C(1 + |\xi|^K)$，则

$$\left| \xi \sum_{r \ge 1} p^r g(p^r \xi) \right| \le C|\xi| \left(\frac{p}{1-p} + \frac{p^{K+1}|\xi|^K}{1 - p^{K+1}} \right),$$

因此 $\mathcal{B}_p(zf)$仍具有多项式增长。在第 r 项的拉普拉斯积分中作代换 $u = p^r t$。出现的核因子会相互消去，因为 w_p 的函数方程给出

$$up^{-r} w_p(up^{-r}) = w_p(up^{-(r-1)}) - w_p(up^{-r}),$$

它们对 $r \ge 1$ 求和为 $w_p(u)$。这些因子为正，且 g 具有多项式增长，因此根据绝对收敛，可以交换求和与积分。结果为 $z\mathcal{L}_p g(z)$，这证明了当 $P(z) = z$时的 (3.11)，而归纳法给出一般情形。对于 $c > 0$， $f(cz)$的博雷尔变换为 $g(c\xi)$，在定义$\mathcal{L}_p$的积分中可直接看出这一代换。□

3.7. **差商与节点参数变换**。对于颜色的整函数，令

$$(\mathcal{D}_q f)(y + y^{-1}) = \frac{f(qy + q^{-1}y^{-1}) - f(q^{-1}y + qy^{-1})}{(q - q^{-1})(y - y^{-1})}. \tag{3.12}$$

这里 $[k]_q = (q^k - q^{-k})/(q - q^{-1})$， $[k]_q! = \prod_{j=1}^k [j]_q$，以及 $[0]_q! = 1$。

引理 3.11。在 $y = \pm 1$处的表观奇点是可去的，D_q 是 $\mathcal{O}(\mathbb{C}_X)$ 上的连续自同态，并且

$$\mathcal{D}_q B_k^{(A)} = [k]_q B_{k-1}^{(qA)} \quad (k \ge 1), \qquad \mathcal{D}_q B_0^{(A)} = 0. \tag{3.13}$$

证明。在 $y \mapsto y^{-1}$作用下，(3.12) 的分子和分母都变号，因此商是不变量。在 $y = \pm 1$ 处，两个自变量 $X(qy)$ 和 $X(y/q)$ 重合，因此分子在那里为零，奇点是可去的。$y \in \mathbb{C}^\times$ 的一个关于 $y \mapsto y^{-1}$ 不变的全纯函数，是 $X = y + y^{-1}$的全纯函数，因此 $\mathcal{D}_q f$ 是整函数。由 $y = \pm 1$ 附近的柯西估计，以及 X 变化时 $X(q^{\pm 1}y)$ 始终处于一个紧集中的事实，可得 $\mathsf{O}(\mathbb{C})$ 上的连续性。

对于 (3.13)，先取 A 为一般值。在 $y = AqQ^j$ 处令 $0 \le j \le k-2$，计算 $\mathcal{D}_q B_k^{(A)}$。则 $X(qy) = x_{j+1}^{(A)}$ 和 $X(y/q) = x_j^{(A)}$ 都是 $B_k^{(A)}$ 的零点，因此 $\mathcal{D}_q B_k^{(A)}$ 在$X(AqQ^j) = x_j^{(Aq)}$，$0 \le j \le k-2$ 处为零，这些正是 $B_{k-1}^{(Aq)}$ 的零点。此外，$\mathcal{D}_q$ 将一个次数为 k 的首一多项式映射为一个次数为 $k-1$、首项系数为 $[k]_q$ 的多项式，这一点可由首项 y^k 看出。这就证明了 (3.13) 对一般的 A 成立；又由于等式两边都是 $A^{\pm 1}$ 的多项式，因此对所有 $A \neq 0$ 都成立。□

3.8. **解析尾项的升秩**。不同秩的八字形求和由定理 3.13 的秩阶梯联系起来。这是下面恒等式的一个特例，该恒等式对每个解析尾项都成立。对于节点参数 $0 < A < 1$，记

$$\widehat{F}_{A,c}(X,z) = \sum_{k \ge 0} c_k B_k^{(A)}(X) z^k, \qquad S_{A,c} = \mathcal{L}_Q \mathcal{B}_Q \widehat{F}_{A,c}.$$

定理 3.12. 设 c 具有解析尾项，d 为非负整数，并令

$$c_k^{\langle d \rangle} = \frac{[k+d]_q!}{[k]_q! [d]_q!}\, c_{k+d}. \tag{3.14}$$

则 $c^{\langle d \rangle}$ 具有解析尾项，且可能的奇异方向相同；在每个共同的求和扇区上

$$S_{Aq^d, c^{\langle d \rangle}}(X,z) = \frac{z^{-d}}{[d]_q!} \mathcal{D}_q^d S_{A,c}(X,z). \tag{3.15}$$

若所有 λ_ν 均为正，则该恒等式对负实轴上的侧向和也成立，且跳跃满足

$$\Delta_{Aq^d, c^{\langle d \rangle}}(X,r) = \frac{(-r)^{-d}}{[d]_q!} \mathcal{D}_q^d \Delta_{A,c}(X,r). \tag{3.16}$$

对于单个尾项 $c_k = \lambda^k f(Q^k)$，升阶后的尾项为

$$c_k^{\langle d \rangle} = (\lambda q^{-d})^k f_d(Q^k), \qquad f_d(s) = \lambda^d \frac{(Qs;Q)_d}{(Q;Q)_d} f(Q^d s), \tag{3.17}$$

而多项式因子 $P(k)$ 则替换为 $P(k+d)$。

证明. 由 (3.13) 按系数逐项应用可得，

$$\mathcal{D}_q^d \widehat{F}_{A,c} = [d]_q! z^d \widehat{F}_{Aq^d, c^{\langle d \rangle}}.$$

由于 $[k+d]_q!/([k]_q![d]_q!) = q^{-dk}(Q^{k+1};Q)_d/(Q;Q)_d$，代入 c 的尾项可得 (3.17)。新尾项中以 λq^{-d} 替代了 λ，节点参数为 Aq^d，因此根据定理 3.8，其极点位于 $-(Aq^d/Q)(\lambda q^{-d})^{-1} Q^{-m} = -(A/Q)\lambda^{-1} Q^{d-m}$，与之前位于相同的射线上。根据引理 3.11 中的连续性，$\mathcal{D}_q^d$ 与延拓的Borel变换及拉普拉斯积分可交换，而引理 3.10 处理因子 z^d；这就证明了 (3.15)。引理 A.1 的侧向极限关于 X 局部一致，因此在负实轴上也可以取颜色值的相同有限线性组合，此处 $z^{-d} = (-r)^{-d}$ 在两侧都成立。由此得到 (3.16)。当尾项包含多项式因子 $P(k)$ 时，边界值由附录 A.1 给出。□

记 R_d 为运算 $c \mapsto c^{\langle d\rangle}$，并结合节点参数的变化 $A \mapsto Aq^d$。约去 (3.14) 中间的阶乘后，可得复合律

$$\mathsf{R}_e\mathsf{R}_d = \frac{[d+e]_q!}{[d]_q![e]_q!}\mathsf{R}_{d+e}. \tag{3.18}$$

3.9. 八字结秩梯。 八字结牛顿系数为

$$D_{n,k} = q^{-(n-2)k}\frac{(Q^{n-1};Q)_k}{(Q;Q)_k} = \frac{[k+n-2]_q!}{[k]_q![n-2]_q!}. \tag{3.19}$$

这是命题 4.1 的 $m=1$ 情形。秩二时，所有系数均为 1。记作 $\sum S_n(X,z) = \mathcal{S}_Q F_{4_1,n}(X,z)$。系数 $D_{n,k}$ 具有仅含一个基数 $\lambda = q^{-(n-2)} > 0$ 的解析尾项，因此由定理 3.8 可知，唯一的奇异方向是负实轴：对于 $z \in \Omega$，这些和均有定义，并且在负实轴上具有上、下边界值。

定理 3.13。 对于 $d = n-2$，八字形求和满足

$$S_n(X,z) = \frac{z^{-d}}{[d]_q!}\mathcal{D}_q^d S_2(X,z), \qquad z \in \Omega. \tag{3.20}$$

同一恒等式对两种侧向和及其跳跃均成立。

证明。秩二八字结牛顿级数的系数为 1。(3.14) 中提升后的序列为 $[k+d]_q!/([k]_q![d]_q!) = D_{n,k}$。应用定理 3.12，包括其中关于侧向和的结论。□

八字结在这里很特殊，因为它的秩-n 系数恰好就是提升后的秩二系数。对于 $m \geq 2$ 第 4 节中的扭结 L_m，其系数并不具备这种形式的递增链：它们包含依赖于秩的因子 $g^{(n)}_{m\,k}$，而提升秩二系数并不能得到秩-n系数。

4. 扭结与正谱核

我们沿用第 2 节的乘积记号，现在也将其用于复数 Q，其中 $0 < |Q| < 1$。渐近定理中使用的参数为

$$\begin{aligned} &h > 0, \qquad Q = e^{-h}, \qquad q = e^{-h/2}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \\ &A = q^n = Q^{n/2}, \qquad a = A^2 = Q^n, \qquad \lambda_n = Q^{2-n}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

除非另有说明，秩 n 和扭结参数 m 固定，而 h 趋于零；第 6 节允许秩增长。对称颜色对应单行分拆 (r)，或者等价地，在特化后为 $\mathrm{Sym}^r \mathbb{C}^n$。

令 K_p 表示 Kawagoe [21], 约定下的扭结，并令 $L_m = K_{-m}$，其中$m \geq 1$。在此约定下，K_1 为左手三叶结，且 $L_1 = 4_1$。我们将 $J_r^{(n)}(K;\,q)$ 记为在 $A = q^n$ 处特化的约化零框架对称颜色 HOMFLY–PT 不变量；无结的取值为一。在秩二时，$J_r^{(2)}(K;\,q)$ 是维数为 $r+1$、变量为 $Q = q^2$ 的标准约化带色 Jones 多项式。

定义独立 A by 的有限系数

$$g_{1,k}(A;Q) = 1, \qquad g_{m,k}(A;Q) = \sum_{j=0}^{k} A^{2j}Q^{j(j-1)}\begin{bmatrix}k\\ j\end{bmatrix}_Q g_{m-1,j}(A;Q), \tag{4.2}$$

并置于 $g^{(n)}_{m,\,k} = g_{m,\,k}(Q^{n/2};Q)$。因此

$$g^{(n)}_{m,k} = \sum_{j=0}^{k} Q^{j(j+n-1)}\begin{bmatrix}k\\ j\end{bmatrix}_Q g^{(n)}_{m-1,j}. \tag{4.3}$$

为便于参考，我们再次列出基和秩因子：

$$x_r^{(n)} = q^{n+2r} + q^{-n-2r}, \qquad B_k^{(n)}(X;h) = \prod_{j=0}^{k-1}(X - x_j^{(n)}), \tag{4.4}$$

$$D_{n,k} = q^{-(n-2)k}\frac{(Q^{n-1};Q)_k}{(Q;Q)_k}. \tag{4.5}$$

命题 4.1. 对于 $m \geq 1$、$n \geq 2$ 和 $r \geq 0$，刚刚指定的不变量具有如下有限展开

$$J_r^{(n)}(L_m;q) = \sum_{k=0}^{r} D_{n,k} g_{m,k}^{(n)} B_k^{(n)}(x_r^{(n)};h). \tag{4.6}$$

该等式是 *Laurent* 多项式恒等式；当 $h > 0$ 时，右侧的特化 $q = e^{-h/2}$ 应作相应理解。

证明。记 $\{z\} = z - z^{-1}$ 以及 $[j]_q = (q^j - q^{-j})/(q - q^{-1})$。Kawagoe 关于约化零框架不变量的 skein 公式 [21,定理 5.1 和推论 5.2]为

$$H_r(K_p;q,A) = \sum_{k=0}^{r} F_k^{(p)}(A,q)\frac{[r]_q!}{[k]_q![r-k]_q!}\prod_{j=0}^{k-1}\{Aq^{r+j}\}\{Aq^{j-1}\}. \tag{4.7}$$

其有限谱表达式为

$$F_k^{(p)} = \sum_{j=0}^{k} V_{kj}\Lambda_j^p, \qquad \Lambda_j = A^{2j}q^{2j(j-1)}, \qquad F_k^{(-1)} = 1,$$

其中

$$V_{kj} = (-1)^j A^k q^{k(k-1)/2}\frac{[k]_q!}{[j]_q![k-j]_q!}\frac{\{Aq^{2j-1}\}}{\prod_{b=j-1}^{k+j-1}\{Aq^b\}}.$$

现在我们将此公式转化为递推关系 (4.2)。令 $a = A^2$，并定义

$$\mathsf{B}_{ki} = (-1)^{k-i}a^k Q^{\binom{k}{2}+\binom{i}{2}}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_Q.$$

将对称二项式转换为高斯二项式，可将谱矩阵改写为

$$V_{kj} = (-1)^{k+j}a^k Q^{\binom{k}{2}+\binom{j}{2}}\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_Q \frac{1 - aQ^{2j-1}}{(aQ^{j-1};Q)_{k+1}}.$$

对于 $d \geq 0$，有限恒等式

$$S_d(a) := \sum_{t=0}^{d}\begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix}_Q a^t Q^{t(t-1)}(aQ^t;Q)_{d-t} = 1 \tag{4.8}$$

由高斯帕斯卡恒等式可得：$S_0 = 1$，且 $S_{d+1}(a) = (1 - aQ^d)S_d(a) + aQ^d S_d(aQ)$。对于 $t = i - j$，约去所示乘积后得到

$$\frac{(\mathsf{B}V)_{kj}}{\Lambda_j V_{kj}} = \sum_{t=0}^{k-j}\begin{bmatrix} k-j \\ t \end{bmatrix}_Q (aQ^{2j})^t Q^{t(t-1)}(aQ^{2j+t};Q)_{k-j-t} = 1.$$

因此 $F^{(p)} = \mathsf{B}F^{(p-1)}$。有限高斯求逆给出

$$(\mathsf{B}^{-1})_{ij} = A^{-2j}Q^{-j(j-1)}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_{Q^{-1}}.$$

事实上，它与 B 的乘积在对角线以外化简为有限和 $(1;Q)_{i-j} = 0$，且对角线上的元素均为 1。这些恒等式首先在一般参数下得到证明，然后通过清除分母推广。

镜像变换将 (A,q) 替换为 (A^{-1},q^{-1})。(4.7) 中的对称量子二项式保持不变，而 $2k$ 花括号会产生偶数个负号。在此代换下，B^{-1} 变为矩阵 $P_{ij}=A^{2j}Q^{j(j-1)}\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_Q$。由于 $F^{(-1)}=\mathbf{1}$，L_m 的微分系数为 $P^{m-1}\mathbf{1}$，这正是 (4.2)。这一演化也记录在 [23, (8)–(10)] 中。

最后，在 $A=q^n$，

$$x_r^{(n)}-x_j^{(n)}=\{q^{r-j}\}\{q^{n+r+j}\},\qquad D_{n,k}=\frac{\prod_{j=0}^{k-1}\{q^{n-1+j}\}}{\prod_{j=1}^{k}\{q^j\}}.$$

因此，(4.7) 的每一项都与 (4.6) 中对应的项完全相同。 □

引理 4.2。对于固定的 m，数值 $g_{m,\,k}(A;\,Q)$ 关于 k 在 $\{0<|Q|<1\}\times\mathbb{C}_A$ 的紧子集上一致有界。它们在 w 中具有整函数插值

$$G_1(A,w;Q)=1,\qquad G_m(A,w;Q)=\sum_{j\ge 0}\frac{A^{2j}Q^{j(j-1)}(w;Q^{-1})_j}{(Q;Q)_j}g_{m-1,j}(A;Q), \tag{4.9}$$

其中 $G_m(A,Q^k;\,Q)=g_{m,\,k}(A;\,Q)$。该级数关于 $0<|Q|<1$、A、$w\in\mathbb{C}$ 在紧子集上联合正规收敛。

证明。在每个这样的紧集上，高斯二项式关于两个指标一致有界，因为其分子乘积有界，而分母乘积远离零。利用收敛级数 $\sum_j R^{2j}|Q|^{j(j-1)}$ 对 (4.2) 作归纳，便可证明第一个断言。在 $|w|\le T$，$|(w;\,Q^{-1})_j|\le(1+T)^j|Q|^{-j(j-1)/2}$。剩余的二次幂保证 (4.9) 正规收敛。在 $w=Q^k$，含有 $j>k$ 的项为零，而当 $j\le k$ 时，$(Q^k;\,Q^{-1})_j/(Q;Q)_j=\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_Q$。□

若 $X=y+y^{-1}$，直接因式分解可得

$$B_k^{(n)}(X;h)=(-1)^kA^{-k}Q^{-k(k-1)/2}(Ay,A/y;Q)_k.$$

因此，牛顿级数的 Q-博雷尔变换为

$$H_{m,n,h}(X,\xi)=\sum_{k\ge 0}g_{m,k}^{(n)}u_{n,k}(X)(-\lambda_n\xi)^k,\qquad u_{n,k}(X)=\frac{(Q^{n-1},Ay,A/y;Q)_k}{(Q;Q)_k^2}. \tag{4.10}$$

它在 $|\lambda_n\xi|<1$ 上正规收敛，并关于 X 局部一致收敛。y,y^{-1} 中的对称乘积视为关于 X 的函数；例如 $(Ay,A/y;Q)_k=\prod_{j<k}(1-AQ^jX+A^2Q^{2j})$。定理 3.8 适用于这些系数，而牛顿级数在 $z=1$ 处的和是颜色的整函数

$$S_{m,n,h}(X)=\frac{1}{h}\int_0^\infty\frac{H_{m,n,h}(X,t)}{(-t;Q)_\infty}\,dt. \tag{4.11}$$

4.1. 正核。在本小节中，$Q,a\in(0,1)$ 相互独立，我们记作 $c_{m\,,k}^{(a)}=g_{m,k}(\sqrt{a};Q)$。设

$$P_{k,j}^{(a)}=a^jQ^{j(j-1)}\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_Q,\qquad \mathsf{K}_{k,j}^{(a)}=\frac{(a;Q)_k}{(a;Q)_j}P_{k,j}^{(a)}.$$

这些有限权重是 q-β-二项分布权重 [2, 附录 A.2]的一个特化。系数递推关系还需要一个无限对偶核。现在我们构造这个核，并证明它非负且行和为一。对于整数 $r\ge 0$，定义

$$C_r=(a;Q)_\infty\sum_{j\ge 0}\frac{a^jQ^{j(j-1)+rj}}{(Q;Q)_j(a;Q)_j}. \tag{4.12}$$

引理 4.3。有 $0<C_r\le C_0=1$ 且

$$C_r=\sum_{j\ge 0}\frac{(Q^r;Q)_j}{(Q;Q)_j}(-a)^jQ^{j(j-1)/2}. \tag{4.13}$$

非负核

$$\widehat{\mathsf{K}}^{(a)}_{r,l}=\frac{a^l(Q^r;Q)_l}{(Q;Q)_l}C_{r+l} \tag{4.14}$$

的行和为 *1*，且满足

$$\sum_{j=0}^{k}\mathsf{K}^{(a)}_{k,j}Q^{rj}=\sum_{l\ge 0}\widehat{\mathsf{K}}^{(a)}_{r,l}Q^{kl}. \tag{4.15}$$

有限核$\mathsf{K}^{(a)}$ 的行和也为 *1*。

证明。 在 (4.12) 中，将 $(a;Q)_\infty/(a;Q)_j$ 替换为 $(aQ^j;Q)_\infty$ ，并使用欧拉乘积展开。在所得的双重级数中令 $N=j+l$。二次指数变为 $\binom{N}{2}+\binom{j}{2}+rj$，有限 q 二项分布定理给出 (4.13)。重排是绝对收敛的： $a<1$，两个分母乘积都远离零，且重新分组前的所有二次指数均非负。交错公式给出 $C_0=1$，正项公式给出 $0<C_r\le C_0$。

我们使用海涅对称性的如下合流形式 [16, 25], ，约定 n

$${}_1\phi_1(B;C;Q,z)=\sum_{j\ge 0}\frac{(B;Q)_j}{(C;Q)_j(Q;Q)_j}(-z)^jQ^{\binom{j}{2}}:$$

$$(C;Q)_\infty\,{}_1\phi_1(B;C;Q,z)=(z;Q)_\infty\,{}_1\phi_1(Bz/C;z;Q,C). \tag{4.16}$$

由 [25, 式 17.6.7]，代入 $(a,\ b,\ c,\ z)=(B,\ b,\ C,\ z/b)$ 并令 $b\to\infty$ 即得。直接证明如下。利用欧拉恒等式展开左侧的 $(CQ^j;Q)_\infty$。收集 $C,\ z$ 中总次数为 N 的项后，剩余的多项式为

$$\sum_{j=0}^{N}\begin{bmatrix}N\\ j\end{bmatrix}_Q(B;Q)_jz^jC^{N-j}.$$

展开 $(B;Q)_j$ 并利用 $\begin{bmatrix}N\\ j\end{bmatrix}_Q\begin{bmatrix}j\\ r\end{bmatrix}_Q=\begin{bmatrix}N\\ r\end{bmatrix}_Q\begin{bmatrix}N-r\\ j-r\end{bmatrix}_Q$，可将其改写为

$$\sum_{r=0}^{N}\begin{bmatrix}N\\ r\end{bmatrix}_Q(-Bz)^rQ^{\binom{r}{2}}\sum_{l=0}^{N-r}\begin{bmatrix}N-r\\ l\end{bmatrix}_Qz^lC^{N-r-l}.$$

内层求和关于 $C,\ z$ 对称，从而证明了 (4.16)。二次幂保证该级数正规收敛，而可去的参数值则由解析延拓得到。

对于 $|at|<1$，定义

$$K_r(t)=\frac{(a;Q)_\infty}{(at;Q)_\infty}\sum_{j\ge 0}\frac{a^jQ^{j(j-1)+rj}(t;Q^{-1})_j}{(Q;Q)_j(a;Q)_j}.$$

在 $t=Q^k$ 处，这就是 (4.15) 的左侧。将 (4.16) 应用于 $(B,\ C,\ z)=(t^{-1},\ a,\ atQ^r)$。由于 r 是整数，故有

$$K_r(t)=\sum_{j\ge 0}\frac{(Q^r;Q)_j(-a)^jQ^{\binom{j}{2}}}{(Q;Q)_j(at;Q)_{r+j}}.$$

该代换最初对 $t\neq 0$ 进行，并全纯地延拓到零点。展开 $1/(at;Q)_{r+j}=\sum_{l\ge 0}(Q^{r+j};Q)_l(at)^l/(Q;Q)_l$。恒等式 $(Q^r;Q)_j(Q^{r+j};Q)_l=(Q^r;Q)_l(Q^{r+l};Q)_j$ 以及（4.13）表明 $[t^l]K_r(t)=\widehat{\mathsf{K}}^{(a)}_{r\,l}$，。这些重排在 $|at|<1$的紧子集上一致绝对收敛。在 $t=1$处， K_r的第一个公式中只剩下 $j=0$，因此其

非负系数之和为一。在 $r=0$ 处，对偶行集中于零点，这证明了最后的断言。□

命题 4.4. 存在概率分布 $p_{m}^{(a)}{}_{,l}$，定义在 $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 上，使得

$$(a;Q)_k c_{m,k}^{(a)} = \sum_{l\ge 0} p_{m,l}^{(a)} Q^{kl}. \tag{4.17}$$

它们由下式确定

$$p_{1,l}^{(a)} = (a;Q)_\infty \frac{a^l}{(Q;Q)_l}, \qquad p_{m,l}^{(a)} = \sum_{r\ge 0} p_{m-1,r}^{(a)} \widehat{\mathsf{K}}_{r,l}^{(a)}.$$

特别地，$1 \le c_{m}^{(a)}{}_{,k} \le (a;Q)_k^{-1}$且

$$\frac{G_m(\sqrt{a},t;Q)}{(at;Q)_\infty} = \frac{1}{(a;Q)_\infty} \sum_{l\ge 0} p_{m,l}^{(a)} t^l, \qquad |at|<1. \tag{4.18}$$

证明。 q-二项分布定理证明了 $m=1$ 处的矩恒等式。将系数递推乘以 $(a;Q)_k$，并应用 (4.15)。Tonelli 定理证明了归纳过程，而行和给出了归一化。较低的系数界来自递推关系中的 $j=0$ 项；较高的界则由矩恒等式推出。由于 $C_r \le 1$，有 $p_{m}^{(a)}{}_{,l} \le a^l/(Q;Q)_l$。因此，(4.18) 中的级数在 $|at|<1$ 上全纯。根据矩恒等式，它在 $t=Q^k$ 处的值与左侧相等。恒等定理证明了所示的插值公式。□

4.2. **余项公式**。 回到 (4.1)。令 $p_{m,n,i} = p^{(Q^n}{}_{)\,m,i}$，并对整数 $K\ge 1$，定义倾斜概率

$$\pi_{m,n,K,i} = \frac{p_{m,n,i} Q^{Ki}}{(Q^n;Q)_K g_{m,K}^{(n)}}. \tag{4.19}$$

记 $D = X-2$和 $\tau(v) = 2$双曲余弦 $v-2$。从 (4.10) 到 $(Q^n;Q)_k$ 的 $u_{n,k}$之比具有尾生成函数

$$\psi_{n,K,D}(v) = \frac{(Q^{K+1}v;Q)_\infty^2}{(1-Q^{K+n-1}v)(Q^{K+n/2}yv, Q^{K+n/2}v/y;Q)_\infty}. \tag{4.20}$$

我们将其分解为$F_{n,K,h}(v)\psi_{n,K,D}^*(v)$，其中

$$\psi_{n,K,D}^*(v) = \frac{(Q^{K+n/2}v, Q^{K+n/2+1}v;Q)_\infty}{(Q^{K+n/2}yv, Q^{K+n/2}v/y;Q)_\infty}, \tag{4.21}$$

$$F_{n,K,h}(v) = \frac{(Q^{K+1}v;Q)_\infty^2}{(1-Q^{K+n-1}v)(Q^{K+n/2}v, Q^{K+n/2+1}v;Q)_\infty}. \tag{4.22}$$

将归一化系数定义为

$$\frac{\psi_{n,K,D}^*(v)}{\psi_{n,K,D}^*(1)} = \sum_{l\ge 0} \mu_l(D) v^l, \qquad \frac{F_{n,K,h}(v)}{F_{n,K,h}(1)} = \sum_{r\ge 0} \nu_r v^r. \tag{4.23}$$

引理 4.5。 若 $|D| < \tau((K+n/2)h)$，则 (4.23) 中的两个系数序列都绝对可和，且其和为一。对于实数 $0 \le D < \tau((K+n/2)h)$，权重 $\mu_l(D)$ 非负。若 $Kh \ge U > 0$，则

$$\sum_r |\nu_r| \le (1-e^{-U})^{-2(n+1)}. \tag{4.24}$$

若 $D_0 \ge 0$ 且 $|D-D_0| \le \eta < \tau((K+n/2)h) - D_0$，则

$$\sum_l |\mu_l(D)| \le \prod_{j\ge 0} \frac{\tau((K+n/2+j)h) - D_0 + \eta}{\tau((K+n/2+j)h) - D_0 - \eta}. \tag{4.25}$$

特别地，若 $Kh \ge U$, $\tau(U) > D_0$，且 $\eta \le (\tau(U) - D_0)/2$，则

$$\sum_{l} |\mu_l(D)| \le \exp\left\{ \frac{4\eta}{h(1 - D_0/\tau(U))(e^{U} - 1)} \right\}. \tag{4.26}$$

在秩二时 $F_{2,\ K,\ h} = 1$。

证明。(4.21) 中每个因子在 $c = Q^{K+n/2+j}$ 下均为

$$\frac{(1 - cv)(1 - Qcv)}{(1 - cv)^2 - Dcv} = \frac{1 - Qcv}{1 - cv} \left(1 - \frac{Dcv}{(1 - cv)^2}\right)^{-1}.$$

其泰勒系数在 D, v 中联合非负。所述定义域保证其在 v 中一个大于单位圆盘的圆盘上收敛。在 D 处用 $|D|$ 处的系数作主控，并消去归一化中与 D 无关的因子，即可证明 (4.25)。

设 $\| \sum a_r v^r \|_{\mathcal{W}} = \sum |a_r|$。$\log F_{n,\ K,\ h}$ 中 v^r 的系数为

$$\frac{Q^{Kr}}{r} \left[x^{n-1} + \frac{x^{n/2} + x^{n/2+1} - 2x}{1 - x} \right], \qquad x = Q^r.$$

由 $(1 - x^b)/(1 - x) \le \max(1,\ b)$，当 $b \ge 0, 0 \le x < 1$ 时，括号内的绝对值至多为 $n + 1$。因此 $\| \log F \|_{\mathcal{W}} \le -(n+1) \log(1 - e^{-U})$。次乘性将$F$和 F^{-1} 的范数界定为 $(1 - e^{-U})^{-(n+1)}$，而在 1 处归一化即可证明 (4.24)。

对于 (4.26)，(4.25) 中每个因子的对数至多为 $4\eta/(\tau(v) - D_0)$，且 $\tau(v) - D_0 \ge (1 - D_0/\tau(U))\,\tau(v)$。(4.25) 中的自变量 $(K + n/2 + j)h$, $j \ge 0$ 均至少为 $(K + 1)h$。由递减被积函数比较可得

$$\int_{U}^{\infty} \frac{dv}{2\cosh v - 2} = \frac{1}{e^{U} - 1}$$

从而得到所需结论。(4.23) 中所有归一化因子在 $v = 1$ 处的值均为一，这就证明了质量断言。□

对每个整数 $K \ge 1$，令 T_K 为具有如下密度的正随机变量

$$\frac{t^K}{h M_K(Q) (-t; Q)_\infty}\, dt. \tag{4.27}$$

矩公式 (2.8) 表明，该密度的总质量为一。

定理 4.6。对于固定的 m, n, h，芽 (4.10) 可亚纯延拓至 ξ-平面，且可能的简单极点仅位于 $\xi = -Q^{n-2-j}$, $j \ge 0$。积分 (4.11) 在 $X \in \mathbb{C}$ 中局部一致收敛，并定义一个整函数。它插值对称着色不变量：

$$S_{m,n,h}(x_r^{(n)}) = J_r^{(n)}(L_m; q). \tag{4.28}$$

对于 $K \ge 1$ 和 $|X - 2| < \tau((K + n/2)h)$，精确余项为

$$\begin{aligned} S_{m,n,h}(X) - \sum_{k<K} D_{n,k} g_{m,k}^{(n)} B_k^{(n)}(X; h) &= D_{n,K} g_{m,K}^{(n)} B_K^{(n)}(X; h) \\ &\quad \times \sum_{i,r,l \ge 0} \pi_{m,n,K,i} \nu_r \mu_l (X - 2) \mathbb{E} \frac{1}{1 + \lambda_n Q^{i+r+l} T_K}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

特别地，其绝对值至多为

$$D_{n,K} g_{m,K}^{(n)} |B_K^{(n)}(X; h)| \left(\sum_r |\nu_r| \right) \left(\sum_l |\mu_l(X - 2)| \right). \tag{4.30}$$

证明。令 $\widetilde{u}_{n,\ k}=u_{n,\ k}/(Q^n;Q)_k$。(4.20) 中无穷乘积的约去，给出了 $\widetilde{u}_{n,\ K+j}$ 与 $\widetilde{u}_{n,\ K}$ 的比值，即 j 阶 Q 矩，其中的卷积由 ν 和 μ 得到。将其与 (4.17) 结合可得

$$\frac{g^{(n)}_{m,K+j}u_{n,K+j}(X)}{g^{(n)}_{m,K}u_{n,K}(X)}=\sum_{i,r,l\geq 0}\pi_{m,n,K,i}\nu_r\mu_l(X-2)Q^{(i+r+l)j}.$$

首先取 X，使其避开 u_n 的有限个零点，$_K$。对 $|\lambda_n\xi|<1$ 中的几何级数求和，得到 Borel 尾项:

$$g^{(n)}_{m,K}u_{n,K}(X)(-\lambda_n\xi)^K\sum_{i,r,l\geq 0}\frac{\pi_{m,n,K,i}\nu_r\mu_l(X-2)}{1+\lambda_nQ^{i+r+l}\xi}.$$

这些权重绝对可和。在避开所示极点序列的每个紧集上，预解式一致有界，这证明了原芽的亚纯延拓。在正实射线上，它们的绝对值至多为一。因此，定理 2.2 允许逐项积分，并且

$$(-\lambda_n)^KM_K(Q)u_{n,K}(X)=D_{n,K}B^{(n)}_K(X;h)$$

证明了 (4.29)。

对于 X 的每个紧集，都存在一个充分大的 K，使其满足定义域条件。所有乘积和归一化权重在此处均为全纯函数，且全变差局部有界。因此，该公式可延拓至第一步中排除的零点处，并证明积分的局部正规收敛以及关于 X的整性。在节点处，Borel 级数终止；逐项应用 (2.8) 即得 (4.28) 和命题 4.1。□

在秩二且 $0\leq X-2<\tau$ 为实数($(K+1)h$) 时，(4.29) 中的所有权重均非负，归一化余项是某个概率测度的 Stieltjes 变换。在更高秩时，权重 ν_r 可能为负，但其全变差由 (4.24) 控制。

4.3. 固定秩下的 Stokes 分离。 (4.10) 中 ξ^k 的系数，是对应的八字结系数乘以 $G_m(A,\ Q^k;Q)$，其中 G_m 是 (4.9) 中的整函数。去掉有限个初始项后，这就是定理 3.1 的符号乘法。因此，G_m 作为谱乘子，将八字结的博雷尔变换、拉普拉斯和及跳跃转化为 L_m 的相应对象。

记 $S_{m,\ n,\ h}(X,\ z)=\mathcal{L}_QH_{m,\ n,\ h}(X,\ \cdot)(z)$; 则 $S_{m,\ n,\ h}(X,\ 1)=S_{m,\ n,\ h}(X)$。令

$$\Delta_{m,n,h}(X,r)=S_{m,n,h}(X,-r+i0)-S_{m,n,h}(X,-r-i0),\qquad r>0,$$

并且，对 $X=y+y^{-1}$，定义

$$\Lambda_n(X)=\frac{(Q^{n-1},Ay,A/y;Q)_\infty}{(Q;Q)^2_\infty},\qquad \rho_n=Q^{n-2},\qquad A=Q^{n/2}.$$

Λ_n 的零点恰好是插值节点。

命题 4.7。 固定 $h>0$、$n\geq 2$ 以及整数 $1\leq i<j$。令

$$g_{ij}(A)=G_j(A,0;Q)-G_i(A,0;Q).$$

Then

$$g_{ij}(A)\geq\frac{1}{1-Q}\sum_{a=i}^{j-1}A^{2a}>0. \tag{4.31}$$

在每个非节点颜色 X处,

$$\begin{aligned}\Delta_{j,n,h}(X,r)-\Delta_{i,n,h}(X,r)=&-\frac{2\pi i\Lambda_n(X)}{h}\frac{\rho_n}{r}w_Q(\rho_n/r)\\&\times\{g_{ij}(A)+O(r/\rho_n)\},\qquad r\downarrow 0.\end{aligned} \tag{4.32}$$

该估计在非节点颜色的紧集上一致成立。特别地，这些跳跃是模数的两两不同函数，并且在每个充分小的正模数处，每一对跳跃都彼此分离。

证明。记 $d_m(A,t)=G_m(A,t;Q)-G_{m-1}(A,t;Q)$。当 $A,Q>0$ 时，递推关系具有非负权重。对于 $m=2$，其正指标项给出

$$d_2(A,Q^k)\ge A^2\frac{1-Q^k}{1-Q}.$$

对于 $m\ge 3$，将两个递推关系相减，得到

$$d_m(A,Q^k)=\sum_{a=0}^{k}A^{2a}Q^{a(a-1)}\begin{bmatrix}k\\a\end{bmatrix}_Q d_{m-1}(A,Q^a).$$

归纳可得，所有项均非负。在 $k=1$ 处应用相同的递推关系，得到 $G_m(A,Q;Q)=1+A^2+\cdots+A^{2m-2}$。保留 $a=1$ 项即可证明

$$d_m(A,Q^k)\ge A^{2m-2}\frac{1-Q^k}{1-Q}.$$

令 $k\to\infty$，并对 m 求和消去中间项，得到 (4.31)。

在 $t=0$ 附近，定义

$$\psi_n(t)=\frac{(Qt;Q)_\infty^2}{(Q^{n-1}t,Ayt,At/y;Q)_\infty},\qquad \psi_n(t)\{G_j(A,t;Q)-G_i(A,t;Q)\}=\sum_{\ell\ge 0}a_\ell(X)t^\ell.$$

因此，$a_0(X)=g_{ij}(A)$。(4.10) 中的乘积相消后，再对足够远处的尾项进行几何求和，得到

$$\operatorname{Res}_{\xi=-\rho_nQ^{-\ell}}(H_{j,n,h}-H_{i,n,h})=\Lambda_n(X)a_\ell(X)\rho_nQ^{-\ell}.$$

在每个紧致颜色集上，ψ_n 的芽具有公共正半径，其系数满足 $|a_\ell(X)|\le CD^\ell$。现在，定理 3.2 的侧向留数公式及其有限尾项版本给出跳跃之差：

$$-\frac{2\pi i\Lambda_n(X)}{h}\sum_{\ell\ge 0}a_\ell(X)\tau Q^{-\ell}w_Q(\tau Q^{-\ell}),\qquad \tau=\rho_n/r.$$

核函数方程给出

$$\frac{\tau Q^{-\ell}w_Q(\tau Q^{-\ell})}{\tau w_Q(\tau)}=\frac{Q^{-\ell}}{\prod_{a=1}^{\ell}(1+\tau Q^{-a})}\le \tau^{-\ell}Q^{\ell(\ell-1)/2}.$$

对于 $\tau>D$，归一化后满足 $\ell\ge 1$ 的各项之和为 $O(\tau^{-1})$，且在紧集上一致成立。剩余项为 $g_{ij}(A)>0$，由此证明 (4.32)。在不含节点的紧集上，因子 $\Lambda_n(X)$ 有正下界。$\square$

5. Alexander 根处的临界极限

在迹坐标 $X=t+t^{-1}$ 中，L_m 的亚历山大多项式归一化为在 $t=1$ 处取值为一，其表达式为 $\Delta_m(X)=1-m(X-2)$。其零点为 $X_m=2+1/m$。对于每个固定的 Newton 指标，系数和基的经典极限为

$$D_{n,k}\longrightarrow\binom{k+n-2}{n-2},\qquad g_{m,k}^{(n)}\longrightarrow m^k,\qquad B_k^{(n)}(X;h)\longrightarrow(X-2)^k.$$

对于 $|m(X-2)|<1$，相应的级数收敛：

$$\sum_{k\ge 0}\binom{k+n-2}{n-2}[m(X-2)]^k=[1-m(X-2)]^{-(n-1)}.$$

在秩二情形下，这是 Melvin–Morton–Rozansky 展开的逆亚历山大多项式[14, 13]。命题 5.11 证明了在根以下的量子颜色处，该极限是一致的；定理 5.13 则证明了对于解析插值，在距离根为 $\sqrt{h}$（分别为$h^{2/3}$）的范围内该结论成立。在根处，几何级数发散，而其和由在极限下仍然存在的第一个衰减因子控制：当 $m \geq 2$ （第 5.2 节）时，系数的高斯衰减$g_{m,k}^{(n)}/m^k$ 以及当 $m = 1$（第 5.3 节）时，牛顿乘积的三次衰减。

5.1. 词估计。 对于一个词 $w = (w_1, \ldots, w_k) \in \{1, \ldots, m\}^k$，令

$$N_s(w) = \#\{j : w_j \leq s\}, \qquad \mathrm{inv}(w) = \#\{i < j : w_i > w_j\},$$

并令

$$E_{m,n}(w) = \mathrm{inv}(w) + \sum_{s=1}^{m-1} N_s(w)(N_s(w) + n - 1). \tag{5.1}$$

Put

$$\alpha_m = \frac{(m-1)(4m+1)}{12m}, \qquad \beta_{m,n} = \frac{(m-1)(8m-1)}{12m} + \frac{(n-2)(m-1)}{2}. \tag{5.2}$$

引理 5.1。 若从$\{1, \ldots, m\}^k$中均匀随机选取一个词，则

$$\frac{g_{m,k}^{(n)}}{m^k} = \mathbb{E}e^{-hE_{m,n}}, \qquad \mathbb{E}E_{m,n} = \alpha_m k^2 + \beta_{m,n} k. \tag{5.3}$$

对于 $b_{m,\,n} = n(m-1) + 1$，中心化能量满足

$$\mathbb{E}e^{t(E_{m,n} - \mathbb{E}E_{m,n})} \leq \exp\left(\frac{b_{m,n}^2}{8} t^2 k^3\right) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{5.4}$$

对于 $m \geq 2$，令 $p_m = (m-1)/m$。对于每个 $h > 0$ 和 $k \geq 0$，

$$\frac{g_{m,k}^{(n)}}{m^k} \leq e^{-hp_m^2 k^2/4} + e^{-p_m^2 k/2}. \tag{5.5}$$

证明。 移除所有字母 m，并令剩余子词的长度为 j。交叉逆序的生成多项式为 $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_Q$，额外能量为 $j(j+n-1)$。由归纳法可得递推关系 (4.3)，从而证明第一个恒等式。随机变量 N_s服从成功概率为 s/m的二项分布。因此

$$\mathbb{E}\,\mathrm{inv}(w) = \frac{m-1}{4m}(k^2 - k), \qquad \mathbb{E}[N_s(N_s + n - 1)] = \frac{s^2}{m^2}k^2 + \left(\frac{ns}{m} - \frac{s^2}{m^2}\right)k.$$

求和即可得到所示的均值。

改变一个字母，逆序数至多改变 $k-1$，每个二次计数项至多改变 $2k+n-2$。对于 $k \geq 1$，总变化至多为 $b_{m,\,n}k$。依次揭示各个独立字母。相应 Doob 鞅的每个增量的条件取值范围长度至多为 $b_{m,\,n}k$。若一个中心化随机变量的取值范围长度为 b，其对数矩母函数的二阶导数至多为 $b^2/4$：该导数是在指数倾斜下的方差，而其支撑集的范围相同。从零点起积分两次，可得对数矩母函数至多为 $b^2t^2/8$。将此条件界应用于鞅增量，即可证明 (5.4)。

对于最后一个估计，在递推关系中使用 $g_{m-1,j}^{(n)} \leq (m-1)^j$, $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_Q \leq \binom{k}{j}$和 $n \geq 2$。对于 $J \sim \mathrm{Bin}(k, p_m)$，结果有界于 $\mathbb{E}e^{-hJ(J+1)}$。在 $J \geq p_m k/2$ 上，它至多为 $e^{-hp_m^2 k^2/4}$。将同样的有界范围矩估计应用于伯努利变量之和，可得$\mathbb{P}(J - p_m k \leq -p_m k/2) \leq e^{-p_m^2 k/2}$。这就证明了 (5.5)。□

引理 5.2。对于每个固定的 $m \ge 2$ 和 $n \ge 2$，存在常数 $a_0, C > 0$，使得对于 $\varepsilon = \sqrt{h}$ 和 $t = \varepsilon k$，只要 $hk \le a_0$，

$$\frac{g_{m,k}^{(n)}}{m^k} \le e^{-\alpha_m t^2/2}, \tag{5.6}$$

$$\left| \frac{g_{m,k}^{(n)}}{m^k} - e^{-\alpha_m t^2} \right| \le C\varepsilon (t + t^3) e^{-\alpha_m t^2/2}. \tag{5.7}$$

证明。令 $B = b_{m,n}^2/8$ 并选取 $a_0 \le \alpha_m/(2B)$。由詹森不等式和 (5.4) 可得

$$1 \le \mathbb{E} e^{-h(E_{m,n} - \mathbb{E}E_{m,n})} \le e^{Bh^2 k^3}.$$

由于 $\beta_{m,n} \ge 0$ 且 $Bh^2k^3 \le \alpha_m hk^2/2$，第一个估计便成立。第二个估计中的差至多为

$$e^{-\alpha_m hk^2} \left(\beta_{m,n} hk + e^{Bh^2k^3} - 1 \right) \le C(hk + h^2k^3) e^{-\alpha_m hk^2/2}.$$

使用 $hk = \varepsilon t$ 和 $h^2k^3 = \varepsilon t^3$。 □

秩因子在两个临界尺度上都满足相同的估计。

引理 5.3. 设 $d = n - 2$。对于所有 $h > 0$，

$$D_{n,k} = \prod_{r=1}^{d} \frac{\sinh(h(k+r)/2)}{\sinh(hr/2)} \le e^{hdk/2} \binom{k+d}{d}. \tag{5.8}$$

固定 $U > 0$，令 $0 < h \le 1$，并取 $\rho \in \{\sqrt{h}, h^{2/3}\}$。对于 $hk \le U$ 和 $t = \rho k$，

$$\rho^d D_{n,k} \le C_{n,U} (1 + t)^d, \tag{5.9}$$

$$\left| \rho^d D_{n,k} - \frac{t^d}{d!} \right| \le C_{n,U} \rho (1 + t)^{d+2}. \tag{5.10}$$

证明。约去波赫哈默尔乘积，得到 $D_{n,\,k} = e^{hdk/2} \prod_{r=1}^{d} (1 - Q^{k+r})/(1 - Q^r)$。这证明了等式 (5.8)；不等式由 $(1 - e^{-x})/x$ 的单调性得出。对于收敛速率，写作

$$D_{n,k} = \binom{k+d}{d} \prod_{r=1}^{d} \frac{f(h(k+r)/2)}{f(hr/2)}, \qquad f(x) = \frac{\sinh x}{x}, \quad f(0) = 1.$$

在所讨论的有界辐角区间上，$f(x) = 1 + O(x^2)$，且 f 远离零点。因此，该乘积与 1 的差至多为 $C_{n,U} h^2 (k+d)^2$。此外，$\rho^d \binom{k+d}{d} = \prod_{r=1}^{d} (t + \rho r)/d!$ 它与 $t^d/d!$ 的差有界于 $C_n \rho (1+t)^{\max(d-1,0)}$。由于 $(h/\rho)^2 \le \rho$ 在所指定的两个尺度下成立，这些估计证明了 (5.10)。$d = 0$ 的情形是精确的。□

5.2. **高斯极限**。对于 $m \ge 2$ 令

$$X_m = 2 + \frac{1}{m}, \qquad U_m = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{3}{4m}\right), \qquad A_m = \frac{p_m^2 U_m^2}{4}. \tag{5.11}$$

因此 $\tau(U_m) = 3/(2m)$ 且 $U_m < 1$。

引理 5.4。取定 m, n 和 $S > 0$。令 $K = \lceil U_m/h \rceil$，对于复数 $|s| \le S$，一致地有

$$S_{m,n,h}(X_m + \sqrt{h}\, s) - \sum_{k<K} D_{n,k} g_{m,k}^{(n)} B_k^{(n)}(X_m + \sqrt{h}\, s; h) = O_{m,n,S}(e^{-A_m/(2h)}). \tag{5.12}$$

对于任意固定且充分小的 $a_0 > 0$，这个有限和中满足 $a_0/h \le k < K$ 的部分在 $1/h$ 中也呈指数级小。

证明。当 h 充分小时，直到 K 为止的所有未扰动归一化因子都满足 $|1-m\tau((j+n/2)h)| \le 1$，因为最大自变量趋于 U_m，且 $\tau(U_m) < 2/m$。因此，令 $\varepsilon=\sqrt{h}$，

$$m^k|B_k^{(n)}(X_m+\varepsilon s;h)| \le e^{mS\varepsilon k} \qquad (k\le K). \tag{5.13}$$

由 (5.5)，$g_m^{(n)}{}_{,K}/m^K \le 2e^{-A_m/h}$。秩因子为 $O_{m,n}(h^{-(n-2)})$。将 (4.26) 应用于 $D_0=1/m$、$U=U_m$ 和 $\eta=S\sqrt{h}$；其指数至多为 $12S/((e^{U_m}-1)\sqrt{h})$。结合 (4.24) 和 (4.30)，可将余项界定为 h^{-1} 的某个固定幂乘以 $\exp(-A_m/h+O_{m,n,S}(h^{-1/2}))$，从而证明 (5.12)。

对于有限个后续项，使用 (5.5)、(5.13) 和 (5.8)。在 $k\ge a_0/h$ 上，每个负系数指数都支配 $mS\sqrt{h}\,k$。共有 $O(h^{-1})$ 项，其秩因子是一个固定多项式，因此它们的和为 $O(e^{-c/h})$，其中某个 $c>0$。□

定理 5.5. 固定整数 $m\ge 2$ 和 $n\ge 2$。令 $G_{m,n}$ 由 (1.3)定义。对于任意紧集 $C\subset\mathbb{C}$ 和任意整数 $j\ge 0$，

$$\sup_{s\in C}\left|\frac{d^j}{ds^j}\left[h^{(n-1)/2}S_{m,n,h}(X_m+\sqrt{h}\,s)-\mathcal{G}_{m,n}(s)\right]\right| = O_{m,n,C,j}(\sqrt{h}). \tag{5.14}$$

证明. 设 $d=n-2$、$\varepsilon=\sqrt{h}$和 $t=\varepsilon k$。取足够小的 a_0，使其满足引理 5.2 的条件，并且当 $k\le a_0/h$ 和 $j<k$时，$1-m\tau((j+n/2)h)>0$。缩小 h 即可使后一条件对这些指标一致成立。对于 $|s|\le S$，令 $\mathcal{B}_k=m^kB_k^{(n)}(X_m+\varepsilon s;h)$。将其乘积与 $(1+m\varepsilon s)^k$ 作望远镜法，得到

$$|\mathcal{B}_k-(1+m\varepsilon s)^k| \le m\sum_{j<k}\tau((j+n/2)h)(1+mS\varepsilon)^{k-1} \le C\varepsilon(1+t^3)e^{mSt}.$$

这里 $\sum_{j<k}\tau((j+n/2)h) \le C_nh^2(k+1)^3$。由初等不等式

$$|e^u-e^v| \le |u-v|\max(e^{\Re u},e^{\Re v}) \tag{5.15}$$

对从 v 到 u的线段上的指数函数积分即可得到。令 $u=k\log(1+m\varepsilon s)$ 和 $v=mst$代入。对数差为 $O_S(k\varepsilon^2)$，且两者的实部都不超过 mSt。因此

$$|\mathcal{B}_k-e^{mst}| \le C\varepsilon(1+t^3)e^{mSt} \qquad (k\le a_0/h). \tag{5.16}$$

合并 (5.6)、(5.7)、(5.10) 和 (5.16)。对于常数 C，得到的估计为

$$\left|\varepsilon^dD_{n,k}g_{m,k}^{(n)}B_k^{(n)}(X_m+\varepsilon s;h)-\frac{t^d}{d!}e^{mst-\alpha_mt^2}\right| \le C\varepsilon(1+t)^{d+3}e^{mSt-\alpha_mt^2/2}. \tag{5.17}$$

主控函数在 $t\ge 0$ 上可积，且对 $|s|\le S$ 一致。其采样和乘以ε 后，对于充分小的 ε 一致有界。因此，在计入外层黎曼和因子 ε 后，对 (5.17) 求和的代价为 $O(\varepsilon)$。

对于极限函数 $f_s(t)=t^de^{mst-\alpha_mt^2}/d!$，$f_s$ 及其一阶 t 导数在 $|s|\le S$ 上均一致可积。由初等估计

$$\left|\varepsilon\sum_{k\ge 0}f_s(\varepsilon k)-\int_0^\infty f_s(t)\,dt\right| \le \varepsilon\int_0^\infty |f_s'(t)|\,dt$$

黎曼和也具有相同的收敛速率。超过 $t=a_0/\varepsilon$ 的极限尾项呈指数级小。引理 5.4 控制了有限个后续指标及解析余项。这证明了 $j=0$ 处的 (5.14)。颜色函数的整性以及在稍大的紧集上应用柯西公式，可得对每个固定的 j 都成立。□

令 $\operatorname{erfc}(z) = 1 - 2\pi^{-1/2}\int_0^z e^{-t^2}\,dt$。二阶秩剖面及其秩导数为

$$\mathcal{G}_{m,2}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha_m}}\exp\left(\frac{m^2 s^2}{4\alpha_m}\right)\operatorname{erfc}\left(-\frac{ms}{2\sqrt{\alpha_m}}\right), \tag{5.18}$$

$$\mathcal{G}_{m,n}(s) = \frac{1}{(n-2)!\,m^{n-2}}\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}\mathcal{G}_{m,2}(s). \tag{5.19}$$

分部积分还给出 $\mathcal{G}'_{m,\,2} - m^2 s\,\mathcal{G}_{m,\,2}/(2\alpha_m) = m/(2\alpha_m)$。

5.3. Scorer 极限。 对于 $m = 1$，扭曲系数恒等于一。此时临界尺度为 $\delta = h^{2/3}$。固定一个秩为 $n \ge 2$，并令

$$L = \lfloor 1/(2h)\rfloor, \qquad K = \lceil 1/h\rceil. \tag{5.20}$$

不等式 $\tau(1/2) < 1 < \tau(1) < 2$ 意味着，当 h 充分小时（取决于 n），

$$\tau((j+n/2)h) < 1 \quad (j < L), \qquad \tau((j+n/2)h) < 2 \quad (j < K). \tag{5.21}$$

这些不等式是初等的：τ 的泰勒级数具有正系数，因此 $\tau(1) \ge 13/12$；$(2j)! \ge 2^j$ 给出 $\cosh(1/2) \le 8/7$；以及 $\cosh 1 < 2$。

引理 5.6。 对于任意固定的 $n \ge 2$ 和 $S > 0$，对复数 $|s| \le S$ 一致地成立，

$$\sum_{L \le k < K}\left|D_{n,k}B_k^{(n)}(3 + h^{2/3}s; h)\right| = O_{n,S}(e^{-1/(384h)}), \tag{5.22}$$

$$S_{1,n,h}(3 + h^{2/3}s) - \sum_{k<K} D_{n,k}B_k^{(n)}(3 + h^{2/3}s; h) = O_{n,S}(e^{-1/(384h)}). \tag{5.23}$$

证明。 对于 $k \le L$，未扰动因子均为正。若 $t = \delta k$，则 $\log(1+x) \le x$ 和 $\tau(v) \ge v^2$ 给出

$$\begin{aligned}|B_k^{(n)}(3 + \delta s; h)| &\le \exp\left(S\delta k - \sum_{j<k}\tau((j+n/2)h)\right)\\ &\le e^{St - t^3/3}.\end{aligned} \tag{5.24}$$

最后一步用到了 $n/2 \ge 1$、$\sum_{j=1}^{k} j^2 \ge k^3/3$ 和 $\delta^3 = h^2$。当 $h \le 1/4$ 时，有 $L \ge 1/(4h)$，因此前 L 个因子至少带来 $h^2 L^3/3 \ge 1/(192h)$ 的损失。根据 (5.21)，直到 K 为止的其余因子的绝对值至多为 $1 + S\delta$。因此

$$|B_k^{(n)}(3 + \delta s; h)| \le \exp\left(-\frac{1}{192h} + 2Sh^{-1/3}\right) \qquad (L \le k \le K). \tag{5.25}$$

这里，对于较小的 h，$K \le 2/h$。在此范围内，根据 (5.8)，秩因子至多为 $C_n(k+1)^{n-2}$。求和即得 (5.22)，因为多项式因子和 $e^{2Sh^{-1/3}}$ 都可由指数裕度吸收。

对于解析余项，取 $D_0 = 1$、$U = 1$ 和 $\eta = S\delta$ 应用 (4.26)。由于 $1 - 1/\tau(1) \ge 1/13$，可得

$$\sum_{l}|\mu_l(1 + \delta s)| \le \exp\left(\frac{52S}{(e-1)h^{1/3}}\right).$$

现在，$k = K$ 处的固定秩界 (4.24)、(5.25) 以及 (4.30) 给出了 (5.23)。 □

我们直接在秩二情形证明 Scorer 极限，并根据定理 3.13 的秩阶梯推导更高秩情形；这也解释了为什么更高秩的剖面是 $\mathcal{H}_2$ 的归一化导数。推导需要以下关于收缩颜色尺度下差商的估计。

引理 5.7。令 $q = e^{-h/2}$ 和 $\rho = h^{2/3}$。对于在 s平面的某个紧子集附近全纯的函数 F，定义

$$(\mathscr{D}_h F)(s) = \rho\, \mathcal{D}_q \left[F\left(\frac{X-3}{\rho}\right)\right]\Big|_{X=3+\rho s}.$$

对于每个 $R>0$，都存在常数 $C_R, h_R>0$，使得

$$\|\mathscr{D}_h F - F'\|_{|s|\le R} \le C_R \rho \|F\|_{|s|\le R+1}, \tag{5.26}$$

$$\|\mathscr{D}_h F\|_{|s|\le R} \le C_R \|F\|_{|s|\le R+1}, \tag{5.27}$$

只要 $0<h<h_R$ 和 F 在 $\{|s|\le R+1\}$ 的某个邻域内全纯。

证明。令 $X = 3+\rho s$，并选取在 $X=3$ 处为正的全纯平方根 $v=\sqrt{X^2-4}$。(3.12) 中的两个颜色自变量的中心为 X双曲余弦$(h/2)$，半距离为v双曲正弦$(h/2)$。因此

$$(\mathscr{D}_h F)(s) = \frac{F(s+a_h(s)+b_h(s)) - F(s+a_h(s)-b_h(s))}{2b_h(s)},$$

其中

$$a_h(s) = \frac{X(\cosh(h/2)-1)}{\rho} = O_R(h^{4/3}), \qquad b_h(s) = \frac{v\sinh(h/2)}{\rho} = O_R(h^{1/3}).$$

当 h 足够小时，只要 $|s|\le R$，所有自变量都位于 $|s|<R+1/2$ 中。商为

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F'(s+a_h(s)+tb_h(s))\,dt.$$

对 F' 作泰勒展开至线性项，并利用其下一阶导数的柯西界，可得

$$|\mathscr{D}_h F(s) - F'(s)| \le C_R\big(|a_h(s)| + |a_h(s)|^2 + |b_h(s)|^2\big)\|F\|_{|s|\le R+1}.$$

关于 tb_h 的线性项积分为零。由于 $|a_h| = O_R(\rho^2)$ 和 $|b_h|^2 = O_R(\rho)$，这就证明了 (5.26)。积分公式和柯西导数估计证明了 (5.27)。□

命题 5.8。假设秩二的 *8* 字结求和满足

$$h^{2/3} S_{1,2,h}(3+h^{2/3}s) = \mathcal{H}_2(s) + O(h^{2/3}) \tag{5.28}$$

对复数 s 局部一致地成立。于是，对每个固定的 $n\ge 2$,

$$h^{2(n-1)/3} S_{1,n,h}(3+h^{2/3}s) = \mathcal{H}_n(s) + O_n(h^{2/3}) \tag{5.29}$$

对复数 s 局部一致地成立。经过任意固定阶数的 s 导数后，同样的估计仍然成立。

证明。令 $d=n-2$、$\rho=h^{2/3}$ 和 $F_h(s) = \rho S_{1,\,2,\,h}(3+\rho s)$。在 $z=1$ 处，精确恒等式 (3.20) 变为

$$\rho^{d+1} S_{1,n,h}(3+\rho s) = \frac{1}{[d]_q!}\mathscr{D}_h^d F_h(s). \tag{5.30}$$

该假设在每个紧集上给出 $F_h = \mathcal{H}_2 + O(\rho)$，特别地，还为 F_h给出局部一致界。在 $d+1$ 嵌套圆盘上依次应用引理 5.7。其算子界控制传播的 $O(\rho)$ 误差，而其差值估计则将每次对$\mathscr{D}_h$ 的应用与一个导数进行比较。通过归纳法可得

$$\mathscr{D}_h^d F_h = \mathcal{H}_2^{(d)} + O_d(\rho)$$

在每个固定的紧集上一致成立。由于 $[d]_q! = d!\,(1+O_d(h^2))$ 且 $\mathcal{H}_2^{(d)}/d! = \mathcal{H}_n$，代入 (5.30) 即得 (5.29)。在更大的紧集上应用柯西公式，可得导数估计。□

定理 5.9。 固定一个整数 $n \ge 2$。令 H_n 由 (1.4)定义。对于每个紧集$C \subset \mathbb{C}$ 以及每个整数 $j \ge 0$,

$$\sup_{s\in C}\left|\frac{d^j}{ds^j}\left[h^{2(n-1)/3}S_{1,n,h}(3+h^{2/3}s)-\mathcal{H}_n(s)\right]\right| = O_{n,C,j}(h^{2/3}). \tag{5.31}$$

证明。 由命题 5.8，只需证明秩二时的局部一致估计。在此秩下 $D_{2,\ k}=1$。令 $\delta = h^{2/3}$, $t=\delta k$，并令 $\phi_s(t) = st - t^3/3$，再固定 $|s|\le S$。当 $k \le L$ 时，只要 h 充分小， $B_k^{(2)}(3+\delta s;h)$ 的所有因子都落在某个固定的右半平面内。泰勒估计 $\log(1+z) = z + O(|z|^2)$ 对 $z = \delta s - \tau((j+1)h)$ 一致成立， $j < L$。此外,

$$\sum_{j<k}\tau((j+1)h) = \frac{h^2k^3}{3} + O\big(h^2(k+1)^2 + h^4(k+2)^5\big),$$

$$\sum_{j<k}|\delta s - \tau((j+1)h)|^2 \le C_S\big(k\delta^2 + h^4(k+2)^5\big).$$

对数求和得到

$$\left|\log B_k^{(2)}(3+\delta s;h) - \phi_s(t)\right| \le C_S\delta(1+t^5), \qquad k \le L. \tag{5.32}$$

根据 (5.24)，两个对数的实部都不超过 $St - t^3/3$。因此 (5.15) 推出

$$\left|B_k^{(2)}(3+\delta s;h) - e^{\phi_s(t)}\right| \le C_S\delta(1+t^5)e^{St-t^3/3}. \tag{5.33}$$

乘以外部黎曼和因子 δ 后，求和误差为 $O_S(\delta)$。可积控制函数及其一阶导数的积分均一致有界，因此 $e^{\phi_s(t)}$ 的黎曼和与其积分相差 $O_S(\delta)$。其在 δL 之后的尾项随$1/h$指数级衰减。引理 5.6 在 $n=2$ 处控制剩余的有限指标和解析余项。这就证明了 (5.28)。精确的秩阶梯与命题 5.8 现在给出任意固定秩下的 (5.31)，并满足所有给定的导数估计。□

秩二函数为 $\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}_2(s) = \pi\mathrm{Hi}(s)$，其中 Hi 是 Scorer 函数。更高秩的剖面满足

$$\mathcal{H}_n(s) = \frac{\mathcal{H}^{(n-2)}(s)}{(n-2)!}, \qquad \mathcal{H}'' - s\mathcal{H} = 1. \tag{5.34}$$

该微分方程可由分部积分得到。令 Ai 为满足以下条件的整函数解$f'' = sf$

$$\mathrm{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}, \qquad \mathrm{Ai}'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma(1/3)}.$$

若 $\omega = e^{2\pi i/3}$，则

$$\omega^{n-1}\mathcal{H}_n(\omega s) - \omega^{2(n-1)}\mathcal{H}_n(\omega^2 s) = \frac{2\pi i}{(n-2)!}\,\mathrm{Ai}^{(n-2)}(s). \tag{5.35}$$

对于 $n=2$，左侧满足齐次艾里方程。伽马积分$\mathcal{H}(0) = 3^{-2/3}\Gamma(1/3)$ 和 $\mathcal{H}'(0) = 3^{-1/3}\Gamma(2/3)$, 结合反射公式，可确定其初始数据与 $2\pi i\mathrm{Ai}(s)$ 的初始数据相同。求导即可证明 (5.35) 对任意秩均成立。根据定理 5.9，当$\mathcal{H}_n(s)$ 替换为$h^{2(n-1)/3}S_{1,n,h}(3+h^{2/3}s)$ 时，(5.35) 在紧集上仍成立，误差为 $O(h^{2/3})$。

5.4. **整数颜色**。 设

$$u_m = \operatorname{arccosh}\left(1+\frac{1}{2m}\right), \qquad h_r = \frac{u_m}{r+n/2}. \tag{5.36}$$

节点 $x_r^{(n)}$在 $h = h_r$ 处恰为 $2 + 1/m$。

推论 5.10. 固定 $m \geq 2$ 和 $n \geq 2$。由于 $r \to \infty$,

$$J_r^{(n)}(L_m; e^{-h_r/2}) = \frac{\Gamma((n-1)/2)}{2(n-2)!\alpha_m^{(n-1)/2}} h_r^{-(n-1)/2}(1 + O_{m,n}(h_r^{1/2})). \tag{5.37}$$

对于八字结，当 $u_1 =$反双曲余弦$(3/2)$ 时,

$$J_r^{(n)}(4_1; e^{-h_r/2}) = \frac{3^{(n-4)/3}\Gamma((n-1)/3)}{(n-2)!} h_r^{-2(n-1)/3}(1 + O_n(h_r^{2/3})). \tag{5.38}$$

证明。 在 $s = 0$ 处应用精确节点恒等式（4.28）以及定理 5.5 和 5.9。初等伽马积分给出两个正的常数，因此绝对剖面误差也就是所述的相对误差。□

在秩二情形， $N = r + 1$ 是表示维数，标准琼斯变量为 $Q = q^2 = e^{-u_m/N}$。特别地，（5.37）变为

$$J_{N-1}^{(2)}(L_m; e^{-u_m/(2N)}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha_m u_m}} \sqrt{N}(1 + O_m(N^{-1/2})), \qquad m \geq 2.$$

命题 5.11。 固定 $m \geq 1$、 $n \geq 2$ 和 $0 \leq \theta_0 < 1$。对于 $\theta \in [0, \theta_0]$，一致地有

$$J_r^{(n)}\left(L_m; \exp\left[-\frac{\theta u_m}{2(r + n/2)}\right]\right) \longrightarrow \left[1 - m(2\cosh(\theta u_m) - 2)\right]^{-(n-1)} \qquad (r \to \infty). \tag{5.39}$$

$\theta = 0$ 处的表达式应通过在 $q = 1$ 处进行 *Laurent* 多项式求值来理解。

证明。 令 $h = \theta u_m/(r + n/2)$，且 $D_\theta = 2$双曲余弦$(\theta u_m) - 2$。在节点处，对于 $k \leq r$ ，$B_k^{(n)}$ $(x_r^{(n)}; h)$ 的每个因子均非负且不超过 D_θ。字表示给出$g_{m,\,k}^{(n)} \leq m^k$，而（5.8）给出

$$0 \leq D_{n,k} g_{m,k}^{(n)} B_k^{(n)}(x_r^{(n)}; h) \leq C_{m,n,\theta_0} \binom{k + n - 2}{n - 2} \rho^k, \qquad \rho = m D_{\theta_0} < 1.$$

对于每个固定的 k，被加项关于 θ 一致趋于 $\binom{k+n-2}{n-2}(mD_\theta)^k$。所展示的可求和主控函数允许将极限一致地移入无穷和中。二项式生成函数将其求值为 $(1 - mD_\theta)^{-(n-1)}$。在 $q = 1$ 处，所有正次数的牛顿项均消失，因此其值为 1，与同一公式相符。□

5.5. **与亚临界区域的匹配**。 当 $s \to -\infty$ 时，临界剖面按 $|s|$ 的幂次衰减，其首项重现亚历山大多项式逆表达式。现在我们证明，解析插值连接了这两个区域，并且首阶修正项相匹配。

命题 5.12。 对于固定的 $m \geq 2$ 和 $n \geq 2$，当 $u \to +\infty$ 时，

$$\mathcal{G}_{m,n}(-u) = \frac{1}{(mu)^{n-1}} \left(1 - \frac{\alpha_m n(n-1)}{m^2 u^2} + O_{m,n}(u^{-4})\right). \tag{5.40}$$

对于固定的 $n \geq 2$,

$$\mathcal{H}_n(-u) = \frac{1}{u^{n-1}} \left(1 - \frac{(n-1)n(n+1)}{3u^3} + O_n(u^{-6})\right). \tag{5.41}$$

余项的界对 $u \geq 1$ 一致成立。

证明。 在高斯积分中令 $v = mut$。剩余因子为 $\exp(-\alpha_m v^2/(m^2u^2))$。对于 $x \geq 0$,

$$0 \leq e^{-x} - 1 + x \leq \frac{x^2}{2}.$$

将此不等式乘以 $v^{n-2}e^{-v}/(n-2)!$ 后积分，得到 (5.40)，因为 $\Gamma(n+1)/\Gamma(n-1) = n(n-1)$。对于斯科勒积分，代换 $v = ut$ 后会留下因子 $\exp(-v^3/(3u^3))$。使用同一不等式，并以其六阶矩控制余项，可得 (5.41)。□

定理 5.13。 固定 $m \ge 1$ 和 $n \ge 2$，并令

$$\eta_0 = \frac{1}{8}, \qquad X = 2 + \frac{1-\eta}{m}.$$

存在常数 $C, h_0 > 0$，仅依赖于 m, n，并具有以下性质 .

若 $m \ge 2$, $0 < h < h_0$ 和 $\sqrt{h} \le \eta \le \eta_0$，则

$$\eta^{n-1} S_{m,n,h}(X) = 1 - \alpha_m n(n-1)\frac{h}{\eta^2} + O_{m,n}\left(\frac{h}{\eta} + \frac{h^2}{\eta^4}\right). \tag{5.42}$$

若 $m = 1$, $0 < h < h_0$ 和 $h^{2/3} \le \eta \le \eta_0$，则

$$\eta^{n-1} S_{1,n,h}(3-\eta) = 1 - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\frac{h^2}{\eta^3} + O_n\left(\frac{h^2}{\eta^2} + \frac{h^4}{\eta^6}\right). \tag{5.43}$$

两个误差项中的常数在所述范围内均一致。

证明。 令 $d = n-2$, $r = 1-\eta$ 和 $C_{n,k} = \binom{k+d}{d}$。根据 $U_m > 0$ 选取

$$\tau(U_m) = \frac{3}{2m}, \qquad \tau(v) = 2\cosh v - 2,$$

并令 $K = \lceil U_m/h \rceil$。减小 h_0，使得对于 $h < h_0$,

$$\tau((K + n/2)h) > \frac{1}{m}, \qquad m\tau((j+n/2)h) \le \frac{7}{4} \quad (0 \le j < K). \tag{5.44}$$

这是可行的，因为第二个不等式中的最大自变量趋于 U_m。由于$r \ge 7/8$，这些不等式推出

$$V_{h,k} := m^k B_k^{(n)}(X;h) = \prod_{j<k} \big(r - m\tau((j+n/2)h)\big), \qquad |V_{h,k}| \le r^k \quad (k \le K). \tag{5.45}$$

字表示 (5.3) 给出 $0 < g_m^{(n)}{}_{,\,k}/m^k \le 1$。秩因子公式 (5.8) 还给出

$$D_{n,k} \le CC_{n,k}, \qquad |D_{n,k} - C_{n,k}| \le Ch^2(k+1)^2 C_{n,k} \qquad (k \le K). \tag{5.46}$$

对于第二个估计，将比值除以$C_{n,\,k}$，写作

$$\frac{D_{n,k}}{C_{n,k}} = \prod_{a=1}^{d} \frac{f(h(k+a)/2)}{f(ha/2)}, \qquad f(v) = \frac{\sinh v}{v}, \quad f(0) = 1.$$

所有自变量都落在一个固定的有界区间内， f 在该区间内远离零，并且$f(v) = 1 + O(v^2)$。

我们首先估计解析余项。这里 $D = X - 2 = r/m$ 为实数且非负，而 (5.44) 保证 $D < \tau((K+n/2)h)$。(4.29) 中的权重 $\pi_{m,\,n,\,K,\,i}$ 和 $\mu_l(D)$ 均为概率权重。由 (4.24) 可知，带符号秩校正的全变差一致有界，因为$Kh \ge U_m$。(4.29) 中的预解式的绝对值至多为一。因此

$$\left| S_{m,n,h}(X) - \sum_{k<K} D_{n,k} g_{m,k}^{(n)} B_k^{(n)}(X;h) \right| \le C(K+1)^d r^K. \tag{5.47}$$

为便于后续使用，对 $\sum_{k\ge 0} C_{n,\,k} r^k = (1-r)^{-(d+1)}$ 求导可得

$$\begin{aligned}
\eta^{d+1} \sum_{k\ge 0} kC_{n,k} r^k &= (d+1)\frac{r}{\eta}, \\
\eta^{d+1} \sum_{k\ge 0} k^2 C_{n,k} r^k &= (d+1)(d+2)\frac{r^2}{\eta^2} + (d+1)\frac{r}{\eta}, \\
\eta^{d+1} \sum_{k\ge 0} k^3 C_{n,k} r^k &= (d+1)(d+2)(d+3)\frac{r^3}{\eta^3} + 3(d+1)(d+2)\frac{r^2}{\eta^2} + (d+1)\frac{r}{\eta}.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

更一般地，对于每个固定的非负整数 j，

$$\sum_{k\ge 0}(k+1)^j C_{n,k} r^k \le C_j \eta^{-d-j-1}, \tag{5.49}$$

$$\sum_{k\ge K}(k+1)^j C_{n,k} r^k \le C_j \eta^{-d-j-1} e^{-\eta K/2}. \tag{5.50}$$

最后一个不等式由 $r^k \le e^{-\eta k}$ 得出：提取出 $e^{-\eta K/2}$ 后，将剩余多项式乘以 $e^{-\eta k/2}$ 求和。

首先假设 $m \ge 2$。对于长度为 k 的一个词，其在 (5.1) 中的能量非负，且至多为 $C_{m,n}(k+1)^2$。其均值为 $\alpha_m k^2 + \beta_{m,n} k$。因此，前一个命题中使用的不等式给出全局界

$$\left| \frac{g_{m,k}^{(n)}}{m^k} - 1 + h(\alpha_m k^2 + \beta_{m,n} k) \right| \le C h^2 (k+1)^4. \tag{5.51}$$

在有限前缀上，将 (5.45) 中的乘积与 r^k 作望远镜法展开，得到

$$|V_{h,k} - r^k| \le m r^{k-1} \sum_{j<k} \tau((j+n/2)h) \le C h^2 (k+1)^3 r^k. \tag{5.52}$$

在最后一个界中，我们在有界自变量区间上使用了 $r \ge 7/8$ 和 $\tau(v) \le C v^2$。结合 (5.46)、(5.51) 和 (5.52)，得到

$$\begin{aligned} &\left| D_{n,k} g_{m,k}^{(n)} B_k^{(n)}(X;h) - C_{n,k} r^k \{1 - h(\alpha_m k^2 + \beta_{m,n} k)\} \right| \\ &\qquad \le C h^2 (k+1)^4 C_{n,k} r^k, \qquad k < K. \end{aligned} \tag{5.53}$$

秩因子误差利用 $|V_{h,k}| \le r^k$ 和 $g_m^{(n)}{}_{,k}/m^k \le 1$ 进行界定；它只有较低次幂 $(k+1)^2$，并已计入右侧。

根据 (5.49)，(5.53) 右侧的归一化和为 $O(h^2/\eta^4)$。我们可以将这两个多项式加权的几何级数延拓到所有 $k \ge 0$。它们的归一化尾项为

$$O\left((1 + h/\eta^2) e^{-c\eta/h} \right) = O(e^{-c\eta/h})$$

当 $\eta \ge \sqrt{h}$ 时。(5.47) 中的归一化解析余项满足相同的界，只需改变 $c > 0$：写成 $x = \eta/h$ 可得

$$\eta^{d+1}(K+1)^d r^K \le C \eta x^d e^{-U_m x} \le C e^{-cx}.$$

由于 $x \ge h^{-1/2}$，这些误差为 $O(h^2)$，因而可被 $O(h^2/\eta^4)$ 吸收。公式 (5.48) 现在给出稍微精确一些的恒等式

$$\eta^{n-1} S_{m,n,h}(X) = 1 - h\left\{ \alpha_m n(n-1)\frac{r^2}{\eta^2} + (\alpha_m + \beta_{m,n})(n-1)\frac{r}{\eta} \right\} + O_{m,n}(h^2/\eta^4). \tag{5.54}$$

由于 $r = 1 - \eta$，这就证明了 (5.42)。

对于 $m = 1$，词系数恰好为一。在同一个有限前缀上，令 $x_j = \tau((j+n/2)h)/r$。于是，根据 (5.44)，$0 \le x_j \le 2$。对于此区间内的数，应用两次望远镜法可得

$$\left| \prod_{j<k}(1 - x_j) - 1 + \sum_{j<k} x_j \right| \le \sum_{i<j<k} x_i x_j \le \frac{1}{2}\left(\sum_{j<k} x_j \right)^2. \tag{5.55}$$

事实上，$|\prod_{i<j}(1 - x_i)| \le 1$，而第一个望远镜恒等式将其与 1 的差的绝对值界定为 $\sum_{i<j} x_i$。泰勒估计 $\tau(v) = v^2 + O(v^4)$ 在有界的自变量区间上一致成立。

这意味着

$$\sum_{j<k} x_j = \frac{h^2}{r}\sum_{j<k}(j+n/2)^2 + O_n(h^4(k+1)^5)$$
$$= \frac{h^2k^3}{3r} + O_n\big(h^2(k+1)^2 + h^4(k+1)^5\big), \qquad \sum_{j<k} x_j \le C_n h^2(k+1)^3.$$

因此，由 (5.55) 和 (5.46) 可得

$$\left| D_{n,k}B_k^{(n)}(3-\eta;h) - C_{n,k}r^k\left(1-\frac{h^2k^3}{3r}\right)\right|$$
$$\le C_nC_{n,k}r^k\big(h^2(k+1)^2 + h^4(k+1)^6\big), \qquad k<K. \tag{5.56}$$

右侧的归一化和为 $O_n(h^2/\eta^2 + h^4/\eta^6)$。省略的几何尾项在归一化后有如下界

$$C_n(1+h^2/\eta^3)e^{-c\eta/h}.$$

对于 $\eta \ge h^{2/3}$，这是 $O(e^{-c\eta/h})$。归一化后的解析余项满足与上文相同的估计。现在 $\eta/h \ge h^{-1/3}$，因此这些尾项为 $O(h^4)$，可并入 $O(h^4/\eta^6)$。最后，(5.48) 中的三阶矩给出

$$\frac{h^2}{3r}\eta^{n-1}\sum_{k\ge 0} k^3 C_{n,k}r^k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\frac{h^2}{\eta^3} + O_n(h^2/\eta^2).$$

这就证明了 (5.43)。 □

Corollary 5.14. 固定 $m \ge 2$ 和 $n \ge 2$。对于 $u \ge 1$ 和 $m\sqrt{h}\,u \le \eta_0$，当 $h \to 0^+$ 时，一致地有，

$$(m\sqrt{h}\,u)^{n-1}S_{m,n,h}(X_m - \sqrt{h}\,u) = 1 - \frac{\alpha_m n(n-1)}{m^2u^2} + O_{m,n}(\sqrt{h}/u + u^{-4}), \tag{5.57}$$

$$\frac{h^{(n-1)/2}S_{m,n,h}(X_m - \sqrt{h}\,u)}{\mathcal{G}_{m,n}(-u)} = 1 + O_{m,n}(\sqrt{h}/u + u^{-4}). \tag{5.58}$$

对于八字结，关于 $u \ge 1$ 和 $h^{2/3}u \le \eta_0$ 一致地成立，

$$(h^{2/3}u)^{n-1}S_{1,n,h}(3 - h^{2/3}u) = 1 - \frac{(n-1)n(n+1)}{3u^3} + O_n(h^{2/3}/u^2 + u^{-6}), \tag{5.59}$$

$$\frac{h^{2(n-1)/3}S_{1,n,h}(3 - h^{2/3}u)}{\mathcal{H}_n(-u)} = 1 + O_n(h^{2/3}/u^2 + u^{-6}). \tag{5.60}$$

特别地，只要 $u \to \infty$ 和 $\sqrt{h}\,u \to 0$，带有所显示的第一修正项的高斯匹配就成立；相应的斯科勒匹配则只要 $u \to \infty$ 和 $h^{2/3}u \to 0$ 就成立。

证明。 将 $\eta = m\sqrt{h}\,u$ 或 $\eta = h^{2/3}u$ 代入定理 5.13。这就得到（5.57）和（5.59）。命题 5.12 给出了比值结论。对于实数 $u > 0$，两个分母均为正；去掉它们所显示的 u 次幂后，根据其积分表示及其在无穷远处的极限，它们在 $u \ge 1$ 上均与零点保持正距离。在所述的同时极限下，（5.57）和（5.59）中的误差分别为 $o(u^{-2})$ 和 $o(u^{-3})$，因此第一修正项以及首项均相互一致。□

由于 $\eta = 1 - m(X-2)$，定理 5.13 中的首项 $\eta^{-(n-1)}$ 是在量子颜色 (5.39) 处得到的亚历山大多项式逆表达式 $[1-m(X-2)]^{-(n-1)}$。因此，在实轴上，解析插值从这一表达式过渡到临界剖面，两种描述存在重叠。

6. 秩增长时的一致临界渐近

现在，我们令秩 $n = n(h)$ 依赖于 h，保持 m 固定，并确定第 5 节中固定秩极限在多大范围内仍然成立。以下每个结论都涉及一个组合参数：高斯情形下为 hn^3，Scorer 情形下为 $h^{2/3}n^{5/3}$；只要该参数低于某个固定上界，其 $o(1)$ 项就是一致的。令

$$V_m = \frac{(m-1)(m+1)(16m^2+1)}{180m^2}, \tag{6.1}$$

$$c_m = -\frac{(4m+1)(3m^3+3m^2+8m-2)}{180m^2(2\alpha_m)^{3/2}} < 0 \qquad (m \geq 2). \tag{6.2}$$

以下所有极限在复数 s平面的紧子集上一致成立。在这样的集合上，当 h 充分小时，分母中的剖面没有零点（见（6.15）及定理 6.2 证明中的对应结果）。

定理 6.1. 固定 $m \geq 2$。令 $n = n(h) \to \infty$ 当 $h \to 0^+$时，且 hn^3 有界。则

$$\frac{h^{(n-1)/2} S_{m,n,h}(X_m + \sqrt{h}\, s)}{\mathcal{G}_{m,n}(s)} - \exp\{c_m \sqrt{h}\, n^{3/2}\} \longrightarrow 0 \tag{6.3}$$

在 s中局部一致地成立。

定理 6.2. 对于 $m = 1$，假设 $n \to \infty$ 且 $h^{2/3}n^{5/3}$ 保持有界。则

$$\frac{h^{2(n-1)/3} S_{1,n,h}(3 + h^{2/3}s)}{\mathcal{H}_n(s)} - \exp\{-3h^{2/3}n^{5/3}/40\} \longrightarrow 0 \tag{6.4}$$

在 s 中局部一致地。

结合固定秩定理，这些结果表明，当$n = o(h^{-1/3})$时，高斯情形下的相对极限为 1；当 $n = o(h^{-2/5})$时，Scorer 情形下的相对极限为 1。（如果沿某个子序列 n 保持有界，则紧集必须避开相应固定秩剖面的零点。）分别在 $n \sim ah^{-1/3}$ 和 $n \sim ah^{-2/5}$ 处，对于 $a > 0$，极限比值为 $\exp(c_m a^{3/2})$ 和 $\exp(-3a^{5/3}/40)$。两个剖面在 $s = 0$ 处均为正，因此在临界窗口中心就已能观察到修正项，而且这些尺度是尖锐的。

6.1. 词能量的累积量。 设 $W_1, \dots, W_k$ 是$\{1, \dots, m\}$中的独立均匀字母，并令

$$b(a) = m - a, \qquad K(a,b) = \mathbf{1}_{a>b} + 2(m - \max(a,b)), \qquad a_m = (m-1)/2.$$

(5.1) 的词能量恰好为

$$E_{m,n} = \sum_{i<j} K(W_i, W_j) + n \sum_i b(W_i). \tag{6.5}$$

特别地 $\mathbb{E}E_{m,\,n} = \alpha_m k^2 + (a_m n - \alpha_m)k$。改变一个字母，能量最多变化 $C_m(k+n)$。因此，有界差分不等式给出，对于实数 u，

$$\log \mathbb{E} e^{u(E - \mathbb{E}E)} \leq C_m u^2 k (k+n)^2. \tag{6.6}$$

引理 6.3. 对于 $k \geq 2$ 和 $h(k+n)$ 充分小且仅取决于 m时，有

$$\operatorname{Var} E_{m,n} = V_m k^3 + O_m((n+1)k^2 + n^2 k), \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \log \frac{g^{(n)}_{m,k}}{m^k} &= -\alpha_m h k^2 - (a_m n - \alpha_m) hk + \tfrac{1}{2} V_m h^2 k^3 \\ &\quad + O_m\big(h^2((n+1)k^2 + n^2 k) + h^3 k (k+n)^3\big). \end{aligned} \tag{6.8}$$

证明。 K 的一阶投影为

$$r(a) = m - 1 - (a-1)^2/m - 2\alpha_m, \qquad c(a) = m - a^2/m - 2\alpha_m.$$

两者的均值均为零。令 $K(a,b) = 2\alpha_m + r(a) + c(b) + K_0(a,b)$，得到一个核 K_0，其两个条件均值均为零。在 $\sum_{i<j} K_0(W_i, W_j)$ 中，无序指标对不同的项彼此正交，即使它们共享一个指标也是如此；而且该和与所有单字母函数正交。因此，其方差为 $O_m(k^2)$。完整中心化能量的线性投影为

$$\sum_{i=1}^{k} \{(k-i)r(W_i) + (i-1)c(W_i) + n(b(W_i) - a_m)\}.$$

其方差的首项系数为

$$\frac{1}{3m}\sum_{a=1}^{m} \{r(a)^2 + c(a)^2 + r(a)c(a)\} = V_m,$$

由直到四次的幂和给出。其余项的大小不超过 $C_m((n+1)k^2 + n^2 k)$，从而证明了 (6.7)。

为界定累积量展开中的余项，将 (6.5) 的单字母项平均分配到各对中，并写作

$$E = \sum_{i<j} \left\{ K(W_i, W_j) + \frac{n}{k-1}(b(W_i) + b(W_j)) \right\}.$$

至多有 $k^2/2$ 个有界随机变量，每个变量的大小至多为 $C_m(1+n/k)$，且其依赖图的最大度至多为 $2k$。因此，Féray– Méliot–Nikeghbali 的依赖图累积量界 [8, Theorems 9.6–9.7] 给出

$$|\kappa_j(E)| \le j^{j-2} C_m^j k(k+n)^j \qquad (j \ge 2).$$

由于 $j^{j-2}/j! \le e^j$，其泰勒级数除以 $j!$ 后，在 $|h|(k+n) < c_m'$ 内绝对收敛，而各项 $j \ge 3$ 之和为 $O_m(h^3 k(k+n)^3)$。这个收敛级数的指数函数在零点附近与整函数矩母函数一致；因此，恒等定理使其在整个圆盘内均可使用。保留均值和方差，并利用精确的字表示，即可证明 (6.8)。□

6.2. **高斯修正**。

定理 *6.1* 的证明。令

$$d = n - 2, \quad k_0 = \sqrt{n/(2\alpha_m h)}, \quad \eta = \sqrt{h}\, n^{3/2}, \quad t = \sqrt{h}\, k.$$

对每个固定的 $0 < \epsilon < M < \infty$，以下展开式关于 $\epsilon \le k/k_0 \le M$和 s 在紧集内一致成立：

$$\log \frac{d! D_{n,k}}{k^d} = \frac{n^2}{2k} + o(1), \tag{6.9}$$

$$\log(m^k B_k^{(n)}(X_m + \sqrt{h}\, s; h)) = mst - \frac{m}{3} h^2 k^3 + o(1), \tag{6.10}$$

$$\log \frac{g_{m,k}^{(n)}}{m^k} = -\alpha_m h k^2 - a_m n h k + \tfrac{1}{2} V_m h^2 k^3 + o(1). \tag{6.11}$$

对于每个牛顿因子，我们都使用 1 附近的对数分支；在这些指标上，其所有自变量都一致地落在该邻域内。为验证第一个展开，使用 (5.8) 和 $\log(\sinh x/x) = x^2/6 + O(x^4)$：

$$\begin{aligned} \log \frac{d! D_{n,k}}{k^d} &= \frac{d(d+1)}{2k} + O(d^3/k^2) + \frac{h^2}{24}\{dk^2 + d(d+1)k\} \\ &\quad + O(h^4 d(k+d)^4). \end{aligned} \tag{6.12}$$

将 $d(d+1)$ 替换为 n^2 后，所有误差项在 $hn^3 = O(1)$ 下都趋于零。第二个展开可通过对 $\log(1+m\sqrt{h}\,s - m\tau((j+n/2)h))$ 作泰勒展开并求和得到：$\sum_{j<k}(j+n/2)^2 = k^3/3 + O(nk^2+n^2k+k^2)$。省略项的绝对值有一个常数倍的上界

$$hk + h^2(nk^2+n^2k) + h^4(k+n)^5 + \sqrt{h}\,h^2(k+n)^3,$$

该范围内趋于零。引理 6.3 给出了第三个展开式；特别是$h^3k^4 = O(hn^2) = o(1)$。因此，除以 $k^d e^{mst-\alpha_m hk^2}/d!$ 后的精确被加数的对数为

$$\eta\left\{\frac{\sqrt{2\alpha_m}}{2y} - \frac{a_m y}{\sqrt{2\alpha_m}} + \frac{(V_m/2 - m/3)y^3}{(2\alpha_m)^{3/2}}\right\} + o(1), \qquad y = k/k_0. \tag{6.13}$$

在 $y=1$ 时，大括号中的表达式恰好是 c_m。

接下来，我们将该和与其归一化进行比较。令

$$Z_0 = \frac{1}{d!}\int_0^\infty k^d e^{-\alpha_m hk^2}\,dk = h^{-(d+1)/2}\mathcal{G}_{m,n}(0), \qquad t_d = \sqrt{d/(2\alpha_m)}.$$

伽马积分和斯特林公式给出

$$Z_0 \asymp_m \frac{k_0^{d+1}e^{-n/2}}{d!\sqrt{n}}. \tag{6.14}$$

固定 $S>0$，并限制在 $|s|\le S$ 上。下面所有尾项估计均相对于 $Z_0 e^{m\Re(s)t_d}$.

对于 $hk \le a_0$，当 $a_0>0$ 足够小且 h 足够小时，初等乘积界给出

$$D_{n,k} \le \frac{(k+d)^d}{d!}e^{hdk/2}, \qquad m^k|B_k| \le e^{mS\sqrt{h}k}.$$

由于 $n/k_0 \to 0$，对于 $k \le \epsilon k_0$，最终有 $k+d \le 2\epsilon k_0$。此外，$hnk_0 = O(\eta)$ 且 $\sqrt{h}k_0 = O(\sqrt{n})$。利用 $g/m^k \le 1$，并且至多计入 Ck_0 项，(6.14) 将这部分和界定为

$$C_S\sqrt{n}(2\epsilon)^d \exp\{n/2 + C_S\sqrt{n} + C\eta\}.$$

当 ϵ 是固定的充分小正数时，它关于 n 指数趋于零。

For $k \ge n$，其中 $hk \le a_0$，精确均值和 (6.6) 在必要时减小 a_0 后给出 e

$$g_{m,k}^{(n)}/m^k \le e^{-\alpha_m hk^2/2}.$$

若 $k \ge Mk_0$，则 $d^2/k = O(\eta)$，而 $n/k \to 0$ 和 $1/(\sqrt{hk}) \to 0$ 一致成立。因此 $D_{n,\,k} \le k^d e^{d^2/k + hdk/2}/d!$，再结合前述基底界可得

$$|D_{n,k}g_{m,k}^{(n)}B_k| \le \frac{C}{d!}k^d e^{-\alpha_m hk^2/4}.$$

对于充分大的固定 M，函数 $y^d e^{-ny^2/8}$ 在 $y \ge M-1$ 上递减。取网格间距 $1/k_0$，

$$\frac{1}{k_0}\sum_{k\ge Mk_0}(k/k_0)^d e^{-n(k/k_0)^2/8} \le \int_{M-1}^\infty y^d e^{-ny^2/8}\,dy.$$

除以归一化因子后，上尾至多为该积分的 $C\sqrt{n}e^{n/2+C_S\sqrt{n}}$ 倍。选择 M，使得对于 $y \ge M-1$ 有 $\log y - y^2/8 \le -y^2/16$，即可证明一个指数级小的上界。特别是，归一化后，格点数量不会引入任何依赖于 $1/h$ 的因子。

在 $\epsilon \le y \le M$上，(6.13)中的修正项是有界的，而 $n^{-1}(d\log y - ny^2/2) \to \log y - y^2/2$ 是一致有界的。后一个函数在 $y=1$处取得其唯一最大值。在任意固定的单位邻域之外，其严格最大值间隙在乘以 $\sqrt{n}e^{C_S\sqrt{n}}$后给出一个 e^{-cn} 界。在该邻域内，(6.13)中大括号内的表达式与 c_m 之差，当邻域缩小时一致趋于零。因此，η的有界性使得可以在归一化和中用 ηc_m 替代这个修正项。

接下来需要将复剖面与其晶格和进行比较，我们借助一个全局界来完成这一点。令 $\Phi_d(t) = d\log t - \alpha_m t^2$。其最大值在 t_d处取得，并且

$$\Phi_d''(t) = -d/t^2 - 2\alpha_m \le -2\alpha_m, \qquad \Phi_d(t_d+u) - \Phi_d(t_d) \le -\alpha_m u^2.$$

在有界的 u 区间上，最后一个表达式中的差收敛到 $-2\alpha_m u^2$。因此，由主控函数 $e^{-\alpha_m u^2 + mS|u|}$，控制收敛给出

$$\frac{\mathcal{G}_{m,n}(s)}{\mathcal{G}_{m,n}(0)e^{mst_d}} \longrightarrow \exp\{m^2 s^2/(8\alpha_m)\} \tag{6.15}$$

对复数 s 局部一致地成立。平移后的格点 $u = \sqrt{h}k - t_d$ 的网格间距为 $\sqrt{h} \to 0$。在有界区间上，同样的泰勒收敛性证明了其黎曼和收敛。在这些区间之外，所示的高斯主控函数对积分和带网格权重的和均给出一致的界。因此，该格点具有相同的极限，且其相对于剖面的相对误差为 $o(1)$。式 (6.15) 中的极限非零，因此这些剖面最终在每个固定紧集上都无零点。由此还可知，前述绝对尾项和修正项估计对复数 s 给出相对估计。

最后，像引理 5.4 中那样使用 $K = \lceil U_m/h \rceil$。精确尾项公式及其对系数和的界的陈述对每个整数 n 都成立。由于 $hn = o(1)$，该证明中使用的界 $|1 - m\tau((j+n/2)h)| \le 1$ 对 $j < K$ 仍然成立。秩因子 $D_{n,K}$ 的对数为 $O(n\log(1/h + n)) = o(1/h)$，带符号权重 ν_r 的界 (4.24) 的对数为 $O(n)$，而 (4.26) 则贡献 $O(h^{-1/2})$。因此，对某个固定的 $c > 0$，解析余项为 $O(e^{-c/h})$。对于 $a_0/h \le k < K$，引理 5.1 的全局系数估计给出关于 n 一致的 $e^{-c'/h}$ 界。对 $O(1/h)$ 个指标求和后，相同的秩估计和基估计仍保持这一指数界。最后，

$$|\log Z_0| \le C_m n(1 + |\log h| + \log n) = o(1/h), \qquad |mst_d| = O_S(\sqrt{n}) = o(1/h).$$

因此，所有剩余项和解析余项相对于主轮廓都可以忽略。这证明了 (6.3)。对于定理后所述的较小秩推论，有界秩子列可由无零点紧集上的定理 5.5 覆盖。□

6.3. **Scorer 修正项**。

定理 6.2 的证明。对于 $m = 1$ 记作

$$k_0 = (n/h^2)^{1/3}, \quad \eta = h^{2/3}n^{5/3}, \quad y = k/k_0, \quad t = h^{2/3}k.$$

Assume $n \to \infty$ 和 $\eta = O(1)$。在固定区间 $0 < \epsilon \le y \le M$ 上，展开式 (6.12) 给出

$$\log \frac{d! D_{n,k}}{k^d} = \frac{n^2}{2k} + \frac{h^2 n k^2}{24} + o(1).$$

泰勒公式 $\log(1-\tau(z)) = -z^2 - 7z^4/12 + O(z^6)$ 给出

$$\log B_k^{(n)}(3 + h^{2/3}s; h) = st - \frac{h^2k^3}{3} - \frac{h^2nk^2}{2} - \frac{7h^4k^5}{60} + o(1).$$

涉及有界 s 的交叉项趋于零。例如，$h^{2/3}h^2k^3 = O(h^{2/3}n) = o(1)$。剩余误差项可由 $h^{4/3}n^{7/3}$、$h^{2/3}n^{2/3}$ 和 $h^{4/3}n^{4/3}$ 的和控制；在 $\eta = O(1)$ 下，它们都趋于零。因此，精确的被加数除以 $k^d e^{st - h^2k^3/3}/d!$ 后，其对数为

$$\eta\left\{\frac{1}{2y} - \frac{11y^2}{24} - \frac{7y^5}{60}\right\} + o(1). \tag{6.16}$$

在 $y = 1$ 处，大括号中的表达式等于 $-3/40$。事实上，写成 $-11y^2/24 = -y^2/2 + y^2/24$：项 $1/(2y)$ 和 $-y^2/2$ 在 $y = 1$ 处相互抵消，而 $-3/40 = 1/24 - 7/60$ 来自秩因子的双曲修正以及牛顿乘积的四次项。

Set

$$Z_0 = \frac{1}{d!}\int_0^\infty k^d e^{-h^2k^3/3}\,dk = h^{-2(d+1)/3}\mathcal{H}_n(0), \qquad t_d = d^{1/3}.$$

伽马积分和斯特林公式给出

$$Z_0 \asymp \frac{k_0^{d+1} e^{-n/3}}{d!\sqrt{n}}.$$

固定 $S > 0$，并对 $|s| \le S$ 的绝对估计用 $Z_0 e^{\Re(s) t_d}$ 归一化。这里 $n/k_0 \to 0$ 和 $hnk_0 = \sqrt{\eta}\sqrt{n}$。对于 $k \le \epsilon k_0$，上文使用的初等秩上界以及 $|B_k| \le e^{Sh^{2/3}k}$ 因此给出归一化上界

$$C_S \sqrt{n} (2\epsilon)^d \exp\{n/3 + C_S\sqrt{n}\}.$$

当 $\epsilon > 0$ 固定且充分小时，它以指数速度趋于零。

对于 $hk \le a_0$，当 $a_0 > 0$ 充分小时，每个未扰动的牛顿因子均为正。不等式 $\tau(v) \ge v^2$ 给出精确上界 $|B_k| \le e^{St - h^2k^3/3}$。此外

$$\log \frac{d! D_{n,k}}{k^d} \le d^2/k + Ch^2 d(k+d)^2 \qquad (k \ge n).$$

对于 $k \ge M k_0$，第一项为 $O(\eta)$，第二项为 $o(h^2k^3)$，因为 $n/k \to 0$ 一致成立。在这个范围内，倾斜项 St 也为 $o(h^2k^3)$。因此

$$|D_{n,k} B_k| \le \frac{C}{d!} k^d e^{-h^2k^3/6}.$$

对于固定且充分大的 M，递减的上包络及其格点间距 $1/k_0$ 给出

$$\frac{1}{k_0} \sum_{k \ge M k_0} (k/k_0)^d e^{-n(k/k_0)^3/6} \le \int_{M-1}^{\infty} y^d e^{-ny^3/6}\, dy.$$

归一化后，这至多乘以 $C\sqrt{n} e^{n/3 + C_S n^{1/3}}$。由于当 y 足够大时，$\log y - y^3/6 \le -y^3/12$，因此对于足够大的 M，结果关于 n 呈指数级小。在 $\epsilon \le y \le M$ 上，主指数除以 n 后，一致收敛于 $\log y - y^3/3$，其唯一最大值位于 one。任意固定的 one 邻域之外存在严格最大值间隙；再令该邻域逐渐缩小，便可在归一化和中将 (6.16) 中的修正项替换为 $-3\eta/40$。

为论证复数比较和格点归一化，令 $\Phi_d(t) = d\log t - t^3/3$，并令 $\sigma_d = (3t_d)^{-1/2}$。其最大值位于 t_d，且对所有 $t > 0$，

$$\Phi_d''(t) = -d/t^2 - 2t \le -3t_d.$$

事实上，对 $y = t/t_d > 0$，$y^{-2} + 2y \ge 3$。因此

$$\Phi_d(t_d + \sigma_d u) - \Phi_d(t_d) \le -u^2/2,$$

并且在有界的 u 区间上，左侧趋于 $-u^2/2$。由于 $\sigma_d \to 0$，由控制收敛定理以及一致界 $e^{-u^2/2 + S\sigma_d |u|}$，可得

$$\frac{\mathcal{H}_n(s)}{\mathcal{H}_n(0) e^{s t_d}} \longrightarrow 1$$

对复数 s 局部一致地成立。在 u 坐标中，格点间距为 $h^{2/3}/\sigma_d = \sqrt{3} h^{2/3} d^{1/6} = O(\sqrt{\eta} n^{-3/2}) \to 0$。在有界区间上一致收敛，加上相同的高斯尾部界，可得晶格和具有相同的极限。这证明其相对误差为 $o(1)$，紧集上最终不存在轮廓零点，并得到前述尾项估计和修正项估计的复数相对版本。

对于 $a_0/h \le k < K = \lceil 1/h \rceil$，$\lfloor a_0/h \rfloor$ 正因子的固定前缀提供了一个 $e^{-c/h}$ 损失；后续因子的模数至多为 $1 + Sh^{2/3}$。秩因子的对数为 $O(n \log(1/h + n)) = o(1/h)$，而系数和的界对该对数贡献了 $O(n + h^{-1/3}) = o(1/h)$。因此，K 处的精确预解式余项为 $O(e^{-c'/h})$，其中某个 $c' > 0$，对这些 $O(1/h)$ 个指标求和时同样成立。最后，$|\log Z_0| = O(n(1 + |\log h| + \log n)) = o(1/h)$ 且 $|st_d| = O_S(n^{1/3}) = o(1/h)$。相对于该轮廓，这些尾项可以忽略不计，从而完成证明。□

推论 6.4。令 $h = u_m/(r+n/2)$，并令 $r\to\infty$。对于固定的 $m\ge 2$，如果 hn^3 有界且 $n\to\infty$，则

$$J_r^{(n)}(L_m;e^{-h/2}) = \frac{\Gamma((n-1)/2)}{2(n-2)!\alpha_m^{(n-1)/2}} h^{-(n-1)/2}\exp\{c_m\sqrt{h}\,n^{3/2}\}(1+o(1)).$$

对于 $m=1$，若 $h^{2/3}n^{5/3}$ 有界且 $n\to\infty$，则

$$J_r^{(n)}(4_1;e^{-h/2}) = \frac{3^{(n-4)/3}\Gamma((n-1)/3)}{(n-2)!} h^{-2(n-1)/3}\exp\{-3h^{2/3}n^{5/3}/40\}(1+o(1)).$$

在各自的较小秩范围内，相对因子为 *1*。

证明。选择 h 使得 $x_r^{(n)} = 2$双曲余弦 $u_m = X_m$ 恰好成立。应用 $s=0$处的两个定理，计算初等伽马积分，并使用精确的节点插值公式。□

7. 对数单值化与几何周期

本节将这些求和从实数 $h>0$ 解析延拓到半平面 $\Re h>0$，并研究该解析延拓在 $h\mapsto h+2\pi i$下的单值化。固定整数 $m\ge 1$ 和 $n\ge 2$，并令 $d=n-2$。坐标

$$Y = Q^{n/2}X$$

消除了博雷尔系数中 Q 的半整数幂。对于 $0<|Q|<1$，定义

$$P_{n,k}(Q,Y) = \prod_{j=0}^{k-1}(1 - YQ^j + Q^{n+2j}) \tag{7.1}$$

以及芽

$$\widehat{H}_{m,n}(Q,Y,t) = \sum_{k\ge 0} g_{m,k}^{(n)}(Q)\frac{(Q^{n-1};Q)_k P_{n,k}(Q,Y)}{(Q;Q)_k^2}(-Q^{-d}t)^k. \tag{7.2}$$

这里的 $g_m^{(n)}$、k 是第 4 节中定义的多项式系数。因此，当 $Q=e^{-h}$ 且$h>0$时，

$$\widehat{H}_{m,n}(Q,Q^{n/2}X,t) = H_{m,n,h}(X,t).$$

引理 7.1. 芽 (7.2) 可解析延拓为在其极除子之外关于 $0<|Q|<1$ 和 $Y\in\mathbb{C}$联合全纯，并且关于 t亚纯。其可能的极点均为简单极点，且位于

$$t_j = -Q^{d-j},\qquad j\ge 0.$$

对于紧集 $C\Subset\{\Re h>0\}$ 和 $E\Subset\mathbb{C}$，存在常数 K, C_0 使得

$$|\widehat{H}_{m,n}(e^{-h},Y,e^{hx})| \le C_0(1+|e^{hx}|^K),\qquad h\in C,\ Y\in E,\ x\in\mathbb{R}.$$

证明。写作 $\rho=|Q|$。$g_m^{(n)}$、k 的系数非负，且正矩公式给出

$$|g_{m,k}^{(n)}(Q)| \le g_{m,k}^{(n)}(\rho) \le (\rho^n;\rho)_\infty^{-1}.$$

因此

$$G_{m,n}(Q,w) = \sum_{r\ge 0}\frac{Q^{r(r+n-1)}(w;Q^{-1})_r}{(Q;Q)_r} g_{m-1,r}^{(n)}(Q),\qquad m\ge 2, \tag{7.3}$$

在 w 中是整函数，并且关于 w 在 $0<|Q|<1$ 的紧子集上正规收敛。令 $G_{1,n}=1$。有限递推关系推出 $G_{m,n}(Q,Q^k) = g_{m,k}^{(n)}(Q)$。

令 $a+b=Y$ 和 $ab=Q^n$，使得 $P_{n,k}(Q,Y) = (a,b;Q)_k$。在紧参数集上选取 K，使得 $|aQ^K|,\ |bQ^K|<1$一致成立，并令

$$b_k = \frac{(Q^{n-1},a,b;Q)_k}{(Q;Q)_k^2},\qquad k\ge 0.$$

函数

$$A_K(w)=G_{m,n}(Q,Q^Kw)\frac{(Q^{K+n-1},aQ^K,bQ^K;Q)_\infty}{(Q^{K+1};Q)_\infty^2}\\ \times\frac{(Q^{K+1}w;Q)_\infty^2}{(Q^{K+n-1}w,aQ^Kw,bQ^Kw;Q)_\infty}=\sum_{j\ge0}a_{K,j}w^j$$

在半径大于一的圆盘上解析，且其系数范数局部一致有界。约去乘积后得到

$$\widehat{H}_{m,n}=\sum_{k<K}g_{m,k}^{(n)}b_k(-Q^{-d}t)^k+b_K(-Q^{-d}t)^K\sum_{j\ge0}\frac{a_{K,j}}{1+tQ^{j-d}}. \tag{7.4}$$

该表达式关于 a,b 对称，因此在 Y 上全纯，即使两个根重合时也如此。它与 $t=0$ 附近的芽一致，并确立了所述的亚纯延拓。

对于右半平面紧子集中的 h，

$$|1+e^{h\tau}|\ge c_C(1+e^{(\Re h)\tau}),\qquad \tau\in\mathbb{R}. \tag{7.5}$$

该比值在实数轴两端均一致趋于一。在有界区间上，它有一个正的最小值：若等式 $e^{h\tau}=-1$ 成立，则由绝对值的比较可推出 $\tau=0$，且 $e^0\neq-1$。将 (7.5) 中的 $\tau=x+d-j$ 应用于 (7.4)，即可证明该界。□

对于 $Rh>0$，按如下方式定向对数螺线

$$\Gamma_h=\{e^{hx}:x\in\mathbb{R}\}$$

通过递增 x，并定义

$$\widehat{S}_{m,n}(h,Y)=\frac{1}{h}\int_{\Gamma_h}\frac{\widehat{H}_{m,n}(e^{-h},Y,t)}{(-t;e^{-h})_\infty}\,dt. \tag{7.6}$$

定理 7.2. 积分(7.6) 正规收敛，并且关于 $Rh>0$和 $Y\in\mathbb{C}$联合全纯。它满足

$$\widehat{S}_{m,n}(h,Q^{n/2}X)=S_{m,n,h}(X),\qquad h>0,$$

其核的矩为

$$\frac{1}{h}\int_{\Gamma_h}\frac{t^k}{(-t;Q)_\infty}\,dt=(Q;Q)_kQ^{-k(k+1)/2},\qquad k\ge0. \tag{7.7}$$

在移动节点处

$$Y_{n,r}(Q)=Q^{-r}+Q^{n+r},\qquad r\ge0, \tag{7.8}$$

它等于与正实轴上相同的有限彩色纽结不变量。

证明. 将积分用 $t=e^{hx}$ 参数化，得到被积函数

$$\frac{e^{hx}\widehat{H}_{m,n}(e^{-h},Y,e^{hx})}{(-e^{hx};e^{-h})_\infty}.$$

在紧致的 h 集上，写作 $a_0=\min Rh>0$。对于 $x\ge0$，令 $L=\lfloor x\rfloor$。核分母的前 $L+1$ 个因子由 (7.5) 控制，因此

$$|(-e^{hx};e^{-h})_\infty|^{-1}\le C\exp(-a_0x^2/2+C_1x).$$

其余乘积在 h 和 $x-L\in[0,1]$中非零且连续，并且一致地远离零。对于 $x\le0$，倒数核有界。因此，引理 7.1 给出了两端的可积界，并且该界关于 $(h,\ Y)$ 局部一致。

用 $\widehat{H}_{m,n}$ 替换为 t^k 的相同推理表明，(7.7) 的左侧在 h 中是全纯的。定理 2.2 的实矩恒等式可扩展到连通右半平面。在 (7.8) 中，当 $k>r$ 时，多项式 $P_{n,k}$ 为零，因此博雷尔变换终止。逐项应用矩恒等式即可证明最后一个断言。□

即使对 h 位于正实轴附近的狭窄扇形区域，螺旋线也不能替换为正实射线：

命题 7.3。 </style}对于任意 ,，即使博雷尔变换恒等于 1，未变形的正实射线积分也不可能在所有满足 和 辐角 $h|<\theta_0$ 的 h 处都存在。

证明。 取 $0<\theta<\min(\theta_0,\pi/2)$，并令 $h_N=(\pi\cot\theta+i\pi)/N$。该核在正实射线上有一个简单极点 $-e^{Nh_N}=e^{\pi\cot^\theta}$，而沿方向 θ 时 $h_N\to 0$。□

7.1. **留数公式（在对数覆盖上）**。令 $t_l=-Q^{-l}$ 当 $l\ge -d$时，并写作

$$\widehat{H}_{m,n}(Q,Y,t)=\frac{a_l(Q,Y)}{t-t_l}+b_l(Q,Y)+O(t-t_l).$$

对于 $l\ge 0$，定义

$$\rho_l=\frac{(-1)^l Q^{l(l-1)/2}}{(Q;Q)_l(Q;Q)_\infty},\qquad \sigma_l=Q^l\left(l-\sum_{j>l}\frac{Q^j}{1-Q^j}\right), \tag{7.9}$$

$$\alpha_l=\rho_l a_l,\qquad \beta_l=\rho_l(b_l+\sigma_l a_l). \tag{7.10}$$

对于 $-d\le l<0$ 集

$$\alpha_l=0,\qquad \beta_l=\frac{a_l}{(Q^{-l};Q)_\infty}. \tag{7.11}$$

因此， α_l 和 β_l 分别是$\widehat{H}_{m,n}(Q,Y,t)/(-t;Q)_\infty$的洛朗展开中阶数为 -2 和 -1 的系数。

定理 7.4。这些函数

$$\mathcal{A}_{m,n}(Q,Y)=-\sum_{l=-d}^{\infty} l\beta_l(Q,Y),\qquad \mathcal{B}_{m,n}(Q,Y)=\sum_{l=0}^{\infty}Q^l\alpha_l(Q,Y) \tag{7.12}$$

对于 $0<|Q|<1$、 $Y\in\mathbb{C}$是单值的且全纯的。这两个级数在紧子集上一致收敛，并且

$$\widehat{S}_{m,n}(h,Y)=\mathcal{A}_{m,n}(e^{-h},Y)+\frac{\mathcal{B}_{m,n}(e^{-h},Y)}{h}. \tag{7.13}$$

特别地，

$$\widehat{S}_{m,n}(h+2\pi i,Y)-\widehat{S}_{m,n}(h,Y)=-\frac{2\pi i}{h(h+2\pi i)}\mathcal{B}_{m,n}(e^{-h},Y). \tag{7.14}$$

此外，存在一个全纯函数 复数域$_{m,n}$，它关于 Y是整函数，使得

$$\mathcal{B}_{m,n}(Q,Y)=\prod_{j\ge 0}(1-YQ^j+Q^{n+2j})\,\mathcal{C}_{m,n}(Q,Y). \tag{7.15}$$

证明。从核乘积中去掉消失因子，得到 (7.9)。其正规因子的对数导数在 t_l 处为

$$-\sum_{j\ne l}\frac{Q^j}{1-Q^{j-l}}=Q^l\left(l-\sum_{j>l}\frac{Q^j}{1-Q^j}\right).$$

对于 $l<0$，核在 t_l处正则，因此得到 (7.11)。

在紧致的 Q环域上，(7.4) 对 $l\ge 0$给出 $|a_l|+|b_l|\le CA^l$，且在紧致的 Y 集上是一致的。为此，将奇异分式单独提出来，在 t_l处计算其余各项，并对 $s>0$使用 $|1-Q^s|\ge 1-|Q|^s$；对于 $s<0$，则提出因子 Q^s。多项式前缀及其导数只会带来关于 l的指数因子。随后， ρ_l 的高斯衰减便可证明 (7.12) 中的正规收敛。

^对于实数 $0<Q<1$，令 $f(t)=H_{m,\ n}(Q,\ Y,\ t)/(-t;\ Q)_\infty$并对$f(t)$ log$(-t)$应用留数定理，其中对数割线位于正实轴上。取外半径 $Q^{-L-1/2}$。在这些圆周上，根据 (7.4)，博雷尔变换至多呈多项式增长，而倒数核则衰减

得比任意幂都快。外层积分趋于零；零点处的内圆积分也趋于零。因此

$$\int_0^{\infty} f(t)\,dt = -\sum_{l=-d}^{\infty} \operatorname{Res}_{t=t_l}\big(f(t)\log(-t)\big).$$

在 t_l 处，$\log(-t_l) = lh$ 以及 $(\log(-t))' = 1/t_l = -Q^l$。右侧为 $-h\sum l\beta_l + \sum_{l\ge 0} Q^l\alpha_l$。这证明了实数 $h>0$ 的情形下的 (7.13)。全纯性将其延拓至右半平面，而 Q 中两个块的单值性证明了 (7.14)。

在节点 (7.8) 处，博雷尔变换是一个多项式，因此所有 a_l 都消失，并且 $\mathcal{B}_{m,n}=0$。(7.15) 中的乘积是关于 Y 的正规收敛整函数。其零点恰为这些节点，且均为单零点：两个不同节点相等将意味着 $Q^{r-s}=1$ 或 $Q^{n+r+s}=1$。对于 $0<|Q|<1$，这两种情况都不可能发生。除以这些单零点即可证明该因式分解，并且它关于 Q 联合全纯。□

推论7.5。设

$$S^{\mathrm{tr}}_{m,n}(h,X) = \widehat{S}_{m,n}(h, e^{-nh/2}X), \qquad \epsilon_n = (-1)^n.$$

Then

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{tr}}_{m,n}(h+2\pi i, X) &= S^{\mathrm{tr}}_{m,n}(h,\epsilon_n X) \\ &\quad - \frac{2\pi i}{h(h+2\pi i)}\mathcal{B}_{m,n}(e^{-h}, \epsilon_n e^{-nh/2}X). \end{aligned} \tag{7.16}$$

证明。在 $h\mapsto h+2\pi i$ 下，变量 Q 保持不变，而 $e^{-nh/2}X$ 乘以 ϵ_n。在该 Y 值处应用（7.14）。□

符号 ϵ_n 来自坐标 Y 中的半整数幂 $e^{-nh/2}$。在移动节点 $Y_{n,\,r}(Q)$ 处，对数单值化消失。对于 $m=1$，$n=2$，经过 $Y=QX$ 后，我们的博雷尔变换和实积分就是 [20, (3.4)–(3.5)] 中的八字形表达式。相应的对数分解已在 [20,(3.39)–(3.43)] 中给出。

7.2. Stokes 留数与对数系数。

固定-Q 的 Stokes不连续性以及 h 中的对数单值化，均由同一组博雷尔留数通过两个显式线性配对得到。

对于 $d=n-2$ 和 $0<|Q|<1$，令

$$\widehat{\mathcal{R}}_{m,n,j}(Q,Y) = \text{留数}_{\xi=-Q^{d-j}}\, H_{m,n}(Q,Y,\xi), \qquad b_{m,n,j}(Q,Y) = Q^{j-d}\mathcal{R}_{m,n,j}(Q,Y), \qquad j\ge 0. \tag{7.17}$$

（当 $-Q^{d-j}$ 不是极点时，留数为零。）当 $0<Q<1$时，记 $h=-\log Q$ 和$w_Q(t) = (-t;Q)_\infty^{-1}$，并定义

$$\mathscr{S}_{m,n,Q}(Y,z) = \frac{1}{h}\int_0^{\infty} \widehat{H}_{m,n}(Q,Y,zt)w_Q(t)\,dt, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0].$$

因此 $\mathscr{S}_{m,n,Q}(Y,1) = S_{m,n}(h,Y)$，而在迹坐标中，这与以下求和相同：$S_{m,n,h}(Q^{-n/2}Y,z)$。令

$$\Delta_{m,n,Q}(Y,r) = \mathscr{S}_{m,n,Q}(Y,-r+i0) - \mathscr{S}_{m,n,Q}(Y,-r-i0), \qquad r>0.$$

命题 7.6。对于 $0<|Q|<1$ 以及任意 $Y\in\mathbb{C}$,

$$\mathcal{B}_{m,n}(Q,Y) = \frac{1}{(Q;Q)_\infty}\sum_{l\ge 0}\frac{(-1)^l Q^{l(l-1)/2}}{(Q;Q)_l} b_{m,n,l+d}(Q,Y). \tag{7.18}$$

该级数在 $\{0<|Q|<1\}\times\mathbb{C}_Y$ 的紧子集上一致收敛。

若 $0<Q<1$，则取 $\tau_j = Q^{d-j}/r$ 时，

$$\Delta_{m,n,Q}(Y,r) = -\frac{2\pi i}{h}\sum_{j\ge 0} b_{m,n,j}(Q,Y)\tau_j w_Q(\tau_j). \tag{7.19}$$

此级数在 Y 和 $r>0$ 中局部正规收敛。对于固定的 Q 和 Y，函数$r\mapsto \Delta_{m,\,n,\,Q}(Y,r)$ 确定每个系数 $b_{m,\,n,\,j}(Q,Y)$，因此也确定 $B_{m,\,n}(Q,Y)$。在博雷尔变换中加上一个有限多项式，且其系数关于 Q、Y 是单值且全纯的，不会改变这两个量中的任何一个。

证明。 有限前缀表示 (7.4) 表明，在每个紧参数集上，都存在常数 $C,D>0$ 使得

$$|b_{m,n,j}(Q,Y)|\le CD^{j}\qquad (j\ge 0). \tag{7.20}$$

事实上，在该紧集上统一选取前缀长度。其解析尾项的系数在半径大于一的圆盘上具有统一的柯西界。在极点 $\xi=-Q^{d-j}$处，有限前缀表示中的固定幂 ξ 至多引入关于 j的一个额外指数因子。多项式前缀的留数为零。每个固定极点处的留数关于 Q,Y联合全纯，这可由该表示或围绕极点的局部柯西积分推出。当 $0<|Q|<1$时，不同极点不会重合。

在 $\xi=-Q^{-l}$, $l\ge 0$处，w_Q 的留数为

$$\rho_l=\frac{(-1)^l Q^{l(l-1)/2}}{(Q;Q)_l(Q;Q)_\infty}.$$

$\widehat{\ }H_{m,n}(Q,Y,\xi)w_Q(\xi)$中二阶极点的系数因此为 $\rho_l\mathcal{R}_{m,n,l+d}(Q,Y)$。公式 (7.12) 给出

$$\mathcal{B}_{m,n}(Q,Y)=\sum_{l\ge 0}Q^l\rho_l\mathcal{R}_{m,n,l+d}(Q,Y)=\sum_{l\ge 0}\rho_l b_{m,n,l+d}(Q,Y),$$

即为 (7.18)。在紧环域 Q 上，因子 $(Q;Q)_l$ 关于 l 一致地远离零点，而 $Q^{l(l-1)/2}$ 具有一致的二次指数衰减。结合 (7.20)，即可证明对所有颜色均成立的正规收敛。

对于实数 Q，对同一有限前缀表示应用侧向留数公式 (3.5)。由于极点为 $-Q^{d-j}$ 且 $z=-r$，其贡献为

$$-\frac{2\pi i}{hr}\mathcal{R}_{m,n,j}(Q,Y)w_Q(Q^{d-j}/r)=-\frac{2\pi i}{h}b_{m,n,j}(Q,Y)\tau_j w_Q(\tau_j).$$

核沿此几何序列呈二次指数衰减，因此 (7.20) 也证明了 (7.19) 的局部正规收敛。

系数 $b_{m,\,n,\,j}$ 可能呈指数增长，因此假设 $b\in\mathscr{W}_R$ 的定理 3.5 不能直接应用。不过，指数界 (7.20) 已足够。令 $f(t)=tw_Q(t)$。其对数导数为

$$\frac{d\log f(t)}{d\log t}=1-\sum_{a\ge 0}\frac{tQ^a}{1+tQ^a}\longrightarrow -\infty\qquad (t\to\infty).$$

因此，对于每个 $\gamma>0$，都存在一个 T_γ 使得

$$\frac{f(ct)}{f(t)}\le c^{-\gamma}\qquad (t\ge T_\gamma,\ c\ge 1). \tag{7.21}$$

对每个固定的 $c>1$，相同比值都趋于零。若 j_0 是第一个非零系数，则将 (7.19) 除以 $f(Q^{d-j_0}/r)$。选取 γ，使得 $DQ^{\gamma}<1$ 满足 (7.20)。于是，含有 $j>j_0$ 的项均可由一个可求和的几何序列控制，且该控制与充分小的 r无关，并且每一项都趋于零。因此

$$\Delta_{m,n,Q}(Y,r)\sim-\frac{2\pi i}{h}b_{m,n,j_0}(Q,Y)f(Q^{d-j_0}/r),\qquad r\downarrow 0.$$

等价 因此，包括可能为零的所有系数，都可以依次恢复出来 y

$$b_{m,n,j}(Q,Y)=-\frac{h}{2\pi i}\lim_{r\downarrow 0}\frac{\Delta_{m,n,Q}(Y,r)+\dfrac{2\pi i}{h}\displaystyle\sum_{i<j}b_{m,n,i}(Q,Y)f(Q^{d-i}/r)}{f(Q^{d-j}/r)}. \tag{7.22}$$

代入 (7.18) 可确定对数系数。最后，根据精确矩恒等式，多项式的拉普拉斯变换是 z 中的一个多项式。它没有侧向不连续性。当其系数在 Q, Y 中是单值的且全纯时，其变换后的系数也具有同样性质，因为这些矩在 Q中是单值的。因此，它对 $\mathcal{B}_{m,n}$ 没有任何贡献，这与 (7.18) 一致，因为多项式没有留数。□

因此，在固定 Q 时，辅助变量 z 中的斯托克斯数据决定了 h 中覆盖变换 (7.14) 的系数。二者关于留数 $b_{m,n,j}$ 均为线性，但权重不同：跳跃以核值 $\tau_j w_Q(\tau_j)$ 对它们加权，而这些核值取决于 r；而 $\mathcal{B}_{m,n}$ 则是单一的配对 (7.18)。

7.3. **轮廓表示**。现在我们将定理 7.4 的系数 $\mathcal{B}_{m,n}$ 写成围道积分，然后对八字结的情形进行估计。与前面一样，$m \geq 1$、$n \geq 2$、$d = n-2$ 和 $0 < |Q| < 1$，以及 a、b 由 $a+b=Y$ 和 $ab = Q^n$确定。回顾一下，

$$\widehat{S}_{m,n}(h, Y) = \mathcal{A}_{m,n}(Q, Y) + h^{-1}\mathcal{B}_{m,n}(Q, Y), \qquad Q = e^{-h}.$$

我们使用 (7.3) 中的整函数系数插值函数 $G_{m,n}$；它满足 $G_{m,n}(Q, Q^k) = g^{(n)}_{m\,k}(Q)$，以及 $G_{1,n} = 1$。

定理 7.7. 对于任意满足 $|w| = R$ 的正向圆周

$$0 < R < \min\{|a|^{-1}, |b|^{-1}, |Q|^{1-n}\},$$

都有如下精确恒等式

$$\mathcal{B}_{m,n}(Q, Y) = \frac{(Q^{n-1}, a, b; Q)_\infty}{(Q; Q)_\infty^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} w^{-d} G_{m,n}(Q, w) \frac{(Qw; Q)_\infty^2 (w^{-1}; Q)_\infty}{(Q^{n-1}w, aw, bw; Q)_\infty} \frac{dw}{w}. \tag{7.23}$$

该积分与可容许半径无关。此表达式关于 a、b 对称，并且在整个 $0 < |Q| < 1$、$Y \in \mathbb{C}$内关于 Q、Y联合全纯延拓，包括其所示前置因子的零点。

证明。 首先假设 $|a|, |b| < 1$。在半径大于一的圆盘上，令

$$A(w) = G_{m,n}(Q, w) \frac{(Q^{n-1}, a, b; Q)_\infty}{(Q; Q)_\infty^2} \frac{(Qw; Q)_\infty^2}{(Q^{n-1}w, aw, bw; Q)_\infty} = \sum_{j \geq 0} A_j w^j.$$

原始博雷尔变换为

$$\widehat{H}_{m,n}(Q, Y, t) = \sum_{j \geq 0} \frac{A_j}{1 + tQ^{j-d}}.$$

在 $t_l = -Q^{-l}$、$l \geq 0$处，其留数为 $A_{l+d}Q^{-l}$。拉普拉斯核在同一点处的留数为

$$\rho_l = \frac{(-1)^l Q^{l(l-1)/2}}{(Q; Q)_l (Q; Q)_\infty}.$$

因此，乘积中的二阶极点系数为 $\alpha_l = \rho_l A_{l+d} Q^{-l}$。根据 (7.12)，

$$\mathcal{B}_{m,n} = \sum_{l \geq 0} Q^l \alpha_l = \frac{1}{(Q; Q)_\infty} \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l Q^{l(l-1)/2}}{(Q; Q)_l} A_{l+d}.$$

欧拉展开 $(w^{-1}; Q)_\infty$ 将这个绝对收敛的系数配对识别为 $w^{-d}A(w)(w^{-1}; Q)_\infty$ 的常数项，从而证明了 (7.23)。欧拉级数在所有避开 $w = 0$ 的圆周上都正规收敛，因此初始半径不必大于 1。

对于任意 Y，在一个紧参数邻域上选取充分小的正 R。此时，被积函数中的每个分母都不为零，且它们的乘积正规收敛；G 也同样如此。该积分关于根 a、b 联合全纯且对称。因此，它关于 Y 全纯，包括 $a = b$ 的情形。从非空域 $|a|$、$|b| < 1$ 出发进行解析延拓，即可证明该公式处处成立。两个可容许

圆之间的环域不含极点，从而证明结果与半径无关。由于不存在除以 $(Q^{n-1}、\ a、\ b;\ Q)_\infty$ 的运算，该公式在此乘积的零点集上同样成立。□

7.4. 在 $X=2$处的围道积分。对于八字结情形 $m=1$，将迹特化为 $X=2$ 并设

$$B_n(h)=\mathcal{B}_{1,n}(e^{-h},2e^{-nh/2}),\qquad \Re h>0.$$

因此 $Y=2Q^{n/2}$，从而 $a=b=Q^{n/2}$（特别是秩二时的 $a=b=Q$），且圆周$|w|=1$ 在（7.23）中是可容许的。对 $w=z^{-1}$ 求逆可得

$$\begin{aligned} B_n(h)&=p_n(h)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}F_{n,h}(z)\frac{dz}{z},\\ p_n(h)&=\frac{(Q^{n-1};Q)_\infty(Q^{n/2};Q)_\infty^2}{(Q;Q)_\infty^3},\\ F_{n,h}(z)&=z^d\frac{(Q/z;Q)_\infty^2(z;Q)_\infty}{(Q^{n-1}/z;Q)_\infty(Q^{n/2}/z;Q)_\infty^2}. \end{aligned}\tag{7.24}$$

求逆会反转圆周的定向，而 $dw/w=-dz/z$ 中的符号对此进行了补偿。$F_{n的h}$ 分母的零点严格位于单位圆内，因此$F_{n,\ h}$ 在圆周上全纯；它在 $z=1$处取零。

对于 $n=2$，前因子为一，欧拉的两个乘积展开式给出

$$B_2(h)=g(Q)=\sum_{k\ge0}\frac{(-1)^kQ^{k(k+1)/2}}{(Q;Q)_k^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(z;Q)_\infty}{(Q/z;Q)_\infty}\frac{dz}{z}.\tag{7.25}$$

恒等式 $B_2=g$ 以及这个 q级数对八字结的作用已为人所知；参见 [20,（3.47）–（3.48）] 和 [11, 推论 1.7]。对于 $n>2$，公式（7.24）使被积函数乘上一个明确的因子，下面我们将确定所得积分的渐近行为。

记 $\mathrm{Li}_2(z)=\sum_{k\ge1}z^k/k^2$ 为 $|z|\le1$，必要时取其主解析延拓，并令 $\mathrm{Cl}_2(\theta)=\sum_{k\ge1}\sin(k\theta)/k^2=\operatorname{Im}\mathrm{Li}_2(e^{i\theta})$。设

$$V=2\,\operatorname{Im}\mathrm{Li}_2(e^{i\pi/3})=\mathrm{Vol}(S^3\setminus4_1),\qquad b_d=\frac{27d^2+11}{72\sqrt{3}}.$$

这是八字结补空间的双曲体积，这一点众所周知；关于临界值的这种归一化，参见 [7, (2), §4.1] 和 [20, (3.70)–(3.72)]。下文中 h 的幂和平方根均取其在复数域$h>0$中的主值。

定理 7.8. 固定 $n\ge2$ 和 $0<\delta<\pi/4$。当 $h\to0$ 属于

$$\delta\le\arg h\le\frac{\pi}{2}-\delta,$$

围道积分 (7.24) 满足

$$B_n(h)=\frac{(-1)^dh^{1/2-2d}}{d!\,\Gamma(n/2)^2\sqrt{2\pi}\,3^{1/4}}e^{iV/h-i\pi/4}\left(1-ib_dh+O_{n,\delta}(|h|^2)\right).\tag{7.26}$$

在下方扇形区域 $-\pi/2+\delta\le$辐角 $h\le-\delta$内一致地，有

$$B_n(h)=\frac{(-1)^dh^{1/2-2d}}{d!\,\Gamma(n/2)^2\sqrt{2\pi}\,3^{1/4}}e^{-iV/h+i\pi/4}\left(1+ib_dh+O_{n,\delta}(|h|^2)\right).\tag{7.27}$$

证明。令 $z=e^{i\theta}$，其中 $0\le\theta\le2\pi$，并定义

$$W(\theta)=\mathrm{Li}_2(e^{-i\theta})-\mathrm{Li}_2(e^{i\theta})=-2i\,\mathrm{Cl}_2(\theta).$$

在 $z=1$ 附近，波赫哈默符号的渐近展开并不一致，因此我们首先证明 $z=1$ 的某个邻域不会对主阶产生贡献。对于 $\theta\ne0,\ 2\pi$,

展开 $1-z$ 在（$z;Q$）$_\infty$中的显式因子以外的所有乘积。$\log F_{n,\ h}(z)\ -d\log\ z-\log(1-z)$中 z^{-k} 和 z^k的系数分别为

$$-\frac{2e^{-kh}-e^{-(n-1)kh}-2e^{-nkh/2}}{k(1-e^{-kh})},\qquad -\frac{e^{-kh}}{k(1-e^{-kh})}.$$

减去 $W(\theta)/h$ 后，两个系数分子的商除以 $1-e^{-kh}$ 后，在 $|kh|\le 1$时有界。对于 $|kh|\ge 1$，它们与被减去项之差至多为 $C(e^{-c|kh|}+|kh|^{-1})$，且在闭扇形内一致成立。因此，在 $k=\lfloor |h|^{-1}\rfloor$ 处分割求和可得

$$|F_{n,h}(e^{i\theta})|\le C|h|^{-C}\exp(\Re(W(\theta)/h)),\qquad 0\le\theta\le 2\pi. \tag{7.28}$$

在 $z=1$ 处，左侧为零，因此由连续性可知该处同样满足此界。

由于

$$W'(\theta)=2i\log(2\sin(\theta/2)),\qquad W''(\theta)=i\cot(\theta/2),$$

两个临界点为 $\theta=\pi/3$ 和 $\theta=5\pi/3$，对应的函数值为 $-iV$ 和 iV。在上扇区$R(W(\theta)/h)$ 在 $\theta_*=5\pi/3$ 处取得唯一的全局最大值。在该扇区中，任意固定的 θ_* 邻域之外，函数值至少相差 $c/|h|$，且这一结论一致成立。由 (7.28) 可知，整个补空间（包括 $z=1$）的贡献至多为关于 $|h|^{-1}$ 的一个多项式乘以 $e^{\Re(iV/h)-c/|h|}$。因此，相对于主项，它对任意 N 都是 $O(|h|^N)$。

在 θ_* 的固定邻域内，每个对数乘积的欧拉–麦克劳林展开及其导数都一致成立。为得到余项，对射线 $s\in h\mathbb{R}_{\ge 0}$上的 $\log(1-ze^{-s})$ 应用欧拉–麦克劳林公式；该射线位于右半平面内的一个固定闭锥中，且 z 始终与其保持一定距离。将该射线旋转至正实轴时不会穿过任何奇点。因此，对于固定的 $c\ge 0$，有

$$\log(Q^cz;Q)_\infty=-h^{-1}\operatorname{Li}_2(z)+(\tfrac12-c)\log(1-z)-\tfrac{h}{2}(c^2-c+1/6)\frac{z}{1-z}+O(|h|^2),$$

以及相应的更高阶展开及其导数。此外，由$p_1=d(3d+4)/8$,

$$p_n(h)=\frac{h^{-2d}}{d!\,\Gamma(n/2)^2}(1+p_1h+O(|h|^2)). \tag{7.29}$$

对于偶数 $n=2r$，这可直接由精确恒等式 $p_n=[(Q;Q)_d(Q;\ Q)_{r-1}^2]^{-1}$得出。对于奇数 $n=2r+1$，使用

$$p_n=\frac{(Q^{1/2};Q)_\infty^2/(Q;Q)_\infty^2}{(Q;Q)_{2r-1}(Q^{1/2};Q)_r^2}$$

以及η变换，可得

$$\frac{(Q^{1/2};Q)_\infty^2}{(Q;Q)_\infty^2}=\frac{h}{\pi}e^{-h/8}\frac{(\widetilde{Q}^2;\widetilde{Q}^2)_\infty^2}{(\widetilde{Q};\widetilde{Q})_\infty^4},\qquad \widetilde{Q}=e^{-4\pi^2/h}.$$

对偶乘积的商在所述扇形区域内为 $1+O(e^{-c/|h|})$。这就证明了（7.29），且余项在该扇形区域内一致。

将（7.29）乘入局部被积函数后，除去固定的归一化因子，主导角向振幅为

$$a_d(\theta)=(-1)^d(2\sin(\theta/2))^{2d+1}.$$

其首个相对修正项为 $-i(p_1+1/12)\cot(\theta/2)$。在 θ_* 处，有

$$a_d(\theta_*)=(-1)^d,\quad \frac{a_d'}{a_d}(\theta_*)=-\frac{(2d+1)\sqrt{3}}{2},\quad \frac{a_d''}{a_d}(\theta_*)=\frac{(2d+1)(6d-1)}{4},$$
$$W''(\theta_*)=-i\sqrt{3},\qquad W'''(\theta_*)=-2i,\qquad W''''(\theta_*)=-2i\sqrt{3}.$$

实角积分路径在上扇区内沿高斯方向一致衰减，因为$R(-i\sqrt{3}/h) \le -c/|h|$。原圆的正向定向对应的高斯因子为

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi h}{i\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2\pi}\,3^{1/4}} e^{-i\pi/4}.$$

高斯矩给出相对阶数-h 系数

$$-\frac{a_d''}{2a_d W''} + \frac{a_d' W'''}{2a_d (W'')^2} + \frac{W''''}{8(W'')^2} - \frac{5(W''')^2}{24(W'')^3} + i\sqrt{3}(p_1 + 1/12) = -\frac{i(27d^2+11)}{72\sqrt{3}}.$$

泰勒展开到更高两阶，并结合高斯支配，可得所述的相对$O(|h|^2)$误差。指数级小的补空间项已在上文估计。对精确乘积取复共轭，即可得到下扇区公式。□

在秩二情形下，作用量和前两个系数与 [20, (3.70)–(3.72)]中的几何微扰周期一致；定理 7.8 还给出了在各扇区内一致成立的余项估计。对于 $n > 2$ ，该积分是秩二情形的积分，并带有 (7.24) 中明确给出的附加因子。

在附录 B 中，我们验证二阶主导因子等于 $\sqrt{-h/(4\pi\tau_\mu)}$，其中τ_μ 是经子午线归一化的伴随挠率，平方根由积分路径的定向确定。

推论 7.9。 在八字结情形下，被积函数和前因子满足

$$\frac{p_{n+2}(h)}{p_n(h)} = \frac{1}{(1-Q^{n-1})(1-Q^{n})(1-Q^{n/2})^2},$$
$$\frac{F_{n+2,h}(z)}{F_{n,h}(z)} = z^2(1-Q^{n-1}/z)(1-Q^{n}/z)(1-Q^{n/2}/z)^2.$$

因此，将秩提高二会使同一围道积分的被积函数乘以一个关于 z的 *Laurent* 多项式；特别是，经典相位的临界值不会改变。

证明。 消去 (7.24) 中移位后的无穷乘积。由于 $h \to 0$ 插入的因子趋于$z^{-2}(z-1)^4,$，且它在临界点 $z = e^{\pm i\pi/3}$处不为零，因此两个鞍点都不会被消去。□

7.5. 在 $X = 2$ 处的实展开。 在正实数 h轴上， $X = 2$ 处的行为要简单得多：定理 4.6 的余项公式给出$S_{m,\,n,\,h}(2)$ 关于 h的幂的完整渐近展开。

命题 7.10。 对于固定的 $m \ge 1$、 $n \ge 2$以及任意固定整数 $L \ge 1$，当 $h \to 0^+$ 时，有

$$S_{m,n,h}(2) - \sum_{k=0}^{L-1} D_{n,k}(h)\, g_{m,k}^{(n)}(e^{-h})\, B_k^{(n)}(2;h) = O_{m,n,L}(h^{2L}). \tag{7.30}$$

特别地，$S_{m,\,n,\,h}(2)$在此迹处有完整的庞加莱展开，其最初的非恒定项为

$$S_{m,n,h}(2) = 1 - \frac{m(n-1)n^2}{4}h^2 + \frac{m(m-1)(n-1)n^3}{8}h^3 + O_{m,n}(h^4). \tag{7.31}$$

证明。令 $\tau(v) = 2$双曲余弦 $v-2$，并选择 $a > 0$足够小，使得 $m\tau(a) < 1$。取 $K = \lfloor a/h \rfloor$。当 h 足够小时，存在一个固定的 $r < 1$ ，使得

$$m\tau((K+n/2)h) \le r, \qquad Kh \ge a/2.$$

词模型给出 $0 < g_{m}^{(n)}{}_{,\,k} \le m^{k}$，而 $D_{n,\,k}$ 的精确双曲正弦乘积蕴含 $D_{n,\,k} \le C(k+1)^{d}$ 对于 $k \le K$。在 $X = 2$处，

$$|B_{k}^{(n)}(2;h)| = \prod_{j=0}^{k-1} \tau((j+n/2)h).$$

若 $L \le k \le K$，前 L 个因子由 $C_{L}h^{2L}$ 界定，而其余每个因子都由 r/m 界定。因此

$$\sum_{k=L}^{K-1} D_{n,k} g_{m,k}^{(n)} |B_{k}^{(n)}(2;h)| \le C_{L}h^{2L} \sum_{k>L} (k+1)^{d} r^{k-L} = O(h^{2L}).$$

在 $D = X - 2 = 0$ 处，精确的解析余项 (4.29) 满足 $\sum_{l} |\mu_{l}(0)| = 1$ 和 $\sum_{r} |\nu_{r}| \le (1-e^{-a/2})^{-2(n+1)}$，由 (4.24) 可得。因此，(4.30) 将剩余尾项界定为 $C(K+1)^{d} r^{K} = O(e^{-c/h})$。这就证明了 (7.30)。

固定有限和中的每一项在 $h = 0$ 处都是解析的，且其第 k 个牛顿因子以 $2k$ 阶消失。因此，对所有固定的 L 的估计给出了所述的完整展开。对于所展示的系数，使用

$$D_{n,1} = (n-1) + O(h^{2}), \quad g_{m,1}^{(n)} = \sum_{j=0}^{m-1} e^{-njh} = m - \tfrac{1}{2} nm(m-1)h + O(h^{2}),$$

以及 $B_{1}^{(n)}(2;\, h) = -n^{2}h^{2}/4 + O(h^{4})$。所有 $k \ge 2$ 项根据已证明的余项估计，对 $O(h^{4})$ 作出贡献。□

附录 A. 边界值与次临界增长

固定 $0 < p < 1$，并记 $w_{p}(t) = (-t;p)_{\infty}^{-1}$。我们首先对柯西积分及其欧拉导数进行控制，且该控制在其极点趋近正实轴时保持一致。随后，我们讨论增长率低于拉普拉斯核二次衰减率的亚纯 Borel 变换。

引理 A.1. 对于整数 $K \ge 0$，令 $f_{K}(t) = t^{K} w_{p}(t)$，并且对于 $\tau \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$，令

$$J_{K}(\tau) = \int_{0}^{\infty} \frac{f_{K}(t)}{1 - t/\tau}\, dt.$$

固定 $t_{0} > 0$。对于每个实数 $\tau \ge t_{0}$，函数 J_{K} 都有上方和下方的边界值，

$$J_{K}(\tau \pm i0) = \mathrm{PV} \int_{0}^{\infty} \frac{f_{K}(t)}{1 - t/\tau}\, dt \mp i\pi\tau f_{K}(\tau),$$

并且主值与 $\tau f_{K}(\tau)$ 在 $\tau \ge t_{0}$ 上一致有界。当 $a \ge t_{0}/2$ 且 $0 < |b| \le a/4$ 时，$J_{K}(a+ib)$ 也满足同样的一致界。因此，若 $\sum_{m} |\beta_{m}| < \infty$，且点 τ_{m} 在该区域内趋于实数极限 $\ge t_{0}$，并且这些点全都从上方或全都从下方趋近，则 $\sum_{m} \beta_{m} J_{K}(\tau_{m})$ 趋于相应边界值之和。

证明。 核 w_{p} 及其导数的衰减速度快于 t的任意幂。事实上，

$$\frac{d}{dt} \log w_{p}(t) = -\sum_{j \ge 0} \frac{p^{j}}{1 + tp^{j}}$$

当 t 较大时，结果为 $O((1+\log t)/t)$；这是通过在 $tp^{j} = 1$ 处分割求和得到的，因此

$$|f_{K}'(t)| \le C\, t^{K-1} (1 + \log t)\, w_{p}(t) \qquad (t \ge 1).$$

对实数 $\tau \ge t_{0}$，在 $\tau/2$ 和 $3\tau/2$ 处分割积分。在 $[0, \tau/2]$ 上，我们有 $|1 - t/\tau|^{-1} \le 2$，因此这一部分至多为 $2\int_{0}^{\infty} f_{K}(t)\, dt$。在中间区间上，写作 $f_{K}(t) = f_{K}(\tau) + (f_{K}(t) - f_{K}(\tau))$。常数项的主值由关于 τ 的对称性而消失，其余被积函数有界于 $\tau \sup |f_{K}'|$，因此这一部分至多为 $\tau^{2} \sup_{\tau/2 \le t \le 3\tau/2} |f_{K}'(t)|$；由于 f_{K}' 的衰减，当 $\tau \ge t_{0}$ 时该项有界。在 $[3\tau/2, \infty)$ 上，我们有 $|1 - t/\tau|^{-1} \le 3\tau/t$，因此这一部分

至多为 $3\tau\int_{3\tau/2}^{\infty} f_K(t)\,dt/t$，这同样有界。留数项的模数为 $\pi\tau f_K(\tau)$，基于相同原因有界。

对于 $\tau = a+ib$，在 $a \ge t_0/2$ 和 $0<|b|\le a/4$ 的情况下，改为在 $a/2$ 和 $3a/2$ 处分割，并减去$f_K(a)$。在中间区间上，$|t-a|/|t-a-ib|\le 1$和 $|\tau|\le 2a$，因此差值至多贡献 $2a^2\sup|f\prime_K|$。常数项贡献 $-\tau f_K(a)\int_{a/2}^{3a/2}(t-a-ib)^{-1}\,dt$，而最后一个积分是两个对数之差，对 b 的任一符号都一致有界，并且当 $b\to 0$时收敛。外侧区间的有界性与之前相同，只需将常数 2 和 $3\tau/t$分别换成 4 和 $6a/t$。这证明了统一有界性，以及当 $b\to 0$从任一侧趋近时极限的存在性。关于求和的结论由控制收敛定理得出。□

A.1. 多项式系数因子。这里我们将引理 A.1 推广到带有多项式因子 $P(k)$ 的解析尾项。在本小节中，$0<p<1$ 任意，$h_p=-\log p$，且$w_p(t)=(-t;p)_\infty^{-1}$。

引理 A.2。取非负整数 K,j，并令 $F_K(t)=t^K w_p(t)$。存在常数 C，它依赖于 p,K,j，使得对于 $t\ge 1$

$$|(t\partial_t)^j F_K(t)| \le C t^K (1+\log t)^j w_p(t), \tag{A.1}$$

$$|\partial_t (t\partial_t)^j F_K(t)| \le C t^{K-1}(1+\log t)^{j+1} w_p(t). \tag{A.2}$$

每个 $(1+t\partial_t)^j F_K$ 在 $t=0$ 附近解析，且在 $[0,1]$上的一阶导数有界。公式 (A.1) 右侧的每个函数在 $[1,\infty)$ 上均可积，乘以 t 的任意固定次幂后仍在该处有界。

证明。通过对数求导可得

$$(t\partial_t)\log w_p(t) = -\sum_{a\ge 0}\frac{tp^a}{1+tp^a}.$$

对于 $t\ge 1$，将级数在 $a=\lfloor \log\, t/h_p\rfloor$处分开。分界点之前有 $O(1+\log\, t)$ 项，每项至多为一；之后的项则由几何级数控制。对 $u/(1+u)$ 连续应用 $t\partial_t$，$u=tp^a$，每次所得函数在 $u\ge 0$ 时有界，且当 $u\to 0$时为 $O(u)$，因此同样的分拆表明，对于每个固定的 $i\ge 1$，$(t\partial_t)^i\log w_p(t)=O(1+\log\, t)$。将 $(t\partial_t)^j F_K$ 写成 F_K 乘以这些对数导数及 K 的多项式（根据指数函数高阶导数的公式），即可得到两个不等式。在 $t=0$ 附近，乘积 $(-t;p)_\infty$ 全纯且非零，由此可得其正则性。最后一个断言由 (2.7) 得出。□

命题 A.3. 设一个博雷尔变换是一个多项式与一个尾项$Cv^K\sum_{m\ge 0} e_m/(1-\kappa Q^m v)$之和，其中多项式系数、$C$ 以及 e_m 关于颜色全纯，$\sum_m |e_m|$ 关于颜色局部一致有界，其余参数固定。设其极点位于博雷尔平面的负实轴上，并且它与 $w_p(t)\,dt/h_p$相乘后进行积分。定理 *3.8* 中的尾项 $c_k=\lambda^k f(Q^k)$（其中 $\lambda>0$）也属于此情形。于是，对于紧集中的颜色以及$(0,\infty)$的紧子集中的模数，该和关于 z 的任意固定阶欧拉导数在负实轴上都有上、下边界值，且局部一致。如果 $\theta_z=z\partial_z$ 且 P 是多项式，那么

$$S_{P(k)c_k} = P(\theta_z)S_c, \qquad \Delta_{P(k)c_k}(X,r) = P(r\partial_r)\Delta_c(X,r). \tag{A.3}$$

第二个恒等式中的导数沿负实轴取值。对于高阶极点，边界积分须按 *Hadamard* 有限部分理解，并加上相应的留数项。

证明。 在负实轴之外，对系数求导并利用正规收敛，可得 $S_{k^j c_k}=\theta_z^j S_c$。需要证明的是，沿整个极点序列，边界值及其导数均存在且一致。在去掉有限个初始项后，

该积分是一个级数，其系数绝对可和，项的形式如下：

$$J_\eta(\tau;F)=\int_0^\infty \frac{F(t)}{1-e^{i\eta}t/\tau}\,dt,\qquad \tau\ge\tau_0>0,$$

其形式为 $F(t)=t^K w_p(t)$，并乘以一个在紧集上有界的模数幂。代换 $t=\tau u$ 表明，$\tau\partial_\tau J_\eta(\tau;F)=J_\eta(\tau;(1+t\partial_t)F)$；代换后分母与 τ 无关；对于 $\eta\neq 0$，这可由在积分号下求导得出。项 $z^K J_\eta(\tau;F)$ 中，若 τ 与 z^{-1} 成正比，则经 θ_z 映射后得到 $z^K(K-\tau\partial_\tau)J_\eta(\tau;F)$。因此，每个固定阶导数都是若干具有相同柯西型且权重取自引理 A.2 的积分的有限线性组合。

对每个这样的权重，在 $\tau/2$ 和 $3\tau/2$ 处分割积分。外侧部分由引理 A.2 的可积包络一致控制。在中间区间，减去权重在 τ 处的值。常数项的积分是一个显式对数，当 $\eta\to 0$ 从任一侧趋近时，其极限有限；剩余部分至多为 $C\tau^2\sup_{[\tau/2,3\tau/2]}|F|$，且关于 η 一致。引理 A.2 保证这些界对 $\tau\ge\tau_0$ 一致成立，留数项 $\pi\tau F(\tau)$ 也有界。当极点略微偏离实轴时，采用在其实部处相减的同一论证，并使用不等式 $|t-a|/|t-a-ib|\le 1$，如引理 A.1 所示。

因此，每个导数沿极点序列都有可求和的主控函数，边界值可以逐项取值，模数中的有限多个导数也同样如此。柯西核的边界值给出简单极点处的跳跃，对它们求导则得到高阶极点处的有限部分以及 (A.3)。跳跃取上侧减下侧，与正文中的约定相同。带有正的 λ 以及任意初始系数的此类尾项的有限和，都可由线性性处理。□

若 λ 不是实数，则旋转辅助变量即可将相应的奇异射线移至负实轴。积分变量 t 保持为正，核 $w_p(t)$ 不变，因此同样的论证给出该射线上的边界值。

A.2. **具有次临界增长的亚纯变换。**

引理 A.4。 设 $0<p$、$\rho<1$，设 H 在零点附近全纯且在复数域上亚纯，并假设其极点属于有限多个等差序列 $\alpha_\nu\rho^{-\mathbb{N}_0}$，且极点阶数一致有界。取一条射线 $R=e^{i\theta}\mathbb{R}_{>0}$，使其包含其中一些极点，并取一个以 R 为中心且不含其他极点方向的楔形区域。假设在该楔形区域内，除去围绕可能的极点的互不相交圆盘 $|\xi-\alpha|<\epsilon|\alpha|$ 后，

$$|H(\xi)|\le C(1+|\xi|)^a\exp\{\kappa\log^2(2+|\xi|)\},\qquad \kappa<\frac{1}{2h_p}. \tag{A.4}$$

于是，L_pH 在 R 上具有侧向极限，并且对 $z=e^{i\theta}r$、$r>0$ 局部一致地成立。取减小自变量所得的极限减去增大自变量所得的极限，它们的差为

$$\Delta_H(z)=\frac{2\pi i}{h_p z}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}}\operatorname{Res}_{\xi=\alpha}\big(H(\xi)w_p(\xi/z)\big). \tag{A.5}$$

当 r 属于 $(0,\infty)$ 的紧子集时，该级数正规收敛。若 H 以及 (A.4) 中的界关于辅助参数全纯且局部一致地成立，并具有固定的可能极点集，则侧向极限和留数和具有相同的参数依赖性。

证明。将重合点视为同一点后，有限个 ρ 等差序列的并具有正的相对分离。事实上，来自同一对等差序列的两个点之比具有 $c\rho^j$ 的形式，而在任意给定的、以 1 为中心的环域中，只有有限多个这样的比值。因此，可以减小 ϵ，使闭相对圆盘彼此不相交，并且仍位于楔形区域内。选择两条路径 Γ_- 和 Γ_+，它们在 $\mathcal{R}$ 上从零延伸至无穷远，并分别从参数递减和递增的一侧绕过这些圆盘。如果 M 界定极点阶数，则将最大模原理应用于相对圆盘上的 $(\xi-\alpha)^M H(\xi)$，可知其中的 H 受其边界界乘以 $(\epsilon|\alpha|/|\xi-\alpha|)^M$ 所界定。在与 $\mathcal{R}$ 成固定非零角的射线上，这个最后的

因子关于 α一致有界。因此，改变常数和多项式因子后，(A.4) 沿楔形区域内的每一条此类射线也成立。

在每个更小的扇形区域 $|\arg\, t| \le \theta_0 < \pi$ 上，核满足

$$|w_p(t)| \le C_{\theta_0} \exp\left\{ -\frac{\log^2 |t|}{2h_p} + C_{\theta_0} \log |t| \right\}, \qquad |t| \ge 1. \tag{A.6}$$

为验证这一估计，令 $J = \lfloor \log |t| / h_p \rfloor$。对于 $j \le J$，不等式 $|1 + tp^j| \ge c_{\theta_0}(1 + |t|p^j)$ 给出

$$\sum_{j=0}^{J} \log |1 + tp^j| \ge \sum_{j=0}^{J} (\log |t| - j h_p) - C_{\theta_0}(J+1).$$

对于 $j > J$，乘积在 $\arg\, t$ 和 $|t|p^{J+1} \in [p, 1]$ 中一致地远离零：前面有限多个因子远离零，而其余因子的对数一致可和。由此得到的整个对数的下界为 $\log^2 |t|/(2h_p) - O(\log |t|)$，这就证明了 (A.6)。

对于射线的紧子集 z 以及两侧充分小的邻域，沿两条路径，ξ/z 都位于正实轴附近一个固定的较小扇形区域内。结合 (A.4) 和 (A.6)，被积函数在

$$\frac{1}{h_p z} \int_{\Gamma_\pm} H(\xi) w_p(\xi/z)\, d\xi$$

在无穷远处，其有界性为 $C \exp\{-c \log^2 |\xi| + C' \log\, |\xi|\}$，其中某个 $c > 0$。绕行路径的长度为 $O(|\alpha|)$，可能的极点模数位于有限个等比数列上。因此，这些积分正规收敛。它们在零点处也可积，此处 H 和 w_p 全纯。

当 $\arg z$ 位于 θ的适当一侧时，将射线 $z\mathbb{R}_{>0}$ 变形为相应去心楔形域中的 $\Gamma_\pm$。$w_p(\xi/z)$ 的极点位于 $-z\mathbb{R}_{>0}$ 上，不会与此变形相交。上述估计使无穷远处的连接积分趋于零；可以选取与极点集保持固定相对分离的外半径。由全纯性可知，零点处的连接积分趋于零。因此，路径积分在其所在一侧等于 $\mathcal{L}_p H(z)$。正规收敛允许 z 趋于该射线，并证明侧向极限的存在。

将两个路径积分相减。每对绕行都以正向包围其极点，由留数定理得到 (A.5)。其正规收敛性可由相同的积分路径估计得到，也可通过每个相对圆盘上的柯西估计得到：留数的绝对值不超过边界长度乘以 $|H(\xi) w_p(\xi/z)|$ 的上确界，而后者具有刚刚证明的可求和界。在所述假设下，所有估计关于辅助参数局部一致。对路径积分求导，或结合正规收敛性应用莫雷拉定理，即可得到最后的断言。□

附录 B. 外围特征与秩二挠率

我们使用 Yoon 的公式 [32, 定理 2、注 1 和引理 2]，比较首项秩二因子与经子午线归一化的伴随挠率。

对于 $m = 1$，$n = 2$，令 $x = e^u$, $X = x + x^{-1}$ 和 $Y = QX$。闭合积分路径上的被积函数（包括其乘积前因子）具有如下局部经典相位

$$\begin{aligned} W_u(z) = {} & 2\,\mathrm{Li}_2(1) - \mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(x^{-1}) - \mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_2(z^{-1}) \\ & + \mathrm{Li}_2(x/z) + \mathrm{Li}_2(x^{-1}/z), \end{aligned}$$

在远离乘积除子处局部固定各分支。其导数恰好为

$$\frac{\partial W_u}{\partial \log z} = \log \frac{(1 - z)(1 - x/z)(1 - x^{-1}/z)}{1 - z^{-1}} = \log(2\cosh u - z - z^{-1}).$$

同样的表达式可直接由有限个牛顿因子得到。在秩二情形下 ,

$$B_{k+1}^{(2)}(X;h) = \big(2\cosh u - 2\cosh((k+1)h)\big)B_k^{(2)}(X;h).$$

取 $t = kh$，所示因子的极限对数为 log(2 双曲余弦 $u - e^t - e^{-t}$)。因此，周期使用坐标 $z = e^t$。其驻点方程为 $z + z^{-1} = 2$双曲余弦 $u - 1$。

为独立说明挠率归一化，令 $\mu = e^{u/2}$。Yoon 的负扭结指标 -1 是八字结情形；切比雪夫值 $S_{-1} = -1, S_{-2} = -T$ 给出其定义方程，以及子午线归一化、符号精细化同调挠率：

$$F(\mu, T) = (T-1)(T - \mu^2 - \mu^{-2}) + 1 = 0, \qquad \tau_\mu = \tfrac{1}{2}\partial_T F.$$

代换 $T = 1 + z$ 将驻点方程与 $F = 0$对应起来。可以在迹坐标 $\xi = \mu + \mu^{-1}$中检验完全特征处的子午线正则性。在这些坐标下，

$$\widehat{F}(\xi, T) = (T-1)(T - \xi^2 + 2) + 1.$$

在 $\xi = 2$和 $T = (3 \pm i\sqrt{3})/2$处，其关于 T的导数为 $\pm i\sqrt{3} \neq 0$。因此， ξ是特征曲线上的局部坐标，所以子午线迹的微分非零。于是，Yoon 的正则性判据 [32, 备注 2]适用于这些特征及其各自的邻域。在这条曲线上， $\mu^2 + \mu^{-2} = T + (T-1)^{-1}$，因此

$$\tau_\mu = \frac{1}{2}\big((T-1) - (T-1)^{-1}\big) = \frac{1}{2}(z - z^{-1}).$$

在上扇区主导鞍点 $z = e^{-i\pi/3}$ 处，这是 $\tau_\mu = -i\sqrt{3}/2$。由于积分路径以 $t = i\theta$参数化，其在鞍点处的海森矩阵为

$$W''(\theta_*) = 2\tau_\mu, \qquad \theta_* = \frac{5\pi}{3}.$$

因此，式 (7.26) 中的二阶主导因子可写为

$$\sqrt{-\frac{h}{4\pi\tau_\mu}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2\pi}\,3^{1/4}}\,e^{-i\pi/4},$$

其中，平方根由正向圆周确定。在秩 n 时，式 (7.24) 中的附加因子将此 SL_2 因子乘以

$$\frac{(-1)^d h^{-2d}}{d!\,\Gamma(n/2)^2}.$$

附录 C. 节点除子的模形式

根据 (7.15)，节点除子 E_n 整除 $\mathcal{B}_{m,n}$。在本附录中，我们通过对偶 nome 表示 E_n。令

$$E_n(h,u) = (Q^{n/2}e^u, Q^{n/2}e^{-u}; Q)_\infty, \qquad Q = e^{-h}, \quad \widetilde{Q} = e^{-4\pi^2/h},$$

其中 $X = e^u + e^{-u}$ 且 $Y = Q^{n/2}X$。

命题 C.1。 对于 $\Re h > 0$，以下等式在关于 u 的亚纯函数之间成立：

$$E_{2r}(h,u) = \frac{e^{(u^2/2 - \pi^2/3)/h + h/12}}{(Qe^u, Qe^{-u}; Q)_{r-1}} \frac{\sin(\pi u/h)}{\sinh(u/2)} (\widetilde{Q}e^{2\pi i u/h}, \widetilde{Q}e^{-2\pi i u/h}; \widetilde{Q})_\infty, \tag{C.1}$$

$$E_{2r+1}(h,u) = \frac{2e^{(u^2/2 - \pi^2/3)/h - h/24}}{(Q^{1/2}e^u, Q^{1/2}e^{-u}; Q)_r} \cos(\pi u/h) (-\widetilde{Q}e^{2\pi i u/h}, -\widetilde{Q}e^{-2\pi i u/h}; \widetilde{Q})_\infty. \tag{C.2}$$

这里 $r \geq 1$；奇恒等式对 $r = 0$ 也成立，而这种情形是证明的起点。

若在固定闭锥 $|\arg h| \leq \theta_0 < \pi/2$ 上，数对 (h,u) 满足

$$4\pi^2 \Re(1/h) - 2\pi|\Im(u/h)| \geq \eta/|h| \tag{C.3}$$

对于固定的 $\eta>0$，则当 $h\to 0$ 时，(C.1)–(C.2) 中的任一对偶乘积都等于 $1+O(e^{-\eta/|h|})$，且一致成立。

证明。令 $\theta_Q(z)=(Q,z,Q/z;\,Q)_\infty$. 对其双边高斯级数应用泊松求和，再利用雅可比三重乘积，可得

$$\theta_Q(e^{u}) = -2\sqrt{\frac{2\pi}{h}}\,e^{u^2/(2h)+u/2+h/8-\pi^2/(2h)}\sin(\pi u/h) \times (\widetilde{Q};\widetilde{Q})_\infty(\widetilde{Q}e^{2\pi i u/h},\widetilde{Q}e^{-2\pi i u/h};\widetilde{Q})_\infty.$$

平方根取在 $h>0$ 处为正且在 $\Re h>0$ 中全纯的那个分支。此外，

$$(Q;Q)_\infty=\sqrt{\frac{2\pi}{h}}\,e^{-\pi^2/(6h)+h/24}(\widetilde{Q};\widetilde{Q})_\infty.$$

这些是通常的 θ 与 η 模变换；参见 [26, §20.7(viii), §23.18]。将第一个恒等式除以 $(Q;\,Q)_\infty(1-e^{u})$，即可在 $r=1$ 时证明 (C.1)。在除以 $(Q;Q)_\infty$ 之前，将 u 替换为 $u-h/2$，即可证明 (C.2) 的秩一基例。去掉有限个初始乘积因子，即可证明一般恒等式。

在 (C.3) 条件下，前两个对偶自变量的模数至多为 $e^{-\eta/|h|}$，而 $|\widetilde{Q}|\le e^{-4\pi^2\cos\theta_0/|h|}$。因此，它们的乘积因子绝对值之和为 $O(e^{-\eta/|h|})$，从而得到所述的一致估计。□

例如，$|u|\le u_0<2\pi\cos\theta_0$ 推出 (C.3)，其中 $\eta=4\pi^2\cos\theta_0-2\pi u_0>0$。这些公式适用于任意 m 的除子，因为 $\mathcal{B}_{m,\,n}(Q,\;Y)=E_n(h,\;u)$复数域$_{m,\,n}(Q,\;Y)$。

AI 使用声明

本手稿仅使用 Claude Opus 5.5 进行语言编辑和润色。GPT-6.2 Astra 用于协助检查数学论证和计算的准确性。

参考文献

[1] Q. Chen、K. Liu 和 S. Zhu，双扭结的彩色 HOMFLY-PT 不变量的分圆展开，预印本，arXiv:2110.03616 (2021)，https://arxiv.org/abs/2110.03616。[2] I. Corwin、K. Matveev 和 L. Petrov，q-Hahn PushTASEP，《国际数学研究通知》IMRN 2021 (2021)，第 3 期，2210–2249。[3] L. Di Vizio 和 C. Zhang，关于 q **59** 2009 1, 求和与合 347 392, 10 5802 2433 流，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）（），第 – 期，doi: . /aif. . [4] T. Dreyfus，利用 Borel–Laplace 求和构造 q 差分方程的亚纯解，《国际数学研究通知》IMRN 2015 (2015)，第 15 期，6562–6587，doi:10.1093/imrn/rnu137。[5] H. Fang，《量子带色牛顿环》，预印本，arXiv: 2610 21102 2026 https://arxiv.org/abs/2610 。（），。 ,21102 [6] H. Fang 和 T. Zhou，分圆牛顿展开与秩一致整值牛顿完备化，预印本，arXiv:2608.29585 (2026)，https://arxiv.org/abs/2608.29585。[7] V. Fantini 和 C. Wheeler，双曲结态积分的可求和性，预印本，arXiv:2410.20973v1 (2024)，https://arxiv.org/abs/2410.20973。[8] V. Féray、P.-L. Méliot 和 A. Nikeghbali，模ϕ 收敛：正态性区域与精确偏差，Springer 概率与数理统计丛书，施普林格，沙姆，2016。定理编号依据 arXiv:1304.2934v4 (2015)，定理 9.6–9.7。[9] S. Garoufalidis、J. Gu 和 M. Mariño，量子结不变量的复苏结构，《数学物理通讯》386 (2021)，469–493，doi:10.1007/s00220-021-04076-0。[10] S. Garoufalidis、J. Gu、M. Mariño 和 C. Wheeler，陈–西蒙斯理论在平凡平坦联络处的复苏，《数学物理通讯》406 (2025)，文章 20，doi:10.1007/s00220-024-05149-6。[11] S. Garoufalidis 和 R. Kashaev，从态积分到 q级数，《数学研究快报》24 (2017)，第 3 期，781–801。[12] S. Garoufalidis、A. D. Lauda 和 T. T. Q. Lê，彩色 HOMFLYPT 函数是 q-全纯的，《杜克数学杂志》167 (2018)，397–447，https://arxiv.org/abs/1604.08502。[13] S. Garoufalidis 和 T. T. Q. Lê，Melvin–Morton–Rozansky 猜想的解析版本，预印本，arXiv:math/0503641v2 (2005)，https://arxiv.org/abs/math/0503641。

[14] S. Garoufalidis 和 T. T. Q. Lê，纽结的彩色琼斯函数的渐近行为，《几何与拓扑》15 (2011)，第 4 期，2135–2180。[15] S. Garoufalidis 和 T. T. Q. Lê，

q **62** 2016 3 4, -全 501 525, 10 4171 62 3 4 7 https://arxiv.org/abs/1601.07487

纯函数综述，《数学教学》（），第 — 期，doi: . /LEM/ - / -；.[16] G. Gasper 和 M. Rahman，《基本超几何级数》，第 2 版，《数学及其应用百科全书》第 96 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004。[17] K. Hikami 和 H. Murakami，具有多项式增长的彩色琼斯多项式，《当代数学通讯》10 (2008)，增刊 1，815–834，https://arxiv.org/abs/0711.2836。[18] M. E. H. Ismail 和 D. Stanton，q-泰勒定理、多项式展开与整函数插值，《逼近理论杂志》123 (2003)，第 1 期，125–146，doi:10.1016/S0021-9045(03)00076-5。[19] H. Itoyama、A. Mironov、A. Morozov 和 An. Morozov，八字结在所有对称表示与反对称表示下的 HOMFLY 与超多项式，《高能物理杂志》2012 (2012)，第 7 期，文章 131，doi:10.1007/JHEP07(2012)131。[20] R. Kashaev、V. Mangazeev 和 M. Mariño，解析量子不变量，预印本，arXiv:2610.24247 (2026)，https://arxiv.org/abs/2610.24247。[21] K. Kawagoe，三叶结、八字结及扭结的彩色 HOMFLY-PT 多项式，《几何物理杂志》213 (2025)，文章 105488。公式编号依据 arXiv:2107.08678v1。[22] G. Masbaum，Habiro 若干公式的编织理论推导，《代数几何与拓扑》3 (2003)，第 1 期，537–556。[23] A. Morozov 和 N. Tselousov，反平行三重椒盐结的微分展开：因式分解的变形方式，《欧洲物理杂志 C》82 (2022)，文章 912，doi:10.1140/epjc/s10052-022-10851-7。[24] H. Murakami 和 A. T. Tran，关于与实数相关的八字结彩色琼斯多项式的渐近行为，载于《低维拓扑与数论》（M. Morishita、H. Nakamura 和 J. Ueki 编），《施普林格数学与统计学会议录》第 456 卷，施普林格，新加坡，2025，第 175–209 页。公式编号依据 arXiv:2109.04664v4。[25] NIST 数学函数数字图书馆，第 17 章：q-超几何函数及相关函数，公式（17 6 7 https://dlmf.nist.gov/17.6.E7 8, . .）2026（海涅第二变换），，查阅于 11 月。[26] NIST 数学函数数字图书馆，θ 与 η 模变换，第 20.7(viii) 节及 23 18 https://dlmf.nist.gov/20.7.viii https://dlmf.nist.gov/23.18 8, 。，2026 以及，查阅于 11 月。[27] J.-P. Ramis，关于线性代数 q-差分方程解整函数的增长，《图卢兹数学科学学院年刊》（6）1 (1992)，第 1 期，53–94，doi:10.5802/afst.739。[28] J.-P. Ramis、J. Sauloy 和 C. Zhang，q-差分方程的局部解析分类，《星丛》355 (2013)，vi+151 页，https://arxiv.org/abs/0903.0853。[29] N. Yu. Reshetikhin 和 V. G. Turaev，带状图及其由量子群导出的不变量，《数学物理通讯》127 (1990)，1–26，doi:10.1007/BF02096491。[30] E. Witten，陈–西蒙斯理论的解析延拓，载于《陈–西蒙斯规范理论：二十年后》，《AMS/IP 高等数学研究》第 50 卷，美国数学会和国际出版社，2011，第 347–446 页。[31] K. H. Wong 和 T. K.-K. Au，八字结彩色 HOMFLY 多项式的渐近行为，预印本，arXiv:1711.04437v1 (2017)，https://arxiv.org/abs/1711.04437。[32] S. Yoon，扭结伴随表示的 Reidemeister 挠率的消失恒等式，《代数几何与拓扑》22 (2022)，第 1 期，227–249。公式编号依据 arXiv:2002.12576v2。

西湖大学理论科学研究院，中国浙江省杭州市西湖区墩余路600号，邮编310030电子邮箱地址：fanghonghuai@westlake.edu.cn