arXiv:2611.31852v2 [math-ph] 25 Nov 2026

分层弹性介质中格林函数的计算

HENG YUAN, WENZHONG ZHANG, BO WANG, WEI CAI

Abstract. 我们基于傅里叶域中的矩阵基表示和经典的界面反应-传输理论，提出了一种用于计算三维分层介质中时谐弹性波格林函数的递归方案。在保持横向旋转对称性的前提下，该方案利用五个标量函数将格林函数解耦为SH波和P-SV波，并通过递归求解这些函数；其计算成本随层数线性增长，而与源粒子和目标粒子所在的层无关。由此得到的方案可形成一种稳定的数值方法，可用于在空间域进行汉克尔变换求值，并为分层介质中弹性波散射的分析与高效数值模拟奠定基础。

关键词：弹性波动方程、层状介质、格林函数、矩阵基

1. Introduction

弹性波在层状介质中的传播是一项基础物理问题，其应用涉及地震学、地球物理勘探 [2, 27] 以及吸声材料的开发[25], 等。为了降低网格剖分成本并提高计算效率，波传播的数值模拟通常采用边界积分方程（BIE）方法，并借助互易定理；这类方法需要计算格林函数。

在均匀、各向同性的无限介质中，Stokes 推导出了点源的自由空间格林函数 [23]。对于时间谐波自由空间问题，3×3 张量函数也称为 Kupradze矩阵 [18]。对于材料参数分片常数的分层介质问题，边界积分方程方法要么采用自由空间格林函数，并针对每个材料表面增加积分方程；要么利用能够自然纳入界面间透射条件的层介质格林函数（LMGF）。例如，在 [11], 中，基于这两类格林函数的边界积分方程方法均已通过数值验证，用于求解半空间问题。然而，对于采用 LMGF 可减少更多积分方程的多层情况，关于分层介质中的弹性波传播研究与 LMGF 在边界积分方程方法中的实际应用之间，长期以来一直存在文献空白。另一方面，Thomson–Haskell方法

[24, 15], 射线法、 [22], 反射率法、 [10], 等方法针对层状介质中体波的传播，逐层发展了递归计算方案。后续研究 [13, 14, 17]进一步引入了水平偏振剪切波（SH波）的解耦，以及压缩波（P波）与垂直偏振剪切波（SV波）的混合处理。另一方面，早期的边界积分方程方法（BIE methods），如 Aki–Larner方法 [19], 、离散波数法（DWM） [6, 3, 5, 4] 和模态法 [12], 等，在频域内进行离散化与截断，通过有限个平面波的叠加来近似格林函数的点激励。现有方法的不足主要包括：多层情况下层状介质格林函数（LMGF）方案的可扩展性，以及尾部计算中的数值稳定性问题

，即傅里叶逆变换，或等价地说，其基础的汉克尔变换，因为该公式在尾部包含指数增长项。此外，体波散射与层状介质格林函数所需的表示之间还存在一个细微差异： [17] 指出，体波散射中每层包含 6 个自由度（DoF）（SH波占 2 个，P-SV波占 4 个），而层状介质格林函数实际包含 5 个自由度，本文后文将对此展开说明。自由度方面的不一致也可能在频域计算层状介质格林函数时引发数值问题。

本研究旨在填补这一空白，开发一种高效方案，以计算频域中的弹性波层状介质格林函数。该方案能够处理具有不同源-目标位置的多层配置，并控制一般反射矩阵和透射矩阵中的指数项，从而为后续研究层状介质中快速多极子方法（FMM）的应用铺平道路；该方法已被证明能够有效加速麦克斯韦方程的边界积分方程方法 [28, 9]。我们方法的数学基础是频域中格林函数张量的矩阵基表示 [30] ，并将经典的反射-透射型推导从 [8]加以扩展。矩阵基表示将层状介质格林函数的横向旋转对称性归为 5 个自由度，这些自由度以线性方式跨界面变换。通过明确分离旋转非对称性，可以将二维逆傅里叶变换简洁地转换为最高阶数为二的汉克尔变换，这些变换也作为索末菲型积分加以研究。随后，通过重新表述层状介质格林函数的控制方程，重新揭示了 SH波与 P-SV波的解耦（参见 [17]），并用五个标量函数表示。最后，以递归方式实现反应-透射界面处理，其计算成本随层数线性增长，同时谨慎处理指数因子。通过空间域中的数值测试验证了所提方案的有效性。

本文其余部分的组织如下。第2节简要回顾自由空间中弹性波动方程的格林函数，随后详细阐述LMGF的矩阵基底表述，并将SH波与P-SV波进行5个自由度的解耦。第3节提出一种基于反射-透射理论、用于处理混合波数界面问题的递归方案，并讨论其在空间域中的数值计算。第4节中的数值测试包括对界面条件的验证以及向均匀介质收敛的测试，验证了所提方案的数值质量。第5节给出总结，并讨论未来的研究工作。

2. The Green's function of elastic wave equation in layered media

本节采用经典势函数以及 [30] 中提出的矩阵基，将LMGF的计算简化为具有任意层数的层状介质中的三个亥姆霍兹问题。

2.1. 弹性波动方程的自由空间格林函数。假设一个均匀且各向同性的固体材料占据整个空间，其密度为 ρ ，拉梅常数为 ′，分别为 λ，μ。存在外部源 **b(r)**，并假设位移$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$足够小，则固体中的时间谐波弹性波动方程为：

$$-\omega^2 \rho \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathcal{T} + \mathbf{b}, \tag{1}$$

wh其中， 3×3 张量$\boldsymbol{\mathcal{T}}$称为应力张量，其分量为

$$\mathcal{T}=\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\mathbb{I}+\mu(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}),$$

且 $\mathbb{I}$ 为 3×3单位矩阵。本文始终采用时间谐波依赖 $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ 。另外，弹性波动方程（1）也可用矩阵演算记号写为

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\mu\nabla^2\mathbf{u}+\omega^2\rho\mathbf{u}=-\mathbf{b}.$$

设源位于$\mathbf{r}'$处，弹性波动方程的自由空间二阶格林函数 $\mathbb{G}^f(\mathbf{r};\mathbf{r}')$满足

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbb{G}^f+\mu\nabla^2\mathbb{G}^f+\omega^2\rho\mathbb{G}^f=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbb{I}, \tag{2}$$

其已知解为[7, 第8章。3]

$$\mathbb{G}^f(\mathbf{r};\mathbf{r}')=\frac{1}{\mu}\left(\mathbb{I}+\frac{\nabla\nabla}{(k^s)^2}\right)G^f_{k^s}(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\frac{1}{\gamma}\frac{\nabla\nabla}{(k^c)^2}G^f_{k^c}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{3}$$

其中 $\gamma=\lambda+2\mu$,

$$k^s=\sqrt{\frac{\omega^2\rho}{\mu}},\quad k^c=\sqrt{\frac{\omega^2\rho}{\gamma}} \tag{4}$$

分别为S波和P波的波数，并且

$$G^f_k(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{e^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{5}$$

是波数为 k 的亥姆霍兹方程的自由空间格林函数。我们假设 γ， $\mu>0$ ，正如大多数固体材料的情况一样。

2.2. 层状介质中带点源的弹性波动方程。考虑一个多层介质（见图1），沿 z方向有 $L+1$ 层，其中对于 $\ell=0$，界面位于 $z=d_\ell$，1、.....、$L-1$。本文还将始终使用记号 $d_{-1}=+\infty$、 $d_L=-\infty$。每一层均为均匀介质，具有恒定的密度 ρ_ℓ 和拉梅常数 λ_ℓ, μ_ℓ、 $\ell=0,\ \cdots,\ L$。于是，P波模量为

$$\gamma_\ell=\lambda_\ell+2\mu_\ell. \tag{6}$$

各层的厚度为

$$D_\ell=d_{\ell-1}-d_\ell,\quad \ell=1,\cdots,L-1. \tag{7}$$

设层状介质的第 ℓ' 层（$d_{\ell'}<z'<d_{\ell'-1}$）中位于 $\mathbf{r}'=(x',\ y',\ z')$ 处存在一个点源，其作用力为定向单位脉冲力

$$\mathbf{b}=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\boldsymbol{t}},\quad \hat{\boldsymbol{t}}=\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{8}$$

^ ^^^弹性波动方程的层状介质格林函数$\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=[G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_1,G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_2,G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_3]^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\lambda_\ell+\mu_\ell)\nabla\nabla\cdot\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\mu_\ell\nabla^2\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\omega^2\rho_\ell\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\boldsymbol{t}}, \tag{9}$$

位于第 ℓ 层（$d_\ell<z<d_{\ell-1}$）内的场点 $\mathbf{r}=(x,y,z)$。由于存在层状介质，格林函数必须满足透射条件

$$\left[\!\left[\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}}\right]\!\right]=\mathbf{0}_{3\times1},\quad \left[\!\left[\mathbf{n}\cdot\mathcal{T}^{\hat{\boldsymbol{t}}}\right]\!\right]=\mathbf{0}_{3\times1},\quad \hat{\boldsymbol{t}}=\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{10}$$

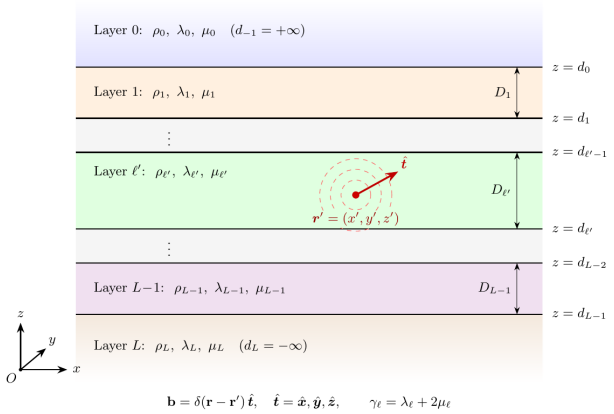


FIGURE 1. 层状介质结构示意图

在界面 $z=d_\ell$ 两侧，其中法向量为 $\mathbf{n}=\mathbf{e}_3=(0,0,1)$，其中

$$\mathcal{T}^{\hat{t}}=\lambda(\nabla\cdot\mathbf{G}^{\hat{t}})\mathbb{I}+\mu(\nabla\mathbf{G}^{\hat{t}}+(\nabla\mathbf{G}^{\hat{t}})^{\mathrm{T}}) \tag{11}$$

$\hat{}$是格林函数 $\mathbf{G}^{t}$的应力张量，而 $[\![\cdot]\!]$ 表示分段光滑函数跨越界面 $z=d_\ell$时的跳跃，即

$$[\![f]\!]=\lim_{z\to d_\ell+0}f-\lim_{z\to d_\ell-0}f.$$

如果不特别关注某一特定层，为简便起见，我们省略下标 ℓ。例如，方程（11）表示在任意给定层中成立的表达式。

2.3. 每一层内部的势函数。正如在推导自由空间中的二阶张量格林$\hat{}$函数 [7]，时一样，我们在每一层内部引入矢量势函数 $\mathbf{G}^{t}_{\boldsymbol{A}}=\nabla\times\mathbf{G}^{t}\hat{}$和标量势函数 $G^{t}_{B}=\nabla\cdot\mathbf{G}^{t}$，它们满足以下方程：

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{G}^{\hat{t}}_{\boldsymbol{A}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')+(k^s_\ell)^2\mathbf{G}^{\hat{t}}_{\boldsymbol{A}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')&=-\frac{1}{\mu_\ell}\nabla\times(\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\boldsymbol{t}}),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\\ \Delta G^{\hat{t}}_{B}(\mathbf{r},\mathbf{r}')+(k^c_\ell)^2G^{\hat{t}}_{B}(\mathbf{r},\mathbf{r}')&=-\frac{1}{\gamma_\ell}\nabla\cdot(\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\boldsymbol{t}}),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\end{aligned} \tag{12}$$

其中两个波数为

$$k^s_\ell=\sqrt{\frac{\omega^2\rho_\ell}{\mu_\ell}},\quad k^c_\ell=\sqrt{\frac{\omega^2\rho_\ell}{\gamma_\ell}}. \tag{13}$$

然后，求解势函数如下：

$$\mathbf{G}^{\hat{t}}_{\boldsymbol{A}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\nabla\times\boldsymbol{\Phi}^{\hat{t}}(\mathbf{r},\mathbf{r}'),\quad G^{\hat{t}}_{B}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}^{\hat{t}}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{14}$$

$\hat{}$ $\hat{}$其中矢量函数 $\boldsymbol{\Phi}^{t}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}^{t}$ 满足矢量亥姆霍兹方程：

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\Phi}^{\hat{t}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')+(k^s_\ell)^2\boldsymbol{\Phi}^{\hat{t}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')&=-\frac{1}{\mu_{\ell'}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\boldsymbol{t}},\quad d_\ell<z<d_{\ell-1},\\ \Delta\boldsymbol{\Psi}^{\hat{t}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')+(k^c_\ell)^2\boldsymbol{\Psi}^{\hat{t}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')&=-\frac{1}{\gamma_{\ell'}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\boldsymbol{t}},\quad d_\ell<z<d_{\ell-1}.\end{aligned} \tag{15}$$

利用恒等式

$$\Delta \mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}} = \nabla\nabla\cdot\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}} - \nabla\times\nabla\times\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}}$$

以及方程（9）中势函数$\mathbf{G}^{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{A}}$ 和 $G^{\boldsymbol{t}}_{B}$ 的定义，我们可以得到与自由空间情形类似的表示，即:

$$\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{(k^c_\ell)^2}\nabla G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_B(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \frac{1}{(k^s_\ell)^2}\nabla\times\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}}_{\boldsymbol{A}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{1}{\omega^2\rho_\ell}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\boldsymbol{t}}, \quad d_\ell < z < d_{\ell-1}, \tag{16}$$

对于所有 $\ell = 0, 1, \cdots, L$。此外，将（14）代入（16），并利用方程（15）消去狄拉克函数，可得公式

$$\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left(\mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{(k^s_\ell)^2}\right)\boldsymbol{\Phi}^{\hat{\boldsymbol{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{\nabla\nabla}{(k^c_\ell)^2}\boldsymbol{\Psi}^{\hat{\boldsymbol{t}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \quad d_\ell < z < d_{\ell-1}, \tag{17}$$

在每一层中。因此，并矢格林函数

$$\mathbb{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left[\mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{x}}}, \mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{y}}}, \mathbf{G}^{\hat{\boldsymbol{z}}}\right] \tag{18}$$

具有如下形式

$$\mathbb{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left(\mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{(k^s_\ell)^2}\right)\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{\nabla\nabla}{(k^c_\ell)^2}\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{19}$$

其中并矢势函数

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left[\boldsymbol{\Phi}^{\hat{\boldsymbol{x}}} \quad \boldsymbol{\Phi}^{\hat{\boldsymbol{y}}} \quad \boldsymbol{\Phi}^{\hat{\boldsymbol{z}}}\right], \quad \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left[\boldsymbol{\Psi}^{\hat{\boldsymbol{x}}} \quad \boldsymbol{\Psi}^{\hat{\boldsymbol{y}}} \quad \boldsymbol{\Psi}^{\hat{\boldsymbol{z}}}\right] \tag{20}$$

满足并矢亥姆霍兹方程:

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + (k^s_\ell)^2\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{\mu_\ell}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbb{I}, \quad \Delta\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + (k^c_\ell)^2\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{\gamma_\ell}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbb{I} \tag{21}$$

在每一层中满足方程，并满足跨越界面 $\{z = d_\ell\}_{\ell=0}^{L-1}$ 的界面条件，这些条件在式（10）中以隐式形式给出。

接下来，我们将利用我们在先前论文 [30]中提出的矩阵基，建立 $\boldsymbol{\Phi}$（$\mathbf{r}$、$\mathbf{r}'$）和 $\boldsymbol{\Psi}$（$\mathbf{r}$、$\mathbf{r}'$）的表示形式。该表示使我们能够解耦式（10）中的界面条件，进而得到表示式中各系数所满足的三个亥姆霍兹界面问题。

2.4. 傅里叶域中的层状介质格林函数推导。注意，点源δ（$\mathbf{r}$ $-\mathbf{r}'$）$\mathbf{I}$ 只有在 $\ell = \ell'$时才不是平凡的，即目标点和源点位于同一层时，可以从方程中减去自由空间格林函数以消除奇异性，即:

$$\mathbb{G}^r_{\ell\ell'}(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \mathbb{G}(\mathbf{r};\mathbf{r}') - \delta_{\ell\ell'}\mathbb{G}^f(\mathbf{r};\mathbf{r}'), \tag{22}$$

我们将其称为层状介质格林函数的反应场。这里， $\delta_{\ell\ell'}$ 是克罗内克符号。我们在反应分量的记号中添加了下标 ℓ、ℓ' ，以明确表示源层和目标层。与自由空间情形（3）一样，由 ℓ' 层中的点源产生的 $\mathbb{G}^f$（$\mathbf{r}$、$\mathbf{r}'$）可改写为

$$\mathbb{G}^f(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left(\mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{(k^s_{\ell'})^2}\right)\boldsymbol{\Phi}^f(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{\nabla\nabla}{(k^c_{\ell'})^2}\boldsymbol{\Psi}^f(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{23}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}^f(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{\mu_{\ell'}}G^f_{k^s_{\ell'}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbb{I}, \quad \boldsymbol{\Psi}^f(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{\gamma_{\ell'}}G^f_{k^c_{\ell'}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbb{I}. \tag{24}$$

定义反应分量

$$\boldsymbol{\Phi}_{\ell\ell'} = \boldsymbol{\Phi} - \delta_{\ell\ell'}\boldsymbol{\Phi}^f, \quad \boldsymbol{\Psi}_{\ell\ell'} = \boldsymbol{\Psi} - \delta_{\ell\ell'}\boldsymbol{\Psi}^f, \tag{25}$$

在第 ℓ层中。它们是齐次亥姆霍兹方程的解

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}_{\ell\ell'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + (k_\ell^s)^2\boldsymbol{\Phi}_{\ell\ell'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\Psi}_{\ell\ell'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + (k_\ell^c)^2\boldsymbol{\Psi}_{\ell\ell'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0, \tag{26}$$

在每一层中。由式（19）、（22）和（23），可得

$$\mathbb{G}^r_{\ell\ell'}(\mathbf{r};\mathbf{r}') = \left(\mathbb{I} + \frac{\nabla\nabla}{(k_\ell^s)^2}\right)\boldsymbol{\Phi}_{\ell\ell'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{\nabla\nabla}{(k_\ell^c)^2}\boldsymbol{\Psi}_{\ell\ell'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{27}$$

为了求解满足界面条件（10）的式（26）中的亥姆霍兹方程，我们利用水平面内的平移不变性，并对 x-y 平面中相对于偏移量 x' 和 y'的变量应用二维傅里叶变换，即

$$\mathcal{F}[f](k_x,k_y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)e^{-\mathrm{i}k_x(x-x')-\mathrm{i}k_y(y-y')}dxdy. \tag{28}$$

在频域中，令（k_ρ，α）为（k_x，k_y）的极坐标对，即

$$k_x = k_\rho\cos\alpha, \quad k_y = k_\rho\sin\alpha. \tag{29}$$

式（26）中方程的傅里叶变换是关于 z的常微分方程 :

$$\begin{aligned}\partial_{zz}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z,z') + (k_{\ell z}^s)^2\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z,z') = 0,\\ \partial_{zz}\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z,z') + (k_{\ell z}^c)^2\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z,z') = 0,\end{aligned} \tag{30}$$

wh ^ ^ 其中 $\boldsymbol{\Phi}_{\ell\ell'}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_{\ell\ell'}$ 分别是 $\boldsymbol{\Phi}_{\ell\ell'}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_{\ell\ell'}$的傅里叶变换 ,

$$k_{\ell z}^s = \sqrt{(k_\ell^s)^2 - k_\rho^2}, \quad k_{\ell z}^c = \sqrt{(k_\ell^c)^2 - k_\rho^2} \tag{31}$$

支割线的选取方式使得对于所有 $\ell = 0$、1、$\cdots$、L，$\Im(k_{\ell z}^s)$ $\Im(k_{\ell z}^c) \geq 0$。每一层中这些常微分方程的一般解形式为:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z,z') =& \hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\uparrow}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z')\hat{e}^{\uparrow}_\ell(z) + \hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\downarrow}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z')\hat{e}^{\downarrow}_\ell(z),\\ \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z,z') =& \hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\uparrow}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z')\tilde{e}^{\uparrow}_\ell(z) + \hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\downarrow}_{\ell\ell'}(k_x,k_y,z')\tilde{e}^{\downarrow}_\ell(z)\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}^*_{\ell\ell'}$、$\hat{\boldsymbol{\Psi}}^*_{\ell\ell'}$、$*=\uparrow$、$\downarrow$ 是与 z 无关的 3×3 矩阵，向上和向下传播的指数函数定义为

$$\hat{e}^{\uparrow}_\ell(z) = e^{\mathrm{i}k_{\ell z}^s(z-d_\ell)}, \quad \hat{e}^{\downarrow}_\ell(z) = e^{\mathrm{i}k_{\ell z}^s(d_{\ell-1}-z)}, \quad \tilde{e}^{\uparrow}_\ell(z) = e^{\mathrm{i}k_{\ell z}^c(z-d_\ell)}, \quad \tilde{e}^{\downarrow}_\ell(z) = e^{\mathrm{i}k_{\ell z}^c(d_{\ell-1}-z)}. \tag{33}$$

对于 $d_\ell < z < d_{\ell-1}$，由于全文始终采用约定 $d_{-1} = +\infty$、$d_L = -\infty$ ，因此它们对所有 $\ell = 0$、1、.....、L 都有明确定义。特别地，支割线$\Im(k_{\ell z}^s)$ $\Im(k_{\ell z}^c) \geq 0$ 意味着

$$\hat{e}^{\downarrow}_0(z) = \tilde{e}^{\downarrow}_0(z) = 0, \quad \hat{e}^{\uparrow}_L(z) = \tilde{e}^{\uparrow}_L(z) = 0, \tag{34}$$

对于任意给定的 z。因此，一般解 (32) 自然满足顶层 $\ell = 0$ 和底层 $\ell = L$的出射辐射条件。这会产生另外四个自由参数 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\downarrow}_{0\ell'}$，$\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\downarrow}_{0\ell'}$，$\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\uparrow}_{L\ell'}$，$\hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\uparrow}_{L\ell'}$，尽管与它们对应的项并不存在。然而，为简化后续推导，我们令

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\downarrow}_{0\ell'}(k_x,k_y,z') = \hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\downarrow}_{0\ell'}(k_x,k_y,z') = \mathbf{0}_{3\times3}, \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}}^{\uparrow}_{L\ell'}(k_x,k_y,z') = \hat{\boldsymbol{\Psi}}^{\uparrow}_{L\ell'}(k_x,k_y,z') = \mathbf{0}_{3\times3}.$$

未知矩阵 $\hat{\mathbf{\Phi}}^{*}_{\ell\ell'}$，$\hat{\mathbf{\Psi}}^{*}_{\ell\ell'}$，$*=\uparrow,\downarrow$应由界面条件 (10) 确定。我们将采用矩阵基理论（参见 [30]）来解耦界面条件。矩阵基中的前 5 个矩阵为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{J}_1=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\ \mathbb{J}_2=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix},\ \mathbb{J}_3=\begin{bmatrix}0&0&\mathrm{i}k_x\\0&0&\mathrm{i}k_y\\0&0&0\end{bmatrix},\\
&\mathbb{J}_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\mathrm{i}k_x&\mathrm{i}k_y&0\end{bmatrix},\ \mathbb{J}_5=\begin{bmatrix}-k_x^2&-k_xk_y&0\\-k_xk_y&-k_y^2&0\\0&0&0\end{bmatrix}.
\end{aligned}\tag{35}$$

根据表达式（11），我们有

$$\mathcal{T}^{\hat{\boldsymbol{t}}}_{31}=\mu\left(\frac{\partial G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_3}{\partial x}+\frac{\partial G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_1}{\partial z}\right),\quad \mathcal{T}^{\hat{\boldsymbol{t}}}_{32}=\mu\left(\frac{\partial G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_3}{\partial y}+\frac{\partial G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_2}{\partial z}\right),\quad \mathcal{T}^{\hat{\boldsymbol{t}}}_{33}=\gamma\frac{\partial G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_3}{\partial z}+\lambda\left(\frac{\partial G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_1}{\partial x}+\frac{\partial G^{\hat{\boldsymbol{t}}}_2}{\partial y}\right).$$

进行傅里叶变换可得

$$\widehat{\mathcal{T}}^{\hat{\boldsymbol{t}}}_{33}\hat{\boldsymbol{z}}=\left(\gamma\mathbb{J}_2\partial_z+\lambda\mathbb{J}_4\right)\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\boldsymbol{t}}},\quad \widehat{\mathcal{T}}^{\hat{\boldsymbol{t}}}_{31}\hat{\boldsymbol{x}}+\widehat{\mathcal{T}}^{\hat{\boldsymbol{t}}}_{32}\hat{\boldsymbol{y}}=\mu\left(\mathbb{J}_1\partial_z+\mathbb{J}_3\right)\widehat{\mathbf{G}}^{\hat{\boldsymbol{t}}}.\tag{36}$$

因此，对界面方程（10）进行傅里叶变换可得

$$\left[\!\left[\mathbb{J}_1\widehat{\mathbb{G}}\right]\!\right]=\mathbf{0},\quad \left[\!\left[\mathbb{J}_2\widehat{\mathbb{G}}\right]\!\right]=\mathbf{0},\quad \left[\!\left[\mu(\mathbb{J}_1\partial_z+\mathbb{J}_3)\widehat{\mathbb{G}}\right]\!\right]=\mathbf{0},\quad \left[\!\left[(\gamma\mathbb{J}_2\partial_z+\lambda\mathbb{J}_4)\widehat{\mathbb{G}}\right]\!\right]=\mathbf{0}.\tag{37}$$

根据上述界面条件，利用基（35）可得到矩阵 $\hat{\mathbf{\Phi}}^{*}_{\ell\ell'}$、$\hat{\mathbf{\Psi}}^{*}_{\ell\ell'}$、$*=\uparrow$、$\downarrow$的表示。

定理1。 反应场展开中的未知张量 $\hat{\mathbf{\Phi}}^{*}_{\ell\ell'}$、$\hat{\mathbf{\Psi}}^{*}_{\ell\ell'}$、$*=\uparrow$、$\downarrow$可由（35）中定义的矩阵基表示，即 (32)

$$\hat{\mathbf{\Phi}}^{*}_{\ell\ell'}=\sum_{i=1}^{5}\alpha^{*}_{\ell\ell',i}(k_x,k_y,z')\mathbb{J}_i,\quad \hat{\mathbf{\Psi}}^{*}_{\ell\ell'}=\sum_{i=1}^{5}\beta^{*}_{\ell\ell',i}(k_x,k_y,z')\mathbb{J}_i,\tag{38}$$

其中，$\alpha^{*}_{\ell\ell',i}$、$\beta^{*}_{\ell\ell',i}$、$i=1$、$\cdots$、5 是关于 z 的未知常数。

证明。 证明将在附录 A 中给出。 □

定义标量系数

$$\phi^{r}_{\ell\ell' i}=\alpha^{\uparrow}_{\ell\ell',i}\hat{e}^{\uparrow}_{\ell}(z)+\alpha^{\downarrow}_{\ell\ell',i}\hat{e}^{\downarrow}_{\ell}(z),\quad \psi^{r}_{\ell\ell' i}=\beta^{\uparrow}_{\ell\ell',i}\tilde{e}^{\uparrow}_{\ell}(z)+\beta^{\downarrow}_{\ell\ell',i}\tilde{e}^{\downarrow}_{\ell}(z),\tag{39}$$

并将式 (38) 代入式 (32)，得到

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_{\ell\ell'}=\sum_{i=1}^{5}\phi^{r}_{\ell\ell' i}(k_x,k_y,z,z')\mathbb{J}_i,\quad \hat{\mathbf{\Psi}}_{\ell\ell'}=\sum_{i=1}^{5}\psi^{r}_{\ell\ell' i}(k_x,k_y,z,z')\mathbb{J}_i,\tag{40}$$

将其自由空间对应项（24）定义如下

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{\Phi}}^{f}(k_\rho,z,z')&=\frac{1}{\mu_{\ell'}}\widehat{G}^{f}_{k^s_{\ell'}}(k_\rho,z,z')\mathbb{I}=\sum_{i=1}^{5}\phi^{f}_{i}(k_\rho,z,z')\mathbb{J}_i,\\
\hat{\mathbf{\Psi}}^{f}(k_\rho,z,z')&=\frac{1}{\gamma_{\ell'}}\widehat{G}^{f}_{k^c_{\ell'}}(k_\rho,z,z')\mathbb{I}=\sum_{i=1}^{5}\psi^{f}_{i}(k_\rho,z,z')\mathbb{J}_i,
\end{aligned}\tag{41}$$

其中， $\widehat{G}_k^f(k_\rho,\ z,\ z') = \frac{\mathrm{i}}{2k_z} e^{\mathrm{i}k_z|z-z'|}$ 是自由空间中亥姆霍兹基本解（5）的傅里叶变换，并且

$$\phi_1^f = \phi_2^f = \frac{1}{\mu_{\ell'}}\widehat{G}^f_{k^s_{\ell'}}(k_\rho, z, z'), \quad \psi_1^f = \psi_2^f = \frac{1}{\gamma_{\ell'}}\widehat{G}^f_{k^c_{\ell'}}(k_\rho, z, z'), \quad \phi_i^f = \psi_i^f = 0, i = 3, 4, 5. \tag{42}$$

根据定义（25），我们有

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \sum_{i=1}^{5} \phi_{\ell\ell' i}(k_x, k_y, z, z')\mathbb{J}_i, \quad \hat{\mathbf{\Psi}} = \sum_{i=1}^{5} \psi_{\ell\ell' i}(k_x, k_y, z, z')\mathbb{J}_i. \tag{43}$$

在每一层中，其中系数

$$\phi_{\ell\ell' i} = \delta_{\ell\ell'}\phi_i^f + \phi^r_{\ell\ell' i}, \quad \psi_{\ell\ell' i} = \delta_{\ell\ell'}\psi_i^f + \psi^r_{\ell\ell' i}, \quad i = 1, 2, \cdots, 5 \tag{44}$$

满足频域中的以下亥姆霍兹方程：

$$\begin{aligned} \partial_{zz}\phi_{\ell\ell' i} + (k^s_{\ell z})^2\phi_{\ell\ell' i} = -\frac{1}{\mu_{\ell'}}\delta(z-z'), \quad \partial_{zz}\psi_{\ell\ell' i} + (k^c_{\ell z})^2\psi_{\ell\ell' i} = -\frac{1}{\gamma_{\ell'}}\delta(z-z'), \quad i = 1, 2, \\ \partial_{zz}\phi_{\ell\ell' i} + (k^s_{\ell z})^2\phi_{\ell\ell' i} = 0, \quad \partial_{zz}\psi_{\ell\ell' i} + (k^c_{\ell z})^2\psi_{\ell\ell' i} = 0, \quad i = 3, 4, 5. \end{aligned} \tag{45}$$

注：1。事实上，我们还可以进一步证明，系数 $\phi_{\ell\ell'、i}$、$\psi_{\ell\ell'、i}$、$i = 1$、$\cdots$ 5 在 $k_x - k_y$ 平面内是旋转不变的，即

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_{\ell\ell'} = \sum_{i=1}^{5} \phi_{\ell\ell',i}(k_\rho, z')\mathbb{J}_i, \quad \hat{\mathbf{\Psi}}_{\ell\ell'} = \sum_{i=1}^{5} \psi_{\ell\ell',i}(k_\rho, z')\mathbb{J}_i, \tag{46}$$

这将在本节末尾的计算过程中得到证明。

注意，频域中的偏微分算子 Δ 和 $\nabla\nabla$可写为

$$\mathcal{F}[\Delta] = -k_\rho^2 + \partial_{zz}, \quad \mathcal{F}[\nabla\nabla] = \mathbb{J}_5 + (\mathbb{J}_3 + \mathbb{J}_4)\partial_z + \mathbb{J}_2\partial_{zz}. \tag{47}$$

对表示式 (22) 和 (27) 进行傅里叶变换，得到

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{G}}^f(k_x, k_y, z, z') = &\left[\mathbb{I} + (k^s_{\ell'})^{-2}\left(\mathbb{J}_5 + (\mathbb{J}_3 + \mathbb{J}_4)\partial_z + \mathbb{J}_2\partial_{zz}\right)\right]\hat{\mathbf{\Phi}}^f \\ &- (k^c_{\ell'})^{-2}\left(\mathbb{J}_5 + (\mathbb{J}_3 + \mathbb{J}_4)\partial_z + \mathbb{J}_2\partial_{zz}\right)\hat{\mathbf{\Psi}}^f, \\ \widehat{\mathbb{G}}^r_{\ell\ell'}(k_x, k_y, z, z') = &\left[\mathbb{I} + (k^s_{\ell})^{-2}\left(\mathbb{J}_5 + (\mathbb{J}_3 + \mathbb{J}_4)\partial_z + \mathbb{J}_2\partial_{zz}\right)\right]\hat{\mathbf{\Phi}}_{\ell\ell'} \\ &- (k^c_{\ell})^{-2}\left(\mathbb{J}_5 + (\mathbb{J}_3 + \mathbb{J}_4)\partial_z + \mathbb{J}_2\partial_{zz}\right)\hat{\mathbf{\Psi}}_{\ell\ell'}. \end{aligned} \tag{48}$$

将式（48）中的表示相加，并将式（43）代入所得结果，得到

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{G}} =&\phi_{\ell\ell' 1}\mathbb{J}_1 + (k^s_\ell)^{-2}\Big[k_\rho^2\left(\phi_{\ell\ell' 2} - \partial_z\phi_{\ell\ell' 3}\right)\mathbb{J}_2 + \partial_z\big(\phi_{\ell\ell' 2} - \partial_z\phi_{\ell\ell' 3}\big)\mathbb{J}_3 \\ &+ \left(\partial_z\phi_{\ell\ell' 1} + k_\rho^2(\phi_{\ell\ell' 4} - \partial_z\phi_{\ell\ell' 5})\right)\mathbb{J}_4 + \Big(\phi_{\ell\ell' 1} + \partial_z(\phi_{\ell\ell' 4} - \partial_z\phi_{\ell\ell' 5})\Big)\mathbb{J}_5\Big] + \delta_S \\ &- (k^c_\ell)^{-2}\Big[\partial_z\left(\partial_z\psi_{\ell\ell' 2} - k_\rho^2\psi_{\ell\ell' 3}\right)\mathbb{J}_2 + \left(\partial_z\psi_{\ell\ell' 2} - k_\rho^2\psi_{\ell\ell' 3}\right)\mathbb{J}_3 \\ &+ \partial_z\left(\psi_{\ell\ell' 1} + \partial_z\psi_{\ell\ell' 4} - k_\rho^2\psi_{\ell\ell' 5}\right)\mathbb{J}_4 + \left(\psi_{\ell\ell' 1} + \partial_z\psi_{\ell\ell' 4} - k_\rho^2\psi_{\ell\ell' 5}\right)\mathbb{J}_5\Big] \end{aligned} \tag{49}$$

其中 $\delta_S := -\underline{\delta(z-z')\,\mu_{\ell'}(k_\ell^s)^2}\,\mathbb{J}_2$。式（49）中有 10 个未知标量函数 $\phi_{\ell\ell' i}$、$\psi_{\ell\ell' i}$、$i=1,2,\cdots,5$，可以看出其中存在冗余未知量。实际上，定义

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi}_{\ell\ell' 1}=\phi_{\ell\ell' 1},\quad \tilde{\phi}_{\ell\ell' 2}=\frac{\phi_{\ell\ell' 2}-\partial_z\phi_{\ell\ell' 3}}{(k_\ell^s)^2},\quad \tilde{\phi}_{\ell\ell' 3}=\frac{\partial_z\phi_{\ell\ell' 1}+k_\rho^2(\phi_{\ell\ell' 4}-\partial_z\phi_{\ell\ell' 5})}{(k_\ell^s)^2},\\
&\tilde{\psi}_{\ell\ell' 1}=\frac{\partial_z\psi_{\ell\ell' 2}-k_\rho^2\psi_{\ell\ell' 3}}{(k_\ell^c)^2},\quad \tilde{\psi}_{\ell\ell' 2}=\frac{\psi_{\ell\ell' 1}+\partial_z\psi_{\ell\ell' 4}-k_\rho^2\psi_{\ell\ell' 5}}{(k_\ell^c)^2}.
\end{aligned}\tag{50}$$

和分段函数

$$\tilde{\phi}_i(k_x,k_y,z,z')=\tilde{\phi}_{\ell\ell' i}(k_x,k_y,z,z'),\quad \tilde{\psi}_i(k_x,k_y,z,z')=\tilde{\psi}_{\ell\ell' i}(k_x,k_y,z,z'),\quad d_\ell<z<d_{\ell-1}.\tag{51}$$

利用 $\phi_{\ell\ell' 1}$ 在每一层中满足的方程（45）消去项 ∂_{zz}，可得

$$(k_\ell^s)^{-2}k_\rho^2\left(\phi_{\ell\ell' 1}+\partial_z(\phi_{\ell\ell' 4}-\partial_z\phi_{\ell\ell' 5})\right)=\tilde{\phi}_{\ell\ell' 1}+\partial_z\tilde{\phi}_{\ell\ell' 3}+\frac{\delta(z-z')}{\mu_{\ell'}(k_\ell^s)^2}$$

因此，公式（49）可改写为

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{G}}=&\tilde{\phi}_1\mathbb{J}_1+\left(k_\rho^2\tilde{\phi}_2-\partial_z\tilde{\psi}_1\right)\mathbb{J}_2+\left(\partial_z\tilde{\phi}_2-\tilde{\psi}_1\right)\mathbb{J}_3+\left(\tilde{\phi}_3-\partial_z\tilde{\psi}_2\right)\mathbb{J}_4\\
&+\left(k_\rho^{-2}[\tilde{\phi}_1+\partial_z\tilde{\phi}_3]-\tilde{\psi}_2\right)\mathbb{J}_5+\frac{\delta(z-z')}{\omega^2\rho_{\ell'}}\left(k_\rho^{-2}\mathbb{J}_5-\mathbb{J}_2\right).
\end{aligned}\tag{52}$$

根据方程（45）、定义（50）以及事实 $\mu_{\ell'}(k_{\ell'}^s)^2=\gamma_{\ell'}(k_{\ell'}^c)^2=\omega^2\rho_{\ell'}$，$\tilde{\ }$，很容易验证 $\phi_{\ell\ell' k}$, $\psi_{\ell\ell' k}$ 满足亥姆霍兹方程

$$\begin{aligned}
\partial_{zz}\tilde{\phi}_1+(k_{\ell z}^s)^2\tilde{\phi}_1&=-\frac{1}{\mu_{\ell'}}\delta(z-z')\\
\partial_{zz}\tilde{\phi}_2+(k_{\ell z}^s)^2\tilde{\phi}_2=-\frac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\delta(z-z'),&\quad \partial_{zz}\tilde{\phi}_3+(k_{\ell z}^s)^2\tilde{\phi}_3=-\frac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\delta'(z-z')\\
\partial_{zz}\tilde{\psi}_1+(k_{\ell z}^c)^2\tilde{\psi}_1=-\frac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\delta'(z-z'),&\quad \partial_{zz}\tilde{\psi}_2+(k_{\ell z}^c)^2\tilde{\psi}_2=-\frac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\delta(z-z')
\end{aligned}\tag{53}$$

在第 ℓ层中，对所有 $\ell=0,1,\cdots,L$均成立。

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$注 2：当（52）中的所有函数 $\tilde{\ }$、ϕ_2、ϕ_3、ψ_1、ψ_2仅取自由场部分时，我们可以推导出频域中的弹性波自由场部分，从而消去狄拉克δ函数项，其傅里叶逆变换与（23）相同。

现在，利用新的表达式（52）重新讨论界面条件（37）。我们始终假设源点 $\mathbf{r}'$ 不在界面上。利用乘积表（138），由（52）可计算得

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_1\widehat{\mathbb{G}}=&\tilde{\phi}_1\mathbb{J}_1+\left(\partial_z\tilde{\phi}_2-\tilde{\psi}_1\right)\mathbb{J}_3+k_\rho^{-2}\left(\tilde{\phi}_1+\partial_z\tilde{\phi}_3-k_\rho^2\tilde{\psi}_2\right)\mathbb{J}_5+\frac{\delta(z-z')}{\omega^2\rho_{\ell'}k_\rho^2}\mathbb{J}_5\\
\mathbb{J}_2\widehat{\mathbb{G}}=&\left(k_\rho^2\tilde{\phi}_2-\partial_z\tilde{\psi}_1\right)\mathbb{J}_2+\left(\tilde{\phi}_3-\partial_z\tilde{\psi}_2\right)\mathbb{J}_4-\frac{\delta(z-z')}{\omega^2\rho_{\ell'}}\mathbb{J}_2\\
\mu_\ell\left(\mathbb{J}_1\partial_z+\mathbb{J}_3\right)\widehat{\mathbb{G}}=&\mu_\ell\partial_z\tilde{\phi}_1\mathbb{J}_1+\left[\mu_\ell\left(-(k_{\ell z}^s)^2+k_\rho^2\right)\tilde{\phi}_2-2\mu_\ell\partial_z\tilde{\psi}_1-\frac{2\mu_\ell\delta(z-z')}{\omega^2\rho_{\ell'}}\right]\mathbb{J}_3
\end{aligned}$$

$$+k_\rho^{-2}\left[\mu_\ell\partial_z\tilde{\phi}_1+\mu_\ell\left(-(k_{\ell z}^s)^2+k_\rho^2\right)\tilde{\phi}_3-2\mu_\ell k_\rho^2\partial_z\tilde{\psi}_2\right]\mathbb{J}_5,$$

$$(\gamma_\ell\mathbb{J}_2\partial_z+\lambda_\ell\mathbb{J}_4)\,\widehat{\mathbb{G}}=\left[2\mu_\ell k_\rho^2\partial_z\tilde{\phi}_2+\left(\gamma_\ell(k_{\ell z}^c)^2+\lambda_\ell k_\rho^2\right)\tilde{\psi}_1\right]\mathbb{J}_2$$

$$+\left[2\mu_\ell\partial_z\tilde{\phi}_3+\left(\gamma_\ell(k_{\ell z}^c)^2+\lambda_\ell k_\rho^2\right)\tilde{\psi}_2\right]\mathbb{J}_4+\frac{2\mu_\ell\delta(z-z')}{\omega^2\rho_{\ell'}}\mathbb{J}_4,$$

对于 $d_\ell<z<d_{\ell-1}$和 $\ell=0,\ 1,\ \cdots,\ L$。将这些表达式代入界面条件（37），并利用基矩阵 $\mathbb{J}_1,\ \mathbb{J}_2,\ \mathbb{J}_3,\ \mathbb{J}_4,\ \mathbb{J}_5$ 的线性无关性，可得

$$\begin{aligned}
\left[\!\left[\tilde{\phi}_1\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[\partial_z\tilde{\phi}_2-\tilde{\psi}_1\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[\tilde{\phi}_1+\partial_z\tilde{\phi}_3-k_\rho^2\tilde{\psi}_2\right]\!\right]=0\\
\left[\!\left[k_\rho^2\tilde{\phi}_2-\partial_z\tilde{\psi}_1\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[\tilde{\phi}_3-\partial_z\tilde{\psi}_2\right]\!\right]=0\\
\left[\!\left[\mu\partial_z\tilde{\phi}_1\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[\mu\left(-(k_z^s)^2+k_\rho^2\right)\tilde{\phi}_2-2\mu\partial_z\tilde{\psi}_1\right]\!\right]=0\\
\left[\!\left[\mu\partial_z\tilde{\phi}_1+\mu\left(-(k_z^s)^2+k_\rho^2\right)\tilde{\phi}_3-2\mu k_\rho^2\partial_z\tilde{\psi}_2\right]\!\right]=0\\
\left[\!\left[2\mu k_\rho^2\partial_z\tilde{\phi}_2+\left(\gamma(k_z^c)^2+\lambda k_\rho^2\right)\tilde{\psi}_1\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[2\mu\partial_z\tilde{\phi}_3+\left(\gamma(k_z^c)^2+\lambda k_\rho^2\right)\tilde{\psi}_2\right]\!\right]=0
\end{aligned}\tag{54}$$

在每个界面处 $z=d_\ell,\ \ell=0,\ 1,\ \cdots,\ L-1$。结合方程 (53)，我们得到关于三组系数 $\{\tilde{\phi}_1\}$，$\{\tilde{\phi}_2,\tilde{\psi}_1\}$，$\{\tilde{\phi}_3,\tilde{\psi}_2\}$的三个独立问题，即，

- 层状介质中关于 ϕ_1 的亥姆霍兹方程:

$$\begin{cases}
\partial_{zz}\tilde{\phi}_1+(k_z^s)^2\tilde{\phi}_1=-\dfrac{1}{\mu_{\ell'}}\delta(z-z'),\quad z\neq d_\ell,\ \ell=0,1,\cdots,L-1,\\
\left[\!\left[\tilde{\phi}_1\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[\mu\partial_z\tilde{\phi}_1\right]\!\right]=0.
\end{cases}\tag{55}$$

- 层状介质中关于 $\phi_2,\ \psi_1$ 的混合波数亥姆霍兹方程:

$$\begin{cases}
\partial_{zz}\tilde{\phi}_2+(k_z^s)^2\tilde{\phi}_2=-\dfrac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\delta(z-z'),\quad z\neq d_\ell,\ \ell=0,1,\cdots,L-1,\\
\partial_{zz}\tilde{\psi}_1+(k_z^c)^2\tilde{\psi}_1=-\dfrac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\delta'(z-z'),\quad z\neq d_\ell,\ \ell=0,1,\cdots,L-1,\\
\left[\!\left[2\mu k_\rho^2\partial_z\tilde{\phi}_2+\left(\gamma(k_z^c)^2+\lambda k_\rho^2\right)\tilde{\psi}_1\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[k_\rho^2\tilde{\phi}_2-\partial_z\tilde{\psi}_1\right]\!\right]=0,\\
\left[\!\left[\mu\left(-(k_z^s)^2+k_\rho^2\right)\tilde{\phi}_2-2\mu\partial_z\tilde{\psi}_1\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[\partial_z\tilde{\phi}_2-\tilde{\psi}_1\right]\!\right]=0.
\end{cases}\tag{56}$$

- 层状介质中 $\phi_3,\ \psi_2$ 的混合波数亥姆霍兹方程:

$$\begin{cases}
\partial_{zz}\tilde{\phi}_3+(k_z^s)^2\tilde{\phi}_3=-\dfrac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\delta'(z-z'),\quad z\neq d_\ell,\ \ell=0,1,\cdots,L-1,\\
\partial_{zz}\tilde{\psi}_2+(k_z^c)^2\tilde{\psi}_2=-\dfrac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\delta(z-z'),\quad z\neq d_\ell,\ \ell=0,1,\cdots,L-1,\\
\left[\!\left[2\mu\partial_z\tilde{\phi}_3+\left(\gamma(k_z^c)^2+\lambda k_\rho^2\right)\tilde{\psi}_2\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[\tilde{\phi}_3-\partial_z\tilde{\psi}_2\right]\!\right]=0,\\
\left[\!\left[\mu\left(-(k_z^s)^2+k_\rho^2\right)\tilde{\phi}_3-2\mu k_\rho^2\partial_z\tilde{\psi}_2\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[\partial_z\tilde{\phi}_3-k_\rho^2\tilde{\psi}_2\right]\!\right]=0.
\end{cases}\tag{57}$$

在顶层和底层，施加出射辐射条件

$$\lim_{z\to\pm\infty}\tilde{\phi}_i(k_x,k_y,z,z')=0,\quad i=1,2,3;\quad \lim_{z\to\pm\infty}\tilde{\psi}_i(k_x,k_y,z,z')=0,\quad i=1,2,\tag{58}$$

从这些问题中可以清楚地看出，它们在 $k_x - k_y$ 平面内呈径向对称。因此，我们有

$$\tilde{\phi}_i(k_x, k_y, z, z') = \tilde{\phi}_i(k_\rho, z, z'), \quad \tilde{\psi}_i(k_x, k_y, z, z') = \tilde{\psi}_i(k_\rho, z, z'), \tag{59}$$

这验证了式（46）中的公式。

因此，层状介质中弹性波动方程的并矢格林函数可分解为五个未知函数的组合。随后，计算问题转化为求解一个分层亥姆霍兹方程（55）以及两个混合波数分层亥姆霍兹方程（56）–（57）。其中，分层亥姆霍兹方程（55）的解已有稳定的递推公式（参见 [26]）。下一节将重点讨论混合波数分层亥姆霍兹方程（56）–（57）的解。

注3. 这三个问题的结构揭示了层状介质中的弹性波与其自由空间对应情形之间的一个本质区别。在自由空间中，表示式（3）表明剪切波（S波）和压缩波（P波）完全解耦：势函数 $\mathbf{\Phi}^f$ 和 $\mathbf{\Psi}^f$ 分别满足波数为 k^s 和 k^c的独立亥姆霍兹方程，且两者传播时互不激发。在层状介质中，各层内部的势函数仍满足彼此解耦的亥姆霍兹方程，见式（53）；但界面条件（10）规定总位移和牵引力连续，而它们是两种波型的混合。因此，如式（56）和（57）所示，S波分量 ϕ_2, ϕ_3 与P波分量 ψ_1, ψ_2 通过界面条件相互耦合，使得入射P波（分别地，入射S波）通常会在每个界面产生反射和透射的P波与S波。这种现象称为模态转换（参见 [2, 16]），在自由空间中并不存在。唯一的例外是式（55）中的 ϕ_1，它对应于水平极化剪切波（SH波），并满足一种与声学情形相同类型的标量亥姆霍兹界面问题；其余分量对应于耦合的P–SV波，并形成同时涉及 $k_{\ell z}^s$ 和 $k_{\ell z}^c$的混合波数问题。因此，P–SV系统的反射系数和透射系数是 2×2 矩阵而非标量，其分母可能在大于体波波数的 k_ρ 实数值处为零。这些零点与界面波和表面波有关，例如瑞利波和斯通利波（参见 [1]），它们在自由空间中没有对应现象。这种耦合使层状介质弹性层状介质格林函数（LMGF）的分析和数值计算都比层状介质中麦克斯韦方程的情形复杂得多。

3. Stable recursion for the computation of the Green's function in layered media

与计算层状介质中亥姆霍兹方程的格林函数类似，空间域中的层状介质格林函数最终会产生一些由傅里叶逆变换得到的索末菲型积分。这些积分通过一条称为索末菲积分路径（SIP）的积分路径进行数值计算。三十多年来，如何高效、准确地计算索末菲型积分一直是工程界面临的难题（参见 [20, 21]）。此外，要准确高效地计算层状介质格林函数，依赖于一种稳定高效的算法来计算谱域层状介质格林函数，即 $\{\tilde{\phi}_1\}$, $\{\tilde{\phi}_2, \tilde{\psi}_1\}\{\tilde{\phi}_3, \tilde{\psi}_2\}$ 本文中所述的内容。

对于问题 (55)，对于任意不在支割线上的复数 k_ρ 以及任意数量的层，稳定的递归公式是众所周知的（参见 [8]）。然而，另外两个混合波数问题 (56) 和 (57) 在物理上具有两类通过界面条件耦合的波

。本节将为这些问题的解建立稳定的递归公式。

为确保完备性，我们首先总结式 (55) 的解的递归算法。该解可解释为源层中的自由空间分量，以及由其他层的存在所激发的反应场。根据目标点和源点周围的垂直场传播方向，反应场进一步分解为 4 个分量，即

$$\tilde{\phi}_1(k_\rho,z,z')=\delta_{\ell\ell'}\tilde{\phi}_1^f(k_\rho,z,z')+\frac{1}{\mu_{\ell'}}\frac{\mathrm{i}}{2k^s_{\ell' z}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\sigma^{**}_{\ell\ell' 0}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z'),\tag{60}$$

对于第 ℓ 层中的 $\boldsymbol{r}$ 和第 ℓ' 层中的 $\boldsymbol{r}'$，其中 $\tilde{\phi}_1^f=\phi_1^f$ 是式 (42) 中定义的自由空间分量，而 Z^{**} 函数

$$\begin{aligned}
Z^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')&=\begin{cases}e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell z}z-k^s_{\ell' z}z')}, & \ell<\ell',\\ e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell' z}\tau_{\ell'-1}(z')-k^s_{\ell z}\tau_\ell(z))}, & \ell\geq\ell',\end{cases}\\
Z^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')&=\begin{cases}e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell z}z-k^s_{\ell' z}\tau_{\ell'}(z'))}, & \ell\leq\ell',\\ e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell' z}z'-k^s_{\ell z}\tau_\ell(z))}, & \ell>\ell',\end{cases}\\
Z^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')&=\begin{cases}e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell z}\tau_{\ell-1}(z)-k^s_{\ell' z}z')}, & \ell<\ell',\\ e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell' z}\tau_{\ell'-1}(z')-k^s_{\ell z}z)}, & \ell\geq\ell',\end{cases}\\
Z^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z')&=\begin{cases}e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell z}\tau_{\ell-1}(z)-k^s_{\ell' z}\tau_{\ell'}(z'))}, & \ell\leq\ell',\\ e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell' z}z'-k^s_{\ell z}z)}, & \ell>\ell',\end{cases}
\end{aligned}\tag{61}$$

是指数函数，表示垂直场传播方向的不同情况，

$$\tau_\ell(z)=2d_\ell-z,\tag{62}$$

是 z 相对于界面 $z=d_\ell$ 的像坐标。密度 $\sigma^{**}_{\ell\ell' 0}(k_\rho)$ 可按照附录 A 中所示递归计算，其中 [29]

3.1. 问题解的递推公式(56)。为简洁起见，我们定义指数矩阵：

$$\mathbb{E}^{\uparrow}_\ell(z)=\begin{bmatrix}e^{\mathrm{i}k^c_{\ell z}z} & 0\\ 0 & e^{\mathrm{i}k^s_{\ell z}z}\end{bmatrix},\quad \mathbb{E}^{\downarrow}_\ell(z)=\begin{bmatrix}e^{-\mathrm{i}k^c_{\ell z}z} & 0\\ 0 & e^{-\mathrm{i}k^s_{\ell z}z}\end{bmatrix},\tag{63}$$

特别地

$$\mathbb{E}_\ell:=\begin{bmatrix}e^{\mathrm{i}k^c_{\ell z}D_\ell} & 0\\ 0 & e^{\mathrm{i}k^s_{\ell z}D_\ell}\end{bmatrix}=\mathbb{E}^{\uparrow}_\ell(D_\ell)=\mathbb{E}^{\downarrow}_\ell(-D_\ell).\tag{64}$$

显然可以看出，当采用上述支割线 $\Im(k^s_{\ell z})\ \Im(k^c_{\ell z})\ \geq 0$ 时，所有 $\{\mathbb{E}_\ell\}_{\ell=1}^L$ 都呈指数衰减，其中 $k_\rho\to\infty$ 假设。特别地，事实 $D_0=+\infty$,$D_L=+\infty$ 意味着 $\mathbb{E}_0=\mathbb{E}_L=0$。

回顾公式（50）—（51）和（42）中的定义，可得

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_1^f(k_\rho,z,z')=&\frac{\mathrm{i}\partial_z e^{\mathrm{i}k^c_{\ell' z}|z-z'|}}{2(k^c_{\ell'})^2\gamma_{\ell'}k^c_{\ell' z}}=\frac{1}{2\omega^2\rho_{\ell'}}\big[-H(z-z')e^{\mathrm{i}k^c_{\ell' z}(z-z')}+H(z'-z)e^{\mathrm{i}k^c_{\ell' z}(z'-z)}\big],\\
\tilde{\phi}_2^f(k_\rho,z,z')=&\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}k^s_{\ell' z}|z-z'|}}{2(k^s_{\ell'})^2\mu_{\ell'}k^s_{\ell' z}}=\frac{\mathrm{i}}{2\omega^2\rho_{\ell'}k^s_{\ell' z}}\big[H(z-z')e^{\mathrm{i}k^s_{\ell' z}(z-z')}+H(z'-z)e^{\mathrm{i}k^s_{\ell' z}(z'-z)}\big],
\end{aligned}$$

其中

$$H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

是赫维赛德阶跃函数。根据叠加原理，反作用分量 $\tilde{\phi}_2^r=\tilde{\phi}_2-\tilde{\phi}_2^f$， $\tilde{\psi}_1^r=\tilde{\psi}_1-\tilde{\psi}_1^f$ 满足齐次方程:

$$\partial_{zz}\tilde{\psi}_1^r+(k_{\ell z}^c)^2\tilde{\psi}_1^r=0,\quad \partial_{zz}\tilde{\phi}_2^r+(k_{\ell z}^s)^2\tilde{\phi}_2^r=0, \tag{65}$$

以及界面条件

$$\left[\!\left[\boldsymbol{a}\tilde{\psi}_1+\boldsymbol{b}\partial_z\tilde{\phi}_2\right]\!\right]=0,\quad \left[\!\left[\boldsymbol{d}\partial_z\tilde{\psi}_1+\boldsymbol{c}\tilde{\phi}_2\right]\!\right]=0,\quad z=d_\ell,\quad \ell=0,1,\cdots,L-1 \tag{66}$$

其中，每一层 ℓ 中的切片界面参数向量 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$， $\boldsymbol{c}$， $\boldsymbol{d}$ 定义为

$$\boldsymbol{a}_\ell=\begin{bmatrix}\gamma_\ell(k_{\ell z}^c)^2+\lambda_\ell k_\rho^2\\ -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_\ell=\begin{bmatrix}2\mu_\ell k_\rho^2\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}_\ell=\begin{bmatrix}\mu_\ell((k_{\ell z}^s)^2-k_\rho^2)\\ -k_\rho^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{d}_\ell=\begin{bmatrix}2\mu_\ell\\ 1\end{bmatrix}. \tag{67}$$

显然，常微分方程 (65) 的一般解为

$$\tilde{\psi}_{\ell\ell'1}^r(k_x,k_y,z,z')=A_\ell^\psi(k_x,k_y,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell z}^c(z-d_\ell)}+B_\ell^\psi(k_x,k_y,z')e^{-\mathrm{i}k_{\ell z}^c(z-d_{\ell-1})}, \tag{68}$$

$$\tilde{\phi}_{\ell\ell'2}^r(k_x,k_y,z,z')=A_\ell^\phi(k_x,k_y,z')e^{\mathrm{i}k_{\ell z}^s(z-d_\ell)}+B_\ell^\phi(k_x,k_y,z')e^{-\mathrm{i}k_{\ell z}^s(z-d_{\ell-1})}, \tag{69}$$

在每一层 $0\le\ell\le L$中。值得指出的是，约定 $d_{-1}=+\infty, d_L=-\infty$意味着

$$e^{-\mathrm{i}k_{0z}^s(z-d_{-1})}\equiv 0,\quad e^{\mathrm{i}k_{Lz}^s(z-d_L)}\equiv 0,$$

对于任意给定的 z。因此，系数

$$B_0^\psi(k_x,k_y,z'),\quad B_0^\phi(k_x,k_y,z'),\quad A_L^\psi(k_x,k_y,z'),\quad A_L^\phi(k_x,k_y,z'),$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$不会对反应分量 $\{\psi_{\ell\ell'1}^r(k_x,\ k_y,\ z,\ z')\ \phi_{\ell\ell'2}^r(k_x,\ k_y,\ z,\ z')\}$产生贡献。因此，我们设

$$B_0^\psi(k_x,k_y,z')=B_0^\phi(k_x,k_y,z')\equiv 0,\quad A_L^\psi(k_x,k_y,z')=A_L^\phi(k_x,k_y,z')\equiv 0, \tag{70}$$

为简化起见。由这些一般解（68）—（69），我们可以计算 t

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_{\ell'}\tilde{\psi}_1^f+\boldsymbol{b}_{\ell'}\partial_z\tilde{\phi}_2^f\Big|_{z=d_{\ell'-1}-0}=\mathbb{A}_{\ell'}^+\mathbb{E}_{\ell'}^\downarrow(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^f,\\
&\boldsymbol{d}_{\ell'}\partial_z\tilde{\psi}_1^f+\boldsymbol{c}_{\ell'}\tilde{\phi}_2^f\Big|_{z=d_{\ell'-1}-0}=\mathbb{B}_{\ell'}^+\mathbb{E}_{\ell'}^\downarrow(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^f\\
&\boldsymbol{a}_{\ell'}\tilde{\psi}_1^f+\boldsymbol{b}_{\ell'}\partial_z\tilde{\phi}_2^f\Big|_{z=d_{\ell'}+0}=\mathbb{A}_{\ell'}^-\mathbb{E}_{\ell'}^\uparrow(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_\ell^f,\\
&\boldsymbol{d}_{\ell'}\partial_z\tilde{\psi}_1^f+\boldsymbol{c}_{\ell'}\tilde{\phi}_2^f\Big|_{z=d_{\ell'}+0}=\mathbb{B}_{\ell'}^-\mathbb{E}_{\ell'}^\uparrow(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_\ell^f,
\end{aligned} \tag{71}$$

and

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\ell\tilde{\psi}_1^r+\boldsymbol{b}_\ell\partial_z\tilde{\phi}_2^r\Big|_{z=d_\ell+0}=&\mathbb{A}_\ell^+\boldsymbol{A}_\ell^r+\mathbb{A}_\ell^-\mathbb{E}_\ell\boldsymbol{B}_\ell^r,\\
\boldsymbol{d}_\ell\partial_z\tilde{\psi}_1^r+\boldsymbol{c}_\ell\tilde{\phi}_2^r\Big|_{z=d_\ell+0}=&\mathbb{B}_\ell^+\boldsymbol{A}_\ell^r+\mathbb{B}_\ell^-\mathbb{E}_\ell\boldsymbol{B}_\ell^r,\\
\boldsymbol{a}_{\ell+1}\tilde{\psi}_1^r+\boldsymbol{b}_{\ell+1}\partial_z\tilde{\phi}_2^r\Big|_{z=d_\ell-0}=&\mathbb{A}_{\ell+1}^+\mathbb{E}_{\ell+1}\boldsymbol{A}_{\ell+1}^r+\mathbb{A}_{\ell+1}^-\boldsymbol{B}_{\ell+1}^r,\\
\boldsymbol{d}_{\ell+1}\partial_z\tilde{\psi}_1^r+\boldsymbol{c}_{\ell+1}\tilde{\phi}_2^r\Big|_{z=d_\ell-0}=&\mathbb{B}_{\ell+1}^+\mathbb{E}_{\ell+1}\boldsymbol{A}_{\ell+1}^r+\mathbb{B}_{\ell+1}^-\boldsymbol{B}_{\ell+1}^r,
\end{aligned}\tag{72}$$

其中系数　　向上传播波和向下传播波的相应向量定义为

$$\boldsymbol{A}_{\ell'}^f:=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{2\omega^2\rho_{\ell'}}\\ \dfrac{\mathrm{i}}{2\omega^2\rho_{\ell'}k_{\ell'z}^s}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{\ell'}^f:=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2\omega^2\rho_{\ell'}}\\ \dfrac{\mathrm{i}}{2\omega^2\rho_{\ell'}k_{\ell'z}^s}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_\ell^r:=\begin{bmatrix}A_\ell^\psi\\ A_\ell^\phi\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_\ell^r:=\begin{bmatrix}B_\ell^\psi\\ B_\ell^\phi\end{bmatrix},\tag{73}$$

且方程中的界面参数矩阵缩写为

$$\mathbb{A}_\ell^\pm:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_\ell & \pm\mathrm{i}k_{\ell z}^s\boldsymbol{b}_\ell\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}_\ell^\pm:=\begin{pmatrix}\pm\mathrm{i}k_{\ell z}^c\boldsymbol{d}_\ell & \boldsymbol{c}_\ell\end{pmatrix},\quad \ell=0,1,\cdots,L.\tag{74}$$

约束条件 (70) 给出 $\boldsymbol{A}_L^r=0$，$\boldsymbol{B}_0^r=0$。因此，将 (71)–(72) 代入界面条件 (66)，可得到以下线性系统

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_\ell^+\boldsymbol{A}_\ell^r+\mathbb{A}_\ell^-\mathbb{E}_\ell\boldsymbol{B}_\ell^r=&\mathbb{A}_{\ell+1}^+\mathbb{E}_{\ell+1}\boldsymbol{A}_{\ell+1}^r+\mathbb{A}_{\ell+1}^-\boldsymbol{B}_{\ell+1}^r+\boldsymbol{S}_\ell^{(1)},\\
\mathbb{B}_\ell^+\boldsymbol{A}_\ell^r+\mathbb{B}_\ell^-\mathbb{E}_\ell\boldsymbol{B}_\ell^r=&\mathbb{B}_{\ell+1}^+\mathbb{E}_{\ell+1}\boldsymbol{A}_{\ell+1}^r+\mathbb{B}_{\ell+1}^-\boldsymbol{B}_{\ell+1}^r+\boldsymbol{S}_\ell^{(2)},
\end{aligned}\tag{75}$$

其中

$$\boldsymbol{S}_\ell^{(1)}=\begin{cases}\mathbb{A}_{\ell'}^+\mathbb{E}_{\ell'}^\downarrow(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^f, & \ell=\ell'-1,\\ -\mathbb{A}_{\ell'}^-\mathbb{E}_{\ell'}^\uparrow(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f & \ell=\ell',\\ \boldsymbol{0}, & \text{else},\end{cases}\qquad \boldsymbol{S}_\ell^{(2)}=\begin{cases}\mathbb{B}_{\ell'}^+\mathbb{E}_{\ell'}^\downarrow(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^f, & \ell=\ell'-1,\\ -\mathbb{B}_{\ell'}^-\mathbb{E}_{\ell'}^\uparrow(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f & \ell=\ell',\\ \boldsymbol{0}, & \text{else}.\end{cases}$$

进一步通过交叉消去项 $\boldsymbol{B}_{\ell+1}^r$，$\boldsymbol{A}_\ell^r$，我们可以得到递归方程　　s

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_\ell^r\\ \boldsymbol{B}_{\ell+1}^r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{R}_{\ell,\ell+1} & \mathbb{T}_{\ell+1,\ell}\\ \mathbb{T}_{\ell,\ell+1} & \mathbb{R}_{\ell+1,\ell}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{E}_\ell\boldsymbol{B}_\ell^r\\ \mathbb{E}_{\ell+1}\boldsymbol{A}_{\ell+1}^r\end{bmatrix}+\boldsymbol{S}_\ell,\quad \ell=0,1,\cdots,L-1,\tag{76}$$

其中 $\boldsymbol{S}_\ell=0$ 除外

$$\boldsymbol{S}_{\ell'-1}=\begin{bmatrix}\mathbb{T}_{\ell',\ell'-1}\\ \mathbb{R}_{\ell',\ell'-1}\end{bmatrix}\mathbb{E}_{\ell'}^\downarrow(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^f,\quad \boldsymbol{S}_{\ell'}=\begin{bmatrix}\mathbb{R}_{\ell',\ell'+1}\\ \mathbb{T}_{\ell',\ell'+1}\end{bmatrix}\mathbb{E}_{\ell'}^\uparrow(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f\tag{77}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{\ell,\ell+1}=&-\left[(\mathbb{A}_{\ell+1}^+)^{-1}\mathbb{A}_\ell^++(\mathbb{B}_{\ell+1}^+)^{-1}\mathbb{B}_\ell^+\right]^{-1}\left[(\mathbb{A}_{\ell+1}^+)^{-1}\mathbb{A}_\ell^-+(\mathbb{B}_{\ell+1}^+)^{-1}\mathbb{B}_\ell^-\right],\\
\mathbb{R}_{\ell+1,\ell}=&-\left[(\mathbb{A}_\ell^-)^{-1}\mathbb{A}_{\ell+1}^-+(\mathbb{B}_\ell^-)^{-1}\mathbb{B}_{\ell+1}^-\right]^{-1}\left[(\mathbb{A}_\ell^-)^{-1}\mathbb{A}_{\ell+1}^++(\mathbb{B}_\ell^-)^{-1}\mathbb{B}_{\ell+1}^+\right],\\
\mathbb{T}_{\ell+1,\ell}=&2\left[(\mathbb{A}_{\ell+1}^+)^{-1}\mathbb{A}_\ell^++(\mathbb{B}_{\ell+1}^+)^{-1}\mathbb{B}_\ell^+\right]^{-1},\quad \mathbb{T}_{\ell,\ell+1}=2\left[(\mathbb{A}_\ell^-)^{-1}\mathbb{A}_{\ell+1}^-+(\mathbb{B}_\ell^-)^{-1}\mathbb{B}_{\ell+1}^-\right]^{-1},
\end{aligned}\tag{78}$$

它们是反射矩阵和透射矩阵。只要对于所有 $\ell=0,\mathbf{1},\cdots,L$，$k_\rho\neq k_\ell^s$，$k_\ell^c$ 都有定义。它们的奇异点对应斯通利波、瑞利波和导波模态。

注 4：上述反射矩阵和透射矩阵与层状介质中标量亥姆霍兹方程所定义的反射系数和透射系数具有相似的形式（参见 [8]）。

反射和透射系统（76）可以分解为向上传播波和向下传播波，如下面的命题所概述。

命题 1。 由方程（76）可得递推关系

$$\boldsymbol{B}^r_{\ell+1} = \mathbb{W}^-_{\ell+1}\mathbb{T}_{\ell,\ell+1}\left[\mathbb{E}_\ell \boldsymbol{B}^r_\ell + \delta_{\ell\ell'}\mathbb{E}^\uparrow_{\ell'}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}^f_{\ell'}\right], \tag{79}$$

$$\boldsymbol{A}^r_{\ell+1} = \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell+1,\ell+2}\mathbb{E}_{\ell+1}\boldsymbol{B}^r_{\ell+1}, \tag{80}$$

对于 $\ell=\ell',\ \ell'+1,\ \cdots,\ L-1,$ 以及

$$\boldsymbol{A}^r_{\ell-1} = \mathbb{W}^+_{\ell-1}\mathbb{T}_{\ell,\ell-1}\left[\mathbb{E}_\ell \boldsymbol{A}^r_\ell + \delta_{\ell\ell'}\mathbb{E}^\downarrow_{\ell'}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}^f_{\ell'}\right], \tag{81}$$

$$\boldsymbol{B}^r_{\ell-1} = \mathbb{R}_{\ell-1,\ \ell-2}\mathbb{E}_{\ell-1}\boldsymbol{A}^r_{\ell-1}, \tag{82}$$

对于 $\ell=\ell',\ \ell'-1,\ \cdots,\ 1,$ 其初始值为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^r_{\ell'} =& \mathbb{W}^+_{\ell'}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}\left[\mathbb{E}^\uparrow_{\ell'}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}^f_{\ell'} + \mathbb{E}_{\ell'}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}\mathbb{E}^\downarrow_{\ell'}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}^f_{\ell'}\right],\\
\boldsymbol{B}^r_{\ell'} =& \mathbb{W}^-_{\ell'}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}\left[\mathbb{E}^\downarrow_{\ell'}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}^f_{\ell'} + \mathbb{E}_{\ell'}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}\mathbb{E}^\uparrow_{\ell'}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}^f_{\ell'}\right].
\end{aligned} \tag{83}$$

Here

$$\mathbb{W}^\pm_\ell := \begin{cases} \left[\mathbb{I} - \mathbb{R}_{\ell,\ell\pm1}\mathbb{E}_\ell\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell\mp1}\mathbb{E}_\ell\right]^{-1}, & \ell\neq\ell', \\ \left[\mathbb{I} - \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'\pm1}\mathbb{E}_{\ell'}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'\mp1}\mathbb{E}_{\ell'}\right]^{-1}, & \ell=\ell', \end{cases} \tag{84}$$

广义反射矩阵递归定义如下 :

- 对于 $\ell = L-1, L-2, \cdots, 0$:

$$\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell+1} = \mathbb{R}_{\ell,\ell+1} + \mathbb{T}_{\ell+1,\ell}\mathbb{E}_{\ell+1}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell+1,\ell+2}\mathbb{E}_{\ell+1}\mathbb{W}^-_{\ell+1}\mathbb{T}_{\ell,\ell+1}, \tag{85}$$

- 对于 $\ell = 0, 1, \cdots, L-1$:

$$\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell+1,\ell} = \mathbb{R}_{\ell+1,\ell} + \mathbb{T}_{\ell,\ell+1}\mathbb{E}_\ell\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell-1}\mathbb{E}_\ell\mathbb{W}^+_\ell\mathbb{T}_{\ell+1,\ell}. \tag{86}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$取初始值为零 $\mathbb{R}_{0,\ -1} = \mathbb{R}_{L,\ L+1} = 0$。

证明。 我们将用归纳法证明该结论。在递推式（76）中取 $\ell = L-1$，并利用 $\boldsymbol{A}^r_L = \boldsymbol{0}$ 这一事实，得到

$$\boldsymbol{A}^r_{L-1} = \mathbb{R}_{L-1,L}\mathbb{E}_{L-1}\boldsymbol{B}^r_{L-1}, \quad \boldsymbol{B}^r_L = \mathbb{T}_{L-1,L}\mathbb{E}_{L-1}\boldsymbol{B}^r_{L-1}$$

$\widetilde{\ }$令 $\mathbb{R}_{L-1,\ L} := \mathbb{R}_{L-1,\ L}$，则有

$$\boldsymbol{A}^r_{L-1} = \widetilde{\mathbb{R}}_{L-1,L}\mathbb{E}_{L-1}\boldsymbol{B}^r_{L-1}.$$

对于任意 $\ell \in \{L-2, L-3, \cdots, \ell'+1\}$，设

$$\boldsymbol{A}^r_{\ell+1} = \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell+1,\ell+2}\mathbb{E}_{\ell+1}\boldsymbol{B}^r_{\ell+1}, \tag{87}$$

将其代入（76）中的第二个方程，得到

$$\boldsymbol{B}^r_{\ell+1} = \left[\mathbb{I} - \mathbb{R}_{\ell+1,\ell}\mathbb{E}_{\ell+1}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell+1,\ell+2}\mathbb{E}_{\ell+1}\right]^{-1}\mathbb{T}_{\ell,\ell+1}\mathbb{E}_\ell\boldsymbol{B}^r_\ell.$$

将其代回式（87），得

$$\boldsymbol{A}^r_{\ell+1} = \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell+1,\ell+2}\mathbb{E}_{\ell+1}\left[\mathbb{I} - \mathbb{R}_{\ell+1,\ell}\mathbb{E}_{\ell+1}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell+1,\ell+2}\mathbb{E}_{\ell+1}\right]^{-1}\mathbb{T}_{\ell,\ell+1}\mathbb{E}_\ell\boldsymbol{B}^r_\ell. \tag{88}$$

将表达式（88）代入式（76）的第一个方程，得

$$\boldsymbol{A}_\ell^r = \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell+1}\mathbb{E}_\ell \boldsymbol{B}_\ell^r, \tag{89}$$

从而完成了对 $\ell = L-1$、$L-2$、$\cdots$、$\ell'+1$ 的归纳法。

对于特殊情形 $\ell = \ell'$，将带有 $\ell = \ell'+1$ 的公式（89）代入（76）中的第二个方程，得到

$$\boldsymbol{B}_{\ell'+1}^r = (\mathbb{I} - \mathbb{R}_{\ell'+1,\ell'}\mathbb{E}_{\ell'+1}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell'+1,\ell'+2}\mathbb{E}_{\ell'+1})^{-1}\mathbb{T}_{\ell',\ell'+1}[\mathbb{E}_{\ell'}\boldsymbol{B}_{\ell'}^r + \mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f]. \tag{90}$$

T因此，我们完成了对（79）和（80）的证明。同样地，我们也可以证明（81）和（82）。

现在，我们给出（83）的推导。由（80）和（90），有

$$\boldsymbol{A}_{\ell'+1}^r = \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell'+1,\ell'+2}\mathbb{E}_{\ell'+1}\mathbb{W}_{\ell'+1}^{-}\mathbb{T}_{\ell',\ell'+1}[\mathbb{E}_{\ell'}\boldsymbol{B}_{\ell'}^r + \mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f]$$

将其代入（76）中的第一个方程（ $\ell = \ell'$），得到

$$\boldsymbol{A}_{\ell'}^r = \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}[\mathbb{E}_{\ell'}\boldsymbol{B}_{\ell'}^r + \mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f].$$

同样地，我们也可以证明

$$\boldsymbol{B}_{\ell'}^r = \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}[\mathbb{E}_{\ell'}\boldsymbol{A}_{\ell'}^r + \mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^f].$$

那么，由上述两个方程组成的系统的解为（83）。 □

定义向上传播子

$$\mathbb{S}_{\ell,\ell+1} := \mathbb{W}_{\ell+1}^{-}\mathbb{T}_{\ell,\ell+1}\mathbb{E}_\ell, \quad \ell = 0,1,\cdots,L-1.$$

Then，递推公式（79）对于 $\{\boldsymbol{B}_\ell^r\}_{\ell=\ell'}^{L}$ 可以改写为

$$\boldsymbol{B}_{\ell+1}^r = \mathbb{S}_{\ell,\ell+1}\boldsymbol{B}_\ell^r + \delta_{\ell\ell'}\mathbb{S}_{\ell',\ell'+1}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f, \quad \ell = \ell', \ell'+1, \cdots, L-1, \tag{91}$$

显然，上述矩阵 $\mathbb{S}_{\ell,\ \ell+1}$ 有界。定义向下广义透射系数矩阵

$$\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell} = \mathbb{S}_{\ell-1,\ell}\mathbb{S}_{\ell-2,\ell-1}\cdots\mathbb{S}_{\ell',\ell'+1}, \quad \ell = \ell'+1, \ell'+2, \cdots, L. \tag{92}$$

根据表示式（83）和恒等式

$$\mathbb{W}_\ell^{\pm} = \mathbb{I} + \mathbb{W}_\ell^{\pm}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell\pm1}\mathbb{E}_\ell\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell\mp1}\mathbb{E}_\ell, \quad \ell = 0,1,\cdots,L,$$

递推公式（91）可写为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_\ell^r =& \widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\boldsymbol{B}_{\ell'}^r + \widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f,\\
=& \widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\left[(\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}\mathbb{E}_{\ell'}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}\mathbb{E}_{\ell'} + \mathbb{I})\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f + \mathbb{W}_{\ell'}^{-}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^f\right]\\
=& \widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\left[\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^f + \mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f\right]
\end{aligned} \tag{93}$$

对于 $\ell = \ell'+1,\ \cdots,\ L$。此外，应用反射公式 (80) 可得

$$\boldsymbol{A}_\ell^r = \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell+1}\mathbb{E}_\ell\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\left[\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^f + \mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f\right] \tag{94}$$

对于 $\ell = \ell'+1,\ \ell'+2,\ \cdots,\ L$。

仿照 $\ell = \ell'-1,\ \ell'-2,\ \cdots,$ 0 的推导，我们有

$$\boldsymbol{A}_\ell^r = \widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{+}\left[\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_{\ell'}^f + \mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{A}_{\ell'}^f\right], \quad \ell = \ell'-1, \ell'-2, \cdots, 0. \tag{95}$$

其中，向上广义透射矩阵和向上传播算子定义为

$$\mathbb{S}_{\ell+1,\ell} := \mathbb{W}_{\ell}^{+}\mathbb{T}_{\ell+1,\ell}\mathbb{E}_{\ell+1}, \quad \widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell} := \mathbb{S}_{\ell+1,\ell}\mathbb{S}_{\ell+2,\ell+1}\cdots\mathbb{S}_{\ell',\ell'-1}, \tag{96}$$

对于 $\ell = \ell'-1,\ \ell'-2,\ \cdots,\ 0$。应用反射公式 (82) 可得

$$\boldsymbol{B}_{\ell}^{r} = \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell-1}\mathbb{E}_{\ell}\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{+}\left[\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_{\ell'}^{f} + \mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{A}_{\ell'}^{f}\right], \tag{97}$$

对于 $\ell = \ell'-1,\ \ell'-2,\ \cdots,\ 0$。

定义密度矩阵如下

- 在源层（$\ell = \ell'$）中

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{\ell'\ell'}^{\uparrow\uparrow} :=& \mathbb{W}_{\ell'}^{+}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}\mathbb{E}_{\ell'}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}, \quad \mathbb{D}_{\ell'\ell'}^{\uparrow\downarrow} := \mathbb{W}_{\ell'}^{+}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}, \\
\mathbb{D}_{\ell'\ell'}^{\downarrow\uparrow} :=& \mathbb{W}_{\ell'}^{-}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}, \quad \mathbb{D}_{\ell'\ell'}^{\downarrow\downarrow} := \mathbb{W}_{\ell'}^{-}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}\mathbb{E}_{\ell'}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1},
\end{aligned} \tag{98}$$

- 在源层上方的层（$\ell < \ell'$）中

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow} :=& \widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{+}\mathbb{E}_{\ell'}^{-1}, \quad \mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow} := \widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{+}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}, \\
\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow} :=& \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell-1}\mathbb{E}_{\ell}\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{+}\mathbb{E}_{\ell'}^{-1}, \quad \mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow} := \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell-1}\mathbb{E}_{\ell}\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{+}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1},
\end{aligned} \tag{99}$$

- 在源层下方的层中（$\ell > \ell'$）

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow} :=& \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell+1}\mathbb{E}_{\ell}\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}, \quad \mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow} := \widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell+1}\mathbb{E}_{\ell}\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\mathbb{E}_{\ell'}^{-1}, \\
\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow} :=& \widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}, \quad \mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow} := \widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\mathbb{E}_{\ell'}^{-1}.
\end{aligned} \tag{100}$$

然后，将公式（93）-（94）、（95）-（97）和（83）代入（68）-（69），得到

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\tilde{\psi}_{\ell\ell'1}^{r} \\ \tilde{\phi}_{\ell\ell'2}^{r}\end{bmatrix} =& \mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(z-d_{\ell})\boldsymbol{A}_{\ell}^{r} + \mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(z-d_{\ell-1})\boldsymbol{B}_{\ell}^{r} \\
=& \mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(z-d_{\ell})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^{f} + \mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(z-d_{\ell})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_{\ell'}^{f} \\
&+\mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(z-d_{\ell-1})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z'-d_{\ell'-1})\boldsymbol{A}_{\ell'}^{f} + \mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(z-d_{\ell-1})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z'-d_{\ell'})\boldsymbol{B}_{\ell'}^{f},
\end{aligned} \tag{101}$$

对于 $\ell = 0,\ 1,\ \cdots,\ L$。与 [28], 中一样，两个箭头的上标分别表示目标点和源点附近波的传播方向。特别是，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$定义 $\mathbb{R}_{0,\ -1} = \mathbb{R}_{L,\ L+1} = \mathbf{0}$ 可得

$$\mathbb{D}_{LL}^{\uparrow\downarrow} = \mathbb{D}_{00}^{\downarrow\uparrow} = \mathbb{D}_{0\ell'}^{\downarrow\downarrow} = \mathbb{D}_{0\ell'}^{\downarrow\uparrow} = \mathbb{D}_{L\ell'}^{\uparrow\uparrow} = \mathbb{D}_{L\ell'}^{\uparrow\downarrow} = \mathbb{D}_{\ell L}^{\uparrow\downarrow} = \mathbb{D}_{\ell L}^{\downarrow\downarrow} = \mathbb{D}_{\ell 0}^{\downarrow\uparrow} = \mathbb{D}_{\ell 0}^{\uparrow\uparrow} = \mathbf{0}. \tag{102}$$

3.2. 问题(57)的解的递归算法。与上述推导类似，我们首先考虑自由空间分量 $\tilde{\phi}_3^f$，$\tilde{\psi}_2^f$ 其满足：

$$\partial_{zz}\tilde{\phi}_3^f + (k_{\ell z}^s)^2\tilde{\phi}_3^f = -\frac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\delta_{\ell\ell'}\delta'(z-z'), \quad \partial_{zz}\tilde{\psi}_2^f + (k_{\ell z}^c)^2\tilde{\psi}_2^f = -\frac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\delta_{\ell\ell'}\delta(z-z').$$

解如下：

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_3^f(k_\rho, z, z') =& \frac{1}{2\omega^2\rho_{\ell'}}\left[-H(z-z')e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}^{s}(z-z')} + H(z'-z)e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}^{s}(z'-z)}\right], \\
\tilde{\psi}_2^f(k_\rho, z, z') =& \frac{\mathrm{i}}{2\omega^2\rho_{\ell'}k_{\ell' z}^{c}}\left[H(z-z')e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}^{c}(z-z')} + H(z'-z)e^{\mathrm{i}k_{\ell' z}^{c}(z'-z)}\right].
\end{aligned} \tag{103}$$

根据叠加原理，反应分量 $\tilde{\phi}_3^r = \tilde{\phi}_3 - \tilde{\phi}_3^f, \tilde{\psi}_2^r = \tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_2^f$ 满足齐次亥姆霍兹方程:

$$\partial_{zz}\tilde{\psi}_2^r + (k_{\ell z}^c)^2\tilde{\psi}_2^r = 0, \quad \partial_{zz}\tilde{\phi}_3^r + (k_{\ell z}^s)^2\tilde{\phi}_3^r = 0,$$

在每一层内部以及界面条件

$$\left[\!\left[\tilde{\boldsymbol{a}}\tilde{\psi}_2 + \tilde{\boldsymbol{b}}\partial_z\tilde{\phi}_3\right]\!\right] = 0, \quad \left[\!\left[\tilde{\boldsymbol{d}}\partial_z\tilde{\psi}_2 + \tilde{\boldsymbol{c}}\tilde{\phi}_3\right]\!\right] = 0, \quad z = d_\ell, \quad \ell = 0, 1, \cdots, L-1,$$

其中，每个 ℓ 层中的分层参数向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 定义为

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_\ell = \begin{bmatrix} \gamma_\ell (k_{\ell z}^c)^2 + \lambda_\ell k_\rho^2 \\ -k_\rho^2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}}_\ell = \begin{bmatrix} 2\mu_\ell \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{c}}_\ell = \begin{bmatrix} \mu_\ell((k_{\ell z}^s)^2 - k_\rho^2) \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{d}}_\ell = \begin{bmatrix} 2\mu_\ell k_\rho^2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{104}$$

~ ~与 ϕ_2、ψ_1 的推导类似，我们将自由空间场的向上和向下系数矩阵定义如下

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\ell'}^f := \frac{1}{2\omega^2\rho_{\ell'}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \overline{k_{\ell' z}^c} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{B}}_{\ell'}^f := \frac{1}{2\omega^2\rho_{\ell'}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \overline{k_{\ell' z}^c} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

然后，根据表示式（103），我们计算得到:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\psi}_2^f(k_\rho, d_{\ell'-1}, z') \\ \tilde{\phi}_3^f(k_\rho, d_{\ell'-1}, z') \end{bmatrix} = \mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z' - d_{\ell'-1})\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\ell'}^f, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_2^f(k_\rho, d_{\ell'}, z') \\ \tilde{\phi}_3^f(k_\rho, d_{\ell'}, z') \end{bmatrix} = \mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z' - d_{\ell'})\widetilde{\boldsymbol{B}}_{\ell'}^f.$$

按照上一小节中的推导，我们得到（57）的解如下

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_2^r \\ \tilde{\phi}_3^r \end{bmatrix} =& \mathbb{E}_\ell^{\uparrow}(z - d_\ell)\mathbb{P}_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z' - d_{\ell'-1})\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\ell'}^f + \mathbb{E}_\ell^{\uparrow}(z - d_\ell)\mathbb{P}_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z' - d_{\ell'})\widetilde{\boldsymbol{B}}_{\ell'}^f \\ &+ \mathbb{E}_\ell^{\downarrow}(z - d_{\ell-1})\mathbb{P}_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(z' - d_{\ell'-1})\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\ell'}^f + \mathbb{E}_\ell^{\downarrow}(z - d_{\ell-1})\mathbb{P}_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(z' - d_{\ell'})\widetilde{\boldsymbol{B}}_{\ell'}^f, \end{aligned} \tag{105}$$

其中，密度矩阵 $\mathbb{P}_{\ell\ell'}^{**}(k_\rho)$ 以及相应的一般反射、透射矩阵的定义形式与 (98)-(100)、(85)-(86)、(92) 和 (96) 相同，但采用在 (104) 中定义的新~ ~界面系数向量 $\tilde{\boldsymbol{a}}_\ell$，$\tilde{\boldsymbol{b}}_\ell$，$\tilde{\boldsymbol{c}}_\ell$，$\tilde{\boldsymbol{d}}_\ell$。

3.3. 物理域中的并矢格林函数。本节前面的推导给出了界面问题 (55)-(57) 的解 ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3，ψ_1，ψ_2 的解析形式。结合弹性波在傅里叶域中的并矢格林函数公式 (52)，通过傅里叶逆变换即可得到弹性波在时域中的索末菲积分形式的并矢格林函数。

显然，由于传播子 $\mathbb{S}_{\ell,\ell+1}$,$\mathbb{S}_{\ell+1,\ell}$ 中的 $\mathbb{E}_\ell$ 项，密度矩阵 $\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\star\star}, \mathbb{P}_{\ell\ell'}^{\star\star}$ 中存在指数衰减项。通过简单地整理这些项，我们可以将指数项显式地因式分解出来，从而有助于并矢格林函数的计算。为此，我们首先引入以下有界变换

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\ell^{\pm}(\mathbb{F}) &:= \mathbb{E}_\ell^{\uparrow}(\pm d_\ell)\mathbb{F}\mathbb{E}_\ell^{\downarrow}(\pm d_\ell) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12}e^{\pm\mathrm{i}(k_{\ell z}^c - k_{\ell z}^s)d_\ell} \\ F_{21}e^{\pm\mathrm{i}(k_{\ell z}^s - k_{\ell z}^c)d_\ell} & F_{22} \end{bmatrix} \\ \mathcal{Q}_\ell^{\pm}(\mathbb{F}) &:= \mathbb{E}_\ell^{\uparrow}(\pm d_{\ell-1})\mathbb{F}\mathbb{E}_\ell^{\downarrow}(\pm d_{\ell-1}) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12}e^{\pm\mathrm{i}(k_{\ell z}^c - k_{\ell z}^s)d_{\ell-1}} \\ F_{21}e^{\pm\mathrm{i}(k_{\ell z}^s - k_{\ell z}^c)d_{\ell-1}} & F_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{106}$$

对于任意有界的 2×2 矩阵 $\mathbb{F}=(F_{ij})_{2\times 2}$。根据渐近行为

$$\pm\mathrm{i}(k_{\ell z}^{c}-k_{\ell z}^{s})=\frac{\mp((k_{\ell}^{c})^{2}-(k_{\ell}^{s})^{2})}{\sqrt{k_{\rho}^{2}-(k_{\ell}^{c})^{2}}+\sqrt{k_{\rho}^{2}-(k_{\ell}^{s})^{2}}}=\mathcal{O}(k_{\rho}^{-1}),\quad k_{\rho}\to\infty, \tag{107}$$

我们有 $\mathcal{P}_{\ell}(\mathbb{F})\ \mathcal{Q}_{\ell}(\mathbb{F})\sim\mathbb{F}$ 为 $k_{\rho}\to\infty$。

根据定义 (98)-(100)，可以看出，当 $\ell=\ell'$ 时，$\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{**},\mathbb{P}_{\ell\ell'}^{**}$ 的指数衰减由 $\mathbb{E}_{\ell'}$ 控制；而对于 $\ell<\ell'$ 和 $\ell>\ell'$，则分别由衰减因子 $\{\mathbb{E}_{\ell+1},\mathbb{E}_{\ell+2},\cdots,\mathbb{E}_{\ell'}\}$ 和 $\{\mathbb{E}_{\ell-1},\mathbb{E}_{\ell-2},\cdots,\mathbb{E}_{\ell'}\}$ 控制。直接计算可得

$$\mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(d_{\ell})\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell'})\sim\mathcal{O}(1),\quad \ell<\ell',\quad \mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(d_{\ell-1})\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell'-1})\sim\mathcal{O}(1),\quad \ell>\ell', \tag{108}$$

当 $k_{\rho}\to\infty$ 时。定义新的密度矩阵如下:

- 在源层（$\ell=\ell'$）

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{D}}_{\ell'\ell'}^{\uparrow\uparrow}:=&\mathcal{P}_{\ell'}^{+}(\mathbb{W}_{\ell'}^{+}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1})\mathcal{Q}_{\ell'}^{+}(\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}),\quad \widehat{\mathbb{D}}_{\ell'\ell'}^{\uparrow\downarrow}:=\mathcal{P}_{\ell'}^{-}(\mathbb{W}_{\ell'}^{+}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1})\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell'\ell'}^{\downarrow\uparrow}:=&\mathcal{Q}_{\ell'}^{+}(\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}),\quad \widehat{\mathbb{D}}_{\ell'\ell'}^{\downarrow\downarrow}:=\mathcal{Q}_{\ell'}^{-}(\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1})\mathcal{P}_{\ell'}^{-}(\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}),\end{aligned} \tag{109}$$

- 在源层上方的层（$\ell<\ell'$）

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}:=&\mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(d_{\ell})\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell'})\mathcal{P}_{\ell'}^{-}(\mathbb{W}_{\ell'}^{+}),\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}:=&\mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(d_{\ell})\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell'})\mathcal{P}_{\ell'}^{-}(\mathbb{W}_{\ell'}^{+}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}),\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}:=&\mathcal{Q}_{\ell}^{-}(\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell-1})\mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(d_{\ell})\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell'})\mathcal{P}_{\ell'}^{-}(\mathbb{W}_{\ell'}^{+}),\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}:=&\mathcal{Q}_{\ell}^{-}(\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell-1})\mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(d_{\ell})\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell'})\mathcal{P}_{\ell'}^{-}(\mathbb{W}_{\ell'}^{+}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'+1}),\end{aligned} \tag{110}$$

- 在源层（$\ell>\ell'$）下方的层中

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}:=&\mathcal{P}_{\ell}^{+}(\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell+1})\mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(d_{\ell-1})\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell'-1})\mathcal{Q}_{\ell'}^{+}(\mathbb{W}_{\ell'}^{-}),\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}:=&\mathcal{P}_{\ell}^{+}(\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell,\ell+1})\mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(d_{\ell-1})\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell'-1})\mathcal{Q}_{\ell'}^{+}(\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}),\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}:=&\mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(d_{\ell-1})\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell'-1})\mathcal{Q}_{\ell'}^{+}(\mathbb{W}_{\ell'}^{-}\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell',\ell'-1}),\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}:=&\mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(d_{\ell-1})\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell'\ell}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell'-1})\mathcal{Q}_{\ell'}^{+}(\mathbb{W}_{\ell'}^{-}).\end{aligned} \tag{111}$$

注意,

$$\mathbb{E}^{\downarrow}(d_{\ell})\mathbb{E}^{\uparrow}(d_{\ell-1})=\mathbb{E}^{\uparrow}(d_{\ell-1})\mathbb{E}^{\downarrow}(d_{\ell})=\mathbb{E}_{\ell}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{D}}_{\ell'\ell'}^{\uparrow\uparrow}=&\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell'})\mathbb{D}_{\ell'\ell'}^{\uparrow\uparrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell'-1}),\quad \widehat{\mathbb{D}}_{\ell'\ell'}^{\uparrow\downarrow}=\mathcal{P}_{\ell'}^{-}(\mathbb{D}_{\ell'\ell'}^{\uparrow\downarrow}),\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell'\ell'}^{\downarrow\uparrow}=&\mathcal{Q}_{\ell'}^{+}(\mathbb{D}_{\ell'\ell'}^{\downarrow\uparrow}),\quad \widehat{\mathbb{D}}_{\ell'\ell'}^{\downarrow\downarrow}=\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell'-1})\mathbb{D}_{\ell'\ell'}^{\downarrow\downarrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell'}),\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}=&\mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(d_{\ell})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell'-1}),\quad \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}=\mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(d_{\ell})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell}),\quad \ell<\ell',\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}=&\mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(d_{\ell-1})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell'-1}),\quad \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}=\mathbb{E}_{\ell}^{\downarrow}(d_{\ell-1})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\uparrow}(d_{\ell}),\quad \ell<\ell',\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}=&\mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(d_{\ell})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\uparrow\uparrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell'-1}),\quad \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}=\mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(d_{\ell})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\uparrow\downarrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell}),\quad \ell>\ell',\\ \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}=&\mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(d_{\ell-1})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\downarrow\uparrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell'-1}),\quad \widehat{\mathbb{D}}_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}=\mathbb{E}_{\ell}^{\uparrow}(d_{\ell-1})\mathbb{D}_{\ell\ell'}^{\downarrow\downarrow}\mathbb{E}_{\ell'}^{\downarrow}(d_{\ell}),\quad \ell>\ell'.\end{aligned} \tag{112}$$

均为 $\mathcal{O}(1)$ 矩阵，且 (101) 可改写为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\tilde{\psi}^r_{\ell\ell'1}\\ \tilde{\phi}^r_{\ell\ell'2}\end{bmatrix} =&\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(z)\widehat{\mathbb{D}}^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'}(z'))\boldsymbol{B}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'}(z))\widehat{\mathbb{D}}^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'-1}(z'))\boldsymbol{A}^f_{\ell'}\\ &+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'-1}(z))\widehat{\mathbb{D}}^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'}(z'))\boldsymbol{B}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(z)\widehat{\mathbb{D}}^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'-1}(z'))\boldsymbol{A}^f_{\ell'},\end{aligned}\tag{113}$$

and

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\tilde{\psi}^r_{\ell\ell'1}\\ \tilde{\phi}^r_{\ell\ell'2}\end{bmatrix} =&\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell}(z)\widehat{\mathbb{D}}^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'}(z'))\boldsymbol{B}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell}(z)\widehat{\mathbb{D}}^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(z')\boldsymbol{A}^f_{\ell'}]\\ &+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell}(-\tau_{\ell-1}(z))\widehat{\mathbb{D}}^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'}(z'))\boldsymbol{B}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell}(-\tau_{\ell-1}(z))\widehat{\mathbb{D}}^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(z')\boldsymbol{A}^f_{\ell'},\quad \ell<\ell',\\ \begin{bmatrix}\tilde{\psi}^r_{\ell\ell'1}\\ \tilde{\phi}^r_{\ell\ell'2}\end{bmatrix} =&\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell}(-\tau_{\ell}(z))\widehat{\mathbb{D}}^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(z')\boldsymbol{B}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell}(-\tau_{\ell}(z))\widehat{\mathbb{D}}^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'-1}(z'))\boldsymbol{A}^f_{\ell'}\\ &+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell}(z)\widehat{\mathbb{D}}^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(z')\boldsymbol{B}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell}(z)\widehat{\mathbb{D}}^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'-1}(z'))\boldsymbol{A}^f_{\ell'},\quad \ell>\ell'.\end{aligned}\tag{114}$$

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$类似的新表达式如下：$\{\phi_3,\psi_2\}$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\tilde{\psi}^r_{\ell\ell'2}\\ \tilde{\phi}^r_{\ell\ell'3}\end{bmatrix} =&\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(z)\widehat{\mathbb{P}}^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'}(z'))\tilde{\boldsymbol{B}}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'}(z))\widehat{\mathbb{P}}^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'-1}(z'))\tilde{\boldsymbol{A}}^f_{\ell'}\\ &+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'-1}(z))\widehat{\mathbb{P}}^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'}(z'))\tilde{\boldsymbol{B}}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(z)\widehat{\mathbb{P}}^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'-1}(z'))\tilde{\boldsymbol{A}}^f_{\ell'}\end{aligned}\tag{115}$$

and

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\tilde{\psi}^r_{\ell\ell'2}\\ \tilde{\phi}^r_{\ell\ell'3}\end{bmatrix} =&\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell}(-\tau_{\ell}(z))\widehat{\mathbb{P}}^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(z')\tilde{\boldsymbol{B}}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell}(-\tau_{\ell}(z))\widehat{\mathbb{P}}^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'-1}(z'))\tilde{\boldsymbol{A}}^f_{\ell'}\\ &+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell}(z)\widehat{\mathbb{P}}^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(z')\tilde{\boldsymbol{B}}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell}(z)\widehat{\mathbb{P}}^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'-1}(z'))\tilde{\boldsymbol{A}}^f_{\ell'},\quad \ell>\ell',\\ \begin{bmatrix}\tilde{\psi}^r_{\ell\ell'2}\\ \tilde{\phi}^r_{\ell\ell'3}\end{bmatrix} =&\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell}(z)\widehat{\mathbb{P}}^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'}(z'))\tilde{\boldsymbol{B}}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell}(z)\widehat{\mathbb{P}}^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(z')\tilde{\boldsymbol{A}}^f_{\ell'}]\\ &+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell}(-\tau_{\ell-1}(z))\widehat{\mathbb{P}}^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\uparrow}_{\ell'}(-\tau_{\ell'}(z'))\tilde{\boldsymbol{B}}^f_{\ell'}+\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell}(-\tau_{\ell-1}(z))\widehat{\mathbb{P}}^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'}\mathbb{E}^{\downarrow}_{\ell'}(z')\tilde{\boldsymbol{A}}^f_{\ell'},\quad \ell<\ell'.\end{aligned}\tag{116}$$

其中，$\widehat{\mathbb{P}}^{**}_{\ell\ell'}$ 的定义形式与（109）-（111）相同，只需将 $\widetilde{\mathbb{T}}_{\ell\ell'},\widetilde{\mathbb{R}}_{\ell\ell'},\mathbb{W}^{\pm}_{\ell}$ 替换为其对应于（104）中定义的界面系数向量$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\boldsymbol{a}}_\ell,\boldsymbol{b}_\ell,\tilde{\boldsymbol{c}}_\ell,\boldsymbol{d}_\ell$ 的对应项。

为了构造格式的最后一个双波数指数函数：$\tilde{\phi}^r_1,\tilde{\phi}^r_2,\tilde{\phi}^r_3,\tilde{\psi}^r_1,\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ ψ_2，需要的基本积分因子

$$\begin{aligned}Z^{\uparrow\uparrow}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z';k^c,k^s)=&\begin{cases}e^{\mathrm{i}(k^c_{\ell z}z-k^s_{\ell' z}z')}, & \ell<\ell'\\ e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell' z}\tau_{\ell'-1}(z')-k^c_{\ell z}\tau_\ell(z))}, & \ell\geq\ell'\end{cases}\\ Z^{\uparrow\downarrow}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z';k^c,k^s)=&\begin{cases}e^{\mathrm{i}(k^c_{\ell z}z-k^s_{\ell' z}\tau_{\ell'}(z'))}, & \ell\leq\ell'\\ e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell' z}z'-k^c_{\ell z}\tau_\ell(z))}, & \ell>\ell'\end{cases}\\ Z^{\downarrow\uparrow}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z';k^c,k^s)=&\begin{cases}e^{\mathrm{i}(k^c_{\ell z}\tau_{\ell-1}(z)-k^s_{\ell' z}z')}, & \ell<\ell',\\ e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell' z}\tau_{\ell'-1}(z')-k^c_{\ell z}z)}, & \ell\geq\ell',\end{cases}\\ Z^{\downarrow\downarrow}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z';k^c,k^s)=&\begin{cases}e^{\mathrm{i}(k^c_{\ell z}\tau_{\ell-1}(z)-k^s_{\ell' z}\tau_{\ell'}(z'))}, & \ell\leq\ell'\\ e^{\mathrm{i}(k^s_{\ell' z}z'-k^c_{\ell z}z)}, & \ell>\ell',\end{cases}\end{aligned}\tag{117}$$

其中 k^c, k^s 为两个分段常数波数。它们关于 z 的导数为

$$\partial_z Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z';k^c,k^s)=\mathrm{i}\tau^* k^c_{\ell z} Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z';k^c,k^s), \tag{118}$$

其中 $\tau^{\uparrow}=1$, $\tau^{\downarrow}=-1$为符号变量。根据 k^c, k^s的取值，我们进一步记为

$$\begin{aligned} Z^{**}_{\ell\ell',PP}(k_\rho,z,z') &:= Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z';k^c,k^c), \quad Z^{**}_{\ell\ell',PS}(k_\rho,z,z') := Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z';k^c,k^s),\\ Z^{**}_{\ell\ell',SP}(k_\rho,z,z') &:= Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z';k^s,k^c), \quad Z^{**}_{\ell\ell',SS}(k_\rho,z,z') := Z^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho,z,z';k^s,k^s). \end{aligned} \tag{119}$$

显然，前面定义的指数函数 (61) 等于 $Z^{**}_{\ell\ell',SS}(k_\rho, z, z')$。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$将密度矩阵 $\mathbb{D}^{**}_{\ell\ell'}$, $\mathbb{P}^{**}_{\ell\ell'}$的元素记为 $\sigma^{**}_{\ell\ell' k}$, $\tilde{\sigma}^{**}_{\ell\ell' k}$ ，即

$$\widehat{\mathbb{D}}^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho)=\begin{bmatrix}\sigma^{**}_{\ell\ell' 1}(k_\rho) & \sigma^{**}_{\ell\ell' 2}(k_\rho)\\ \sigma^{**}_{\ell\ell' 3}(k_\rho) & \sigma^{**}_{\ell\ell' 4}(k_\rho)\end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbb{P}}^{**}_{\ell\ell'}(k_\rho)=\begin{bmatrix}\tilde{\sigma}^{**}_{\ell\ell' 1}(k_\rho) & \tilde{\sigma}^{**}_{\ell\ell' 2}(k_\rho)\\ \tilde{\sigma}^{**}_{\ell\ell' 3}(k_\rho) & \tilde{\sigma}^{**}_{\ell\ell' 4}(k_\rho)\end{bmatrix}, \quad *,\star=\uparrow,\downarrow. \tag{120}$$

于是，(60)、(113)-(114) 和 (115)-(116) 可改写为

$$\tilde{\phi}^r_{\ell\ell' 1}=\frac{1}{\mu_{\ell'}}\frac{\mathrm{i}}{2k^s_{\ell' z}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\sigma^{**}_{\ell\ell' 0}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell',SS}(k_\rho,z,z'), \tag{121}$$

$$\tilde{\psi}^r_{\ell\ell' 1}=\frac{1}{2\omega^2\rho_{\ell'}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\left[-\tau^\star\sigma^{**}_{\ell\ell' 1}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell',PP}(k_\rho,z,z')+\frac{\mathrm{i}}{k^s_{\ell' z}}\sigma^{**}_{\ell\ell' 2}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell',PS}(k_\rho,z,z')\right], \tag{122}$$

$$\tilde{\phi}^r_{\ell\ell' 2}=\frac{1}{2\omega^2\rho_{\ell'}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\left[-\tau^\star\sigma^{**}_{\ell\ell' 3}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell',SP}(k_\rho,z,z')+\frac{\mathrm{i}}{k^s_{\ell' z}}\sigma^{**}_{\ell\ell' 4}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell',SS}(k_\rho,z,z')\right], \tag{123}$$

$$\tilde{\psi}^r_{\ell\ell' 2}=\frac{1}{2\omega^2\rho_{\ell'}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\left[\frac{\mathrm{i}}{k^c_{\ell' z}}\tilde{\sigma}^{**}_{\ell\ell' 1}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell',PP}(k_\rho,z,z')-\tau^\star\tilde{\sigma}^{**}_{\ell\ell' 2}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell',PS}(k_\rho,z,z')\right], \tag{124}$$

$$\tilde{\phi}^r_{\ell\ell' 3}=\frac{1}{2\omega^2\rho_{\ell'}}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\left[\frac{\mathrm{i}}{k^c_{\ell' z}}\tilde{\sigma}^{**}_{\ell\ell' 3}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell',SP}(k_\rho,z,z')-\tau^\star\tilde{\sigma}^{**}_{\ell\ell' 4}(k_\rho)Z^{**}_{\ell\ell',SS}(k_\rho,z,z')\right]. \tag{125}$$

由 (52)，可得

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{G}}^r_{\ell\ell'}=&\tilde{\phi}^r_1\mathbb{J}_1+\left(k_\rho^2\tilde{\phi}^r_2-\partial_z\tilde{\psi}^r_1\right)\mathbb{J}_2+\left(\partial_z\tilde{\phi}^r_2-\tilde{\psi}^r_1\right)\mathbb{J}_3+\left(\tilde{\phi}^r_3-\partial_z\tilde{\psi}^r_2\right)\mathbb{J}_4\\ &+\left(k_\rho^{-2}[\tilde{\phi}^r_1+\partial_z\tilde{\phi}^r_3]-\tilde{\psi}^r_2\right)\mathbb{J}_5.\end{aligned} \tag{126}$$

将 (121)-(125) 代入 (126) 得

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{G}}^r_{\ell\ell'}=&\frac{1}{2}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\Big[\boldsymbol{\Theta}^{**}_{\ell\ell',PP}(k_x,k_y)Z^{**}_{\ell\ell',PP}(k_\rho,z,z')+\boldsymbol{\Theta}^{**}_{\ell\ell',PS}(k_x,k_y)Z^{**}_{\ell\ell',PS}(k_\rho,z,z')\\ &+\boldsymbol{\Theta}^{**}_{\ell\ell',SP}(k_x,k_y)Z^{**}_{\ell\ell',SP}(k_\rho,z,z')+\boldsymbol{\Theta}^{**}_{\ell\ell',SS}(k_x,k_y)Z^{**}_{\ell\ell',SS}(k_\rho,z,z')\Big],\end{aligned} \tag{127}$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta}^{\star\star}_{\ell\ell',PP}(k_x,k_y) :=& \frac{-1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\left(-\left[\mathbb{J}_3+\mathrm{i}\tau^* k^c_{\ell z}\mathbb{J}_2\right]\tau^\star\sigma^{\star\star}_{\ell\ell' 1}(k_\rho)+\left[\mathbb{J}_5+\mathrm{i}\tau^* k^c_{\ell z}\mathbb{J}_4\right]\frac{\mathrm{i}\tilde{\sigma}^{\star\star}_{\ell\ell' 1}(k_\rho)}{k^c_{\ell' z}}\right),\\
\boldsymbol{\Theta}^{\star\star}_{\ell\ell',PS}(k_x,k_y) :=& \frac{-1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\left(\left[\mathbb{J}_3+\mathrm{i}\tau^* k^c_{\ell z}\mathbb{J}_2\right]\frac{\mathrm{i}\sigma^{\star\star}_{\ell\ell' 2}(k_\rho)}{k^s_{\ell' z}}-\left[\mathbb{J}_5+\mathrm{i}\tau^* k^c_{\ell z}\mathbb{J}_4\right]\tau^\star\tilde{\sigma}^{\star\star}_{\ell\ell' 2}(k_\rho)\right),\\
\boldsymbol{\Theta}^{\star\star}_{\ell\ell',SP}(k_x,k_y) :=& \frac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\left(-\left[k_\rho^2\mathbb{J}_2+\mathrm{i}\tau^* k^s_{\ell z}\mathbb{J}_3\right]\tau^\star\sigma^{\star\star}_{\ell\ell' 3}(k_\rho)+\left[\mathbb{J}_4+\mathrm{i}\tau^* k^s_{\ell z}k_\rho^{-2}\mathbb{J}_5\right]\frac{\mathrm{i}\tilde{\sigma}^{\star\star}_{\ell\ell' 3}(k_\rho)}{k^c_{\ell' z}}\right),\\
\boldsymbol{\Theta}^{\star\star}_{\ell\ell',SS}(k_x,k_y) :=& \frac{1}{\omega^2\rho_{\ell'}}\left(\left[k_\rho^2\mathbb{J}_2+\mathrm{i}\tau^* k^s_{\ell z}\mathbb{J}_3\right]\frac{i\sigma^{\star\star}_{\ell\ell' 4}(k_\rho)}{k^s_{\ell' z}}-\left[\mathbb{J}_4+\mathrm{i}\tau^* k^s_{\ell z}k_\rho^{-2}\mathbb{J}_5\right]\tau^\star\tilde{\sigma}^{\star\star}_{\ell\ell' 4}(k_\rho)\right)\\
&+\frac{\mathrm{i}}{\mu_{\ell'}k^s_{\ell' z}}\left[\mathbb{J}_1+k_\rho^{-2}\mathbb{J}_5\right]\sigma^{\star\star}_{\ell\ell' 0}(k_\rho).
\end{aligned}$$

对式（127）进行傅里叶逆变换，得到物理域中的并矢格林函数，即:

$$\mathbb{G}^r_{\ell\ell'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\mathbb{G}^r_{\ell\ell',PP}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\mathbb{G}^r_{\ell\ell',PS}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\mathbb{G}^r_{\ell\ell',SP}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\mathbb{G}^r_{\ell\ell',SS}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\tag{128}$$

其中

$$\mathbb{G}^r_{\ell\ell',AB}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{8\pi^2}\sum_{*,\star=\uparrow,\downarrow}\int_{\mathbb{R}^2}e^{\mathrm{i}k_x(x-x')+\mathrm{i}k_y(y-y')}Z^{\star\star}_{\ell\ell',AB}(k_\rho,z,z')\boldsymbol{\Theta}^{\star\star}_{\ell\ell',AB}(k_x,k_y)\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y,$$

当 $A,B\in P,S$ 时。

4. Numerical examples

本节给出若干数值结果，以验证为计算层状介质弹性动力学并矢格林函数而推导的公式和递推关系。我们测试了五层介质中点力源产生的位移场，并考察了层状介质格林函数的均匀介质极限，以及所有材料界面处的透射条件。

Table 1. 各层的材料参数。

	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$
ρ_ℓ	0.7	1.5	1.2	0.8	2.1
μ_ℓ	1.2	0.8	1.0	2.3	1.5
λ_ℓ	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

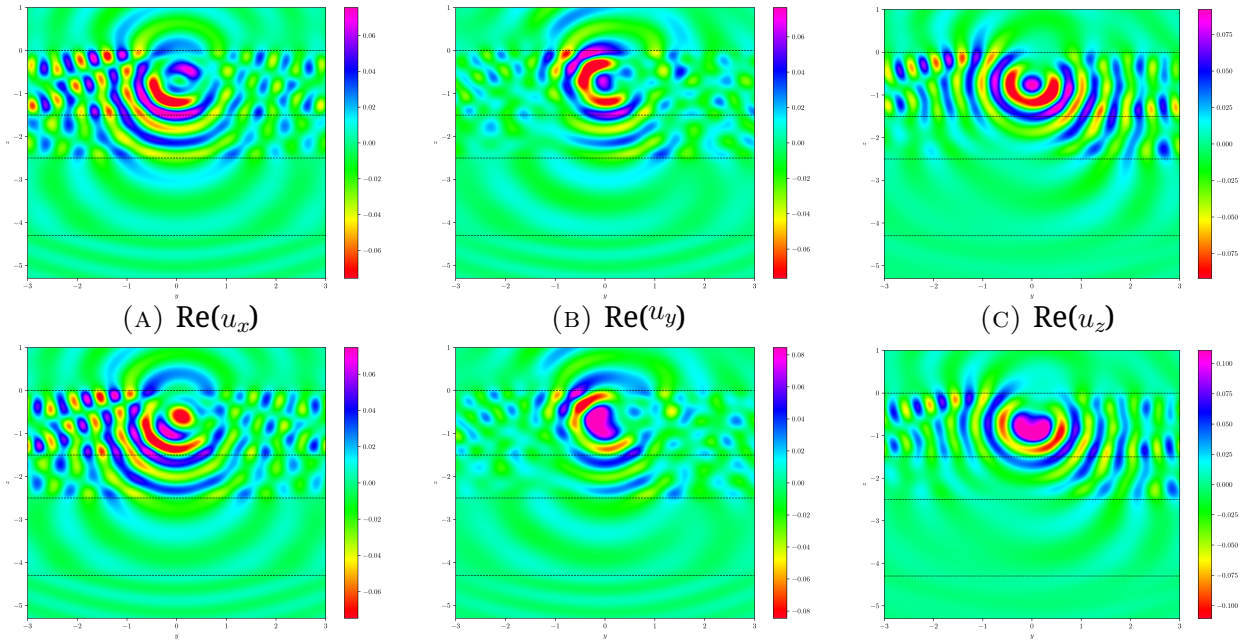
除非另有说明，数值实验均在具有四个界面的五层介质中进行，这些界面的位置为

$$\{d_\ell\}_{\ell=0}^3=\{0,-1.5,-2.5,-4.3\},$$

材料参数见表 1，角频率设为 $\omega=10$。在所有数值实验中，点源位于层 $\ell'=1$ 中的 $\boldsymbol{r}'=(0,\ 0,\ -0.75)$ 处，其强度由 $\underline{\boldsymbol{\alpha}}'=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ 给出。位移场表示为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=\mathbb{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\alpha}'.$$

我们在平面 $\{(x,\ y,\ z)$ 上计算 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$: $x = 0.5\}$ 在区域 $(y,\ z) \in [-3,3]\times[-5.3,1]$ 上。三个位移分量的实部和虚部如图 2 所示。



(A) $\mathrm{Re}(u_x)$ (B) $\mathrm{Re}(u_y)$ (C) $\mathrm{Re}(u_z)$

(D) $\mathrm{Im}(u_x)$ (E) $\mathrm{Im}(u_y)$ (F) 虚部(u_z)

FIGURE 2. 位移场的实部和虚部，该位移场由位于第二层 $\boldsymbol{r}' = (0,0,-0.75)$处的点力源产生。

4.1. 向均匀介质极限收敛。如果所有层具有相同的材料参数，分层介质二重格林函数将退化为相应均匀弹性介质的自由空间并矢格林函数。我们将这一极限性质用作数值一致性检验。

在此检验中，我们保留上述几何结构、角频率和源位置，但考虑一组材料参数逐渐趋近于均匀参考介质参数的介质。参考参数设为 $\rho_{\ell'} = 1$、 $\mu_{\ell'} = 1.2$和 $\lambda_{\ell'} = 1$。所有层的质量密度均固定为 $\rho_\ell = \rho_{\ell'}$ ，而 Lam´e 参数则按照以下方式偏离其参考值:

$$\lambda_\ell = \lambda_{\ell'}\left(1+\zeta_{\ell\ell'}\epsilon\right), \qquad \mu_\ell = \mu_{\ell'}\left(1-\zeta_{\ell\ell'}\epsilon\right), \qquad \ell = 0,1,\ldots,L,$$

其中

$$\zeta_{\ell\ell'} = 1-\delta_{\ell\ell'}+\frac{\ell-\ell'}{L}, \tag{129}$$

$\delta_{\ell\ell'}$ 为克罗内克符号。因此,

$$\lambda_\ell \to \lambda_{\ell'}, \qquad \mu_\ell \to \mu_{\ell'}, \qquad \epsilon \to 0,$$

且分层介质趋近于均匀介质。

我们取 $\epsilon = 10^{-4},\ 10^{-5},\ 10^{-6},\ 10^{-7},\ 10^{-8}$，并在平面$\{(x,\ y,\ z)$上评估格林张量: $x = 0.5\}$ 在区域 $(y,\ z) \in [-3,3]\times[-5.3,1]$ 所覆盖的均匀 100×100

网格。对于每个 目标点 $\boldsymbol{r}$，相对误差以弗罗贝尼乌斯范数表示为

$$E(\boldsymbol{r}) := \frac{\left\|\mathbb{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - \mathbb{G}^f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right\|_F}{\left\|\mathbb{G}^f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right\|_F},$$

其中， $\mathbb{G}^f$ 表示与参考材料相关的自由空间弹性动力学二重格林函数。表 2 报告了每个目标层内的最大相对误差。可以清楚地看到，每个目标层中的最大相对误差都随 ϵ 近似线性下降。这从数值上证实，随着层间材料对比度趋于零，分层介质二重格林函数将收敛到其自由空间对应函数。

层 \ ϵ	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
$\ell = 0$	7.17×10^{-4}	7.17×10^{-5}	7.17×10^{-6}	7.17×10^{-7}	7.17×10^{-8}
$\ell = 1$	2.52×10^{-4}	2.52×10^{-5}	2.52×10^{-6}	2.52×10^{-7}	2.52×10^{-8}
$\ell = 2$	1.04×10^{-3}	1.04×10^{-4}	1.04×10^{-5}	1.04×10^{-6}	1.04×10^{-7}
$\ell = 3$	2.17×10^{-3}	2.17×10^{-4}	2.17×10^{-5}	2.17×10^{-6}	2.17×10^{-7}
$\ell = 4$	2.85×10^{-3}	2.85×10^{-4}	2.85×10^{-5}	2.85×10^{-6}	2.85×10^{-7}

TABLE 2.五层介质各层中分层介质二重格林函数与自由空间并矢格林函数之间的最大相对误差。

4.2. 界面传输条件的验证。 接下来，我们验证弹性动力学并矢格林函数在各材料界面处满足的透射条件 **(10)**。为了计算牵引张量 $\mathbb{T} = \left[\mathbf{T}^{\hat{\boldsymbol{x}}},\ \mathbf{T}^{\hat{\boldsymbol{y}}},\ \mathbf{T}^{\hat{\boldsymbol{z}}}\right]$，我们采用二阶中心差分格式：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h,y,z) - f(x-h,y,z)}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x,y+h,z) - f(x,y-h,z)}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

对于相对于切向坐标 x 和 y 的导数，以及二阶单边差分格式：

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-3f(x,y,z) + 4f(x,y,z+h) - f(x,y,z+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \qquad z \geq d_\ell,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3f(x,y,z) - 4f(x,y,z-h) + f(x,y,z-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \qquad z \leq d_\ell.$$

对于界面两侧的法向导数。

对于此测试，我们回到第 4 节开头给出的设置。在每个界面$z = d_\ell$处，格林张量在水平区域 $(x, y) \in [-3, 3]^2$上的均匀 10×10网格上进行计算。对于牵引矩阵，测试有限差分步长 $h = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$。对于 $\mathbb{K} = \mathbb{G}$ 或 $\mathbb{K} = \mathbb{T}$，我们将界面点处的相对跳跃误差定义为

$$E_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{r}) := \frac{\left\|\mathbb{K}^+(\boldsymbol{r}) - \mathbb{K}^-(\boldsymbol{r})\right\|_F}{\max\left\{\left\|\mathbb{K}^+(\boldsymbol{r})\right\|_F, \left\|\mathbb{K}^-(\boldsymbol{r})\right\|_F\right\}}, \qquad \mathbb{K} = \mathbb{G}, \mathbb{T}, \tag{130}$$

其中，上标 $+$ 和 $-$ 分别表示来自上层和下层的单侧极限。每个界面上的最大相对跳跃误差列于表 3 中。

界面	$E_{\mathbb{G}}$	$E_{\mathbb{T}}$		
		$h = 10^{-3}$	$h = 10^{-4}$	$h = 10^{-5}$
$d_0 = 0$ ($\ell = 0$, 1)	1.97×10^{-10}	6.54×10^{-5}	6.56×10^{-7}	2.03×10^{-8}
$d_1 = -1.5$ ($\ell = 1$, 2)	6.44×10^{-11}	3.78×10^{-5}	3.79×10^{-7}	2.32×10^{-8}
$d_2 = -2.5$ ($\ell = 2$, 3)	1.34×10^{-13}	3.95×10^{-5}	3.96×10^{-7}	6.60×10^{-9}
$d_3 = -4.3$ ($\ell = 3$, 4)	2.06×10^{-14}	3.35×10^{-5}	4.67×10^{-7}	3.32×10^{-9}

TABLE 3. 位移格林矩阵和牵引格林矩阵在四个材料界面处的最大相对跳跃误差。

如表 3 所示，位移格林矩阵在所有四个界面处均保持连续，最大相对跳跃误差小于 2×10^{-10}。对于牵引格林矩阵，相对跳跃误差随步长 h 的减小呈二次下降。虽然在较小步长 $h = 10^{-5}$ 下，收敛速率变得不那么均匀，这可能是由于数值微分的数值稳定性和舍入误差所致，但结果为式 (10) 中的透射条件提供了令人信服的数值验证。

5. CONCLUSION

本文提出了一种高效且稳定的方案，用于计算层状介质中时谐弹性波的并矢格林函数。利用 [30]，中提出的矩阵基，我们将 SH模态与耦合的 P–SV模态解耦，并将问题化为三个相互独立的类亥姆霍兹问题，共涉及五个未知函数。对于两个混合波数亥姆霍兹问题，我们基于层状介质的一般反射–透射理论提出了一种稳定的递归算法。该算法在整个复平面内均保持稳定，且计算规模随层数线性增长。随后，沿适当的索末菲积分路径进行汉克尔变换，即可计算物理域中的并矢格林函数。所得积分表示可直接用于构建层状介质中弹性波散射的边界积分公式快速多极子方法。

Appendix A. Proof of Theorem 1

首先，我们假设源点 $\mathbf{r}'$ 不位于界面 $z=d_\ell, \ell=0,1,\cdots,L-1$ 上。源点位于界面上的情形应视为源点趋近界面时的极限。根据界面条件（37）的矩阵形式和表达式（48），我们计算得

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_1\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'} &= \left[\mathbb{J}_1+(k^s)^{-2}\left(\mathbb{J}_5+\mathbb{J}_3\partial_z\right)\right]\hat{\mathbf{\Phi}}_{\ell\ell'}-(k^c)^{-2}\left(\mathbb{J}_5+\mathbb{J}_3\partial_z\right)\hat{\mathbf{\Psi}}_{\ell\ell'}\\
\mathbb{J}_2\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'} &= (k^s)^{-2}\left[\mathbb{J}_2k_\rho^2+\mathbb{J}_4\partial_z\right]\hat{\mathbf{\Phi}}_{\ell\ell'}-(k^c)^{-2}\left(\mathbb{J}_4\partial_z-\mathbb{J}_2(k_z^s)^2\right)\hat{\mathbf{\Psi}}_{\ell\ell'},\\
\mu\left(\mathbb{J}_1\partial_z+\mathbb{J}_3\right)\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'} &= \mu\left[\mathbb{J}_1\partial_z+\mathbb{J}_3+2(k^s)^{-2}\left(\mathbb{J}_5\partial_z-(k_z^s)^2\mathbb{J}_3\right)\right]\hat{\mathbf{\Phi}}_{\ell\ell'}\\
&\quad -2\mu(k^c)^{-2}\left[\mathbb{J}_5\partial_z-(k_z^c)^2\mathbb{J}_3\right]\hat{\mathbf{\Psi}}_{\ell\ell'}\\
\left(\gamma\mathbb{J}_2\partial_z+\lambda\mathbb{J}_4\right)\widehat{\mathbb{G}}_{\ell\ell'} &= \left[\gamma\mathbb{J}_2\partial_z+\lambda\mathbb{J}_4-(k^s)^{-2}(\gamma(k_z^s)^2+\lambda k_\rho^2)\left(\mathbb{J}_4+\mathbb{J}_2\partial_z\right)\right]\hat{\mathbf{\Phi}}_{\ell\ell'}\\
&\quad +(k^c)^{-2}(\gamma(k_z^c)^2+\lambda k_\rho^2)\left[\mathbb{J}_4+\mathbb{J}_2\partial_z\right]\hat{\mathbf{\Psi}}_{\ell\ell'}
\end{aligned}$$

将其代入表达式（22），并将所得结果代入界面条件（37），可得

$$\begin{aligned}
\left[\!\left[\left(\mathbb{J}_1+(k^s)^{-2}\left[\mathbb{J}_5+\mathbb{J}_3\partial_z\right]\right)\hat{\mathbf{\Phi}}-(k^c)^{-2}\left(\mathbb{J}_5+\mathbb{J}_3\partial_z\right)\hat{\mathbf{\Psi}}\right]\!\right] &= 0,\\
\left[\!\left[(k^s)^{-2}\left(\mathbb{J}_2k_\rho^2+\mathbb{J}_4\partial_z\right)\hat{\mathbf{\Phi}}-(k^c)^{-2}\left(\mathbb{J}_4\partial_z-\mathbb{J}_2(k_z^s)^2\right)\hat{\mathbf{\Psi}}\right]\!\right] &= 0,\\
\left[\!\left[\mu\left(\mathbb{J}_1\partial_z+\mathbb{J}_3+2(k^s)^{-2}\left[\mathbb{J}_5\partial_z-(k_z^s)^2\mathbb{J}_3\right]\right)\hat{\mathbf{\Phi}}-2\mu(k^c)^{-2}\left(\mathbb{J}_5\partial_z-(k_z^c)^2\mathbb{J}_3\right)\hat{\mathbf{\Psi}}\right]\!\right] &= 0,\\
\left[\!\left[\left(\gamma\mathbb{J}_2\partial_z+\lambda\mathbb{J}_4-\frac{\gamma(k_z^s)^2+\lambda k_\rho^2}{(k^s)^2}\left[\mathbb{J}_4+\mathbb{J}_2\partial_z\right]\right)\hat{\mathbf{\Phi}}+\frac{\gamma(k_z^c)^2+\lambda k_\rho^2}{(k^c)^2}\left(\mathbb{J}_4+\mathbb{J}_2\partial_z\right)\hat{\mathbf{\Psi}}\right]\!\right] &= 0,
\end{aligned}\tag{131}$$

在每个界面 $z=d_{\ell-1},\ \ell=1,\ \cdots,\ L$。这里，利用定义（24）和（25）对所得公式进行了重新排列。

记为

$$\hat{h}_\ell(k_\rho):=\hat{e}_\ell^{\uparrow}(d_{\ell-1})=\hat{e}_\ell^{\downarrow}(d_\ell)=e^{\mathrm{i}k_{\ell z}^s D_\ell},\quad \tilde{h}_\ell(k_\rho):=\tilde{e}_\ell^{\uparrow}(d_{\ell-1})=\tilde{e}_\ell^{\downarrow}(d_\ell)=e^{\mathrm{i}k_{\ell z}^c D_\ell}\tag{132}$$

则系统（131）可改写为如下矩阵形式

$$\mathbb{K}_{\ell-1}^{(a)}\mathbb{X}_{\ell-1,\ell'}-\mathbb{K}_\ell^{(b)}\mathbb{X}_{\ell\ell'}=\mathbb{B}_\ell,\quad \ell=1,\cdots,L,\tag{133}$$

其中，界面系数矩阵 $\mathbb{K}_\ell^{(a)}$ 、$\mathbb{K}_\ell^{(b)}$ 、未知系数矩阵 $\mathbb{X}_{\ell\ell'}$ 以及来自源层的自由空间贡献 $\mathbb{B}_\ell$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_\ell^{(a)} &:= \left[\widehat{\mathbb{K}}_\ell^{\uparrow}\quad \widetilde{\mathbb{K}}_\ell^{\uparrow}\quad \widehat{\mathbb{K}}_\ell^{\downarrow}\hat{h}_\ell\quad \widetilde{\mathbb{K}}_\ell^{\downarrow}\tilde{h}_\ell\right],\quad \mathbb{K}_\ell^{(b)}:=\left[\widehat{\mathbb{K}}_\ell^{\uparrow}\hat{h}_\ell\quad \widetilde{\mathbb{K}}_\ell^{\uparrow}\tilde{h}_\ell\quad \widehat{\mathbb{K}}_\ell^{\downarrow}\quad \widetilde{\mathbb{K}}_\ell^{\downarrow}\right],\\
\mathbb{X}_{\ell\ell'} &:= \left[\hat{\mathbf{\Phi}}_{\ell\ell'}^{\uparrow}\quad \hat{\mathbf{\Psi}}_{\ell\ell'}^{\uparrow}\quad \hat{\mathbf{\Phi}}_{\ell\ell'}^{\downarrow}\quad \hat{\mathbf{\Psi}}_{\ell\ell'}^{\downarrow}\right]^{\mathrm{T}},\quad \mathbb{B}_\ell=\delta_{\ell\ell'}\mathbb{B}_{\ell'}^{\downarrow}-\delta_{\ell-1,\ell'}\mathbb{B}_{\ell'}^{\uparrow},
\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$其中四个矩阵 $\mathbb{K}_\ell^*$、$\mathbb{K}_\ell^*$、$*=\uparrow$、$\downarrow$具体表示为:

$$\widehat{\mathbb{K}}_\ell^{\uparrow}:=\begin{bmatrix}\mathrm{i}\gamma_\ell k_{\ell z}^s\mathbb{J}_2+\lambda_\ell\mathbb{J}_4-\dfrac{\gamma_\ell(k_{\ell z}^s)^2+\lambda_\ell k_\rho^2}{(k_\ell^s)^2}\left(\mathbb{J}_4+\mathrm{i}k_{\ell z}^s\mathbb{J}_2\right)\\(k_\ell^s)^{-2}(\mathbb{J}_2k_\rho^2+\mathrm{i}k_{\ell z}^s\mathbb{J}_4)\\\mu_\ell\left(\mathrm{i}k_{\ell z}^s\mathbb{J}_1+\mathbb{J}_3+2(k_\ell^s)^{-2}k_{\ell z}^s\left[\mathrm{i}\mathbb{J}_5-k_{\ell z}^s\mathbb{J}_3\right]\right)\\\mathbb{J}_1+(k_\ell^s)^{-2}\left(\mathbb{J}_5+\mathrm{i}k_{\ell z}^s\mathbb{J}_3\right)\end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbb{K}}_\ell^{\downarrow}:=\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\gamma_\ell k_{\ell z}^s\mathbb{J}_2+\lambda_\ell\mathbb{J}_4-\dfrac{\gamma_\ell(k_{\ell z}^s)^2+\lambda_\ell k_\rho^2}{(k_\ell^s)^2}\left(\mathbb{J}_4-\mathrm{i}k_{\ell z}^s\mathbb{J}_2\right)\\(k_\ell^s)^{-2}(\mathbb{J}_2k_\rho^2-\mathrm{i}k_{\ell z}^s\mathbb{J}_4)\\\mu_\ell\left(-\mathrm{i}k_{\ell z}^s\mathbb{J}_1+\mathbb{J}_3-2(k_\ell^s)^{-2}k_{\ell z}^s\left[\mathrm{i}\mathbb{J}_5+k_{\ell z}^s\mathbb{J}_3\right]\right)\\\mathbb{J}_1+(k_\ell^s)^{-2}\left(\mathbb{J}_5-\mathrm{i}k_{\ell z}^s\mathbb{J}_3\right)\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbb{K}}_\ell^{\uparrow}:=\begin{bmatrix}\dfrac{\gamma_\ell(k_{\ell z}^c)^2+\lambda_\ell k_\rho^2}{(k_\ell^c)^2}(\mathbb{J}_4+\mathrm{i}k_{\ell z}^c\mathbb{J}_2)\\-(k_\ell^c)^{-2}k_{\ell z}^c\left(\mathrm{i}\mathbb{J}_4-k_{\ell z}^c\mathbb{J}_2\right)\\-2\mu_\ell(k_\ell^c)^{-2}k_{\ell z}^c(\mathrm{i}\mathbb{J}_5-k_{\ell z}^c\mathbb{J}_3)\\-(k_\ell^c)^{-2}\left(\mathbb{J}_5+\mathrm{i}k_{\ell z}^c\mathbb{J}_3\right)\end{bmatrix},\quad \widetilde{\mathbb{K}}_\ell^{\downarrow}:=\begin{bmatrix}\dfrac{\gamma_\ell(k_{\ell z}^c)^2+\lambda_\ell k_\rho^2}{(k_\ell^c)^2}(\mathbb{J}_4-\mathrm{i}k_{\ell z}^c\mathbb{J}_2)\\(k_\ell^c)^{-2}k_{\ell z}^c\left(\mathrm{i}\mathbb{J}_4+k_{\ell z}^c\mathbb{J}_2\right)\\2\mu_\ell(k_\ell^c)^{-2}k_{\ell z}^c(\mathrm{i}\mathbb{J}_5+k_{\ell z}^c\mathbb{J}_3)\\-(k_\ell^c)^{-2}\left(\mathbb{J}_5-\mathrm{i}k_{\ell z}^c\mathbb{J}_3\right)\end{bmatrix},$$

以及源矩阵 $\mathbb{B}_{\ell'}^*$, $*=\uparrow$, $\downarrow$由下式明确给出

$$\mathbb{B}_{\ell'}^{\uparrow}:=\frac{1}{\mu_{\ell'}}\widehat{G}_{k_{\ell'}^s}^f(k_\rho,d_{\ell'-1},z')\widehat{\mathbb{K}}_{\ell'}^{\uparrow}+\frac{1}{\gamma_{\ell'}}\widehat{G}_{k_{\ell'}^c}^f(k_\rho,d_{\ell'-1},z')\widetilde{\mathbb{K}}_{\ell'}^{\uparrow},$$

$$\mathbb{B}_{\ell'}^{\downarrow}:=\frac{1}{\mu_{\ell'}}\widehat{G}_{k_{\ell'}^s}^f(k_\rho,d_{\ell'},z')\widehat{\mathbb{K}}_{\ell'}^{\downarrow}+\frac{1}{\gamma_{\ell'}}\widehat{G}_{k_{\ell'}^c}^f(k_\rho,d_{\ell'},z')\widetilde{\mathbb{K}}_{\ell'}^{\downarrow}.$$

为了求解 (133), 我们将使用 [30] 中引入的矩阵基。除 (35) 中给出的 5 个基矩阵外, 另外 4 个基矩阵如下

$$\mathbb{J}_6=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\mathrm{i}k_y&\mathrm{i}k_x&0\end{bmatrix},\quad \mathbb{J}_7=\begin{bmatrix}0&0&\mathrm{i}k_y\\0&0&-\mathrm{i}k_x\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbb{J}_8=\begin{bmatrix}k_xk_y&k_y^2&0\\-k_x^2&-k_xk_y&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbb{J}_9=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

由于矩阵基的完备性, 解 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\ell\ell'}^*$, $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\ell\ell'}^*$, $*=\uparrow$, $\downarrow$可以用矩阵基 $\mathbb{J}_1$, $\mathbb{J}_2$, $\cdots$, $\mathbb{J}_9$表示, 即

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\ell\ell'}^*=\sum_{j=1}^9\alpha_{\ell\ell',j}^*(k_x,k_y,z')\mathbb{J}_j,\quad \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\ell\ell'}^*=\sum_{j=1}^9\beta_{\ell\ell',j}^*(k_x,k_y,z')\mathbb{J}_j,\tag{134}$$

其中, $\{\alpha_{\ell\ell',j}^*(k_x,\ k_y,\ z')\beta_{\ell\ell',\ j}^*(k_x,\ k_y,\ z')\}_{j=1}^9$为未知系数。将 (134) 代入 (133) 得

$$\sum_{i=1}^9\left[\mathbb{K}_{\ell-1}^{(a)}\mathbb{X}_{\ell-1,\ell',i}-\mathbb{K}_\ell^{(b)}\mathbb{X}_{\ell\ell',i}\right]\mathbb{J}_i=\mathbb{B}_\ell,\quad \ell=1,\cdots,L,\tag{135}$$

其中, 未知展开系数矩阵$\mathbb{X}_{\ell\ell',\ i}$ 定义为

$$\mathbb{X}_{\ell\ell',i}:=\left[\alpha_{\ell\ell',i}^{\uparrow}\mathbb{I}\quad\beta_{\ell\ell',i}^{\uparrow}\mathbb{I}\quad\alpha_{\ell\ell',i}^{\downarrow}\mathbb{I}\quad\beta_{\ell\ell',i}^{\downarrow}\mathbb{I}\right]^{\mathrm{T}}.$$

令 $\mathbb{F}$ 为由所有 k_x 和 k_y 的函数构成的域。矩阵函数空间 $\mathcal{L}(\mathbb{F})$: = 张成 $_{\mathbb{F}}\{\mathbb{J}_1,\mathbb{J}_2,\cdots,\mathbb{J}_9\}$ 具有正交分解 $\mathcal{L}=\mathcal{R}\oplus\mathcal{J}$, 其中

$$\mathcal{R}(\mathbb{F}):=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\left\{\mathbb{J}_1,\mathbb{J}_2,\mathbb{J}_3,\mathbb{J}_4,\mathbb{J}_5\right\},\quad \mathcal{J}(\mathbb{F}):=\mathrm{span}_{\mathbb{F}}\left\{\mathbb{J}_6,\mathbb{J}_7,\mathbb{J}_8,\mathbb{J}_9\right\}.\tag{136}$$

我们定义矩阵函数空间 $[\mathcal{S}(\mathbb{F})]^4$、$\mathcal{S}=\mathcal{L}$、$\mathcal{R}$、$\mathcal{J}$，其元素是满足四个 3×3 方形块属于 $\mathcal{S}(\mathbb{F})$ 的 12×3 矩阵函数。显然，我们有

$$[\mathcal{L}(\mathbb{F})]^4=[\mathcal{R}(\mathbb{F})]^4\oplus[\mathcal{J}(\mathbb{F})]^4. \tag{137}$$

注意，$\mathbb{B}^{\uparrow}_{\ell'},\mathbb{B}^{\downarrow}_{\ell'}\in[\mathcal{R}(\mathbb{F})]^4$, $\widehat{\mathbb{K}}^{\uparrow}_{\ell},\widetilde{\mathbb{K}}^{\uparrow}_{\ell},\widehat{\mathbb{K}}^{\downarrow}_{\ell},\widetilde{\mathbb{K}}^{\downarrow}_{\ell}\in[\mathcal{R}(\mathbb{F})]^4$。我们可以将（135）左侧的求和拆分为两部分：从 $i=1$ 到 5 的求和，以及从 6 到 9 的求和。根据乘积表（参见 [30]）

$\times$	$\mathbb{J}_1$	$\mathbb{J}_2$	$\mathbb{J}_3$	$\mathbb{J}_4$	$\mathbb{J}_5$	$\mathbb{J}_6$	$\mathbb{J}_7$	$\mathbb{J}_8$	$\mathbb{J}_9$
$\mathbb{J}_1$	$\mathbb{J}_1$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_5$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_7$	$\mathbb{J}_8$	$\mathbb{J}_9$
$\mathbb{J}_2$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_2$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_4$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_6$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbb{J}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_5$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_8-k_\rho^2\mathbb{J}_9$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbb{J}_4$	$\mathbb{J}_4$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_2$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_4$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_6$
$\mathbb{J}_5$	$\mathbb{J}_5$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_3$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_5$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_8-k_\rho^2\mathbb{J}_9$
$\mathbb{J}_6$	$\mathbb{J}_6$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$k_\rho^2\mathbb{J}_2$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_4$	$-\mathbb{J}_4$
$\mathbb{J}_7$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_7$	$\mathbf{0}$	$-\mathbb{J}_8$	$\mathbf{0}$	$k_\rho^2\mathbb{J}_1+\mathbb{J}_5$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbb{J}_8$	$\mathbb{J}_8$	$\mathbf{0}$	$k_\rho^2\mathbb{J}_7$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_8$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$-k_\rho^2\mathbb{J}_1-\mathbb{J}_5$
$\mathbb{J}_9$	$\mathbb{J}_9$	$\mathbf{0}$	$\mathbb{J}_7$	$\mathbf{0}$	$-\mathbb{J}_8$	$\mathbf{0}$	$-\mathbb{J}_3$	$\mathbb{J}_5$	$-\mathbb{J}_1$

(138)

我们可以验证

$$\sum_{i=1}^{5}\mathbb{K}_\ell^{(f)}\mathbb{X}_{\ell\ell',i}\in[\mathcal{R}(\mathbb{F})]^4,\quad \sum_{i=6}^{9}\mathbb{K}_{\ell\ell'}^{(f)}\mathbb{X}_{\ell\ell',i}\in[\mathcal{J}(\mathbb{F})]^4,\quad f=a,b. \tag{139}$$

结合分解式（137），（135）可以解耦为以下两个独立系统:

$$\sum_{i=1}^{5}\left[\mathbb{K}_{\ell-1}^{(a)}\mathbb{X}_{\ell-1,\ell',i}-\mathbb{K}_\ell^{(b)}\mathbb{X}_{\ell\ell',i}\right]\mathbb{J}_i=\mathbb{B}_\ell,\quad \sum_{i=6}^{9}\left[\mathbb{K}_{\ell-1}^{(a)}\mathbb{X}_{\ell-1,\ell',i}-\mathbb{K}_\ell^{(b)}\mathbb{X}_{\ell\ell',i}\right]\mathbb{J}_i=\mathbf{0}. \tag{140}$$

对于 $\ell=1,\cdots,L$。假设我们已经得到一个满足形式（134）的系统（135）的解。令 $\alpha^*_{\ell\ell',}$ $_i=\beta^*_{\ell\ell',i}=0, i=6,7,8,9,*=\uparrow,\downarrow,\ell=0,1,\cdots,L$ 在（134）中，这显然满足方程组（140），也就是说，它仍然是方程组（135）的解。因此，反应场展开式（32）中的未知系数矩阵 $\hat{\mathbf{\Phi}}^*_{\ell\ell'},\hat{\mathbf{\Psi}}^*_{\ell\ell'},*=\uparrow,\downarrow$ 可以用矩阵基（35）表示，从而完成了定理1的证明。

References

[1] J. D. Achenbach。《弹性固体中的波传播》。North-Holland，1973。[2] Keiiti Aki 和 Paul Richards。《定量地震学》。MIT出版社，2002。[3] Michel Bouchon。三维空间中弹性波场的离散波数表示。《地球物理研究杂志：固体地球》，84(B7):3609–3614，1979。[4] Michel Bouchon。分层介质中爆炸源完整地震图的计算。《地球物理学》，45(2):197–203，1980。[5] Michel Bouchon。计算弹性层状介质格林函数的一种简单方法。《美国地震学会会报》，71(4):959–971，1981。

[6] Michel Paul Bouchon。地震波场的离散波数表示及其在各种散射问题中的应用。1976。[7] Weng Chew、Mei-Song Tong 等。电磁波与弹性波的积分方程方法。施普林格自然，2022。[8] Weng Cho Chew。非均匀介质中的波与场。John Wiley & Sons，1999。[9] Thomas F Eibert。用于平面多层介质上方辐射积分计算的多层混合非均匀/传播平面波算法。IEEE天线与传播汇刊，2026。[10] K Fuchs 和 Gerhard M¨uller。采用反射率法计算合成地震图并与观测结果进行比较。《国际地球物理学杂志》，23(4):417–433，1971。[11] IR Gonsalves、DJ Shippy 和 FJ Rizzo。三维半空间弹性动力学的直接边界积分方程。《计算力学》，6(4):279–292，1990。[12] Danny J Harvey。利用正规模态叠加进行地震图合成：锁定模态近似。《国际地球物理学杂志》，66(1):37–69，1981。[13] Norman A Haskell。平面SH波的地壳反射。《地球物理研究杂志》，65(12):4147–4150，1960。[14]Norman A Haskell。平面P波和SV波的地壳反射。《地球物理研究杂志》，67(12):4751–4768，1962。[15] Norman A Haskell。多层介质中表面波的频散。《真理必胜：诺曼·亚伯拉罕·哈斯克尔的生平与工作》，30:86–103，1990。[16] Brian Kennett。分层介质中的地震波传播。澳大利亚国立大学出版社，2009。[17] L Knopoff。弹性波问题的矩阵方法。《美国地震学会会报》，54(1):431–438，1964。[18] Viktor D Kupradze、TG Gelelia、Mo Oo Basheleishvili 和 To V Burchuladze。弹性力学与热弹性的数学理论中的三维问题：经典理论与微极理论。静力学、谐振动、动力学。基础与求解方法//（俄文书籍）。莫斯科，Izdatel’stvo Nauka，1976。664，1976。[19] Kenneth L Larner。具有不规则界面的层状地壳—地幔模型中远震体波的近接收点散射。博士论文，麻省理工学院，1970。[20] Krzysztof A. Michalski。索末菲积分尾项的外推方法。IEEE天线与传播汇刊，46(10):1405–1418，1998。[21] Krzysztof A. Michalski 和 Juan R. Mosig。索末菲积分尾项的高效计算：方法与算法。《电磁波与应用杂志》，30(3):281–317，2016。[22] G M¨uller。精确射线理论及其在弹性波从垂直非均匀介质反射问题中的应用。《国际地球物理学杂志》，21(3):261–283，1970。[23] GG Stockes 等。论衍射动力学理论。1849。[24] William T Thomson。弹性波在分层固体介质中的传播。《应用物理学杂志》，21(2):89–93，1950。[25] Olga Umnova。多孔介质中的声传播：吸声材料建模，jf allard、n. atalla、John Wiley & Sons, ltd.（2009），ISBN：978-0-470-74661-5，2010。[26] Peijun Wei、D. Chen、B. Zhang、W. Zhang、M. H. Cho 和 W. Cai。用于分层介质中三维亥姆霍兹方程的基于泰勒展开的快速多极子法。《计算物理学杂志》，401:109008，2020。[27] Peijun Wei。弹性波理论。施普林格，2022。[28] Heng Yuan、Bo Wang、Wenzhong Zhang 和 Wei Cai。分层介质中麦克斯韦方程的快速多极子法。《SIAM科学计算杂志》，48(5):A2439–A2464，2026。[29] Heng Yuan、Wenzhong Zhang 和 Bo Wang。分层介质中麦克斯韦方程并矢格林函数的计算。arXiv预印本 arXiv:2601.00709，2026。[30] W. Zhang、B. Wang 和 W. Cai。分层介质中麦克斯韦方程并矢格林函数的矩阵基底表述。《SIAM应用数学杂志》，82(5):1710–1732，2022。