MOD模 Schur 函数与 Macdonald 特征 S

NAIHUAN JING 和 NING LIU

Abstract. 模 Schur 函数源于这样一个问题：确定正特征下一般线性群的简单多项式表示的特征。我们证明了关于这些函数的三个结果。(i) 对于有限个变量，我们为每个变量次数有界的对称多项式空间构造了两组基，一组由模 Schur 多项式组成，另一组由截断完全对称多项式的乘积组成。(ii) 我们确定了模舒尔函数的非零 Schur 系数的符号，证明其绝对值不超过块权的阶乘，并刻画了取等情形。(iii) 在素特征的无限域上，当变量个数至少等于次数时，模 Schur 多项式是简单多项式特征，当且仅当其指标分拆满足 Carter 条件。因此，我们证明了 Walker 于 1994年提出的三个猜想。我们还利用计算 Schur 系数时用到的海森堡算子，证明了 Macdonald 特征的正性。将 Macdonald 参数平移至 1，并将辅助变量取反后，Macdonald 创建算子的归一化幂和矩阵元具有非负整数系数，由此可得归一化 Macdonald 特征具有非负有理数系数。关于创建算子的结果证实了 Ben Dali 和 D'Adderio 于 2024年提出的一个猜想。

arXiv:2611.31879v1 [math.CO] 24 Nov 2026

Contents

1. 引言 2
2. 预备知识 6
3. 有限多个变量中的基 9
4. 海森堡算子与核–商坐标 15
5. Schur 正核与模 Schur 系数 25
6. 简单模 Schur 特征 32
7. 霍尔–李特尔伍德模与正规序系数 48
8. 麦克唐纳创建算子与特征正性 57
附录 A. 引言背景及引理 3.3 的证明 64
致谢 70
参考文献 70

2020 数学主题分类。主要分类 05E05；次要分类 20C30、20G05、33D52。关键词和短语。模形式 Schur 函数；麦克唐纳特征；截断完全对称函数；Schur 系数；Carter 条件；海森堡算子；顶点算子。

1. Introduction

1.1. **背景与动机**。 模 Schur 函数源自正特征下的截断对称幂 [DW92,Wal94]。为观察单项式上的截断，固定一个整数 $r \geq 2$。在 $\mathbb{Z}$上的对称函数环中，令 h_m 为次数 $m \geq 0$的完全对称函数。只保留每个变量的指数都小于 r 的单项式，得到截断完全函数 $\mathfrak{h}_m$，其中 $\mathfrak{h}_0 = h_0 = 1$。由于h_1， h_2，.....自由生成该环， $h_m \mapsto \mathfrak{h}_m$定义了一个自同态 Θ_r。对于一个分拆λ，普通 Schur 函数 s_λ 的像就是模 Schur 函数 $\mathfrak{s}_\lambda = \Theta_r(s_\lambda$。我们研究这类函数的三个问题。描述其 Schur 系数的算子还导出了关于 Macdonald 特征的一个正性结果。

第一个问题涉及 $n \geq 1$ 个变量中的基。在特征为素数 r 的代数闭域上，某些单 GL_n-模嵌入了截断对称幂 [的张量积中（DW96，第 1] 节）。Doty 猜想，对于一个 n 行、 n 列的矩形（$r-1$）中的分拆，其合成重数矩阵是非奇异的。Doty 和 Walker 证明，这等价于截断完全对称多项式乘积的线性无关性 [（DW92，猜想 2.6 和命题 3.1]）。Walker 对每个整数 $r \geq 2$ 都提出了线性无关性猜想，并给出了其关于模 Schur 多项式的等价表述 [（Wal94，猜想1.4和命题1.5(i)]）。Walker 将二变量情形归功于 Doty 和 Walker，并证明了三变量情形 [（Wal94，第 576 页和命题 2.17]）。对于素数 r，Donkin 和 Geranios 证明，重数矩阵的每一列都非零 [（DG15，推论 6.8，第 432] 页）。若其各列线性无关，便可从张量积特征中恢复矩形内的简单特征。

第二个问题询问 $\mathfrak{s}_\lambda$的 Schur 系数的符号和大小。对于单行（m）， $\mathfrak{s}_{(m)} = \mathfrak{h}_m$，其 Schur 系数属于 $\{0, 1, -1\}$ [FM22，Gri22]。Cheng、Chou、Eu、Fu 和 Yao 为过渡矩阵的这一行给出了带状解释，并提出了为其他行寻找组合展开的问题 [CCEFY23，定理 1.3 和第 4]节。我们通过将矩阵的每个元素表示为带状图表对上的带符号和，回答了这个问题 [JL26，定理 8。8]。对于一般的 λ，Walker 猜想系数满足一条符号规则和一个阶乘界 [Wal94，推论 2.10 之后未编号的猜想，第 586]页。

第三个问题询问：对于 $r = p$ 素数，模舒尔函数何时是特征 p下的单特征。Carter 条件要求每一列中钩长的 p-进赋值保持恒定。对于 p-正则分拆（即没有正部重复出现 p 次或更多次的分拆），该条件刻画了 Specht模 [的不可约性 Jam78a, JM79]。Walker 证明了 Carter 条件足以保证单纯性；对于 p-正则分拆，在秩充分大时该条件也是必要的。他猜想该条件对所有分拆都是必要的，并指出，当 λ 的共轭分拆是 p-正则时，单纯性会推出 $\mathfrak{s}_\lambda = s_\lambda$ [Wal94，定理 4.4 及猜想 4.6–4.7] 的讨论。对于奇数 p，我们证明了这一等式会迫使 λ 成为 p-核 [JL26，定理 8.11]。 p-核的所有钩长的 p-进赋值均为零，因此在奇特征下，反例只有可能出现在 λ 及其共轭分拆都不是 p-正则的情形。

我们的第四个问题涉及麦克唐纳特征。在单参数情形下，Ben Dali 和 Dołęga 在 Stanley 多矩形坐标中证明了 Jack 特征的 Lassalle 正性猜想 [Las08, BD23]。Ben Dali 和 D'Adderio 将麦克唐纳特征引入为一种双参数推广。他们用产生算子的乘积来表示这些特征，并证明特征正性可由其关于单个产生算子的猜想推出。对于麦克唐纳参数 q, t 以及辅助变量v，该猜想断言，其在幂和基下的归一化矩阵元是关于 $q-1$, $t-1$ 和 $-v$ 的多项式，且系数为非负整数 [BD26，定义 1.4、猜想 1 和命题 4。7]。

我们的目标是在对称函数环及其有限变量特化中回答这四个问题。我们利用截断完全函数构造有限变量下的基。海森堡算子给出了模舒尔函数的 Schur 系数公式，我们利用这些系数确定哪些模舒尔函数是简单特征。相同的海森堡算子也出现在第一作者的 Hall–Littlewood 顶点算子 [金91], 中，我们利用其模态证明麦克唐纳创建算子的正性猜想。

1.2. 主要结果。现在我们精确陈述四个主要结果。

首先介绍两个基，它们属于每个变量都有次数界的对称多项式空间。对于一个分拆 λ，记其大小为 $|\lambda|$，长度为 $\ell(\lambda)$，并记 $\mathfrak{h}_\lambda$ 为 $\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}\mathfrak{h}_{\lambda_i}$，其中空积为 1。在 n 个变量中，至多由 n 个截断完全函数构成的乘积，在每个变量中的次数至多为 $n(r-1)$。令 $V_{n,n(r-1)}$ 为满足此界的 $\mathbb{Q}$ 上对称多项式空间，并令

$$\mathcal{R}_{n,r}=\{\lambda:\ell(\lambda)\le n,\ \lambda_1\le n(r-1)\},$$

空分拆的首项为零。

定理 A (定理3.4)。对于 $n\ge 1$ 和 $r\ge 2$，以下两个族各自

$$\{\mathfrak{h}_\lambda(x_1,\dots,x_n):\lambda\in\mathcal{R}_{n,r}\},\qquad\{\mathfrak{s}_\lambda(x_1,\dots,x_n):\lambda\in\mathcal{R}_{n,r}\}$$

是 $\mathbb{Q}$ 上的一个基$V_{n,\ n(r-1)}$。

这就证明了 Walker 猜想 1.4。对于 $n\ge 2$，定理 A 的证明首先将截断的完全对称多项式表示为对非平凡 r次单位根求积所得的系数。这些系数之间的关系将线性无关性问题归结为射影空间上截面的乘法映射是否可逆。引理 3.3表明该映射是一个同构。

我们的第二个结果给出了模 Schur 函数在 Schur 基下系数的符号规则和精确上界。回顾一下，r-带状分拆是一个边连通的斜图，含有 r 个方格，且不含 2×2 正方形。依次移除这类带状分拆后，λ会留下其 r-核。移除的数量即其权 w，而其 r-符号 $\varepsilon_r(\lambda)$ 是移除过程中各个 $(-1)^h$ 的乘积，其中 h 是一个带状分拆的行数减一。由齐次性和命题4.2可知，只有大小相同且 r-核相同的分拆，才能产生非零的 Schur 系数。对于固定的核，r-商对权为w 的分拆进行索引，其对应于 r-多重分拆，即总大小为 w的有序 r元分拆元组。我们采用

第4.1 小节中的轨道顺序，并对每个商分量取共轭。若 λ，μ 具有相同的核和权，且 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是所得的元组，则其归一化 Schur 系数为

$$\kappa_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}^{(r,w)} = (-1)^w \varepsilon_r(\lambda)\varepsilon_r(\mu)\ \langle \mathfrak{s}_\lambda, s_\mu \rangle\,. \tag{1.1}$$

这里 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示 Hall 内积，在该内积下 Schur 函数构成标准正交系数。该系数仅取决于商 [Wal94，推论 2。10]。对于一个 r-元组 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(0)}, \ldots\ldots, \alpha^{(r-1)})$ 且总大小为 w的对象，定义

$$d_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{w!}{\prod_i |\alpha^{(i)}|!} \prod_i f^{\alpha^{(i)}},$$

其中 f^ρ统计形状为 ρ且 $f^\varnothing = 1$的标准杨氏表。

定理 B （定理 5。5 + （5.17） + 定理 5.6）。 对于 $r \geq 2$， $w \geq 0$、以及任意两个r-多重分拆 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 其大小为 w，系数 $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}^{(r,w)}$ 是整数，并且

$$0 \leq \kappa_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}^{(r,w)} \leq \min\{d_{\boldsymbol{\alpha}}, d_{\boldsymbol{\beta}}\} \leq w!.$$

等式 $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}^{(r,w)} = w!$ 成立当且仅当每个分量为 $\varnothing$ 或 （1），并且两组非空分量互不相交。

为证明定理B，我们转到商坐标。命题 5.2随后将（1.1）中的系数识别为一组对偶柯西核乘积的 Schur 系数。Littlewood–Richardson 规则给出非负性。与对称群的正则表示进行比较可得上界，而核的展开则确定等式成立的条件。这证明并加强了 Walker 系数猜想。

第三个结果确定了模舒尔函数何时是简单多项式表示的特征。取 $r = p$ 素数，令 $\mathbb{K}$ 为特征为 p 的无限域，并令 λ 为 d 的一个分拆。我们取 n 为正整数。

定理 C (推论 6.18)。 对于每个 $n \geq d$，将 $\mathfrak{s}_\lambda$ 特化为 n 个变量后，当且仅当 d 次 $GL_n(\mathbb{K})$-模满足 λ *Carter* 条件时，它是一个简单多项式表示的特征。

这证明了 Walker猜想4.6。为证明定理 C，我们证明单纯性必然要求满足 Carter 条件，因为 Walker 已证明其逆命题。对于奇数 p，命题 6.8排除了相应 Specht模可约时的单纯性，并在其不可约时给出了简单特征的唯一候选。我们将剩余情形归结为 Rouquier 块；在这些块中，利用命题 5.4 计算出的 Schur系数可以区分模舒尔函数与该候选。当 $p = 2$时，截断将 s_λ 映到以共轭分拆为指标的 Schur 函数，因此必要性直接由 Weyl模的单纯性判据（命题 6.14）得出。

最后，我们转向 Macdonald 创建算子，并证明其在幂和基中的归一化系数具有正性。在 $\mathbb{Q}(q,t)$ 上工作，其中 q,t 代数独立，并令 $J_\lambda(X;q,t)$ 表示字母表 $X = (x_1, x_2, \ldots)$ [Mac95，第 VI 章，(8.3)]中的 Macdonald 对称函数的整形式。对于 $m \geq 1$，记 $p_m(X) = \sum_i x_i^m$。在

plethystic 记号 $\mathcal{P}_A$ 表示乘以 $\mathrm{Exp}[AX] = \exp(\sum_{m\geq 1} p_m[A]p_m(X)/m$，其中 $p_m[A]$ 是字母表 A的第 m 次幂和。对于形式参数 c, u, v，定义

$$\mathbf{\Delta}_c J_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda} (1 - cq^{j-1}t^{-(i-1)})J_\lambda, \qquad \mathbf{\Gamma}(u,v) = \mathbf{\Delta}_{1/v}\mathcal{P}_{uv(1-t)/(1-q)}\mathbf{\Delta}_{1/v}^{-1}.$$

乘积遍历 λ 中方格的行指标和列指标，并且 $p_m[uv(1-t)/(1-q)] = (uv)^m(1-t^m)/(1-q^m)$。用 Coef_b 表示提取单项式或基元素 b的系数。定义代数自同构 R 以及算子 $G_n(v)$ 为

$$Rp_m = \frac{1-t^m}{1-q^m}p_m \quad (m \geq 1), \qquad G_n(v) = (-1)^n \operatorname{Coef}_{u^n}\left[R^{-1}\mathbf{\Gamma}(u,v)R\right] \quad (n \geq 0).$$

对于一个分拆 ν，其中有 $m_j(\nu)$ 个部件等于 j，令 $p_\nu = \prod_j p_j^{m_j(\nu)}$ 以及 $z_\nu = \prod_j j^{m_j(\nu)} m_j(\nu)!$。

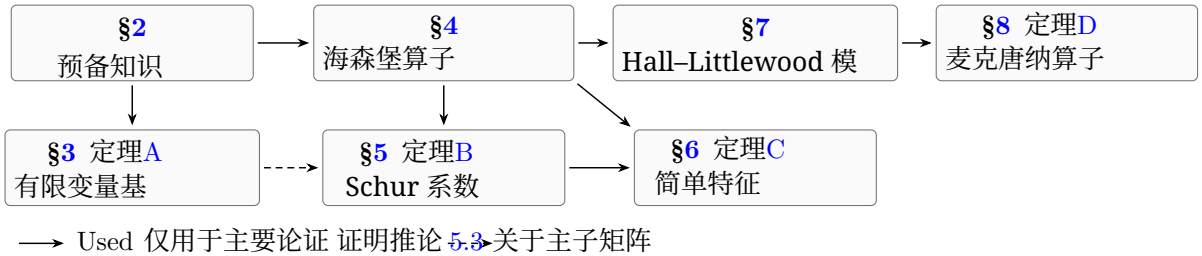
定理 D (定理 8.2)。对于每个 $n \geq 0$ 以及所有分拆 μ，ν 满足 $|\nu| = |\mu| + n$，

$$t^{|\mu|} z_\nu \operatorname{Coef}_{p_\nu}\left[G_n(v)p_\mu\right] \in \mathbb{N}[q-1, t-1, -v].$$

由（8.5），这证明了 [BD26]的猜想 1。我们对定理 D的证明使用海森堡算子的交换关系，以获得归一化重复霍尔–李特尔伍德模的非负系数。这些系数出现在麦克唐纳创建算子的展开式中，并导出非负性。它们在 Schur 基中的整性使得 $t^{|\mu|}G_n(v)p_\mu$ 与 p_ν 的普通 Hall 配对为整性的。将该结果应用于产生算子的乘积，便得到推论 8.3中的特征正性。

1.3. 组织结构。第 2 节回顾截断和有限变量特化。第 3 节运用附录 A 中证明的引理 3.3，证明两族 $\{\mathfrak{h}_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{R}_n,\ r}$ 和 $\{\mathfrak{s}_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{R}_n,\ r}$ 各自构成 $V_{n,\ n(r-1)}$ 的一组基，从而证明定理 A。第4节描述核–商坐标中的海森堡作用。第 5 节利用所得的核，证明定理 B 中关于模 Schur 系数的符号规则和精确界。第 6 节确定哪些模 Schur 函数是单特征，从而证明定理 C。第 7 节为霍尔–李特尔伍德模的正规序系数建立正性和整性。第8节证明定理 D，解决 Ben Dali 和 D'Adderio 关于产生算子的猜想 1，并由此得到 Macdonald 特征的正性。

下方箭头从各节指向使用其结果的章节。



2. Preliminaries

我们固定一个整数 $r \geq 2$，并汇总有关分拆和对称函数的记号与约定。我们还记录有限变量特化以及定理A中使用的空间。

2.1. **分拆与对称函数**。在本小节中，我们始终采用麦克唐纳的著作 [Mac95第一章]中的对称函数约定。分拆是一个弱递减序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots)$，其中各项为非负整数，且只有有限多项非零。其大小和长度分别为

$$|\lambda| = \sum_i \lambda_i, \qquad \ell(\lambda) = \#\{i : \lambda_i > 0\}.$$

当 $|\lambda| = d$ 时，我们记作 $\lambda \vdash d$，并将空分拆记为 $\varnothing$。令 $\mathscr{P}$ 为所有分拆的集合，并且对于 $d \geq 0$，定义

$$\mathscr{P}_d = \{\lambda \in \mathscr{P} : |\lambda| = d\}.$$

对于大小相同的分拆，$\mu <_{\text{lex}} \lambda$ 表示在它们的部件首次出现差异的索引处，μ 的部件较小。我们用 $\alpha + \beta$ 表示逐分量加法，并在必要时补添零部件。我们采用英式表示法绘制分拆，因此 λ 的图在从上往下数的第 a 行有 λ_a 个方格。共轭分拆 λ' 通过转置该图得到；特别地，$\lambda'_b = \#\{a : \lambda_a \geq b\}$。当 μ 的图包含于 λ 的图中时，我们记作 $\mu \subseteq \lambda$。对于 $\mu \subseteq \lambda$，斜杨图 λ/μ 由λ 中不属于 μ的方格组成。如果一个斜杨图通过公共边相连且不包含由 2×2 个方格组成的正方形，则称其为带状分拆。其长度等于方格数，高度等于其所占行数减一。因此，λ 的可移除 r-带状分拆是一个长度为 r 的带状分拆 λ/μ，其中某个分拆为 $\mu \subseteq \lambda$。

设 $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ 为一个字母表，Λ 为定义在 $\mathbb{Z}$上的对称函数分次环。记作 $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$。对于 $d \geq 0$，分别用 Λ^d 和 $\Lambda^d_{\mathbb{Q}}$ 表示这两个环中次数为 d 的齐次分量。对于 $m \geq 1$，完全对称函数和幂和对称函数为

$$h_m(X) = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}, \qquad p_m(X) = \sum_{j \geq 1} x_j^m,$$

其中 $h_0 = 1$ 和 $h_m = 0$ 对应于 $m < 0$。它们的普通生成级数为

$$H(X;t) := \sum_{m \geq 0} h_m(X) t^m = \prod_{j \geq 1} \frac{1}{1 - x_j t} = \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{p_m(X) t^m}{m} \right). \tag{2.1}$$

对于分拆 $\eta = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots)$，其中 m_j是部件 j的重数，令

$$p_\eta = \prod_{j \geq 1} p_j^{m_j}, \qquad z_\eta = \prod_{j \geq 1} j^{m_j} m_j!.$$

空积的值为 1。单项式对称函数 m_λ 是所有不同单项式之和，这些单项式的正指数重新按降序排列后构成 λ。

对于 $\mu \subseteq \lambda$，斜 Jacobi–Trudi 恒等式给出

$$s_{\lambda/\mu} = \det\bigl(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\bigr)_{1\le i,j\le \ell} \qquad (\ell \ge \ell(\lambda)), \tag{2.2}$$

必要时在 μ 后补上零部件。我们令 $s_{\lambda/\mu} = 0$，若 $\mu \not\subseteq \lambda$。普通 Schur 函数为 $s_\lambda = s_{\lambda/\varnothing}$。我们在 Λ 上赋予 Hall 内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，其定义为

$$\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

Λ 上的对合 ω 由下式确定

$$\omega(p_m) = (-1)^{m-1}p_m; \qquad \omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}. \tag{2.3}$$

对于 $f \in \Lambda_{\mathbb{Q}}$，算子 $f^\perp$ 由 $\langle fg,\ h\rangle = \langle g,\ f^\perp h\rangle$ 确定；特别地，$p_m^\perp = m\,\partial/\partial p_m$。对于字母表 U，V，普通柯西核和对偶柯西核为

$$C(U,V) = \prod_{u\in U,\, v\in V}(1-uv)^{-1} = \sum_\rho s_\rho(U)s_\rho(V), \tag{2.4}$$

$$D(U,V) = \prod_{u\in U,\, v\in V}(1+uv) = \sum_\rho s_\rho(U)s_{\rho'}(V). \tag{2.5}$$

求和遍及所有分拆。

对于任意指定的基元素 b，记号 $\mathrm{Coef}_b[F]$ 表示其在 F 的基展开中的系数。对于形式 Laurent 级数，下标指定一个单项式。

对于一个 K 特征零的域，记作 $\Lambda_K = K\otimes_{\mathbb{Z}}\Lambda$。我们使用方括号表示 plethystic 替换：形式字母表 A 由其幂和 $p_m[A]$指定，而 $f[A]$则是将它们代入 f的幂和表达式中得到的。因此 $p_m[A+B] = p_m[A]+p_m[B]$、$p_m[AB] = p_m[A]p_m[B]$以及 $p_m[-A] = -p_m[A]$。形式参数中的单项式 c 满足 $p_m[c] = c^m$；特别地，$p_m[q-1] = q^m - 1$。请注意，复合取负 $-A$ 不同于将每个变量替换为其通常意义下的负值。下文中的所有指数和系数提取均为形式运算；对任意固定的齐次输入，其作用都按所述辅助变量逐项解释。

2.2. **截断与模 Schur 函数。** 截断将生成级数 $(1-x_jt)^{-1}$（2.1）中的每个因子替换为 $1+x_jt+\cdots+(x_jt)^{r-1}$。具体而言，我们定义截断完全对称函数为 $\mathfrak{h}_0 = 1$ 并且

$$\sum_{m\ge 0}\mathfrak{h}_m(X)t^m = \prod_{j\ge 1}\bigl(1+x_jt+\cdots+(x_jt)^{r-1}\bigr) = \prod_{j\ge 1}\frac{1-(x_jt)^r}{1-x_jt}. \tag{2.6}$$

按照 Grinberg 的记号，$\mathfrak{h}_m = G(r,\ m)$是*Petrie* 对称函数 [Gri22，定义 2.1(b)]；按照 Fu 和 Mei 的记号，$\mathfrak{h}_m = h_m^{[r-1]}$是截断齐次对称函数 [FM22，方程 (1)]。对于 $m\ge 1$，等价地，

$$\mathfrak{h}_m = \sum_{\substack{\nu\vdash m\\ \nu_1<r}} m_\nu,$$

因为最大部分 ν_1 是由m_ν表示的单项式中出现的最大指数。由于 $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots]$，映射 $h_m \mapsto \mathfrak{h}_m$ 唯一地延拓为一个分次环自同态

$$\Theta_r : \Lambda \longrightarrow \Lambda, \qquad \Theta_r(h_m) = \mathfrak{h}_m.$$

由索引为的模 *Schur* 函数 定义为

$$\mathfrak{s}_\lambda := \Theta_r(s_\lambda). \tag{2.7}$$

将 Θ_r 作用于（2.2）并取 $\mu = \varnothing$，对任意 $\ell \geq \ell(\lambda)$，得到

$$\mathfrak{s}_\lambda = \det\left(\mathfrak{h}_{\lambda_i - i + j}\right)_{1 \leq i,j \leq \ell}, \qquad \mathfrak{h}_m = 0 \quad (m < 0). \tag{2.8}$$

关于斜模舒尔函数的对偶雅可比–特鲁迪恒等式，参见 [Ham95，定理 3。2]。幂和上的作用可直接由（2.6）得出。根据定义，$\Theta_r(H(X;\ t)) = \sum_{m \geq 0} \mathfrak{h}_m(X)\, t^m$。对 $\Lambda_{\mathbb{Q}}[[t]]$ 取形式对数，得到

$$\log\left(\sum_{m \geq 0} \mathfrak{h}_m t^m\right) = \sum_{m \geq 1} \frac{p_m t^m}{m} - \sum_{m \geq 1} \frac{p_{rm} t^{rm}}{m}. \tag{2.9}$$

为了比较（2.9）与（2.1），将 Θ_r 逐系数扩展到 $\Lambda_{\mathbb{Q}}[[t]]$。由于环同态与常数项为 1 的级数的形式对数可交换，比较系数可得

$$\Theta_r(p_m) = \begin{cases} p_m, & r \nmid m, \\ (1 - r)p_m, & r \mid m. \end{cases} \tag{2.10}$$

对于 $r = 2$，式（2.10）中的乘子为 $(-1)^{m-1}$，即式（2.3）中的乘子。因此

$$\Theta_2 = \omega, \qquad \mathfrak{s}_\lambda = s_{\lambda'}. \tag{2.11}$$

对于每个 $r \geq 2$，(2.10) 中所有的乘数都非零。由于幂和是 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 的代数独立生成元，Θ_r 的逆是由以下条件确定的 $\mathbb{Q}$-代数自同态

$$\Theta_r^{-1}(p_m) = \begin{cases} p_m, & r \nmid m, \\ (1 - r)^{-1} p_m, & r \mid m. \end{cases}$$

特别地，$\Theta_r(p_1) = p_1$。

对于 $n \geq 1$，特化到 x_1，……，x_n 意味着将所有其他变量都设为零。我们用 $f(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 表示 $f \in \Lambda_{\mathbb{Q}}$ 的特化。舒尔多项式 $s_\lambda(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 在 $\ell(\lambda) > n$ 时为零，其余舒尔多项式构成对称多项式环的一个 $\mathbb{Q}$-基。初等对称多项式

$$e_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_i} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

是该环的代数独立生成元。

对于 $N \geq 0$，定义向量空间

$$V_{n,N} = \{f \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} : \deg_{x_i} f \leq N \text{ for every } i\}. \tag{2.12}$$

其单项式对称基由满足以下条件的分拆索引： $\ell(\lambda) \le n$ 以及 $\lambda_1 \le N$。根据 [Mac95, 第一章 (6.5)], ， Schur 到单项式过渡矩阵在支配序下是单位上三角的。在 n 个变量中，限制到该矩形仍保持单位上三角性，因为支配序不会增加第一部分，且由长度大于 n 的分拆索引的项会消失。因此，同样的分拆索引一个 Schur 基，并且

$$V_{n,N} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{s_\lambda(x_1,\dots,x_n) : \ell(\lambda) \le n,\ \lambda_1 \le N\}, \qquad \dim V_{n,N} = \binom{N+n}{n}. \tag{2.13}$$

计数记录一个弱递减的 n 元组，其元素取自 $\{0,\dots,N\}$，并包括附加的零。

3. Bases in finitely many variables

本节证明定理 A，其重述形式为定理 3.4。我们将截断的完全对称多项式表示为循环乘积的系数，并将所需的线性无关性归结为齐次代换映射的可逆性。接着，我们构造一个常秩矩阵，描述这些系数之间的关系，并利用射影空间上截面的乘法证明该映射是同构。

3.1. **归结为齐次代换**。固定整数 $n \ge 1$ 和 $r \ge 2$，并令

$$\mathcal{R}_{n,r} = \{\lambda : \ell(\lambda) \le n,\ \lambda_1 \le n(r-1)\}.$$

空分拆属于 $\mathcal{R}_{n,\ r}$，其中约定第一部分为零。在（2.12）的记号下，我们的目标是得到 $V_{n,\ n(r-1)}$ 的两个基。 $\mathfrak{h}_j$ 的有限变量生成函数为

$$\sum_{j=0}^{n(r-1)} \mathfrak{h}_j(x_1,\dots,x_n)t^j = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + x_\nu t + \cdots + x_\nu^{r-1}t^{r-1}). \tag{3.1}$$

写出 $\mathfrak{h}_\lambda = \prod_i \mathfrak{h}_{\lambda_i}$，包括空积 1。

我们首先在 $\mathbb{C}$ 上进行运算。令 ξ 为一个本原 r 次单位根，令 $c_0,\dots,c_n$ 为彼此独立的参数，并将参数向量写作 $\vec{c} = (c_0,\dots,c_n)$。定义

$$P^{\vec{c}}(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i, \qquad Q^{\vec{c}}(t) = \prod_{s=1}^{r-1} P^{\vec{c}}(\xi^s t). \tag{3.2}$$

对于 $0 \le j \le n(r-1)$，定义 $q_j(\vec{c})$ 为 $Q^{\vec{c}}(t)$ 中 t^j 的系数，从而

$$Q^{\vec{c}}(t) = \sum_{j=0}^{n(r-1)} q_j(\vec{c})t^j.$$

每个 q_j 关于参数都是通常次数为 $r-1$的齐次式。由于 $\mathbb{Q}(\xi$ 的自同构会置换（3.2）中的因子，因此每个 q_j 都属于 $\mathbb{Q}[c_0,\dots,c_n]$。

对于独立形式变量 y_0、……、$y_{n(r-1)}$ 和一个整数 $s \ge 0$，定义

$$\theta_s : \mathbb{C}[y_0,\dots,y_{n(r-1)}]_s \longrightarrow \mathbb{C}[c_0,\dots,c_n]_{s(r-1)}, \qquad F \longmapsto F(q_0,\dots,q_{n(r-1)}). \tag{3.3}$$

下标表示相应多项式环中的普通齐次次数。y-次数 s 和参数次数 $s(r-1)$不同于原变量 x_ν的次数。特别地，

$$\dim \mathbb{C}[y_0, \dots, y_{n(r-1)}]_n = \dim \mathbb{C}[c_0, \dots, c_n]_{n(r-1)} = \binom{nr}{n}. \tag{3.4}$$

命题 3.1。 族 $\{\mathfrak{h}_\lambda(x_1、\dots、x_n)\colon \lambda \in \mathcal{R}_{n,\,r}\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关，当且仅当 θ_n 是一个同构。

证明。 我们通过两次连续代换，将源空间 θ_n 的单项式基与给定族进行比较。在每个 $\lambda \in \mathcal{R}_{n,\,r}$ 后补上零，以得到 n 个部件。于是

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} y_{\lambda_i} : \lambda \in \mathcal{R}_{n,r} \right\}$$

这正是次数为 n 的单项式基：任意此类单项式的 n 下标按弱降序排列后，给出唯一的 λ。总次数统计 n 个因子，包括下标为零的因子。

第一次代换 $y_j \mapsto q_j(\vec{c})$ 是 θ_n。对于第二次代换，令 $c_0 = 1$，并对 $1 \le i \le n$ 令 $c_i = (-1)^i e_i(x_1, \dots, x_n)$。于是 $P^{\vec{c}}(t)$ 变为 $\prod_{\nu=1}^{n}(1 - x_\nu t)$，因此

$$\begin{aligned} Q^{\vec{c}}(t) &\longmapsto \prod_{\nu=1}^{n} \prod_{s=1}^{r-1} (1 - \xi^s x_\nu t) \\ &= \prod_{\nu=1}^{n} (1 + x_\nu t + \cdots + x_\nu^{r-1} t^{r-1}) = \sum_{j=0}^{n(r-1)} \mathfrak{h}_j(x_1, \dots, x_n) t^j, \end{aligned}$$

其中最后一个等式即为（3.1）。比较 t^j 的系数，得到 $q_j(\vec{c}) \mapsto \mathfrak{h}_j(x_1, \dots, x_n)$；特别地，$q_0 = c_0^{r-1} \mapsto 1$。因此，对于每个 $\lambda \in \mathcal{R}_{n,\,r}$，两次代换给出

$$\prod_{i=1}^{n} y_{\lambda_i} \xrightarrow{\theta_n} \prod_{i=1}^{n} q_{\lambda_i}(\vec{c}) \longmapsto \mathfrak{h}_\lambda(x_1, \dots, x_n). \tag{3.5}$$

必要性。假设 $\mathfrak{h}_\lambda$ 在 $\mathbb{Q}$上线性无关。对于系数 $a_\lambda \in \mathbb{Q}$，对（3.5）进行第二次代换，得到

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{R}_{n,r}} a_\lambda \prod_{i=1}^{n} q_{\lambda_i}(\vec{c}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{\lambda \in \mathcal{R}_{n,r}} a_\lambda \mathfrak{h}_\lambda = 0.$$

根据所假设的线性无关性，每个 a_λ 都为零。因此，θ_n 在单项式基下的矩阵的列在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。由于 q_j 具有有理系数，其元素均为有理数，因此将标量扩张到 $\mathbb{C}$不会改变其秩。因此，θ_n 是单射；根据（3.4）中的维数相等，它还是同构。

充分性。 反之，假设 θ_n 是一个同构。乘积 $\prod_{i=1}^{n} q_{\lambda_i}(\vec{c})$ 因而是线性无关的。我们必须验证（3.5）中的第二次代换保持这种线性无关性。

所有这些乘积都具有相同的总参数次数 $n(r-1)$。对于非负整数 $b_1, \ldots\ldots, b_n$，满足 $\sum_{i=1}^{n} b_i \le n(r-1)$，令 $c_0 = 1$，则得到

$$c_0^{n(r-1)-\sum_{i=1}^{n} b_i} c_1^{b_1} \cdots c_n^{b_n} \longmapsto c_1^{b_1} \cdots c_n^{b_n}.$$

右侧的指数决定了左侧 c_0 的指数。因此，不同的单项式仍然彼此不同，所以这一步在 $\mathbb{C}[c_0, \ldots, c_n]_{n(r-1)}$上是单射。接下来， e_1、……、 e_n 的代数独立性使 $c_i \mapsto (-1)^i e_i$ 在 $\mathbb{C}[c_1, \ldots, c_n]$上是单射。因此，复合代换在包含所有这些乘积的齐次分量上也是单射。根据（3.5），它们的像是 $\mathfrak{h}_\lambda$，因此它们在$\mathbb{C}$上是线性无关的，进而在 $\mathbb{Q}$上也是如此。□

3.2. **线性关系与常秩**。 假设 $n \ge 2$。我们构造 q_j 之间的线性关系，其矩阵对于 $\vec{c} \ne 0$具有常秩。

为计算系数，按以下约定扩展这两个系数序列： $c_i = 0$当 $i < 0$ 或 $i > n$时取此值，而 $q_j = 0$ 当 $j < 0$ 或 $j > n(r-1)$时取此值。后者与（3.2）中 的次数界一致。定义矩阵 $\mathcal{B}(\vec{c})$，其行由 $1 \le k \le nr-1$ 给出，列由$0 \le j \le n(r-1)$给出，如下：

$$\mathcal{B}(\vec{c})_{k,j} = \begin{cases} c_{k-j}, & r \nmid k, \\ \big(r(k-j)-k\big) c_{k-j}, & r \mid k. \end{cases} \tag{3.6}$$

记 T 为矩阵转置，并令 $q(\vec{c}) = (q_0(\vec{c}) \ldots, q_{n(r-1)}(\vec{c}))^{\mathsf{T}}$。我们首先推导由 (3.6) 编码的两类系数关系。

对于固定的参数向量 $\vec{c}$，定义范数多项式，并对 $f \in \mathbb{C}(t)$ 定义循环平均：

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(P^{\vec{c}})(t) &= \prod_{s=0}^{r-1} P^{\vec{c}}(\xi^s t) = P^{\vec{c}}(t) Q^{\vec{c}}(t), \\ \Pi(f)(t) &= \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} f(\xi^s t). \end{aligned} \tag{3.7}$$

对于每个整数 $k \ge 0$，计算 (3.7) 中的几何和可得

$$\Pi(t^k) = \frac{t^k}{r} \sum_{s=0}^{r-1} \xi^{sk} = \begin{cases} t^k, & r \mid k, \\ 0, & r \nmid k. \end{cases} \tag{3.8}$$

由线性性可知， Π 仅保留次数可被r整除的多项式项，且其系数保持不变。

旋转 ξ会置换 $\mathcal{N}(P^{\vec{c}})$ 的因子，因此 $\mathcal{N}(P^{\vec{c}}) \in \mathbb{C}[t^r]$。我们有

$$\begin{aligned} \Pi\big(t(P^{\vec{c}})'(t) Q^{\vec{c}}(t)\big) &= \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} \xi^s t (P^{\vec{c}})'(\xi^s t) Q^{\vec{c}}(\xi^s t) \\ &= \frac{t}{r} \mathcal{N}(P^{\vec{c}})'(t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

对于第二个等式，(3.2) 和 $\xi^r = 1$ 给出 $Q^{\vec{c}}(\xi^s t) = \prod_{0\le j<r} P^{\vec{c}}(\xi^j t)$，其中 $0 \le s < r$。$_{j\neq s}$对 (3.7) 应用乘积法则，使用链式法则 $\frac{d}{dt}P^{\vec{c}}(\xi^s t) = \xi^s (P^{\vec{c}})'(\xi^s t)$，并乘以 t/r ，得到 (3.9) 中的和。

对于 $1 \le k \le nr-1$， t^k 在 $P^{\vec{c}}(t)Q^{\vec{c}}(t)$ 中的系数为 $\sum_{i=0}^{n} c_i q_{k-i}$。若 $r \nmid k$，(3.7) 和$\mathscr{N}(P^{\vec{c}}) \in \mathbb{C}[t^r]$ 给出

$$\sum_{i=0}^{n} c_i q_{k-i} = 0.$$

若 $r \mid k$，(3.8) 表明 Π 使 t^k 的系数保持不变。由于 $t(P^{\vec{c}})'(t) = \sum_{i=0}^{n} i c_i t^i$，取 t^k 在 (3.9) 中的系数，并利用 (3.7) 得到

$$\sum_{i=0}^{n} i c_i q_{k-i} = \frac{k}{r} \sum_{i=0}^{n} c_i q_{k-i}.$$

这里，对 $\mathscr{N}(P^{\vec{c}})(t)$ 求导并乘以 t/r 会将其 t^k 系数乘以 k/r。乘以 r 并重新整理，得到 $\sum_{i=0}^{n}(ri-k)c_i q_{k-i} = 0$。在这两种情况下，令 $j = k-i$ 并利用 (3.6) 可得

$$\mathcal{B}(\vec{c})q(\vec{c}) = 0. \tag{3.10}$$

方程（3.10）表明 $q(\vec{c}) \in$ 核$\mathcal{B}(\vec{c})$；命题 3.2 表明，对于 $\vec{c} \neq 0$，该核中的每个向量都是 $q(\vec{c})$ 的数量倍。

命题 3.2。对于每个非零 $\vec{c} \in \mathbb{C}^{n+1}$，核 $\mathcal{B}(\vec{c}) = \mathbb{C}q(\vec{c})$ 且秩 $\mathcal{B}(\vec{c}) = n(r-1)$。

证明。固定 $\vec{c} \neq 0$。令 $g = (g_0, \ldots\ldots, g_{n(r-1)})^{\mathsf{T}}$ 满足 $\mathcal{B}(\vec{c})g = 0$，并令 $G(t) = \sum_{j=0}^{n(r-1)} g_j t^j$。我们利用两类行来推导关于 G 的恒等式，然后证明 G 是 $Q^{\vec{c}}$ 的数量倍。对于 $1 \le k \le nr-1$， $\mathcal{B}(\vec{c})g$ 的第 k 个分量为

$$\begin{cases} \mathrm{Coef}_{t^k}\left[P^{\vec{c}}G\right], & r \nmid k, \\ \mathrm{Coef}_{t^k}\left[rt(P^{\vec{c}})'G - t(P^{\vec{c}}G)'\right], & r \mid k. \end{cases} \tag{3.11}$$

事实上，展开这些乘积可得

$$\mathrm{Coef}_{t^k}\left[P^{\vec{c}}G\right] = \sum_{j=0}^{n(r-1)} c_{k-j} g_j,$$

$$\mathrm{Coef}_{t^k}\left[rt(P^{\vec{c}})'G - t(P^{\vec{c}}G)'\right] = \sum_{j=0}^{n(r-1)} \big(r(k-j)-k\big) c_{k-j} g_j.$$

因子 $r(k-j)$ 和 k出现在第二行，是因为分别将 $rt\,d/dt$ 作用于 $k-j$中次数为 $P^{\vec{c}}$ 的项，以及将 $t\,d/dt$作用于 k中次数为 $P^{\vec{c}}G$ 的项所得。与 (3.6) 比较可得 (3.11)。

由于 $\mathcal{B}(\vec{c})g = 0$，在 $r \nmid k$ （3.11）中的行迫使 t^k 系数 $P^{\vec{c}}G$ 在所有不被 r整除的次数处均为零：其次数至多为 nr，而省略的端点 0， nr

都被 r整除。因此

$$P^{\vec{c}}(t)G(t) \in \mathbb{C}[t^r]. \tag{3.12}$$

带有 $r \mid k$的行（3.11）在 t^k中的系数为零 rt（$P^{\vec{c}}$）$'G - t$（$P^{\vec{c}}G$）$'$对于 $1 \le k \le nr-1$。此多项式的次数也至多为 nr。在省略的两个端点处，其常数项为零，因为两项都含有 t，而其 t^{nr} 系数为（$rn - nr$）$c_n g_{n(r-1)} = 0$。这些计算也包括次数较小的情形。因此，应用（3.8）可得

$$\Pi\big(rt(P^{\vec{c}})'G - t(P^{\vec{c}}G)'\big) = 0. \tag{3.13}$$

由于 $\vec{c} \neq 0$，$P^{\vec{c}}$是一个非零多项式，而（3.2）和（3.7）表明 $Q^{\vec{c}}$以及 $\mathscr{N}$（$P^{\vec{c}}$）也非零。定义有理函数

$$h = \frac{G}{Q^{\vec{c}}} = \frac{P^{\vec{c}}G}{\mathscr{N}(P^{\vec{c}})}.$$

接下来只需证明 h 是常数。根据（3.12），分子 $P^{\vec{c}}G$ 在 $t \mapsto \xi t$ 下保持不变；（3.7）中的乘积 $\mathscr{N}(P^{\vec{c}})$ 也如此。因此 $h(\xi t) = h(t)$。此外，根据（3.12），$\mathscr{N}(P^{\vec{c}})h = P^{\vec{c}}G$ 属于 $\mathbb{C}[t^r]$，而 $t\,d/dt$ 保持这个空间不变。因此，由（3.7）和（3.8）可得，对于 $f \in \mathbb{C}(t)$，

$$\begin{aligned} \Pi(hf) &= \frac{1}{r}\sum_{s=0}^{r-1} h(\xi^s t) f(\xi^s t) = h\Pi(f), \\ \Pi\big(t(\mathscr{N}(P^{\vec{c}})h)'\big) &= t(\mathscr{N}(P^{\vec{c}})h)'. \end{aligned} \tag{3.14}$$

将 $G = Q^{\vec{c}}h$ 代入（3.13），并依次使用（3.14）和（3.9），得到

$$\begin{aligned} 0 &= \Pi\big(rt(P^{\vec{c}})'Q^{\vec{c}}h - t(\mathscr{N}(P^{\vec{c}})h)'\big) \\ &= rh\,\Pi\big(t(P^{\vec{c}})'Q^{\vec{c}}\big) - t\big(\mathscr{N}(P^{\vec{c}})h\big)' \\ &= ht\mathscr{N}(P^{\vec{c}})' - t\big(\mathscr{N}(P^{\vec{c}})h\big)' \\ &= -t\mathscr{N}(P^{\vec{c}})h'. \end{aligned}$$

最后一个等式使用了乘积法则。在 $\mathbb{C}(t)$ 中约去非零因子 $t\mathscr{N}(P^{\vec{c}})$，得到$h' = 0$。在特征零的情形下，这意味着对于某个 $a \in \mathbb{C}$，有 $h = a$。因此 $G = aQ^{\vec{c}}$，比较系数可得 $g = a\,q(\vec{c})$。结合（3.10），这就证明了 $\ker \mathcal{B}(\vec{c}) = \mathbb{C}q(\vec{c})$。由于 $Q^{\vec{c}} \neq 0$，其系数向量 $q(\vec{c})$ 非零，因此核的维数为一。由秩 - 零度定理，得到秩 $\mathcal{B}(\vec{c}) = n(r-1)$。□

现在我们使用命题 3.2 来构造一个向量丛的正合序列。不熟悉向量丛和层上同调的读者可以参阅附录 A.1 以了解下文所需的背景；另见 [Har77，第二章，§5]。

将非零参数向量视为相差一个非零标量乘法的等价类。它们构成射影空间 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$，齐次坐标为 $[c_0 : \cdots : c_n]$。用 $\mathcal{O}(-1)$ 表示 tautological 线丛：其纤维，即附属于 $[c_0 : \cdots : c_n]$的向量空间，是直线$\mathbb{C}\vec{c} \subset \mathbb{C}^{n+1}$。向量丛的秩是其纤维的维数。令 $\mathcal{O}(1)$ 为 $\mathcal{O}(-1)$ 的对偶，并对每个整数 d，令 $\mathcal{O}(d)$ 表示 $\mathcal{O}(1)$ 的第 d 次张量幂，使用

当 $d<0$ 时使用对偶幂；平凡线丛为 $\mathcal{O}=\mathcal{O}(0)$。对于 $d\geq 0$， $\mathcal{O}(d)$ 的整体截面对应于 c_0， ... , c_n 中次数为 d 的齐次多项式。对于整数 $m\geq 0$，记号 $\mathcal{O}(d)^m$ 表示该线丛的 m 个副本的直和。

令 $U=\mathbb{C}^{nr-1}$ 和 $V=\mathbb{C}^{n(r-1)+1}$，使得 $U\otimes\mathcal{O}(-1)=\mathcal{O}(-1)^{nr-1}$ 以及 $V\otimes\mathcal{O}=\mathcal{O}^{n(r-1)+1}$。$\mathcal{B}(\vec{c})$ 的每个条目关于参数均为一次，从而定义了一个映射$\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{O}$。因此，其转置矩阵定义了一个丛映射 $\varphi: U\otimes\mathcal{O}(-1)\to V\otimes\mathcal{O}$。类似地，次数为 $r-1$ 的多项式 q_j 定义了一个丛映射 $\varepsilon: V\otimes\mathcal{O}\to\mathcal{O}(r-1)$，它将 $V\otimes\mathcal{O}$的第 j 个常数基截面映射为 q_j（对于 $0\leq j\leq n(r-1)$）。选取一个射影点的代表 $\vec{c}$ 后，其纤维上的映射由行向量$q(\vec{c})^{\mathsf{T}}$表示。由于对于每个 $\vec{c}\neq 0$都有 $Q^{\vec{c}}\neq 0$，其系数 $q_j(\vec{c})$ 不全为零。因此， ε 将每个纤维映射到一维目标纤维上，并且是满射。

转置（3.10）得到

$$q(\vec{c})^{\mathsf{T}}\mathcal{B}(\vec{c})^{\mathsf{T}}=\big(\mathcal{B}(\vec{c})q(\vec{c})\big)^{\mathsf{T}}=0,$$

因此 $\varepsilon\varphi=0$ 且像$\varphi\subseteq$ 核ε。由命题 3.2可知，转置矩阵的秩也是$n(r-1)$，且在每一点都成立。因此， φ 的核和像都是向量丛，并且像φ 的秩为 $n(r-1)$。由于 ε 是满射，核ε 具有相同的秩，即 $n(r-1)+1-1$。因此，在每个纤维上，该包含都是等式，从而像$\varphi=$ 等于核ε。令 $E=$ 核φ为转置映射的核丛。于是得到正合序列

$$0\longrightarrow E\longrightarrow\mathcal{O}(-1)^{nr-1}\xrightarrow{\varphi}\mathcal{O}^{n(r-1)+1}\xrightarrow{\varepsilon}\mathcal{O}(r-1)\longrightarrow 0. \tag{3.15}$$

这里，正合性意味着每个映射的像都等于下一个映射的核 .

这一构造并未假设截面 q_j 线性无关： ε 的满射性仅利用了它们没有公共零点。对于 $n\geq 2$，将在下一小节中使用（3.15）来证明（ θ_n 中的映射3.3）是同构。

3.3. **定理 A 的证明**。 我们首先陈述一个关于截面乘法的同构结果。然后将其应用于(3.15)，以得到定理A中的两个基。

设 K 为特征零域，设 n,a 为整数，满足 $n\geq 2$ 和 $a\geq 1$，并记 $L=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(a)$。设 U, V为维数分别为 $na+n-1$和 $na+1$的 K-向量空间，并考虑 $\mathbb{P}^n_K$上的向量丛序列

$$0\longrightarrow E\longrightarrow U\otimes\mathcal{O}(-1)\xrightarrow{\varphi}V\otimes\mathcal{O}\xrightarrow{\varepsilon}L\longrightarrow 0. \tag{3.16}$$

对于整数 $s\geq 0$，记 $L^s=L^{\otimes s}$，并令 $\mathrm{Sym}^s V$ 表示 V的 s次对称幂。空间 $H^0(\mathbb{P}^n_K,L^s)$ 由 L^s的整体截面组成。截面$\varepsilon(v\otimes 1)$的乘法（其中 $v\in V$）定义了

$$\begin{aligned}&\alpha_s:\mathrm{Sym}^s V\longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n_K,L^s),\\ &\qquad v_1\cdots v_s\longmapsto\varepsilon(v_1\otimes 1)\cdots\varepsilon(v_s\otimes 1)\qquad (v_1,\ldots,v_s\in V).\end{aligned} \tag{3.17}$$

对于 $s=0$，两个乘积均解释为 1。

引理 3.3。 如果 (3.16)是正合的，则 α_n 在 (3.17) 中的映射是同构。

引理3.3 的证明见附录A.2。现在证明定理A，其重述如下。回到整数 $n\geq 1$ 和 $r\geq 2$、矩形 $\mathcal{R}_{n,r}$以及空间 $V_{n,n(r-1)}$。

Th理 3.4 (有限变量基)。 对于每个 $n \geq 1$ 和 $r \geq 2$，这两个族 es

$$\{\mathfrak{h}_\lambda(x_1,\dots,x_n) : \lambda \in \mathcal{R}_{n,r}\}, \qquad \{\mathfrak{s}_\lambda(x_1,\dots,x_n) : \lambda \in \mathcal{R}_{n,r}\}$$

各自构成 $\mathbb{Q}$ 的 $V_{n,\ n(r-1)}$ 基。

证明。对于 $n \geq 2$，在 $K = \mathbb{C}$ 上对 (3.15) 应用引理 3.3，其中 $a = r-1$、$U = \mathbb{C}^{nr-1}$ 和 $V = \mathbb{C}^{n(r-1)+1}$。若 v_j 是 V 的第 j 个标准基向量，则 $\varepsilon(v_j \otimes 1) = q_j$。通过 $v_j \mapsto y_j$ 将 $\mathrm{Sym}^n V$ 与 $\mathbb{C}[y_0,\dots,y_{n(r-1)}]_n$ 视为相同，并将 $H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, L^n)$ 与 $\mathbb{C}[c_0,\dots,c_n]_{n(r-1)}$ 视为相同。于是 (3.17) 将 y_j 的每个乘积映射为 q_j 的相同乘积，因此 α_n 恰好是 (3.3) 中的 θ_n。引理 3.3 表明 θ_n 是一个同构，因此命题 3.1 证明了截断完全函数乘积在 $\mathbb{Q}$ 上的线性无关性。对于 $n = 1$，(3.1) 给出 $\mathfrak{h}_j(x_1) = x_1^j$（对 $0 \leq j \leq r-1$），这直接证明了 $\{\mathfrak{h}_\lambda(x_1)\colon \lambda \in \mathcal{R}_1\text{、}\ _r\}$ 的线性无关性。

根据 [Wal94，命题 1.5(i)，第 576–577], 页，这些截断完全函数乘积的线性无关性等价于由同一矩形标记的模 Schur 多项式的线性无关性。这两个族都属于 $V_{n,n(r-1)}$。事实上，每个 $\mathfrak{h}_j(x_1,\dots,x_n)$ 在每个变量中的次数至多为 $r-1$，且 $\mathfrak{h}_\lambda$ 至多有 n 个因子。对于 $\mathfrak{s}_\lambda$，将零部件补至长度 n，并在 $\ell = n$ 下使用 (2.8)；每个非零项仍然是截断完全多项式的乘积。每个族都有 $|\mathcal{R}_{n,r}| = \binom{nr}{n}$ 个元素，这等于由 (2.13) 得出的 $\dim V_{n,n(r-1)}$。因此，线性无关性证明了这两个基断言。□

定理3.4 证明了 [Wal94中的猜想1.4及其在命题1.5(i)（第576–577]页）中的等价形式。我们将在推论Wal94命题 1.5(ii)] 中使用矩阵表述，以在推论5.3 中将定理3.4 中的基与模 Schur 系数联系起来。

4. Heisenberg operators and core–quotient coordinates

我们回到稳定环 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 和整数 $r \geq 2$。首先固定算盘的约定，并回顾分块保持。然后，我们用核–商坐标描述海森堡作用，将半顶点算子分解，并计算由此诱导的自同态及其再生核。

4.1. 算盘、核与商。 $\mathfrak{s}_\lambda$ 的 Schur 系数由 λ 的核与商来组织。我们通过算盘来描述这些对象。取一个可被 r 整除的整数 $b \geq \ell(\lambda)$，在 λ 后补上零部件，并构造 β 集

$$\mathfrak{B}_b(\lambda) = \{\lambda_j + b - j : 1 \leq j \leq b\}.$$

这是一个由 b 个互不相同的非负整数构成的集合。反过来，若 $q_1 > \cdots > q_b$ 是其元素，则 $\lambda_j = q_j - b + j$，因此 β 集保留了关于 λ 的全部信息。将 b 替换为 $b + r$，得到

$$\mathfrak{B}_{b+r}(\lambda) = \{q + r : q \in \mathfrak{B}_b(\lambda)\} \sqcup \{0, 1, \dots, r-1\}. \tag{4.1}$$

r-算盘有编号为 0、……、$r-1$ 的轨道。位置 $q = ar + i$ 位于第 a 层的轨道 i 上；位置从上到下递增，因此 $q - r$ 紧邻在同一轨道上的 q 上方。

在 $\mathfrak{B}_b(\lambda)$ 的每个位置放置一颗珠子，就得到 λ 的算盘表示。若 $q \geq r$ 且位置 $q - r$ 未被占据，则在 β 集中用 $q - r$ 替换 q，并将其元素重新排序。

对应的分拆由 λ 删除一个包含 r 个方格且不含 2×2 方格的连通斜图得到，也就是说，删除一个 r 带状分拆。在算盘上，这一操作只需将位于 q 的珠子向上移动一层。

例如，取 $r=3$，$\lambda=(3,2,1)$，以及 $b=3$。由于 $\mathfrak{B}_3(\lambda)=\{5,3,1\}$ 且 0 未被占据，我们可以将 $q=3$ 替换为 $q-r=0$，从而将 β 集从 $\{5,3,1\}$ 变为$\{5,1,0\}$。图 4.1 比较了这一操作的 β 集、算盘和杨氏图描述。

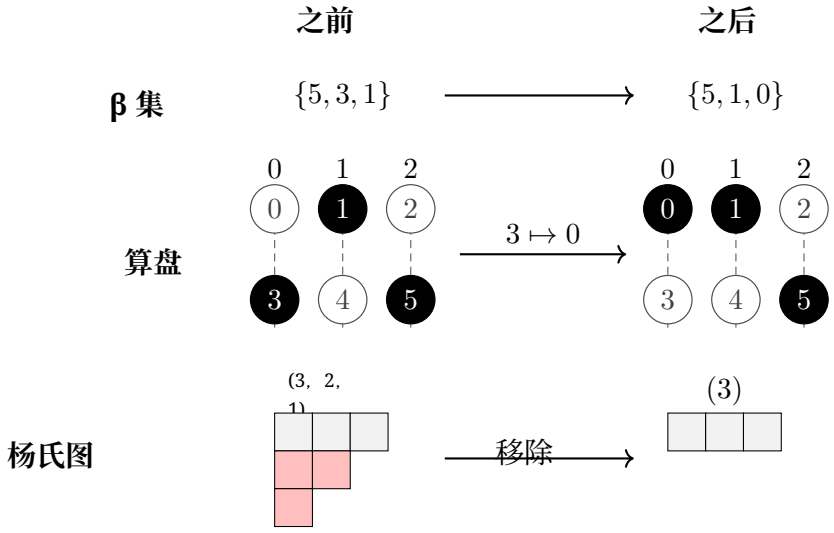


FIGURE 4.1. β 集、算盘和杨氏图记法中的珠子移动。黑色圆圈表示占据的位置，空心圆圈表示未占据的位置，红色方格组成被移除的 3-带状分拆。

将每颗珠子向上滑动，直到无法再进行此类移动。如果轨道 i 包含 b_i 颗珠子，那么最终占据的位置必定为 $i, i+r, \ldots, i+(b_i-1)r$。因此，紧凑珠子构型与移动顺序无关，并且是唯一确定的分拆 κ 的 β 集。这个分拆是 λ 的 r-核，我们记作 $\kappa=$核$_r(\lambda)$。对于图 4.1 中的 $\lambda=(3,2,1)$，进一步移动 $5\mapsto 2$ 得到 β 集 $\{2,1,0\}=\mathfrak{B}_3(\varnothing)$，因此核$_3(\lambda)=\varnothing$。如果一个分拆 λ 满足核$_r(\lambda)=\lambda$，则称其本身为 r-核；等价地说，无法从 λ中移除 r-带状分拆。

为了描述商如何随珠子数变化，暂时允许任意整数 $b\geq \ell(\lambda)$。对于每条轨道 i，记

$$C_i=\{(q-i)/r : q\in\mathfrak{B}_b(\lambda),\ q\equiv i \pmod r\}=\{c_{i,1}>\cdots>c_{i,b_i}\}.$$

Let

$$Q_b(\lambda)=\left(\alpha^{(0)},\ldots,\alpha^{(r-1)}\right),$$

其中，轨道 i 上的部件是由各部件组成的分拆

$$\alpha_j^{(i)}=c_{i,j}-b_i+j \qquad (1\leq j\leq b_i).$$

元组 $Q_b(\lambda)$ 取决于 b。根据 [Fay05，第 1.1.1 节，第 442], 页

$$Q_{b+1}(\lambda) = \big(\alpha^{(r-1)}, \alpha^{(0)}, \ldots, \alpha^{(r-2)}\big). \tag{4.2}$$

对于 $\lambda = (3,\ 2,\ 1)$ 在图 4.1 中,

$$Q_3(\lambda) = \big((1), \varnothing, (1)\big), \qquad Q_4(\lambda) = \big((1), (1), \varnothing\big),$$

其中 $\mathfrak{B}_4\ (\lambda)\ = \{6, 4, 2, 0\}$。对于固定的珠子数，式（4.2）同时适用于所有由该珠子数表示的分拆。

应用（4.2） r 次可得 $Q_{b+r}\ (\lambda)\ = Q_b\ (\lambda)$ 。因此，我们将 r-商定义为 λ 的

$$Q_b(\lambda) = \big(\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(r-1)}\big) \qquad \big(b \geq \ell(\lambda),\ r \mid b\big). \tag{4.3}$$

在这些条件下，每个 $\lambda^{(i)}$ 都与 b的选择无关，因为任意两个这样的珠子数之差都是 r的倍数。

定义 r-权为 $w(\lambda) = \sum_{i=0}^{r-1} |\lambda^{(i)}|$。
考虑核–商映射

$$\lambda \longmapsto \big(\mathrm{core}_r(\lambda); \lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(r-1)}\big)$$

从分拆映射到由一个 r-核和一个有序的 r-元组分拆组成的对。命题4.1 是标准结果；参见 [Mac95，第一章，§1，例 8(b)、(c) 和 (g)]。

命题 4.1。对于每个整数 $r \geq 2$，核–商映射是一个双射 .

对于每个分拆 λ，令 $\kappa = \mathrm{core}_r(\lambda)$。那么

$$|\lambda| = |\kappa| + r\sum_{i=0}^{r-1} |\lambda^{(i)}|, \qquad w(\lambda) = \sum_{i=0}^{r-1} |\lambda^{(i)}| = \frac{|\lambda| - |\kappa|}{r}. \tag{4.4}$$

Mor此外， $w(\lambda)$ 是从 λ 中移除带状分拆 r 时所移除的数量。

当珠子数可被 r整除时，共轭会反转轨道顺序，并将每个商分量 [共轭Fay05，第 1.1.1 节，第 442]:

$$(\lambda')^{(i)} = (\lambda^{(r-1-i)})' \qquad (0 \leq i < r). \tag{4.5}$$

按位置递减的顺序，为 $\mathfrak{B}_b(\lambda)$中的珠子标上 1、.....、b。将每条轨道向上收拢，同时保持其珠子的顺序不变。 r-符号 $\varepsilon_r(\lambda)$是这样得到的置换的符号：按最终珠子位置递减的顺序读取各标签。

在（4.1）下，每个旧珠子向下移一层，并在每条轨道的顶部添加一个新珠子；旧珠子所经历的置换与扩充前相同。新珠子始终位于所有旧珠子之上，并且它们之间的相对顺序不会因收拢而改变。因此 ε_r（λ）与所选取的可容许选择 b 无关。

置 $w = w(\lambda)$。如果从 λ 中去除高度为 h_1、.....、h_w 的 r-带状分拆，直至其核，则

$$\varepsilon_r(\lambda) = (-1)^{h_1 + \cdots + h_w}. \tag{4.6}$$

确实，对应于一个 r-带状分拆且高度为 h 的珠子移动，恰好会越过 h 个带标签的珠子。由于 $\varepsilon_r(\lambda)$ 由初始珠子顺序和整理后的珠子顺序定义， $\varepsilon_r(\lambda)$ 因此（ 4.6 ）中的奇偶性与移除序列无关。

对于 $\lambda=(3,\ 2,\ 1)$（见图4.1），将位于 5、3、1 的珠子依次标记为 A、B、C。整理后，这些珠子按位置递减排列为 2、1、0，其标签分别为 A、C、B。因此发生了一次对换，且 $\varepsilon_3((3,\ 2,\ 1))$ $=-1$。

4.2. **组合块与块保持**。设 κ为任意分拆，并设$w\geq 0$。定义

$$\mathcal{B}_{\kappa,w}^{(r)}=\{\lambda:\mathrm{core}_r(\lambda)=\kappa,\ w(\lambda)=w\}$$

并称其为 r-块，由 (κ,w) 编号。若 κ 不是一个 r-核，则 $\mathcal{B}_{\kappa,\ w}^{(r)}=\varnothing$，因为核的每个取值 $_r$ 都是一个 r-核。当 $|\lambda|=d$ 固定时，(4.4) 表明核决定了权。

回顾 [Wal94，推论 2.8，第 586]页。

命题 4.2。对于每个 $r\geq 2$ 和每个分拆 λ，$\mathfrak{s}_\lambda$ 的舒尔展开中只包含与 λ 具有相同 r-核的分拆。

由命题4.2，Θ_r 保持由每个 $\mathcal{B}_\kappa^{(r)},_w$ 编号的舒尔张成空间。等价地，当 Schur 基按 r-核排序时，其在每个次数上的矩阵都是分块对角的。

例 4.3（$r=3$ 和 $|\lambda|=5$的块）。5 有七种分拆。将它们的 3-阿贝尔图打包后，得到以下所有非空块：

3-核 κ	权 w	$\mathcal{B}_{\kappa,w}^{(3)}$
(2)	1	$\{(5),(2,2,\ ^{1),\ (2,\ 1,}\ \ 1,\ 1)\},$
$(1,\ 1)$	1	$\{(4,1),(3,\ ^{2),\ (1,\ 1,}\ \ 1,\ 1)\},$
$(3,\ ^{1,\ 1)}$	0	$\{(3,\ 1,\ 1)\}.\ ^{1,}$

按从上到下的顺序列出各块，并按从左到右的顺序列出每个块中的分拆，以此确定行和列的顺序。令

$$K=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

将 (2.6) 代入 (2.8) 得到

$$(\langle\mathfrak{s}_\lambda,s_\mu\rangle)_{\lambda,\mu\vdash 5}=\mathrm{diag}(K,K,(1)).\tag{4.7}$$

两个权重为一的块具有相同的矩阵 K，而零非对角块则与命题4.2一致。

4.3. **海森堡模与算子** $\mathcal{D}_{r,\ u}$。我们沿用第 r 节中的核、商、权以及 4.1 中的符号约定。对于 $m\geq 1$，回顾第 2.1 节中的定义，p_m 表示幂和函数。对于整数 $r\geq 2$，令

$$a_{-m}^{(r)}=p_{rm},\qquad a_m^{(r)}=p_{rm}^{\perp}\qquad(m\geq 1).$$

对于算子 A，B，记作 $[A,B]=AB-BA$。由于 $p_n^{\perp}=n\,\partial/\partial p_n$，这些算子满足

$$[a_m^{(r)},a_{-n}^{(r)}]=rm\,\delta_{mn},\qquad[a_m^{(r)},a_n^{(r)}]=[a_{-m}^{(r)},a_{-n}^{(r)}]=0\qquad(m,n\geq 1).\tag{4.8}$$

因此，它们在 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 上给出了中心荷为 r 的海森堡作用。定义次数为零的算子

$$\mathcal{N}_r = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{rm} a_{-m}^{(r)} a_m^{(r)} = \sum_{m\geq 1} p_{rm} \frac{\partial}{\partial p_{rm}}. \tag{4.9}$$

在每个齐次分量上，该和都是有限的。如果 $\eta = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots)$ 是一个分拆，那么

$$\mathcal{N}_r(p_\eta) = \left(\sum_{r|j} m_j \right) p_\eta. \tag{4.10}$$

对于 $u \in \mathbb{Q}$，定义 $\mathcal{D}_{r,\,u}$ 为

$$\mathcal{D}_{r,u}(p_\eta) = u^{\sum_{r|j} m_j} p_\eta, \tag{4.11}$$

其中 $u^0 = 1$。由于（4.11）中的指数在幂和相乘时具有可加性，因此（4.11）具有乘法性。由于幂和作为 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 上的一个 $\mathbb{Q}$-代数自由生成 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$，$\mathcal{D}_{r,\,u}$ 是由下式确定的代数自同态

$$\mathcal{D}_{r,u}(p_m) = \begin{cases} u p_m, & r \mid m, \\ p_m, & r \nmid m. \end{cases} \tag{4.12}$$

因此 $\mathcal{D}_{r,\,u}\mathcal{D}_{r,\,v} = \mathcal{D}_{r,\,uv}$，且当 $u \neq 0$ 时，$\mathcal{D}_{r,\,u}$ 是可逆的。

比较（2.10）与（4.12）得到 $\mathcal{D}_{r,\,1-r} = \Theta_r$，因此 $\mathcal{D}_{r,\,1-r}(s_\lambda) = \mathfrak{s}_\lambda$。我们研究这一族 $\mathcal{D}_{r,\,u}$，以便在核–商坐标中统一地计算这一作用。

对于 $d \geq 0$，(4.10) 中的特征值属于 $\{0, 1, \ldots, \lfloor d/r \rfloor\}$。选取插值多项式 $F_{d,\,u} \in \mathbb{Q}[t]$ 使其满足 $F_{d,\,u}(k) = u^k$ 在该集合上成立。于是

$$\mathcal{D}_{r,u} = F_{d,u}(\mathcal{N}_r) \qquad \text{on } \Lambda_{\mathbb{Q}}^d. \tag{4.13}$$

命题 4.4。对于每个整数 $r \geq 2$ 和每个 $u \in \mathbb{Q}$，算子 $\mathcal{D}_{r,\,u}$ 在每个次数下都保持任意固定 r-核的 *Schur* 张成空间。

证明。根据 Murnaghan–Nakayama 规则，$m \geq 1$, $p_{rm}^{\perp}$ 移除长度为 rm 的带状分拆，而乘以 p_{rm} 则添加该长度的带状分拆。在 r-算盘上，这两种操作都在同一轨道内移动一个珠子，因此保持 r-核不变。因此，(4.9) 中 $\mathcal{N}_r$ 的每一项都保持具有任意指定r-核的 Schur 函数所张成的空间。对于每个 d，关系式 (4.13) 将 $\mathcal{D}_{r,\,u}$ 表示为 $\mathcal{N}_r$ 在 $\Lambda_{\mathbb{Q}}^d$ 上的多项式。因此，$\mathcal{D}_{r,\,u}$在次数 d 下保持相同的固定核 Schur 张成空间，从而在每个次数下都保持该空间。□

4.4.**核–商坐标与半顶点算子**。Lam 使用从 Fock 空间到对称函数的 Heisenberg 模表示映射，研究带状分拆表的生成函数 [Lam05，定理 9]。在此，我们将每个固定核的 Schur 空间识别为 r 对称函数空间的张量积。我们使用商分量本身进行半顶点计算，并使用其共轭分拆计算模 Schur 系数。

对于整数 $r \geq 2$ 和 $w \geq 0$，令 $\mathsf{P}_r(w)$ 表示总大小为 w 的 r-多重分拆集合：

$$\mathsf{P}_r(w) = \left\{ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(0)}, \ldots, \alpha^{(r-1)}) \in \mathscr{P}^r : \sum_{i=0}^{r-1} |\alpha^{(i)}| = w \right\}.$$

对于字母表 $\mathbf{X}=(X^{(0)},\dots,X^{(r-1)})$ 的 r-元组，记为

$$s_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{X})=\prod_{i=0}^{r-1}s_{\alpha^{(i)}}(X^{(i)}),\qquad p_m^{(i)}=p_m(X^{(i)}),\qquad P_m=\sum_{i=0}^{r-1}p_m^{(i)}.$$

定义乘积霍尔内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\otimes$ 在 $\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}$ 上规定乘积 Schur 函数为标准正交基。记 $P_m^\perp$ 为关于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\otimes$ 的乘法 P_m 的伴随算子。因此 $P_m^\perp=m\sum_{i=0}^{r-1}\partial/\partial p_m^{(i)}$。我们将其总次数为 w 的齐次分量记为 $\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}[w]$；当 $w<0$ 时它为零。

固定一个 r-核 δ。对于 $w\geq 0$，回忆 $\mathcal{B}_{\delta\,w}^{(r)}$，是由 $(\delta,\ w)$ 标记的 r-块，并令

$$\mathcal{F}_{\delta,w}=\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{s_\lambda:\lambda\in\mathcal{B}_{\delta,w}^{(r)}\},\qquad \mathcal{F}_\delta=\bigoplus_{w\geq 0}\mathcal{F}_{\delta,w}.$$

对于 $\lambda\in\mathcal{B}_{\delta\,w}^{(r)}$，令 $\boldsymbol{\alpha}(\lambda)=((\lambda^{(0)})',\ \dots\dots,\ (\lambda^{(r-1)})')$。定义

$$\Phi_{\delta,w}:\mathcal{F}_{\delta,w}\longrightarrow\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}[w],\tag{4.14}$$

$$\Phi_{\delta,w}(s_\lambda)=\varepsilon_r(\lambda)s_{\boldsymbol{\alpha}(\lambda)},\tag{4.15}$$

并令 $\Phi_\delta=\bigoplus_{w\geq 0}\Phi_{\delta,\ w}$。我们按 $\mathcal{F}_\delta$ r-权 w对其分次；其原始对称函数次数为 $|\delta|+rw$。命题 4.1 将 $\mathcal{B}_{\delta\,w}^{(r)}$，与 $\mathrm{P}_r(w)$ 对应。逐分量共轭是保持大小的双射，由 $\omega^{\otimes r}$ 实现；它是乘积霍尔内积下的等距映射。乘以 $\varepsilon_r(\lambda)\in\{\pm1\}$ 也保持内积。因此，Φ_δ 是分次等距同构。

我们还使用不对商分量取共轭的等距映射 ，

$$\Psi_\delta:\mathcal{F}_\delta\longrightarrow\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r},\qquad \Psi_\delta(s_\lambda)=\varepsilon_r(\lambda)\prod_{i=0}^{r-1}s_{\lambda^{(i)}}(X^{(i)}).\tag{4.16}$$

因此 $\Phi_\delta=(\omega^{\otimes r})\Psi_\delta$。

定理4.5 (海森堡交织)。对于每个 $m\geq 1$，以下恒等式作为作用于 $\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}$ 上的线性算子成立：

$$\Phi_\delta\,p_{rm}\,\Phi_\delta^{-1}=(-1)^{m-1}P_m,\tag{4.17}$$

$$\Phi_\delta\,p_{rm}^\perp\,\Phi_\delta^{-1}=(-1)^{m-1}P_m^\perp.\tag{4.18}$$

证明。中的伴随恒等式和斜核–商公式 [Wal94，命题 2.2–2.3，第 582–583] 页给出：对于分拆 λ，μ 若 r-核为 δ，

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(\lambda)\varepsilon_r(\mu)\langle p_{rm}s_\lambda,s_\mu\rangle&=\left\langle p_m,\prod_{i=0}^{r-1}s_{\mu^{(i)}/\lambda^{(i)}}\right\rangle\\&=\left\langle P_m\prod_{i=0}^{r-1}s_{\lambda^{(i)}}(X^{(i)}),\prod_{i=0}^{r-1}s_{\mu^{(i)}}(X^{(i)})\right\rangle_\otimes.\end{aligned}\tag{4.19}$$

（4.19）中的第二个等式可以直接从推导 $p_m^{\perp} = m\,\partial/\partial p_m$中读出。将 p_m 与斜 Schur 函数的乘积进行配对，就是对选择其中一个因子与 p_m进行配对求和，而其他每个因子都与 1 配对。在此 $\langle 1,\ s_{\mu^{(j)}/\lambda^{(j)}}\rangle = \delta_{\lambda^{(j)},\ \mu^{(j)}}$，斜 Schur 函数的伴随性给出 $\langle p_m,\ s_{\mu^{(i)}/\lambda^{(i)}}\rangle = \langle p_m s_{\lambda^{(i)}},\ s_{\mu^{(i)}}\rangle$。对 i 求和，恰好就是乘积 Hall 配对中 $P_m = \sum_i p_m^{(i)}$ 的作用。因此，（4.19）中矩阵元的相等性给出

$$\Psi_\delta\, p_{rm}\, \Psi_\delta^{-1} = P_m. \tag{4.20}$$

由于 Ψ_δ 是一个等距映射，对（4.20）取 Hall 伴随得到

$$\Psi_\delta p_{rm}^{\perp} \Psi_\delta^{-1} = P_m^{\perp}. \tag{4.21}$$

现在 $\Phi_\delta = (\omega^{\otimes r})\,\Psi_\delta$，并且 $\omega(p_m) = (-1)^{m-1} p_m$。这就证明了（4.17）。由于 Φ_δ 是一个等距映射，取 Hall 伴随得到（4.18）。□

左乘 P_m 使总次数增加 m，而 $P_m^{\perp}$ 使总次数减少 m。因此，对任意 $w \geq 0$，（4.17）将次数 w 映射到次数 $w+m$，而（4.18）将次数 w 映射到次数 $w-m$，并且当 $w < m$时为零。

对于辅助字母表 A，记作

$$\mathrm{Exp}[A] = \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{p_m[A]}{m}\right), \qquad D(A,X) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} p_m[A] p_m(X)\right).$$

定义产生半顶点算子

$$\Gamma_{r,+}(A) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{p_m[A]}{m} p_{rm}\right), \tag{4.22}$$

并令 $\Gamma_{r,-}(A) = \Gamma_{r,+}(A)^{\perp}$，其中伴随算子只作用于原始对称函数变量。在 $\Lambda_{\mathbb{Q}}(X)$ 上，定义普通半顶点算子

$$\mathcal{H}_+(A) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{p_m[A]}{m} p_m\right), \qquad \mathcal{H}_-(A) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} p_m[A] \frac{\partial}{\partial p_m}\right). \tag{4.23}$$

因此，$\mathcal{H}_+(A)$ 是乘以 $C(A,X) = \mathrm{Exp}[AX]$ 的乘法，而 $\mathcal{H}_-(A)$ 将 $f[X]$ 发送到 $f[X+A]$。算子 $\mathcal{H}_\pm(A)$ 是带有 (4.23) 中归一化的标准产生和湮灭因子；参见 [DLT94，第 4] 节以及 [Jin91]。产生算子的取值属于次数完备化，湮灭算子是局部有限的，而 Φ_δ 和 Ψ_δ 按次数延拓到完备化空间。上标 (i) 表示作用于第 i 个张量因子，算子恒等式中的核表示乘以该核。下文张量空间上的所有伴随算子均使用 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\otimes}$，并保持辅助字母表不变。

对于两个辅助字母表 A，B，$\mathcal{H}_-(B)\mathcal{H}_+(A)$ 中指数的交换子是标量 $\sum_{m\geq 1} p_m[A]p_m[B]/m$。因此，

$$\mathcal{H}_-(B)\mathcal{H}_+(A) = C(A,B)\mathcal{H}_+(A)\mathcal{H}_-(B), \qquad C(A,B) = \mathrm{Exp}[AB]. \tag{4.24}$$

推论 4.6。 对于每个辅助字母表 A,

$$\Psi_\delta \Gamma_{r,\pm}(A)\Psi_\delta^{-1} = \prod_{i=0}^{r-1} \mathcal{H}_\pm^{(i)}(A). \tag{4.25}$$

证明。对 Ψ_δ 作共轭会保持算子的乘积，因此也会保持它们的形式指数。由（4.20）和（4.22），

$$\begin{aligned}
\Psi_\delta \Gamma_{r,+}(A)\Psi_\delta^{-1} &= \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{p_m[A]}{m} P_m\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{m\geq 1} \frac{p_m[A]}{m} p_m^{(i)}\right) \\
&= \prod_{i=0}^{r-1} \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{p_m[A]}{m} p_m^{(i)}\right) \\
&= \prod_{i=0}^{r-1} \mathcal{H}_+^{(i)}(A).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

在（4.26）中，第三个等号利用了不同张量因子上的算子可交换这一性质，最后一个等号则利用了（4.23）。

由于 Ψ_δ 是一个等距映射，在（4.26）中取伴随算子可得

$$\begin{aligned}
\Psi_\delta \Gamma_{r,-}(A)\Psi_\delta^{-1} &= \left(\Psi_\delta \Gamma_{r,+}(A)\Psi_\delta^{-1}\right)^\perp \\
&= \left(\prod_{i=0}^{r-1} \mathcal{H}_+^{(i)}(A)\right)^\perp = \prod_{i=0}^{r-1} \mathcal{H}_-^{(i)}(A).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

由（4.23）和 $p_m^\perp = m\,\partial/\partial p_m$可知， $\mathcal{H}_+^{(i)}$ （A）的伴随算子是 $\mathcal{H}_-^{(i)}$ （A）。因子在（4.27）中的顺序反转后仍得到相同的乘积，因为作用于不同张量因子的算子彼此可交换。□

代数对合 ω_X 仅作用于 X，而保持 A 不变。由于 $\omega_X C(A,\ X) = D(A,\ X)$，对于 $f \in \Lambda_{\mathbb{Q}}(X)$，我们有

$$(\omega_X \mathcal{H}_+(A)\omega_X) f = \omega_X\big(C(A,X)\omega_X f\big) = D(A,X) f. \tag{4.28}$$

将（4.28）应用于（4.25）中的每个张量因子，并利用 $\Phi_\delta = \omega^{\otimes r}\Psi_\delta$，得到

$$\Phi_\delta \Gamma_{r,+}(A)\Phi_\delta^{-1} = \prod_{i=0}^{r-1} D(A, X^{(i)}). \tag{4.29}$$

由于 Φ_δ 是一个等距映射，且 $\Gamma_{r,-}(A) = \Gamma_{r,+}(A)^{\perp}$，对（4.29）取伴随算子可得

$$\begin{aligned}\Phi_\delta \Gamma_{r,-}(A)\Phi_\delta^{-1} &= \left(\Phi_\delta \Gamma_{r,+}(A)\Phi_\delta^{-1}\right)^{\perp} \\ &= \left(\prod_{i=0}^{r-1} D(A, X^{(i)})\right)^{\perp}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

4.5. 诱导作用及其再生核。我们先用商坐标计算$\mathcal{D}_{r,u}$ 的作用，再求其再生核。关键在于将和P_m 与各个字母表的幂和之间的差分开。

在$\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}$ 上定义

$$\widehat{\mathcal{N}}_r = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{rm} P_m P_m^{\perp}. \tag{4.31}$$

对于 $m \geq 1$ 和 $0 \leq a < r-1$，令

$$v_{m,a} = p_m^{(a)} - p_m^{(r-1)}.$$

对于所有 $m, n \geq 1$ 和 $0 \leq a < r-1$,

$$P_m^{\perp}(P_n) = rm\,\delta_{mn}, \qquad P_m^{\perp}(v_{n,a}) = m\delta_{mn} - m\delta_{mn} = 0.$$

对于每个 m，从生成元 $p_m^{(0)}, \ldots, p_m^{(r-1)}$到 $P_m, v_{m,0}, \ldots, v_{m,r-2}$ 的变换在 $\mathbb{Q}$上可逆；事实上，

$$p_m^{(r-1)} = \frac{1}{r}\left(P_m - \sum_{a=0}^{r-2} v_{m,a}\right), \qquad p_m^{(a)} = v_{m,a} + p_m^{(r-1)}.$$

因此， P_m 当 $m \geq 1$时的元素，连同 $v_{m,a}$ 当 $m \geq 1$ 以及 $0 \leq a < r-1$时的元素，自由生成 $\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}$。如果

$$M = \prod_{j\geq 1} P_j^{c_j} \prod_{j\geq 1}\prod_{a=0}^{r-2} v_{j,a}^{d_{j,a}}$$

它是这些生成元的一个单项式，其中指数为非负整数，且除有限多个外均为零，那么 $P_m^{\perp}$ 的导子性质给出

$$\frac{1}{rm} P_m P_m^{\perp}(M) = c_m M, \qquad \widehat{\mathcal{N}}_r(M) = \left(\sum_{m\geq 1} c_m\right) M.$$

因此， $\mathcal{N}_r$ 计算 P_m因子的总数（含重数），而不计算任何 $v_{m,a}$因子。

对于 $u \in \mathbb{Q}$，令 $\widehat{\mathcal{D}}_{r,u}$ 为 $\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}$ 的代数自同态，定义为

$$\widehat{\mathcal{D}}_{r,u}(P_m) = uP_m, \qquad \widehat{\mathcal{D}}_{r,u}(v_{m,a}) = v_{m,a}. \tag{4.32}$$

我们使用 $u^0 = 1$，包括当 $u = 0$。对于 M，4.32）给出

$$\widehat{\mathcal{D}}_{r,u}(M) = u^{\sum_{m\geq 1} c_m} M.$$

等价地，对于 $m \geq 1$ 和 $0 \leq j < r$,

$$\widehat{\mathcal{D}}_{r,u}(p_m^{(j)}) = p_m^{(j)} + \frac{u-1}{r} P_m. \tag{4.33}$$

定理 4.7。对于每个 $r \geq 2$、每个 r-核 δ 以及每个 $u \in \mathbb{Q}$,

$$\Phi_\delta \mathcal{N}_r \Phi_\delta^{-1} = \widehat{\mathcal{N}}_r, \tag{4.34}$$

$$\Phi_\delta \mathcal{D}_{r,u} \Phi_\delta^{-1} = \widehat{\mathcal{D}}_{r,u}. \tag{4.35}$$

证明。由（4.9），

$$\mathcal{N}_r = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{rm} p_{rm} p_{rm}^{\perp}.$$

（4.17）和（4.18）中的两个符号相互抵消，从而证明了（4.34）。在每个有限齐次分量上，$\mathcal{D}_{r,u}$ 和 $\widehat{\mathcal{D}}_r$, 分别将特征值 u^k 赋予 k次特征子空间 $\mathcal{N}_r$ 和 $\widehat{\mathcal{N}}_r$。由于（4.34）在 Φ_δ下标识了这些特征子空间，故这证明了（4.35）。□

（4.35）右侧的算子仅依赖于 r、u。因此，对于每个 r-核 δ，其在商坐标中的作用都相同。

对于另一个 r-元组字母表 $\mathbf{Y} = (Y_{(0)} \ldots, Y_{(r-1)})$，令 $P_m(\mathbf{X}) = \sum_i p_m(X^{(i)})$，并类似地定义 $P_m(\mathbf{Y})$。对于作用于 $\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}$ 上的保次数线性算子 T，如果一个级数 $K_T(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 是其关于乘积霍尔内积的再生核，则称其为该算子的再生核，如果

$$(Tf)(\mathbf{X}) = \langle K_T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), f(\mathbf{Y}) \rangle_{\otimes, \mathbf{Y}} \qquad \left(f \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}\right), \tag{4.36}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\otimes, \mathbf{Y}}$ 仅对 $\mathbf{Y}$ 变量进行配对。乘积柯西核

$$\prod_{j=0}^{r-1} C(X^{(j)}, Y^{(j)}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{P}^r} s_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{X}) s_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{Y}) \tag{4.37}$$

根据（2.4）和（4.36），是恒等算子的再生核。定义

$$\mathcal{C}_{r,u}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \widehat{\mathcal{D}}_{r,u} \left(\prod_{j=0}^{r-1} C(X^{(j)}, Y^{(j)}) \right),$$

其中 $\widehat{\mathcal{D}}_{r,u}$ 仅作用于 $\mathbf{X}$ 变量，并保持 $\mathbf{Y}$ 不变。由于 $\mathcal{D}_{r,u}$ 是保次数代数自同态，将（4.33）应用于$\prod_{j=0}^{r-1} C(X^{(j)}, Y^{(j)})$的指数形式，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{r,u}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{r-1} \left[p_m(X^{(j)}) + \frac{u-1}{r} P_m(\mathbf{X}) \right] p_m(Y^{(j)}) \right) \\ &= \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \left[\sum_{j=0}^{r-1} p_m(X^{(j)}) p_m(Y^{(j)}) + \frac{u-1}{r} P_m(\mathbf{X}) P_m(\mathbf{Y}) \right] \right). \end{aligned} \tag{4.38}$$

第二个等式在 (4.38) 中用到了 $\sum_{j=0}^{r-1} p_m(Y_{(j)}) = P_m(\mathbf{Y})$。级数 $\mathcal{C}_{r,u}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 属于关于 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 变量的张量积的分次完备化。对于每个 $f \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}$，

^对 $\mathcal{D}_{r,u}$ 在 $\mathbf{X}$ 上的作用与 $\mathbf{Y}$中的 Hall 配对可交换。方程 (4.37) 和 (4.36) 因此给出

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{C}_{r,u}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), f(\mathbf{Y})\rangle_{\otimes,\mathbf{Y}} \\
&\quad = \widehat{\mathcal{D}}_{r,u}\left(\left\langle \prod_{j=0}^{r-1} C(X^{(j)},Y^{(j)}), f(\mathbf{Y})\right\rangle_{\otimes,\mathbf{Y}}\right) \\
&\quad = (\widehat{\mathcal{D}}_{r,u} f)(\mathbf{X}).
\end{aligned}$$

^因此$\mathcal{C}_{r,\ u}$ 是$\mathcal{D}_{r}$的再生核，关于乘积霍尔内积。

5. Schur-positive kernels and modular Schur coefficients

我们使用再生核（4.38）来研究模 Schur 系数的符号和大小。首先，我们确定与分次对合复合后得到 Schur 正核的参数值。然后，我们专门研究模舒尔函数，并将其归一化 Schur 系数确定为特化核的系数。对偶 Cauchy 恒等式和 Littlewood–Richardson 规则给出一个非负展开，而与对称群表示的比较给出了定理 5.6 中的阶乘界。结合更精确的界（5.14）和等号判据（5.17），这些结果证明了定理 B。我们还在推论5.16中得到支撑条件（5.3）以及指定主子矩阵的非奇异性。

5.1. 再生核的 Schur 正性。 固定一个整数 $r \geq 2$ 以及两个r-元组的字母表 $\mathbf{X} = (X^{(0)}, \ldots, X^{(r-1)})$ 和 $\mathbf{Y} = (Y_{(0)} \ldots, Y_{(r-1)})$。令 σ 为 $\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}$ 上的分次对合，

$$\sigma(f) = (-1)^{\deg f} f \qquad \text{for homogeneous } f. \tag{5.1}$$

在总商次数 $w \geq 0$中，这提供了归一化 $(-1)^{w}$ 中的因子（5.7）。固定 $u \in \mathbb{Q}$ 并令

$$\tau = \frac{1-u}{r}.$$

扩展 逐次数地作用于 σ 的完备化，并且只作用于 $\mathbf{X}$ 变量。定义 e

$$\mathcal{K}_{r,\tau}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := \sigma(\mathcal{C}_{r,u}(\mathbf{X},\mathbf{Y}))\,.$$

^根据再生恒等式（4.36），$\mathcal{K}_{r,\tau}$ 是$\sigma\mathcal{D}_{r,u}$的再生核。对于 $0 \leq i,j < r$，简记

$$D_{ij} = D(X^{(i)}, Y^{(j)}).$$

若 $a \in \mathbb{Q}$，其有理次幂在分次完备化中解释为

$$D_{ij}^{a} = \exp\left(a \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} p_m(X^{(i)}) p_m(Y^{(j)})\right).$$

由于 $(u-1)/r=-\tau$，核 $\mathcal{C}_{r,\,u}$ 在 (4.38) 中分解为

$$\mathcal{C}_{r,u}(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\prod_i C(X^{(i)},Y^{(i)})^{1-\tau}\prod_{i\neq j}C(X^{(i)},Y^{(j)})^{-\tau}.$$

对于 $m\geq 1$ 和 $0\leq i<r$，式（5.1）给出 $\sigma\left(p_m\left(X^{(i)}\right)\right)=(-1)^m p_m\left(X^{(i)}\right)$。由于 σ 是代数自同构，对于 $a\in\mathbb{Q}$ 和 $0\leq i,\ j<r$ 我们有

$$\begin{aligned}\sigma\big(C(X^{(i)},Y^{(j)})^a\big)&=\exp\left(a\sum_{m\geq 1}\frac{(-1)^m}{m}p_m(X^{(i)})p_m(Y^{(j)})\right)\\&=D_{ij}^{-a}.\end{aligned}$$

因此，指数 $1-\tau$ 和 $-\tau$ 分别变为 $\tau-1$ 和 τ，再将 σ 应用于式（4.38）得到

$$\mathcal{K}_{r,\tau}(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\prod_{i\neq j}D_{ij}^{\tau}\prod_i D_{ii}^{\tau-1}. \tag{5.2}$$

定理 5.1（Schur 正特化）。设 $r\geq 2$ 和 $\tau\in\mathbb{Q}$。$\mathcal{K}_{r,\,\tau}$ 在乘积 *Schur* 基中的所有系数均为非负，当且仅当 $\tau\in\mathbb{Z}_{>0}$。

证明。若 $\tau=Q\in\mathbb{Z}_{>0}$，则式（5.2）中的指数 Q 和 $Q-1$ 均为非负整数。根据式（2.5），每个因子 D_{ij} 都具有非负整数 Schur 系数，而根据 Littlewood–Richardson 规则，乘法保持这一性质。因此，$\mathcal{K}_{r,\,\tau}$ 的所有乘积 Schur 系数均为非负整数。

对于逆向结论，只要 $\tau\notin\mathbb{Z}_{>0}$，我们就能构造出一个负系数。若 $\tau<0$，则对于 $i\neq j$，$s_{(1)}(X^{(i)})s_{(1)}(Y^{(j)})$的系数为 $\tau<0$。若 $0\leq\tau<1$，则$s_{(1)}(X^{(i)})s_{(1)}(Y^{(i)})$的系数为 $\tau-1<0$。

剩下考虑满足 $\tau\notin\mathbb{Z}$的 $\tau\geq 1$。令 $n=\lfloor\tau\rfloor$ 和 $k=n+2$，并固定 $i\neq j$。考虑 $s_{(k)}(X^{(i)})s_{(k)}(Y^{(j)})$的系数，其他每个分量中都取空分拆。由于其他字母表的次数均为零，(5.2) 中除 D_{ij}^{τ}以外的每个因子都必须贡献其常数项。将 $X^{(i)}$ 和 $Y^{(j)}$ 特化为单变量 x 和 y。于是 $s_{(k)}(x)=x^k$，而次数为 k 的其他 Schur 函数均为零；对y也同理。因此该系数为

$$\mathrm{Coef}_{x^k y^k}\left[(1+xy)^{\tau}\right]=\binom{\tau}{k}.$$

由于

$$\binom{\tau}{n+2}=\frac{\tau(\tau-1)\cdots(\tau-n)(\tau-n-1)}{(n+2)!}<0,$$

$\mathcal{K}_{r,\,\tau}$ 不是 Schur 正。 □

由于 $\tau=(1-u)/r$，定理 5.1 表明，$\mathcal{K}_{r,\,\tau}$是 Schur 正的当且仅当

$$u=1-rQ\qquad\text{for some } Q\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

在本小节的其余部分， Q 为正整数。对于 $X = \sum_i X^{(i)}$ 和 $Y = \sum_i Y_{(i)}$，令

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{r,Q}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) &= D(X,Y)^Q \prod_i D(X^{(i)},Y^{(i)})^{-1} \\ &= \prod_{i\neq j} D(X^{(i)},Y^{(j)})^Q \prod_i D(X^{(i)},Y^{(i)})^{Q-1}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

$\widehat{\ }$算子$\sigma\mathcal{D}_{r,\,1-rQ}$ 及其再生核 $\mathcal{K}_{r,\,Q}$ 均与r-核 δ的选择无关。

5.2. **Walker 系数猜想**。 本节余下部分中，令$\mathcal{K}_{r,\,Q}$ 取$Q = 1$。参数 $u = 1 - rQ$ 变为 $1 - r$，而 (5.3) 中的对角因子消失。现在，我们将此核的系数与各固定核空间中的归一化模舒尔系数对应起来，然后利用该核证明非负性和界。

回顾 (2.10) 和 (4.12)，可知

$$\Theta_r = \mathcal{D}_{r,1-r} \qquad \text{on } \Lambda_{\mathbb{Q}} \tag{5.4}$$

对每个 $r \geq 2$ 均成立。设

$$\mathcal{T}_r = \sigma\widehat{\mathcal{D}}_{r,1-r}, \tag{5.5}$$

and

$$\mathcal{K}_r(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := \mathcal{K}_{r,1}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \prod_{i\neq j} D(X^{(i)},Y^{(j)}).$$

固定一个整数 $w \geq 0$。对于 $\boldsymbol{\alpha}$， $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{P}_r(w)$，记

$$\kappa^{(r,w)}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} = \mathrm{Coef}_{s_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{X})s_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Y})}\big[\mathcal{K}_r(\mathbf{X},\mathbf{Y})\big], \qquad A_{r,w} = \big(\kappa^{(r,w)}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}\big). \tag{5.6}$$

$\mathcal{T}_r$ 的再生核为 $\mathcal{K}_r$，因此$A_{r,\,w}$ 是其在 $\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}[w]$ 上的乘积 Schur 基底下的矩阵，其中行索引输出，列索引输入。由于 $\mathcal{K}_r(\mathbf{X},\ \mathbf{Y}) = \mathcal{K}_r(\mathbf{Y},\ \mathbf{X})$，矩阵$A_{r,\,w}$ 是对称的。

现在我们将$A_{r,\,w}$ 与 Walker 的系数矩阵对应起来。假设 λ 和 μ 位于同一个权为 w的 r-块中。利用 r-符号 ε_r，令

$$a_{\lambda\mu} = (-1)^w \varepsilon_r(\lambda)\varepsilon_r(\mu)\,\langle \mathfrak{s}_\lambda, s_\mu\rangle\,. \tag{5.7}$$

固定 $r \geq 2$、一个 r-核 δ以及 $w \geq 0$。根据命题4.1，将 r-商的每个分量取共轭，便得到从 $\mathcal{B}^{(r)}_{\delta\,w}$ 到 $\mathrm{P}_r(w)$的双射，

$$\lambda \longmapsto \boldsymbol{\alpha}(\lambda) = \big((\lambda^{(0)})', \ldots, (\lambda^{(r-1)})'\big).$$

命题 5.2. 对于所有 $\lambda, \mu \in \mathcal{B}^{(r)}_{\delta\,w}$，

$$a_{\lambda\mu} = \kappa^{(r,w)}_{\boldsymbol{\alpha}(\lambda),\boldsymbol{\alpha}(\mu)}. \tag{5.8}$$

证明。在 $\Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}[w]$, (5.1) 表明 σ 作用为 $(-1)^w$。因此 (4.35), (5.4), and (5.5) 得出

$$\Phi_{\delta,w}\Theta_r\Phi_{\delta,w}^{-1} = (-1)^w\mathcal{T}_r \qquad \text{on } \Lambda_{\mathbb{Q}}^{\otimes r}[w].$$

利用（4.15），比较输入 $s_{\boldsymbol{\alpha}(\lambda)}$ 和输出 $s_{\boldsymbol{\alpha}(\mu)}$ 可得

$$\varepsilon_r(\mu)\varepsilon_r(\lambda)\,\langle \mathfrak{s}_\lambda, s_\mu\rangle = (-1)^w\kappa^{(r,w)}_{\boldsymbol{\alpha}(\mu),\boldsymbol{\alpha}(\lambda)}.$$

乘以 $(-1)^w$ 并利用（5.7），得到（5.8）的转置形式。矩阵$A_{r,w}$是对称的，因此这些项按所述顺序相等。□

由（5.8），对 $(a_{\lambda\mu})_{\lambda\text{的行和列同时按}\mu\in\mathcal{B}_\delta^{(r)}}$ 编索引，　　由 $\lambda\mapsto\boldsymbol{\alpha}(\lambda)$ 得到 $A_{r,w}$。w

归一化系数的核无关性是 [Wal94，推论 2.10，第 586]；（5.8）将它们确定为 $\mathcal{K}_r$ 的系数。

现在我们将有限变量基与这些系数矩阵联系起来。固定 $n\geq 1$ 和 $r\geq 2$，并使用$\mathcal{R}_{n\text{矩形}r}$，该矩形来自小节 3.1。定义

$$M_{\mathcal{R}} = \big(\langle \mathfrak{s}_\lambda, s_\mu\rangle\big)_{\lambda,\mu\in\mathcal{R}_{n,r}}.$$

对于一个 r-核 δ 和 $w\geq 0$，其中 $\mathcal{R}_{n,r}\cap\mathcal{B}_\delta^{(r)}{}_{,w}\neq\varnothing$，令

$$J^{n,r}_{\delta,w} = \{\boldsymbol{\alpha}(\lambda) : \lambda\in\mathcal{R}_{n,r}\cap\mathcal{B}^{(r)}_{\delta,w}\}.$$

令 $M^{\mathcal{R}}_{\delta,w}$ 为由该交集索引的 $M_{\mathcal{R}}$ 的子矩阵，并按相同顺序置 $D=\mathrm{diag}(\varepsilon_r(\lambda))$。

推论 5.3。 对于任意 $n\geq 1$ 和 $r\geq 2$，矩阵 $M_{\mathcal{R}}$ 在 $\mathbb{Q}$上非奇异。对于任意 r-核 δ 和 $w\geq 0$，其中 $J^{n,r}_{\delta,w}\neq\varnothing$，主子矩阵 $A_{r,w}[J^{n,r}_{\delta,w}, J^{n,r}_{\delta,w}]$ 是非奇异的。

证明。定理 3.4 和（2.13）给出了$V_{n,n(r-1)}$的两个基，分别由 $\mathfrak{s}_\lambda$ 和s_μ索引。将稳定的舒尔展开特化到 n 个变量时，含有 $\ell(\mu)$ 的项 $>n$ 消失，而含有 $\ell(\mu)\leq n$ 的系数保持不变，因为这些舒尔多项式是线性无关的。属于 $V_{n,n(r-1)}$ 以及其在（2.13）中的 Schur 基，随后迫使所有含有 $\mu_1>n(r-1)$ 的剩余系数为零。因此，$M_{\mathcal{R}}$ 恰好是这两个有限变量基之间的换基矩阵，并且是非奇异的。

齐次性和命题 4.2 使得 $M_{\mathcal{R}}$ 按 r-核和权分块对角。每个非空分块 $M^{\mathcal{R}}_{\delta,w}$ 因此都是非奇异的。对商标签采用相同的次序，命题 5.2 和（5.7）给出

$$A_{r,w}[J^{n,r}_{\delta,w}, J^{n,r}_{\delta,w}] = (-1)^w D M^{\mathcal{R}}_{\delta,w} D. \tag{5.9}$$

由于 $D^2=I$，（5.9）意味着 $A_{r,w}[J^{n,r}_{\delta,w}, J^{n,r}_{\delta,w}]$ 是非奇异的。□

索引集 $J^{n,r}_{\delta,w}$ 不仅取决于核，也取决于 n，r，w；该结论适用于这些指定的主子矩阵。

接下来记录一个展开式，用于在小节 6.5 中计算一个特定的 Schur 系数。对于一个分拆元组 $\boldsymbol{\gamma}$，记 $|\boldsymbol{\gamma}| = \sum_i|\gamma^{(i)}|$。命题 5.4 利用斜舒尔函数和（5.8）中的商约定，将（4.5）中的系数表示出来。

命题 5.4。 对于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in \mathsf{P}_r(w)$，有如下带符号的展开式

$$\kappa^{(r,w)}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} = \sum_{\boldsymbol{\gamma}\in\mathscr{P}^r} (-1)^{|\boldsymbol{\gamma}|} \left\langle \prod_i s_{\alpha^{(i)}/\gamma^{(i)}}, \prod_i s_{(\beta^{(i)})'/(\gamma^{(i)})'} \right\rangle . \tag{5.10}$$

证明。 由命题 4.1，取 λ， $\mu\in\mathcal{B}^{(r)}_{\delta\, w}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\lambda)$ 且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}(\mu)$。由 [Wal94，命题 2.9，第 586], 项对所有分拆 ν 且具有 r- 核 δ 求和

$$\langle \mathfrak{s}_\lambda, s_\mu\rangle = (-1)^w \varepsilon_r(\lambda)\varepsilon_r(\mu) \sum_\nu (-1)^{w(\nu)} \left\langle \prod_{j=0}^{r-1} s_{(\lambda')^{(j)}/(\nu')^{(j)}}, \prod_{i=0}^{r-1} s_{\mu^{(i)}/\nu^{(i)}} \right\rangle .$$

令 $\gamma^{(i)}=(\nu^{(i)})'$。命题 4.1 将该和化为对 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathscr{P}^r$ 的求和，而 $w(\nu)=|\boldsymbol{\gamma}|$。由 (4.5)，将第一个乘积按 $j=r-1-i$ 重新编号，得到 $\prod_i s_{\alpha^{(i)}/\gamma^{(i)}}$，而第二个为$\prod_i s_{(\beta^{(i)})'/(\gamma^{(i)})'}$。乘以 $(-1)^w\varepsilon_r(\lambda)\varepsilon_r(\mu)$，并利用 (5.7) 和 (5.8)，得到 (5.10)。□

在（5.10）中，只有满足 $\gamma^{(i)}\subseteq\alpha^{(i)}$ 且 $\gamma^{(i)}\subseteq\beta^{(i)}$ 对每个 i 的元组才有贡献。这由斜舒尔函数的消失约定可知。

为证明非负性，现在我们直接将 $\mathcal{K}_r$ 利用（2.5）在乘积 Schur 基中展开。对于 $m\geq 1$ 以及分拆 $\rho^{(1)}$，……，$\rho^{(m)}$，τ定义广义刘特伍德–理查森系数如下：

$$c^{\tau}_{\rho^{(1)},\dots,\rho^{(m)}} := \left\langle \prod_{a=1}^{m} s_{\rho^{(a)}}, s_\tau \right\rangle .$$

当 $m=2$ 时，这是普通的 Littlewood–Richardson 系数；对于一般的 m，其非负性可通过反复应用 Littlewood–Richardson 规则得出。

Set

$$\mathcal{I}_r = \{(i,j) : 0\leq i,j<r,\ i\neq j\},$$

并令 $\mathscr{P}^{\mathcal{I}_r}$ 为普通分拆的数组 $\boldsymbol{\rho}=(\rho^{(i,j)})_{(i,j)\in\mathcal{I}_r}$ 的集合。因此，$(\rho^{(i,j)})_{j\neq i}$表示第一指标固定的 $r-1$ 分拆，而$((\rho^{(i,j)})')_{i\neq j}$ 表示第二指标固定的 $r-1$ 分拆的共轭分拆。

系数 $\kappa^{(r,w)}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}$ 也有非负展开式

$$\kappa^{(r,w)}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} = \sum_{\boldsymbol{\rho}\in\mathscr{P}^{\mathcal{I}_r}} \prod_i c^{\alpha^{(i)}}_{(\rho^{(i,j)})_{j\neq i}} \prod_j c^{\beta^{(j)}}_{((\rho^{(i,j)})')_{i\neq j}}. \tag{5.11}$$

只有满足以下条件的数组

$$\sum_{j\neq i} |\rho^{(i,j)}| = |\alpha^{(i)}|, \qquad \sum_{i\neq j} |\rho^{(i,j)}| = |\beta^{(j)}| \tag{5.12}$$

对每个 i 和 j 都可能有贡献。特别地，$A_{r\text{中的每个条目}w}$ 都是非负整数。为证明（5.11），对 $\mathcal{K}_r$ 的每个因子应用（2.5）：

$$D(X^{(i)},Y^{(j)}) = \sum_{\rho^{(i,j)}\in\mathscr{P}} s_{\rho^{(i,j)}}(X^{(i)}) s_{(\rho^{(i,j)})'}(Y^{(j)}) \qquad (i\neq j).$$

固定一个数组 $\boldsymbol{\rho}$，其中涉及 $X^{(i)}$ 的因子为 $\prod_{j\neq i} s_{\rho^{(i,j)}}(X^{(i)})$；其 $s_{\alpha^{(i)}}$ 系数是（5.11）中第一个乘积里相应的 Littlewood–Richardson 系数。同样，涉及 $Y^{(j)}$ 的因子给出第二个乘积，其中每个分拆都取共轭。由于这些字母表彼此独立，这些系数相乘。（5.12）中的条件限制了数组中所有分拆的大小，因此只有有限多个数组有贡献。

方程（5.11）证明了非负整性。接下来，我们用对称群诱导表示的维数来界定系数，从而得到一个可推出所需阶乘界的上界。对于普通分拆 ρ，令 f^ρ 表示形状为 ρ 的标准杨氏表数量，其中 $f^\varnothing = 1$。对于 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathsf{P}_r(w)$，定义

$$d_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{w!}{\prod_i |\alpha^{(i)}|!} \prod_i f^{\alpha^{(i)}}. \tag{5.13}$$

定理 5.5. 对于所有 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta} \in \mathsf{P}_r(w)$，

$$0 \leq \kappa_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}^{(r,w)} \leq \min\{d_{\boldsymbol{\alpha}}, d_{\boldsymbol{\beta}}\} \leq w!. \tag{5.14}$$

证明。我们通过将系数与（5.14）和（2.5）进行比较来证明（5.14），将所得系数解释为对称群诱导表示之间同态空间的维数，并利用嵌入将其嵌入正则表示。

对于 $X = \sum_i X^{(i)}$ 和 $Y = \sum_i Y^{(i)}$，令

$$b_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} = \mathrm{Coef}_{s_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{X}) s_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Y})}[D(X,Y)].$$

因式分解

$$D(X,Y) = \mathcal{K}_r(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \prod_i D(X^{(i)}, Y^{(i)})$$

具有常数项为 1 的 Schur 正因子。从每个对角因子中取出常数项，即可恢复 $\mathcal{K}_r$的系数；其余所有贡献根据 Littlewood–Richardson 规则均为非负。因此 $0 \leq \kappa_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}^{(r,w)} \leq b_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}$。将（2.5）应用于 $D(X, Y)$ 得到

$$b_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} = \sum_{\tau \vdash w} c^{\tau}_{\alpha^{(0)},\ldots,\alpha^{(r-1)}} c^{\tau'}_{\beta^{(0)},\ldots,\beta^{(r-1)}}.$$

对于 $m \geq 0$，令 $\mathfrak{S}_m$ 为作用于 $\{1,\ldots,m\}$上的对称群，其中 $\mathfrak{S}_0$ 是平凡的。对于 $\rho \vdash m$，令 S^ρ 为维数为 f^ρ的不可约复 Specht 模，其中 $S^\varnothing = \mathbb{C}$。用$\boxtimes$ 表示外张量积，用 Ind 表示归纳法，并用 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_w}$ 表示等变复线性映射。令

$$H_{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_i \mathfrak{S}_{|\alpha^{(i)}|}, \qquad U_{\boldsymbol{\alpha}} = \boxtimes_i S^{\alpha^{(i)}}, \qquad I_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathrm{Ind}_{H_{\boldsymbol{\alpha}}}^{\mathfrak{S}_w} U_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

杨子群作用于大小如所示的连续区间上。对于总大小为 w的其他元组，定义相同的对象；子群的指数为 $w!\ /\prod_i |\alpha^{(i)}|!$，因此由归纳法的维数公式可得 $\dim I_{\boldsymbol{\alpha}} = d_{\boldsymbol{\alpha}}$，如（5.13）所示。令 $\boldsymbol{\beta}' = (\,(\beta^{(0)})',\ldots,\ (\beta^{(r-1)})'\,)$。特征映射保持归纳乘积和内积不变，并将不可约特征标映射为 Schur 函数 [Mac95，第一章，（7.3）、（7.5）–（7.6），第 113–114] 页。对于 $\tau \vdash w$，S^τ 在 $I_{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $I_{\boldsymbol{\beta}'}$ 中的重数分别为$c^{\tau}_{\alpha^{(0)},\ldots,\alpha^{(r-1)}}$ 和$c^{\tau'}_{\beta^{(0)},\ldots,\beta^{(r-1)}}$。该

S^τ 在 $I_{\boldsymbol{\beta}'}$ 中的重数可通过对 $\prod_i s_{\beta^{(i)}}$应用 ω 得到。因此，在$\mathbb{C}$上完全可约性给出

$$b_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_w}(I_{\boldsymbol{\alpha}}, I_{\boldsymbol{\beta}'}).$$

有限群的每个不可约复表示都出现在其正则表示中。因此，不可约的 $H_{\boldsymbol{\beta}}$-模 $U_{\boldsymbol{\beta}'}$ 嵌入正则表示 $\mathbb{C}[H_{\boldsymbol{\beta}}]$中。在 $\mathbb{C}$ 上，归纳法是正合的，因此

$$I_{\boldsymbol{\beta}'} \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{H_{\boldsymbol{\beta}}}^{\mathfrak{S}_w} \mathbb{C}[H_{\boldsymbol{\beta}}] \cong \mathbb{C}[\mathfrak{S}_w].$$

与包含映射 $I_{\boldsymbol{\beta}'} \hookrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{S}_w]$ 复合后，会在等变同态空间上得到一个单射。因此，

$$b_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} \le \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_w}(I_{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbb{C}[\mathfrak{S}_w]) = d_{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{5.15}$$

(5.15) 中的等式成立，因为每个不可约表示在正则表示中的重数等于其维数。交换 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 可得 $b_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} \le d_{\boldsymbol{\beta}}$。最后，对每个分拆 $f^\rho \le |\rho|!$， ρ，故由 (5.13) 得到 $d_{\boldsymbol{\alpha}}$， $d_{\boldsymbol{\beta}} \le w!$ □

$\mathcal{K}_r$ 中不含对角因子，这为系数提供了更多信息。对于同一个 $\boldsymbol{\alpha}$， $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{P}_r(w)$，它要求

$$\kappa_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}^{(r,w)} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad |\alpha^{(i)}| + |\beta^{(i)}| \le w \qquad (0 \le i < r). \tag{5.16}$$

事实上，若 $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}^{(r,w)} \neq 0$，取一个数组 $\boldsymbol{\rho}$，使其对 (5.11) 贡献一个非零项。令 $m_{ij} = |\rho^{(i,j)}|$。则

$$|\alpha^{(i)}| = \sum_{j \neq i} m_{ij}, \qquad |\beta^{(i)}| = \sum_{j \neq i} m_{ji}, \qquad w = \sum_{k \neq l} m_{kl}.$$

第 i 行与第 i 列中的元素互不相同，因为对角线元素不存在。因此，它们的和至多为 w，这就证明了（5.16）。

对于一个元组 $\boldsymbol{\alpha}$，记 $\mathrm{supp}(\boldsymbol{\alpha}) = \{i : \ \alpha^{(i)} \neq \varnothing\}$。等式成立 $w!$ 在（5.14）中的判据为

$$\kappa_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}^{(r,w)} = w! \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^{(i)}, \beta^{(i)} \in \{\varnothing, (1)\} \text{ for every } i, \\ \mathrm{supp}(\boldsymbol{\alpha}) \cap \mathrm{supp}(\boldsymbol{\beta}) = \varnothing. \end{cases} \tag{5.17}$$

假设等号成立。方程（5.14）推出 $d_{\boldsymbol{\alpha}} = d_{\boldsymbol{\beta}} = w!$，而（5.13）给出

$$\frac{d_{\boldsymbol{\alpha}}}{w!} = \prod_i \frac{f^{\alpha^{(i)}}}{|\alpha^{(i)}|!} = 1.$$

对于 $|\rho| \ge 2$，标准杨表构成所有双射填充的真子集，因此 $f^\rho/|\rho|! < 1$；当 $\rho = \varnothing$ 或 (1) 时，这个比值为 1。因此，只有当 $\boldsymbol{\alpha}$ 的每个分量为空或为 (1) 时，乘积才可能等于 1；对 $\boldsymbol{\beta}$ 也可用同样的论证。

当 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的每个分量都是 $\varnothing$ 或（1）时，令 $S = \mathrm{supp}(\boldsymbol{\alpha})$ 和 $T = \mathrm{supp}(\boldsymbol{\beta})$。两个支集的基数均为 w。由（5.12）可知，每个有贡献的数组在以 S 为索引的每一行以及以 T为索引的每一列中，恰好有一个非空条目，且每个这样的条目都是（1）。因此，（5.11）中的非零被加项对应于满足以下条件的双射 $\pi : \ S \to T$ 满足

$\pi(i) \neq i$对 $i \in S\cap T$而言，因为对角线条目被排除。每个有贡献的 Littlewood–Richardson 系数都是 1。若 $S\cap T=\varnothing$，则所有 $w!$ 个双射都有贡献。若 $S\cap T\neq\varnothing$，取 $i\in S\cap T$。存在一个 $S\to T$固定 i的双射，它通过任意双射 $i\mapsto i$扩展而成，其中 $S\setminus\{i\}\to T\setminus\{i\}$。因此，有贡献的双射少于 $w!$ 个。这证明了（5.17）的两个方向。当 $w=0$时，唯一的空双射贡献 $1=0!$ 次，且支撑条件是平凡的。

现在我们使用命题 5.2 回到模 Schur 系数。设 $r\geq 2$，并设λ，μ 属于同一个权为 r 的 w-块。令

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\lambda)=\big((\lambda^{(0)})',\dots,(\lambda^{(r-1)})'\big),\qquad \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}(\mu)=\big((\mu^{(0)})',\dots,(\mu^{(r-1)})'\big).$$

定理 5.6 证明了 [Wal94 推论 2.10，第 586] 页之后提出的猜想。

定理 5.6 (Walker 系数猜想)。 对于处于同一个权为 w 的 r-块中的 $r\geq 2$、λ 和 μ，

$$a_{\lambda\mu}=\sum_{\boldsymbol{\rho}\in\mathscr{P}^{\mathcal{I}_r}}\prod_i c^{\alpha^{(i)}}_{(\rho^{(i,j)})_{j\neq i}}\prod_j c^{\beta^{(j)}}_{((\rho^{(i,j)})')_{i\neq j}}. \tag{5.18}$$

系数 $a_{\lambda\mu}$ 是一个非负整数，并且满足 $a_{\lambda\mu}\leq w!$ 。

证明。 命题 5.2给出

$$a_{\lambda\mu}=\kappa^{(r,w)}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}.$$

因此（5.18）由（5.11）推出，其中的各项均为非负整数。阶乘界由定理 5.5推出。□

对于相同的 λ、μ，命题 5.2 将精细界（5.14）、必要条件（5.16）和等号判据（5.17）转移到 $a_{\lambda\mu}$。共轭保持分量大小和杨表维数不变，并固定 $\varnothing$ 和（1）。特别地，当且仅当 λ 和 μ 的每个商分量均为空或为（1），且它们的非空分量集合不相交时，$a_{\lambda\mu}=w!$。两个支集的基数均为 w，因此当且仅当 $r\geq 2w$时，它们才能在 r 条轨道之间彼此不相交。命题 4.1 表明，在具有任意给定 r-核的该分块中，每一对这样的有序支集均可实现。因此，在每个权为w 的分块中，当且仅当 $r\geq 2w$时，界$w!$可以达到。当 $r\geq 2w$时，为第一个支集选择 w 条轨道，再从剩余轨道中为第二个支集选择 w，即可得到达到该界的有序对数量：

$$\binom{r}{w}\binom{r-w}{w}. \tag{5.19}$$

当唯一的系数为 $1=0$ 时，这包括 $w=0!$

6. Simple modular Schur characters

我们证明，模舒尔函数当且仅当其指标分拆满足第6.3小节中回顾的 Carter 条件时，才是简单多项式特征。对于奇素数，引理6.15 将任何不满足 Carter 条件的反例化归为双奇异分拆。第4 节中的算子和范畴除幂使我们能够沿相邻块将单纯性转移到 Rouquier 块。在那里，我们确定

唯一可能的单特征，并利用命题5.4 中的系数公式证明剩余的虚特征标非零。第6.1–6.5 小节确立了这些步骤；第6.6小节将它们汇总起来，并单独处理特征 2。推论6.18 中的分类证明了 [Wal94，猜想 4。6]。

现在令 $r = p$，其中 p 是素数。本节中， $\mathbb{K}$ 是特征为 p的任意无限域，而 $\mathfrak{s}_\lambda$ 取为 $r = p$。

采用第 2.1 小节中关于杨氏图的英语约定， λ 的节点是形如 (a, b) 的数对，其中 $1 \le b \le \lambda_a$，并且

$$h_\lambda(a,b) = \lambda_a - b + \lambda'_b - a + 1, \qquad \operatorname{res}(a,b) = \overline{b-a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \tag{6.1}$$

分别是该节点的钩长和剩余类，其中上横线表示模p的剩余类。对于正整数 m，我们用 $v_p(m)$ 表示其 p-进赋值。

6.1. **海森堡算子与仿射作用。** 我们首先证明，$\mathcal{D}_{p,\ u}$ 这两个第 4.3 小节中的算子，与添加和移除固定剩余类的节点相交换。对于 $\Theta_p = \mathcal{D}_{p,\ 1-p}$，这给出了定理 6.5 的交换假设，我们将在命题 6.10 中应用该定理。在具有 Schur 基的一级 Fock 空间 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 上，对 $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，定义：

$$\begin{aligned} e_i(s_\lambda) &= \sum_{\substack{\nu \subset \lambda \\ \lambda/\nu \text{ is a removable } i\text{-node}}} s_\nu, \\ f_i(s_\lambda) &= \sum_{\substack{\mu \supset \lambda \\ \mu/\lambda \text{ is an addable } i\text{-node}}} s_\mu, \end{aligned} \tag{6.2}$$

其中， i-节点是一个满足 $b - a = i$ 的方格 $(a,\ b)$。 λ 的可移除节点是其杨氏图中的一个方格，删除该方格后所得图仍是某个分拆的杨氏图；可添加节点则是图外的一个方格，添加该方格后所得图是某个分拆的杨氏图。在 $\mathbb{Q}$ 上，置 $e_i^{(c)} = e_i^c/c!$ 和 $f_i^{(c)} = f_i^c/c!$ 为 $c \ge 0$。

为了按剩余类区分节点操作，我们回顾分拆的仿射权。对每个 $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，令 $n_i(\lambda)$ 表示 λ 的 i- 节点数。令 Λ_0 为 empty partition 的权，并令 α_i 为 $A^{(1)}_{p-1}$ 型的仿射单根。 λ 的仿射权（也赋予 s_λ）为

$$\operatorname{wt}(\lambda) = \Lambda_0 - \sum_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} n_i(\lambda)\alpha_i. \tag{6.3}$$

对于下面的论证， α_i 可以视为记录剩余类计数的独立符号。因此，两个分拆具有相同的权，当且仅当所有这些计数都相同；特别地，它们具有相同的大小，因为 $|\lambda| = \sum_i n_i(\lambda)$。

对于权 ϖ，权空间 $\mathcal{W}_\varpi \subseteq \Lambda_{\mathbb{Q}}$ 是由 $\mathbb{Q}$-倍的 Schur 函数 s_λ所张成，且 $\operatorname{wt}(\lambda) = \varpi$。记 pr_ϖ 为在舒尔展开中恰好保留这些项的投影；若不存在权为 ϖ的分拆，则该投影为零。对于固定大小的分拆，权相等等价于 p-核相等 [HTY14，第 5.3 节，方程 (8)]。在命题 6.1中，我们使用这些投影来选取在添加或移除一个节点后剩余类为 i 的项，而不限制该节点的剩余类。

命题 6.1。 对于任意 $u \in \mathbb{Q}$、任意剩余类 i 以及任意 $c \geq 0$,

$$\mathcal{D}_{p,u} e_i^{(c)} = e_i^{(c)} \mathcal{D}_{p,u}, \qquad \mathcal{D}_{p,u} f_i^{(c)} = f_i^{(c)} \mathcal{D}_{p,u}. \tag{6.4}$$

证明。 只需证明 $c = 1$的断言即可。根据（4.12），代数自同态$\mathcal{D}_{p,\ u}$ 固定 p_1，并独立地将其他幂和变量按 p_1进行缩放。因此，它与乘以 p_1 以及 $p_1^{\perp} = \partial/\partial p_1$的算子均可交换。Pieri 规则及其 Hall 伴随给出

$$p_1 s_\lambda = \sum_{\substack{\mu \supset \lambda \\ |\mu/\lambda|=1}} s_\mu, \qquad p_1^{\perp} s_\lambda = \sum_{\substack{\nu \subset \lambda \\ |\lambda/\nu|=1}} s_\nu.$$

因此，这些算子会添加或移除任意剩余类的一个节点。

由于 $\mathcal{D}_{p,\ u}$ 保持次数不变，命题 4.4 表明，它保持每个固定次数的p-核分块，因而保持每个权空间。由此可知，$\mathcal{D}_{p,\ u}$ 与每个 pr_ϖ交换：作用于舒尔展开时，不会将项从一个权空间移到另一个权空间。

现在令 $F \in \mathcal{W}_\varpi$。根据（6.3），添加一个 i-节点会将权变为 $\varpi - \alpha_i$，而移除一个 i-节点会将其变为 $\varpi + \alpha_i$。不同的剩余类会给出不同的目标权。因此，将 $p_1 F$ 和 $p_1^{\perp} F$ 的展开投影到这些目标空间上，恰好保留（6.2）中的各项：

$$f_i F = \mathrm{pr}_{\varpi - \alpha_i}(p_1 F), \qquad e_i F = \mathrm{pr}_{\varpi + \alpha_i}(p_1^{\perp} F). \tag{6.5}$$

利用（6.5）以及刚刚证明的交换关系，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{p,u}(f_i F) &= \mathcal{D}_{p,u}\big(\mathrm{pr}_{\varpi-\alpha_i}(p_1 F)\big) \\ &= \mathrm{pr}_{\varpi-\alpha_i}\big(p_1 \mathcal{D}_{p,u}(F)\big) \\ &= f_i \mathcal{D}_{p,u}(F). \end{aligned}$$

最后一个等式用到了 $\mathcal{D}_{p,\ u}(F) \in \mathcal{W}_\varpi$。将 p_1 替换为 $p_1^{\perp}$，并将 $\varpi - \alpha_i$ 替换为 $\varpi + \alpha_i$，即可证明 e_i 的断言。由于 Schur 基是各权空间的基的并集，这两个交换关系在整个 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 上都成立。取幂并除以 $c!$ $\mathbb{Q}$，即可证明 6.4）对$c \geq 1$成立；对于 $c = 0$，结论显然成立。 □

第 4.3 小节中的海森堡作用与由（6.2）中的算子生成的导出仿射李代数作用 [HY13，第 2.3 节和引理 2.4(2)] 交换。

由（5.4）和（6.4），$\Theta_p = \mathcal{D}_{p,\ 1-p}$ 与 Chevalley 算子的所有除幂都交换。

命题6.2 是 [JL26，定理 8。11]。它给出了 [Wal94，猜想 4 的对称函数情形。7] 对于奇素数。我们将在引理 6.15中用它排除 p-限制情形。

命题 6.2。 对于每个奇素数 p 以及每个分拆 λ，$\mathfrak{s}_\lambda = s_\lambda$ 蕴含 λ 是一个 p-核。

6.2。 **范畴除幂**。 命题6.1 中的交换关系涉及对称函数。现在，在假设（6.7）成立的情况下，我们利用多项式表示上的运算，在由除幂相联系的特征之间传递单纯性。引理 6.3确定了整特征群，而引理 6.4 表明，简单对象的每个自同态都是数量乘法。定理 6.5 随后给出了两个特征同时为单纯特征的相应判据。

我们使用严格多项式函子，在维数变化时统一描述多项式表示。对于一个整数 $d \geq 0$，这样的函子 M 为每个有限维 $\mathbb{K}$-向量空间 V赋予一个有限维向量空间 $M(V)$，并为每个线性映射 $f\colon V \to W$赋予一个线性映射 $M(f)\colon M(V) \to M(W)$，且与恒等映射和复合相容。由于 $\mathbb{K}$ 是无限的， M 齐次次数为 d 这一条件意味着，在选定的基下， $M(f)$的各项是关于f的各项的齐次次数为 d的多项式，并且对于所有 V, W，次数都相同。例如， $M(V) = V^{\otimes 2}$和 $M(f) = f^{\otimes 2}$给出一个次数为二的函子。有关进一步背景，请参见 [HTY14，第 4.1–4.3] 节。

令 $\mathcal{P}_d$ 为齐次次数为d 的严格多项式函子在 $\mathbb{K}$上的范畴，并令 $\mathcal{P} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_d$。对于每个正整数 $n \geq d$，求值 $M \mapsto M(\mathbb{K}^n$将$\mathcal{P}_d$ 与d 的有限维次数为 $GL_n(\mathbb{K})$[FS97，引理 3.4]。因此，固定次数下的对象和映射可以通过这些表示来理解；函子记号使我们能够在不必每一步都选择新的秩的情况下改变次数。

对于 $M \in \mathcal{P}_d$ 和正整数 $n \geq d$，每个 $g \in GL_n(\mathbb{K})$ 都以 $M(g)$ 的方式作用于 $M(\mathbb{K}^n)$。该表示的形式特征将其关于对角矩阵的公共特征子空间维数记录为相应权单项式[Gre07，第 3.2 节和第 3.4] 节的系数。这些对称多项式在将额外变量设为零时彼此相容，因此定义了 M 在 Λ中的形式特征。尽管 $\mathbb{K}$ 的特征为 p，其系数仍是整数维数。对于 $\eta \vdash d$，记 W_η 和 $L(\eta)$ 为由 η 标记的 Weyl 函子和简单严格多项式函子。记 l_η 为 $L(\eta)$ 的形式特征；简单特征指其中一个 l_η。

设 $K_0(\mathcal{P})$ 为 Grothendieck群：它由对象的类 $[M]$ 生成，这些对象属于$\mathcal{P}$，并满足以下关系

$$[M] = [M'] + [M''] \text{对于每个短正合列 } 0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \quad .$$

这些关系保留了简单合成因子的重数，却不记录它们如何通过扩张结合在一起。记 ch $[M]$为 M的形式特征。它在短正合列上的可加性给出了特征映射

$$\mathrm{ch}\colon K_0(\mathcal{P}) \longrightarrow \Lambda.$$

下面关于特征群和自同态环的断言对每个素数 p均成立。当p 为奇数时，对于 $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，令 E_i， F_i 为作用在 i 上的剩余类 Chevalley函子， $\mathcal{P}$ 由[HTY14，定理 4]给出。这些函子作用于表示，并分别将次数降低或提高 1。它们是正合的，也就是说，它们保持短正合列不变，因此在 $K_0(\mathcal{P})$ 上诱导出加性映射。下一个引理确定整数特征群，并将这些映射与（6.2）中的算子联系起来。

引理 6.3。映射 ch 是一个 $\mathbb{Z}$-模同构，其中 $\mathrm{ch}[W_\eta] = s_\eta$ 和$\mathrm{ch}[L(\eta)] = l_\eta$ 对每个分拆 η 均成立。对于奇数 p，由 E_i、 F_i 诱导的自同态在此同构下分别对应于 e_i、 f_i。

证明。的每个对象 $\mathcal{P}_d$ 都有有限长度，因为取值后得到一个有限维表示。根据 [HTY14，定理 2(i) 以及推论 2], 中的证明，类 $[L(\eta)],\eta \vdash d$构成 $\mathbb{Z}$的一个基 $K_0(\mathcal{P}_d)$，并且对于 $\eta \vdash d$ 有

$$[W_\eta] = [L(\eta)] + \sum_{\substack{\nu \vdash d \\ \nu <_{\mathrm{lex}} \eta}} m_{\eta\nu}[L(\nu)] \qquad (m_{\eta\nu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}). \tag{6.6}$$

(6.6) 中的基变换在 $\mathbb{Z}$上是单位上三角的，因此这些 $[W_\eta]$ 也构成一个 $\mathbb{Z}$基。它们的特征为 s_η，这是由 [HTY14，命题 2(ii)]中与韦伊模的对应关系得到的。因此，ch 将一个 $\mathbb{Z}$基映为 Schur 基，并且是同构；根据定义，$\mathrm{ch}[L(\eta)] = l_\eta$ 成立。

对于奇数 p, [HTY14，命题 7] 在将 $K_0(\mathcal{P})$ 与 $\mathbb{C}$张量化后，将 E_i, F_i 的作用与 e_i, f_i 对应起来。正合性使得 E_i, F_i 在 $\mathbb{Z}$上的 $K_0(\mathcal{P})$ 上作用，而 (6.2) 表明 e_i, f_i保持 Λ。由于 Λ 嵌入 $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$，这些算子恒等式在 $\mathbb{Z}$上已经成立。□

引理 6.3 将函子 E_i、 F_i 与特征上的算子 e_i、 f_i 联系起来。接下来，我们将在引理 6.4 中证明， $\mathcal{P}$ 的简单对象的每个自同态都是恒等映射的数量倍，正如定理 6.5的证明所需。

记 S_η^{pol}为以 η为指标的舒尔函子。对于函子 $M \in \mathcal{P}$ 和有限维 $\mathbb{K}$-向量空间 V，其 Kuhn 对偶为 $M^\#(V) = M(V^*)^*$，其中 $*$表示 $\mathbb{K}$-线性对偶。此对偶会反转映射，并将单射变为满射。记 $\operatorname{soc} M$为 M的底，即其所有简单子对象之和。在 [HTY14中，定义 4(2)–(3) 和定理 2(i)], 通过 Kuhn 对偶定义了 Weyl函子，并证明舒尔函子的底是简单对象。用我们的记号表示，

$$W_\eta = (S_\eta^{\mathrm{pol}})^\#, \qquad L(\eta) = \operatorname{soc} S_\eta^{\mathrm{pol}}.$$

引理 6.4. 对于每个分拆 η,

$$\mathrm{End}_{\mathcal{P}}(L(\eta)) = \mathbb{K}.$$

证明. 底嵌入给出 $u : L(\eta) \hookrightarrow S_\eta^{\mathrm{pol}}$. 对 u 偶化并使用 $L(\eta)^\# \cong L(\eta)$ 中的 [HTY14，定理 2(ii)] 给出一个满射 $q : W_\eta \twoheadrightarrow L(\eta)$. 因此我们有

$$W_\eta \xrightarrow{q} L(\eta) \xrightarrow{u} S_\eta^{\mathrm{pol}}.$$

复合定义了一个 $\mathbb{K}$-线性映射

$$\Phi : \mathrm{End}_{\mathcal{P}}(L(\eta)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(W_\eta, S_\eta^{\mathrm{pol}}), \qquad \Phi(a) = u \circ a \circ q.$$

映射 Φ 是单射：由于 u 是单射且 q 是满射， $u \circ a \circ q = 0$ 推出 $a = 0$。根据 [HTY14，定理 2(iv)],

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(W_\eta, S_\eta^{\mathrm{pol}}) \cong \mathbb{K}.$$

因此，$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{End}_{\mathcal{P}}(L(\eta)) \leq 1$。恒等映射的数量倍构成一个一维子空间，因此等式成立，自同态环为 $\mathbb{K}$。□

有了引理 6.3 和 6.4 之后，我们现在将除幂与特征标的单纯性联系起来。对于定理 6.5，假设 p 为奇数。令 $\Psi:\ \Lambda_{\mathbb{Q}} \to \Lambda_{\mathbb{Q}}$ 为一个保持次数的$\mathbb{Q}$-线性映射，它是单射，满足 $\Psi(\Lambda) \subseteq \Lambda$，并且与每个 e_i 和 f_i交换。固定分拆 α、β、一个剩余类 $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$以及一个整数 $c \geq 0$，满足

$$f_i^{(c)} s_\alpha = s_\beta, \quad f_i^{(c+1)} s_\alpha = 0, \qquad e_i^{(c)} s_\beta = s_\alpha, \quad e_i^{(c+1)} s_\beta = 0. \tag{6.7}$$

第一个和第三个恒等式将这两个 Schur 函数联系起来。接下来的除幂消失，将确定我们转向表示时最后几个非零步骤。

定理 6.5（除幂与简单特征）。 在这些假设下，

$$\Psi(s_\alpha) \text{ is a simple character} \iff \Psi(s_\beta) \text{ is a simple character.} \tag{6.8}$$

证明。对于 $c = 0$，（6.7）给出 $\alpha = \beta$，因此结论显然成立。设 $c \geq 1$。我们首先通过表示上的函子，将除幂算子作用于特征。然后利用（6.7）确定简单对象的最后一个非零除幂，并证明两个方向的蕴含。

对于每个整数 $k \geq 1$，[HTY14 的构造，定理 4] 给出了对称群 $\mathfrak{S}_k$ 在 k 重复复合 E_i^k，F_i^k 上的作用。仿照 [CR08，第 3.1.4 节和第 5.2 节，2], 我们将除幂函子 $E_i^{(k)}$，$F_i^{(k)}$ 定义为相应作用中所有置换算子之和的像。对于 $k = 0$，二者都是恒等函子。根据 [CR08，引理 5，13], 它们是正合直和项，并满足

$$F_i^k \cong \left(F_i^{(k)}\right)^{\oplus k!}, \qquad E_i^k \cong \left(E_i^{(k)}\right)^{\oplus k!}. \tag{6.9}$$

这里 $\oplus k!$ 表示 $k!$ 个副本的直和。在（6.9）中取特征并使用引理6.3可得，对任意 $M \in \mathcal{P}$, $k!$ ch $[F^{(k)}{}_i \ M] = f_i^k \mathrm{ch}[M]$，同样地也适用于 E_i。将整数特征环视为 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 的子环，我们可以约去 $k!$，从而得到

$$\mathrm{ch}[F_i^{(k)} M] = f_i^{(k)} \,\mathrm{ch}[M], \qquad \mathrm{ch}[E_i^{(k)} M] = e_i^{(k)} \,\mathrm{ch}[M]. \tag{6.10}$$

因此，除法是在有理特征空间中进行的；无需在 $k!$ 中对 $\mathbb{K}$ 求逆。设 Ψ（s_α） $=\mathrm{ch}[L]$ 是简单对象 L的特征。利用（6.10）、与 f_i的交换性以及（6.7），可得

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}[F_i^{(c)} L] &= f_i^{(c)} \Psi(s_\alpha) = \Psi(f_i^{(c)} s_\alpha) = \Psi(s_\beta) \neq 0, \\ \mathrm{ch}[F_i^{(c+1)} L] &= \Psi(f_i^{(c+1)} s_\alpha) = 0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

非零性利用了 Ψ的单射性。一个 $\mathcal{P}$ 的实际对象只有在其为零时才具有零特征：根据引理 6.3，其 Grothendieck 类于是为零；而非零对象具有长度为正的合成列。因此，（6.11）推出

$$F_i^{(c)} L \neq 0, \qquad F_i^{(c+1)} L = 0.$$

由（6.9），同样的非零性与消失结论也适用于 $F_i^c L$和 $F_i^{c+1} L$。因此，c是对 L反复应用 F_i 所得的最后一个非零步骤。 F版本的 [CR08，命题 5.20(a)] 适用于 [HTY14定理 4]所给出的函子；其关于.....的条件

简单对象的自同态由引理 6.4得出。因此 $F_i^{(c)}L$ 是简单对象。它在（6.11）中的特征为 Ψ（s_β），由此证明了一个方向。

反之，若 $\Psi(s_\beta) = \mathrm{ch}[L']$ 是一个简单对象的 L'，则涉及 e_i 于（6.7）中的两个恒等式给出

$$\mathrm{ch}[E_i^{(c)}L'] = \Psi(s_\alpha) \neq 0, \qquad \mathrm{ch}[E_i^{(c+1)}L'] = 0.$$

引理 6.3 和（6.9）因此给出 $E_i^c L' \neq 0$ 以及 $E_i^{c+1}L' = 0$。因此， c 是 E_i 在 L'上的最后一个非零步骤。 ECR08 的 [CR08版本，命题 5.20(a)] 使得 $E_i^{(c)}L'$ 成为简单对象，其特征为 Ψ（s_α)。这证明了逆向蕴含。□

命题 6.10 将应用定理 6.5 ，其中 $\Psi = \Theta_p$。命题 6.1 已经提供了所需的交换关系，而恒等式（6.7）将在该应用中得到验证。

6.3. **受限成分与余项**。 在本小节中， p 可以是任意素数。我们确定哪个单特征可能等于 $\mathfrak{s}_\lambda$。命题 6.6将其在所有 p-受限简单标签处的系数与斯佩希特模合成重数对应起来。如果 Specht 模可约，这已经排除了单纯性。否则只剩下一个候选者，而命题6.8将问题归结为虚余项的消失。

若没有任何正部出现至少 p 次，则分拆是 p-正则的；若其共轭分拆是 p-正则的，则分拆是 p-限制的。为了比较 Specht 模的重数与简单特征标系数，我们对简单对称群模采用 p-限制的标签。

本节中， S^τ 表示域 $\mathbb{K}$上的行 Specht 模块，以取代第 5 节中使用的复模。对于 $\tau \vdash d$ ，若其为 p-正则的，记 D^τ 为其简单商；由此得到所有简单 $\mathbb{K}\mathfrak{S}_d$-模 [Jam78b，定理 4.9、11.1 和 11。5]。用 sgn 表示符号表示。对于每个分拆 λ，令

$$S_\lambda = S^{\lambda'} \otimes \mathrm{sgn} \cong (S^\lambda)^*. \tag{6.12}$$

该同构是 Specht 模 [Jam78b 的标准对偶同构，定理 8。15]。若 ν是 p-限制的，定义 $D_\nu = D^{\nu'} \otimes$sgn。与符号表示张量化会保持简单模和商映射，且该操作是自身的逆。因此， D_ν 是 S_ν的唯一简单商，这些标签再次给出所有简单模。因此，与符号表示张量化并对标签取共轭，可在行与列的约定之间转换。对于 p-正则分拆 τ，穆利纽克斯对合 ι_p 由下式刻画：

$$D^{\iota_p(\tau)} \cong D^\tau \otimes \mathrm{sgn}\,. \tag{6.13}$$

对于有限长度模 M 和简单模 D，记 $[M : D]$ 为 D 在 M的合成列中的重数。对于 $\lambda \vdash d$，利用引理6.3的整系数简单特征基定义整数 $q_{\lambda\nu}$：

$$\mathfrak{s}_\lambda = \sum_{\nu \vdash d} q_{\lambda\nu} l_\nu.$$

命题6.6将这些多项式特征标系数与对称群模的合成重数联系起来。

命题 6.6。 对于每个 $\lambda \vdash d$ 以及每个 p-受限分拆 $\nu \vdash d$，

$$q_{\lambda\nu} = [S_\lambda : D_\nu]. \tag{6.14}$$

证明。 根据 [Wal94、命题 4.2 及前面的讨论，第 601], 对于 p-受限 ν， l_ν 在 $\mathfrak{s}_\lambda$ 中的系数等于 s_λ中的系数，即 $[S_\lambda : D_\nu]$。 □

Carter 条件要求每一列中钩长的 p-进赋值都保持不变。这样的分拆必然是 p-正则的：如果某个正部分至少出现 p 次，那么该组相等行的最右列中的钩长将包括p 和 1，这与列条件矛盾。定理 6.7 给出了此情形下的单特征，并排除了其他 p-正则分拆的单纯性。

定理 6.7。 如果 λ满足 *Carter* 条件，则

$$\mathfrak{s}_\lambda = l_{\iota_p(\lambda)'}. \tag{6.15}$$

如果 λ 是 p-正则的但不满足 *Carter* 条件，那么 $\mathfrak{s}_\lambda$ 不是严格多项式函子的特征。

定理 6.7在 [Wal94，定理 4 中得到证明，4], 其中关于非单纯性的断言针对所有充分大的秩。事实上，如果 $\mathfrak{s}_\lambda = l_\mu$ 在 Λ中，那么对每个 $n \geq |\lambda|$，其特化将是单纯多项式 $GL_n(\mathbb{K})$-模 $L(\mu)(\mathbb{K}^n)$的特征。取 n充分大的秩就会与 Walker 的结论矛盾。

现在，我们寻求得到定理 6.7中无需 p-正则性假设的非单纯性结论。我们将带有 p-限制标签的项（这些项已由命题 6.6确定）与其余各项分开。

对于虚多项式特征标 $x = \sum_{\nu\vdash d} c_\nu l_\nu$，将其限制投影定义为仅保留带有 p-限制标签的项：

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{res}}(x) = \sum_{\substack{\nu\vdash d \\ \nu \text{ is } p\text{-restricted}}} c_\nu l_\nu. \tag{6.16}$$

根据命题 6.6，对于每个 $\lambda \vdash d$,

$$\mathrm{pr}_{\mathrm{res}}(\mathfrak{s}_\lambda) = \sum_{\substack{\nu\vdash d \\ \nu \text{ is } p\text{-restricted}}} [S_\lambda : D_\nu] l_\nu. \tag{6.17}$$

对于每个分拆 λ，定义 $R_\lambda = \mathfrak{s}_\lambda - \mathrm{pr}_{\mathrm{res}}(\mathfrak{s}_\lambda)$。因此， R_λ 汇集了所有带有非-p-限制标签的项。它是一个虚特征标，其单特征标系数可能为负。

命题 6.8。 对于每个分拆 λ，如果 S_λ 是可约的，则 $\mathfrak{s}_\lambda$ 不是单特征。如果 S_λ 是不可约的，则

$$\mathfrak{s}_\lambda \textit{ is a simple character} \iff R_\lambda = 0.$$

证明。 如果 S_λ 是可约的，则（6.17）中的非负重数之和就是其合成长度，且至少为二。单特征的投影要么为零，要么是单个 l_ν，因此 $\mathfrak{s}_\lambda$ 不可能是单特征。

如果 $S_\lambda \cong D_\mu$ 对于一个 p-限制分拆 μ，那么（6.17）给出

$$\mathfrak{s}_\lambda = l_\mu + R_\lambda, \qquad R_\lambda \in \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{l_\nu : \nu \vdash |\lambda|,\ \nu \text{ is not } p\text{-restricted}\}. \tag{6.18}$$

R_λ 中没有任何项的标签是 μ。因此， $R_\lambda = 0$ 推出 $\mathfrak{s}_\lambda = l_\mu$。反过来，如果 $\mathfrak{s}_\lambda$ 是简单的，那么它的限制投影 l_μ 迫使它本身就是 l_μ ，所以 $R_\lambda = 0$。□

为描述接下来讨论的情形，我们在分拆上引入另外两个条件。如果一个分拆既不是 p-正则的，也不是 p-受限的，则称其为双奇异分拆。如果一个分拆 λ 是 p-JM 分拆，则其图中不存在三个节点 (a,b)、(a,y)、(x,b)，使得 $v_p(h_\lambda(a,b)) > 0$，且该赋值不同于 $v_p(h_\lambda(a,y))$ 和 $v_p(h_\lambda(x,b))$ 的赋值。 p-JM 分拆这一术语与 (p,p)-JM 分拆在 [Fay05 、猜想1.1 及其后续讨论]中的含义一致。在该术语体系中，满足 Carter 条件的分拆，以及其共轭分拆满足该条件的分拆，分别称为 (p,p)-Carter 分拆和共轭 (p,p)-Carter 分拆。等价地，它们分别是 p-正则和 p-受限的 p-JM 分拆。

对于奇数 p，命题 6.11将双奇异 p-JM 分拆的单纯性问题归约到 Rouquier 块，而定理 6.13 证明了该处的单纯性。第 $R_\lambda \neq 0$小节完成了分类：引理 6.15将所有不满足 Carter 条件的奇数 p 反例归约到这一情形，而命题 6.14 则处理 $p = 2$。

6.4. **相邻块与归约到 Rouquier 块。** 本小节及下一小节中，假设 p 为奇数。我们将双奇异 p-JM 分拆的单纯性问题归约到 Rouquier 块，其商结构将在第 6.5 小节中用于证明余项的非零性。引理 6.9 和命题 6.10 分别表明，在相邻块之间转换会保持双奇异性和单纯性。命题 6.11 随后沿着一系列相邻块应用这些结果，直至到达一个 Rouquier 块。

这里的相邻关系定义如下。固定一个权为 w 的 p-块 B ，并为 $0 \le j < p$ 选择一个轨道 j 上有 $b_j > 0$ 颗珠子的算盘。通过在所有轨道上添加相同数量的珠子，我们可以使排列图足够大，从而表示 B 中的每个分拆。取 $0 \le k < p$，并令

$$c = \begin{cases} b_{k-1} - b_k, & k > 0, \\ b_{p-1} - b_0 + 1, & k = 0. \end{cases}$$

当 $k = 0$ 时，额外的 1 表示在算盘的下一个层级从轨道 $p-1$ 移至轨道 0。当 $c > 0$ 时，令 C 为权为 w 的块，其在轨道 $k-1$ 上的跑道计数为 $b_{k-1} - c$，在轨道 k 上的跑道计数为 $b_k + c$，在其他轨道上的计数则与 B 相同；下标按模 p 读取。这些块称为相邻块。若 B 的分拆大小为 d，则 C 的分拆大小为 $d + c$。

例如，取 $p = 3$、$w = 1$，并令 B 为包含 (4, 1) 的块。(4, 1) 的六珠显示的跑道计数为 (3, 1, 2)。取 $k = 1$ 得到 $c = 3 - 1 = 2$。将位置 3 和 9 上的珠子移至位置 4 和 10，得到 (5, 1, 1) 的排列图，其跑道计数为 (1, 3, 2)，如图 6.1 所示。两个核分别为 (1, 1) 和 (2, 1, 1)，因此根据 (4.4)，两个分拆的权均为 1。因此，(5, 1, 1) 属于相邻块 C，而 B 和 C 中分拆的大小分别为 5 和 $7 = 5 + c$。

设 B，C 是上述相邻块，并设 $\alpha \in B$ 是一个 p-JM 分拆。根据 [Fay05第 3 节以及引理 3 的证明，2], 存在一个剩余类 i 使得 α 恰好有 c 个可加

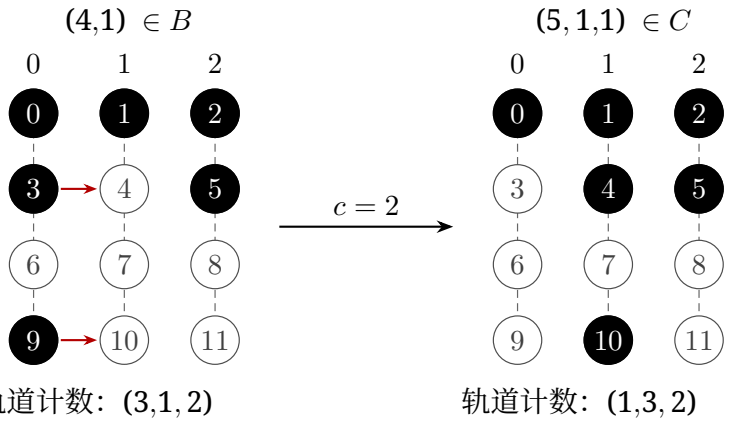


FIGURE 6.1. 在权为 1 的相邻 3-块的代表元之间的移动 $3 \mapsto 4$ 和 $9 \mapsto 10$ 。实心圆表示珠子，空心圆表示空位；圆圈中的数字是算盘位置。

i 个节点且没有可移除的 i 节点。将所有这些节点添加进去，得到一个 p-JM 分拆 $\beta \in C$，其可移除的 i 节点恰好是所添加的 c 个节点，并且没有可加的 i 节点。

在图 6.1的例子中， $\alpha = (4,\ 1)$ 和 $\beta = (5,\ 1,\ 1)$，其中 $i = 1$ 和 $c = 2$。的两个可添加 1-节点是 (1，5) 和 (3，1)；将它们添加后得到 β，而从 β 中移除它们则恢复 α。对于引理 6.9 和命题 6.10，固定任意一对 α，β 它由上述构造得到。

引理 6.9。分拆 α 是 p-正则的，当且仅当 β 是 p-正则的。同样， α 是p-受限的，当且仅当 β 是 p-受限的。

证明。我们证明一个稍微更一般的初等事实。这里所有剩余类均模p取值。设 ξ 为任意一个没有剩余类为 i的可移除节点的分拆，并令 ζ 由添加其所有剩余类为 i的可添加节点得到。我们断言

$$\xi \text{ is } p\text{-regular} \quad \Longleftrightarrow \quad \zeta \text{ is } p\text{-regular}. \tag{6.19}$$

对于 $L \geq 1$，用 $m_L(\xi)$ 和 $m_L(\zeta)$ 分别表示 L 在 ξ 和 ζ中的重数。如果$m_L(\xi) > 0$，则长度为 L 的行占据位置 a_L、……、b_L，其中 $b_L = a_L + m_L(\xi) - 1$。该组末尾的可移除节点具有剩余类

$$r_L = \overline{L - b_L},$$

而其第一行末尾的可添加节点的剩余类为

$$q_L = \overline{L + 1 - a_L}.$$

该假设指出，对于出现在 ξ 中的每个部分 L ， $r_L \neq i$ 。对于这样的 L，若 $q_L = i$ ，则令 $\delta_L = 1$；否则令 $\delta_L = 0$ ；若不存在 L ，则令 $\delta_L = 0$ 。最后，若创建新末行的可添加节点具有剩余类 i，则令 $\delta_0 = 1$ ；否则令 $\delta_0 = 0$ 。添上所有这些外角后，对每个 $L \geq 1$，

$$m_L(\zeta) = m_L(\xi) - \delta_L + \delta_{L-1}. \tag{6.20}$$

项 $-\delta_L$ 记录一行的长度从 L 变为 $L+1$，而 $+\delta_{L-1}$ 记录一行从 $L-1$ 变为 L。因此，重数最多改变一，我们只需检查它何时可能跨过阈值 p。

首先假设 $m_L(\xi) \geq p$，因此 ξ 不是 p-正规分拆。只有当 $m_L(\xi) = p$ 且 $\delta_L = 1$ 时，p 以下才可能出现下降。但此时 $q_L - r_L = m_L(\xi) = 0$，所以 $r_L = q_L = i$，矛盾。因此，一个非 p-正规分拆不可能变成 p-正规分拆。

反过来，假设 ξ 是 p-正规分拆，但 ζ 不是。由 (6.20) 可知，某个部分 L 必须满足 $m_L(\xi) = p-1$、$\delta_{L-1} = 1$ 和 $\delta_L = 0$。将长度为 $L-1$ 的行提升为长度 L 的节点位于第 b_L+1 行，其剩余类为 $L - b_L - 1 = r_L - 1$。由于 $m_L(\xi) = p-1$，还可得到 $q_L = r_L - 1$。因此，该节点与第 a_L 行中的可添加节点具有相同的剩余类。所以等式 $\delta_{L-1} = 1$ 导出 $\delta_L = 1$，矛盾。这就证明了 (6.19)。

方程（6.19）因此给出了以下两者的等价性：p-正则性与 α 以及 β。共轭将每个剩余类变为其负值，并将 p-正则性与 p-限制性互换；此外，β' 由 α' 添加所有可加的 $(-i)$-节点得到，而 α' 没有可移除的 $(-i)$-节点。将（6.19）应用于 α' 和 β'，得到 p-限制性对于 α 和 β的等价性。□

对于相同的分拆 α，β，接下来我们应用定理6.5 与 $\Psi = \Theta_p$，以保持单纯性。

命题 6.10。有

$$\mathfrak{s}_\alpha \text{ is a simple character} \iff \mathfrak{s}_\beta \text{ is a simple character.}$$

证明。为了将定理6.5 应用于 $\Psi = \Theta_p$，我们首先验证（6.7）中的四个恒等式。然后检查 Θ_p 是 $\mathbb{Q}$-线性映射，且为单射并保持次数，在 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$上将 Λ 映入自身，并且与每个 e_i 和 f_i交换。

由（6.2），每个连续添加 c 的序列都会对 i-节点贡献一个 Schur 函数。添加一个 i-节点只会改变剩余角在 $i-1$ 或 $i+1$ 剩余类处其他角的状态。因此，每次添加后，可加的 i-节点恰好是原 c 节点中尚未添加的那些节点。于是它们可以按任意顺序添加，共得到恰好 $c!$ 个序列，且都以 β 结束。由于 β 没有可加的 i-节点，这些序列均无法继续。因此

$$f_i^c s_\alpha = c! s_\beta, \qquad f_i^{c+1} s_\alpha = 0. \tag{6.21}$$

反过来，i-节点的可移除节点 β 恰好是刚刚添加的 c 节点。移除其中一个节点会使其余节点仍可移除，并且不会产生新的可移除 i-节点，因此所有 $c!$ 种移除顺序都会得到 α。由于 α 没有可移除的 i-节点，（6.2）给出

$$e_i^c s_\beta = c! s_\alpha, \qquad e_i^{c+1} s_\beta = 0. \tag{6.22}$$

Pas将 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 中的除幂相联系，（6.21）和（6.22）给出了（6.7）中的全部四个恒等式。

现在验证关于 Θ_p的假设。其在小节2.2 中作为 Λ 的分次环自同态的定义表明，它到 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 上的延拓是 $\mathbb{Q}$-线性的，保持次数不变，并将 Λ映入其自身。根据（2.10），它将每个幂和生成元乘以 1 或 $1-p$。由于这些生成元在代数上独立，且两个乘数均非零，这些缩放

在 $\mathbb{Q}$上是可逆的；特别地， Θ_p 是单射。最后， （5.4）将$\Theta_p = \mathcal{D}_{p,\ 1-p}$与6.1相联系，而命题6.1给出了它与每个 e_i 及 f_i的交换性。

由于 p 根据我们的既定假设为奇数，定理6.5 的所有假设现已满足。因此， $\Theta_p(s_\alpha)$ 是单特征，当且仅当 $\Theta_p(s_\beta)$ 是单特征。根据（2.7），它们分别为 $\mathfrak{s}_\alpha$ 和$\mathfrak{s}_\beta$。□

现在，我们沿着一列以 Rouquier 块结尾的相邻块，应用引理 6.9 和命题 6.10。按照第 4.1 小节中的算盘约定，权为 p 的块 B 称为 Rouquier 块，如果它有一个算盘表示，其中轨道 c_i 上有i颗珠子，使得

$$c_i - c_{i-1} \geq w - 1 \qquad (1 \leq i \leq p-1). \tag{6.23}$$

设 λ 是块 B_0中的一个 p-JM 分拆。根据 [Fay05，引理 3.1]，，存在一列相邻块 B_0，B_1.....， B_t 其中 B_t 为 Rouquier 块。逐步应用 [Fay05，引理 3.2]，可得到 p-JM 分拆

$$\xi_0 = \lambda, \xi_1, \ldots, \xi_t, \qquad \xi_j \in B_j \quad (0 \leq j \leq t).$$

固定由此构造给出的任意序列。

命题 6.11。 对于每个 $0 \leq j \leq t$，分拆 ξ_j 是双奇异的，当且仅当 λ 是双奇异的，并且

$$\mathfrak{s}_{\xi_j} \textit{ is a simple character} \iff \mathfrak{s}_\lambda \textit{ is a simple character.} \tag{6.24}$$

证明。 引理6.9 在每一步都保持 p-正则性和 p-受限性，因而保持双奇异性。命题 6.10 在每一步都保持单纯性。沿所选序列进行归纳，证明命题6.11。 □

根据（6.24），排除 Rouquier 端点处的单纯性也就排除了原始双奇异 p-JM 分拆的单纯性。小节 6.5 通过证明余项的非零性并应用命题 6.8来实现这一点。

6.5。 **Rouquier 块中余项的非零性**。 对于一个双奇异 p-JM 分拆 λ，它位于一个 Rouquier 块中，我们首先证明 S_λ 是单纯的，并确定其p-受限标签 μ。根据命题 l_μ 6.8证明中的（6.18），这表明 l_μ 是与 $\mathfrak{s}_\lambda$相等的唯一可能的单纯特征。然后，我们通过找出 $R_\lambda \neq 0$ 的一个 Schur系数来证明 $\mathfrak{s}_\lambda$，该系数在 l_μ中为零。为了在此计算中使用命题 5.4，我们首先比较 Rouquier 算盘的轨道编号与第 5节的商约定。

固定一个权为 B 的 Rouquier 块，其核的一个排列图满足 (6.23)，其中 c_i个珠子位于轨道 i上。为表示 B中的每个分拆，将排列图扩充至 $c_i \geq w$ 对每个 i都成立。每次扩充时，(4.1) 将每个旧珠子下移一层，并在新顶层的每个轨道上各放置一颗珠子。这会得到同一分拆的另一个排列图，并保持 (6.23) 中的差值 $c_i - c_{i-1}$。

现在固定这些跑道计数，并令 $b = \sum_i c_i$。 B 中的每个分拆都打包为同一个核。在轨道 i 上，其商分量记录了每颗珠子位于其打包位置下方的层数，按珠子从下到上的顺序读取。因此， c_i 颗珠子最多可以记录含有 c_i 个非零部件的分量。由于所有分量的大小之和为 w

由（4.4），所选计数足以涵盖 B 中的每个分拆。在这个固定的珠子数下， B 中的分拆由各自轨道上珠子的不同垂直位置表示。

对于 $\eta \in B$，令 $\eta^{[i]}$ 表示在此排列图中 $Q_b(\eta)$ 的轨道 i 上的分量。为了读取在 (4.3) 中定义的分量 $\eta^{(i)}$，我们使用能被 p 整除的珠子数。选择 $0 \le t < p$ 使得 $p \mid b+t$。根据 (4.2)，对于同一个分拆，将珠子数加一会使轨道 j 上的分量转移到模 p 意义下的轨道 $j+1$ 上。例如，在 (4.2) 后面的 (3, 2, 1) 示例中，空分量在有三个珠子的轨道 1 上，也在有四个珠子的轨道 2 上。因此，在 $Q_{b+t}(\eta)$ 中，分量 $\eta^{[j]}$ 应在轨道 $j+t$ 上读取。

例如，取 $p=3$、 $w=2$，以及一个轨道计数为 (1，2，4) 的核展示。增加一个完整层级后，计数变为 (2，3，5)，并且 $b=10$。现在，我们可以通过将该轨道上的两个珠子从紧凑排列图向下移动一层，来表示分拆 $\eta \in B$；在此排列图中，它唯一的非空商分量是轨道 0 上的 (1，1)。将珠子数从 10 增加到 12 会使元组旋转两次，从而得到

$$Q_{10}(\eta) = \big((1,1),\varnothing,\varnothing\big), \qquad Q_{12}(\eta) = \big(\varnothing,\varnothing,(1,1)\big).$$

因此 $\eta^{[0]} = \eta^{(2)} = (1,1)$，而 $\eta^{(0)} = \varnothing$。

对于 $\lambda, \zeta \in B$，令

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = \big((\lambda^{[0]})', \dots, (\lambda^{[p-1]})'\big), \qquad \widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \big((\zeta^{[0]})', \dots, (\zeta^{[p-1]})'\big).$$

引理 6.12。对于每个 $\eta \in B$,

$$\eta^{(i)} = \eta^{[i-t]} \qquad (i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}). \tag{6.25}$$

对于所有 $\lambda, \zeta \in B$,

$$a_{\lambda\zeta} = \kappa^{(p,w)}_{\widetilde{\boldsymbol{\alpha}},\widetilde{\boldsymbol{\beta}}}. \tag{6.26}$$

证明。反复应用 (4.2)，会将 $Q_b(\eta)$ 中轨道 j 上的分量映到 $Q_{b+t}(\eta)$ 中轨道$j+t$ 上。由于 $Q_{b+t}(\eta)$ 是 (4.3) 的商元组 $\big(\eta^{(0)}, \dots, \eta^{(p-1)}\big)$。这就证明了 (6.25)。同样的循环置换适用于每个 $\eta \in B$，因为珠子数和轨道标签保持不变。核 $K_p(X, Y) = \prod_{i\neq j} D(X^{(i)}, Y^{(j)})$ 在同时置换 X 和 Y 的各分量时保持不变。因此，其系数在这种共同的循环重新编号下不变。由此，命题 5.2 给出 (6.26)。(5.7) 中的归一化因子仅取决于分拆，因此在重新标记轨道时也保持不变。□

方程（6.26）使我们能够直接将命题 5.4 应用于证明中的 $[i]$-指标商。

定理 6.13。设 p 为奇数，且 $\lambda \in B$ 是一个双奇异的 p-*JM* 分拆。那么，对于唯一的 p-受限分拆 μ，有$S_\lambda \cong D_\mu$，且有 $R_\lambda \neq 0$。

证明。我们首先确定 μ 的标签，它对应于 S_λ。我们使用引理 6.12 中的固定算盘，并记 $A = \lambda^{[0]}$ 和 $B_0 = \lambda^{[p-1]}$。由于 λ 是 Rouquier 块中的 p-JM 分拆，Fay05， [Fay05，引理 4.1] 给出

$$\lambda^{[0]} = A, \qquad \lambda^{[p-1]} = B_0, \qquad \lambda^{[i]} = \varnothing \quad (0 < i < p-1). \tag{6.27}$$

由 (6.12)，我们需要行 Specht 模块 $S^{\lambda'}$。要读出 λ' 的商，选择一个足够大的整数 C，使得 λ 的所有珠子都位于 $[0, Cp-1]$，并且对每个 i，它们都位于 $C-c_i \geq w$。将空位关于 $x \mapsto Cp-1-x$ 反射，得到 λ' 的珠子。这会反转轨道，并将其商分量共轭，因此 λ' 在轨道 0 上有 B_0'，在轨道 $p-1$ 上有 A'。其跑道计数 $d_i = C - c_{p-1-i}$ 满足 $d_i - d_{i-1} = c_{p-i} - c_{p-1-i} \geq w-1$，所以由 (6.23)，共轭块仍是 Rouquier 块。在这种排列图中，一个分拆是 p-正则的，当且仅当它在轨道 0 上的分量为空 [Fay05，第 1.1 节.3]。双奇异性意味着 λ 和 λ' 都不是 p-正则的，因此 A 和 B_0 均非空，由 (4.4) 得 $|A|+|B_0| = w$。

对换会交换 a p-JM 分拆的钩长条件中的行与列，因此 λ' 也为 p-JM。故我们可以在对称群情形 $q=1$ 且满足 $e=p>2$时，将 λ'应用于 [Fay05 命题 4.3 及其证明]。该命题给出了 $S^{\lambda'}$的不可约性。其证明通过将 λ' 在轨道 0 上的分量取共轭并置于轨道 1 上，同时保留轨道 $p-1$上的分量，从而确定了 $S^{\lambda'} \cong D^{\tau}$ 的 p-正则标签 τ。因此，τ 在共轭排列图中的唯一非空分量是B_0（位于轨道 1 上）和 A'（位于轨道 $p-1$上）。现在将 (6.12) 中的符号表示张量化，可得 $S_\lambda \cong D^{\tau} \otimes \mathrm{sgn} = D_{\tau'}$。由于 τ 是 p-正则的，$\mu = \tau'$ 是 p-受限的。若 $S_\lambda \cong D_\nu$对于一个 p-受限分拆 ν成立，再次与 sgn 张量化可得 $D^{\nu'} \cong D^{\tau}$。不同的 p-正则分拆标记不同构的简单模，因此 $\nu' = \tau$，从而 $\nu = \mu$。再次反转轨道并将各分量取共轭后，在原排列图中得到，

$$\mu^{[0]} = A, \qquad \mu^{[p-2]} = B_0', \qquad \mu^{[i]} = \varnothing \quad (i \neq 0, p-2). \tag{6.28}$$

根据（6.18），$R_\lambda = \mathfrak{s}_\lambda - l_\mu$。只需找出一个 Schur 函数，使其在 $\mathfrak{s}_\lambda$和 l_μ中的系数不同。

我们选择 ρ，其核与 λ 相同，并且其位于轨道 $p-2$上的整个商不同于（6.27）中的两个轨道。使用逐分量加法，令

$$\rho^{[p-2]} = A' + B_0', \qquad \rho^{[i]} = \varnothing \quad (i \neq p-2). \tag{6.29}$$

该元组的总大小为 w，因此根据命题4.1 以及重新编号（6.25），它唯一确定一个 $\rho \in B$。根据（6.26），我们可以在（5.10）中使用这些轨道指标。要使其在轨道 i 上的两个斜舒尔因子非零，$\gamma^{(i)}$ 必须属于（$\lambda^{[i]}$）′，而$\gamma^{(i)}$）′ 必须属于 $\rho^{[i]}$。在每个轨道上，$\lambda^{[i]}$ 和 $\rho^{[i]}$ 至少有一个为空，因此每个 $\gamma^{(i)}$ 都为空。保留下来的项为

$$a_{\lambda\rho} = \left\langle s_{A'} s_{B_0'}, s_{A'+B_0'} \right\rangle = c_{A',B_0'}^{A'+B_0'} = 1. \tag{6.30}$$

事实上，用 j 填充（$A'+B_0'$）$/A'$ 中的第 j 行，会得到一个内容为B_0'的 Littlewood–Richardson 表。格词条件将第 j 行中的条目限制为 j。由于前面的各行已经用尽了所要求的较小条目，归纳法迫使每一行都采用这种填法。根据（5.7），s_ρ 在 $\mathfrak{s}_\lambda$ 中的系数因此为（-1）$^{w\varepsilon_p}$（λ）$_{\varepsilon_p}$（ρ）$\in \{1,-1\}$。

为了解释 s_ρ 在 l_μ中的系数为何为零，我们将 ρ 和 μ 按字典序进行比较。根据（6.28）和（6.29），它们的珠子位置在轨道 0 和 $p-2$之外相同。对于 $\eta \in B$，轨道 i 上的第 j大的珠子位置是

$$i + p\left(c_i - j + \eta_j^{[i]}\right) \qquad (1 \leq j \leq c_i), \tag{6.31}$$

因为第 j 个珠子位于其打包位置下方 $\eta_j^{[i]}$ 层。特别地， ρ 在轨道 $p-2$ 上的最大珠子位置是

$$x = p-2+p\big(c_{p-2}-1+A_1'+(B_0')_1\big).$$

它超过了 μ 在该轨道上的最大位置 $pA_1' > 0$。在轨道 0 上，两个排列图中的所有位置都不超过 $p(c_0-1+A_1)$。由于 B_0 非空， $A_1 \le |A| \le w-1$。将（6.23）对前 $p-2$ 个间隙求和，得到 $c_{p-2}-c_0 \ge (p-2)(w-1) \ge A_1$，因此

$$p(c_0-1+A_1) \le p(c_{p-2}-1) < x.$$

因此， x 是恰好出现在一个排列图中的最大位置，并且它属于 ρ。在 β数的降序列表中，第一个差值对 ρ 而言更大。因此，减去相同的阶梯（$b-1$， $b-2$，……，0）即可还原这两个分拆，于是

$$\mu <_{\text{lex}} \rho. \tag{6.32}$$

对（6.6）取特征后，从 Schur 函数到单特征的基变换在字典序下是单位上三角的。其逆变换也具有相同的三角性，因此 l_μ是 s_μ 和 s_ν 的线性组合，且 $\nu <_{\text{lex}} \mu$。于是（6.32）给出 $\text{Coef}_{s_\rho}[l_\mu] = 0$。根据（6.18）， s_ρ 在 R_λ 中的系数与其在 $\mathfrak{s}_\lambda$中的系数相同，即 $(-1)^w\varepsilon_p(\lambda)\varepsilon_p(\rho)$。这证明了$R_\lambda \neq 0$。 □

结合命题 6.8 和6.11，定理6.13 排除了由双奇异 p-JM 分拆标记的简单模 Schur 特征（其中 p为奇数）。

6.6. **简单模 Schur 特征的分类**。 设 p 为任意素数，并固定一个分拆 $\lambda \vdash d$。定理 6.7 给出了 λ 满足 Carter 条件时的简单特征。为证明必要性，我们先处理 $p=2$，此时（2.11）给出 $\mathfrak{s}_\lambda = s_{\lambda'}$。当 p为奇数时，还需证明任何反例都必须是双奇异 p-JM 分拆，从而可以应用命题 6.11 和定理 6.13 。

命题 6.14。 假设 $p=2$。如果 λ 不满足 *Carter* 条件，那么对于每个分拆 μ，都有 $\mathfrak{s}_\lambda \neq l_\mu$。

证明。 由（2.11）和引理 6.3， $\mathfrak{s}_\lambda = s_{\lambda'}$ 是 Weyl函子 W_λ的特征。在（6.6）中， $L(\lambda')$ 在 $W_{\lambda'}$ 中的重数为一。如果 $s_{\lambda'}$ 是一个简单特征，那么简单特征的线性无关性将迫使所有其他合成重数都为零。因此， $W_{\lambda'}$ 将是简单的。

由于空分拆满足 Carter 条件， $d>0$。在 $\mathbb{K}^d$ 处求值将得到一个单纯的 Weyl模 $\Delta(\lambda')$，根据第 6.2小节中的等价性。对于普通 Schur 代数，参数为 $q=1$，因此此处的量子特征为 $e=2$。根据[Fay05，命题 1。2]， $\Delta(\lambda')$ 为单纯模，当且仅当其标签的共轭分拆，即λ，满足 Carter 条件。这与假设矛盾。□

现在假设 p 为奇数。为了应用命题 6.11，我们确定 $\mathfrak{s}_\lambda$的单纯性会对一个不满足 Carter 条件的分拆 λ 产生什么限制。

引理 6.15。 若 $\mathfrak{s}_\lambda$ 是一个单特征，且 λ 不满足 *Carter* 条件，则λ 是一个双奇异的 p-*JM* 分拆。

证明。 设 $\mathfrak{s}_\lambda = l_\mu$ 为 $\mu \vdash d$。由命题 6.8， S_λ 不可约，其对偶S^λ 由（6.12）可知也不可约。对于奇数 p，不满足 p-JM 条件意味着 S^λ 是可约的 [Fay04，第 2 节，猜想 1 中 *if* 部分的证明。1]。因此 λ 是 p-JM。定理 6.7 也排除了 p-正则性，因为 λ 不满足 Carter 条件。

还需排除 p-限制性。设 λ 是 p-限制的。根据（6.12）之后的约定， D_λ 是 S_λ的简单商。由于 S_λ 不可约，它同构于D_λ。因此，方程（6.14）给出 $q_{\lambda\lambda} = [S_\lambda : D_\lambda] = 1$。于是 l_λ 出现在 $\mathfrak{s}_\lambda = l_\mu$中，从而必有$\mu = \lambda$。

由于 λ 既是 p-限制的，又是 p-JM 的，其共轭分拆满足 Carter 条件，正如命题 6.8 后所回顾的那样。根据 [Fay05 的命题 1.2] ，在 $q = 1$ 和 $e = p$处，秩为 d 的、标签为 λ 的 Weyl模是简单的。在赋值等价下，这给出 $W_\lambda \cong L(\lambda)$，因而由引理 6.3 得到 $s_\lambda = l_\lambda$ 。我们得到 $\mathfrak{s}_\lambda = l_\lambda = s_\lambda$，所以命题 6.2 蕴含 λ是一个 p-核。 p-核的每个钩长的 p-进赋值均为零，这在每一列中都给出了 Carter 条件。矛盾表明 p-限制性不成立，并证明了 λ 是双奇异的。□

定理6.16。 设 p 为奇数。若 λ 不满足 *Carter* 条件，则对于每个分拆 μ，都有 $\mathfrak{s}_\lambda \neq l_\mu$。

证明。 设 λ 不满足 Carter 条件且 $\mathfrak{s}_\lambda$ 是单纯的。由引理 6.15， λ 是一个双奇异的 p-JM 分拆。因此，我们可以沿着其相邻块序列应用命题6.11 。最终 Rouquier 块中的 p-JM 分拆 ξ_t 仍然是双奇异的，而（6.24）表明 $\mathfrak{s}_{\xi_t}$ 是单纯的。根据定理6.13， S_{ξ_t} 是不可约的，并且 $R_{\xi_t} \neq 0$。因此，命题 6.8 排除了 $\mathfrak{s}_{\xi_t}$的单纯性，矛盾。 □

结合这两种情形，得到对每个素数 p而言 Carter 条件的必要性。

推论 6.17。 若 λ 不满足 *Carter* 条件，则对于每个分拆μ，都有 $\mathfrak{s}_\lambda \neq l_\mu$ 。

证明。命题 6.14 证明了 $p = 2$ 的断言，而定理 6.16 证明了其对每个奇素数均成立。 □

定理 6.7 给出了逆命题并确定了单特征。

推论 6.18 (单模舒尔函数特征)。 模舒尔函数 $\mathfrak{s}_\lambda$ 是单特征，当且仅当 λ 满足 *Carter* 条件。在这种情况下

$$\mathfrak{s}_\lambda = l_{\iota_p(\lambda)'}. \tag{6.33}$$

证明。 必要性由推论 6.17得出。对于满足 Carter 条件的分拆，(6.15) 给出了 (6.33) 中的单特征。 □

注 6.19。 当 $p = 2$ 时，符号表示是平凡的，因此 (6.13) 给出 $\iota_2(\lambda) = \lambda$，对于每个 2-正则 λ 均成立。因此，对于 λ 满足 *Carter* 条件时，(6.33) 写作 $\mathfrak{s}_\lambda = l_{\lambda'}$。

对于任意素数 p 以及任意 λ 满足 S_λ 不可约条件的，命题*6.8* 和推论*6.18* 给出了$R_\lambda = 0$ 恰当的判定条件，即 λ 满足 *Carter* 条件。

定理 C 的证明。设 $n \geq d$ 为正整数。根据第 6.2 小节中的赋值等价，单特征次数为 d 的多项式 $GL_n(\mathbb{K})$-特征恰好是 $\mu \vdash d$的 l_μ 的特化。对 n 个变量进行特化在 Λ^d上是单射的，因为 d 的每个分拆至多有 n 个部件，且相应的舒尔多项式线性无关。因此，对于某个 $\mu \vdash d$， $\mathfrak{s}_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ 是单特征，当且仅当 $\mathfrak{s}_\lambda = l_\mu$。根据推论 6.18，这等价于 λ上的 Carter 条件。特别地，[Wal94，猜想 4.6] 对于无限域 $\mathbb{K}$ 上的每个正 $n \geq d$均成立。□

7. Hall–Littlewood modes and normal-order coefficients

我们回到特征零，并令 q 为一个不定元。Romero 给出了复合霍尔–利特尔伍德函数在完全对称函数基下的展开式，其系数属于 $\mathbb{N}[q-1]$ [Rom23，命题 5。1]。这里我们研究归一化重复模作用于幂和基的情形。在小节 7.1 中，我们使用第 4 节的半顶点算子来构造 Hall–Littlewood 模。在小节 7.2 中，我们证明归一化重复模保持 $q-1$ 中的幂和正性。小节 7.3 分离出它们的正规序展开中的系数，并给出其在固定核空间中的一个应用。在第8 节中，我们将这里得到的正性与整性结合 Macdonald 生成算子的一个公式，证明定理 D。

7.1. Hall–Littlewood 函数与顶点算子。

我们汇总本节其余部分所需的记号与恒等式。

令 Λ 为前述定义在 $\mathbb{Z}$ 上的对称函数环。下列算子作用于$\mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$。用 $P_\lambda(X; q)$ 和 $Q_\lambda(X; q)$ 表示参数为q的霍尔–李特尔伍德函数。对于 $j \geq 1$，令 $m_j(\lambda)$ 表示 j 在 λ中的重数，并设

$$b_\lambda(q) = \prod_{j \geq 1} \prod_{i=1}^{m_j(\lambda)} (1 - q^i), \qquad Q_\lambda(X; q) = b_\lambda(q) P_\lambda(X; q).$$

按照这些约定， $P_\lambda(X; q)$构成 $\mathbb{Z}[q]$的一个基 $\Lambda[q]$。在 k 变量中， P_λ 当 $\ell(\lambda)$时为零 $> k$ [Mac95，第三章，(2.5)–(2.7)]。

我们采用（4.23）–（4.24）中的 plethystic 记号。因此， $p_m[-X] = -p_m[X]$ 和 $p_m[(q-1)X] = (q^m - 1)p_m[X]$。若作标量代换 $z \mapsto -z$，则得到 $p_m[(-z)X] = (-z)^m p_m[X]$。这些约定将负虚字母表 $-X$ 与将 X中的每个字母都取负区分开来。对于分拆 λ 和整数 $k \geq 0$，定义

$$\mathcal{R}_\lambda(X; q) = (-1)^{\ell(\lambda)} P_\lambda[-X; q], \qquad B_k(q) = \prod_{j=1}^{k} (q^j - 1), \qquad B_0(q) = 1.$$

特别是， $\mathcal{R}_\varnothing = 1$。

使用 ∂_{p_m} 对代数独立幂和进行微分，定义

$$V(z) = \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{q^m - 1}{m} p_m z^m \right) \exp\left(\sum_{m \geq 1} \partial_{p_m} z^{-m} \right). \tag{7.1}$$

用（4.23）表示，即为

$$V(z) = \mathcal{H}_+((q-1)z)\mathcal{H}_-(z^{-1}),$$

其中 $p_m[(q-1)z] = (q^m-1)z^m$。对于整数 a，其模态 V_a 是系数 $\mathrm{Coef}_{z^a}[V(z)]$。对于 $a \geq 1$ 和 $k \geq 0$，定义

$$E_{a,k} = \frac{V_a^k}{B_k(q)}, \qquad E_{a,0} = I, \tag{7.2}$$

其中 I 是恒等算子。对于次数为 d的输入，V_a中只有有限项的作用非零，且输出的次数为 $d+a$。

令 $k \geq 1$ 并令 $z_1, \ldots, z_k$ 为独立形式变量。对于 $Z = (z_1, \ldots, z_k)$，记作$p_m(Z) = \sum_{i=1}^k z_i^m$ 和 $Z^{-1} = z_1^{-1} + \cdots + z_k^{-1}$。冒号表示将所有乘法算子置于所有微分运算左侧。根据（4.24），对每个 $V(z_i)$，将第二个指数算子与 $V(z_j)$ 中的第一个指数算子交换，得到 $i < j$ 给出

$$\begin{aligned} V(z_1)\cdots V(z_k) &= K_k(Z;q) : V(z_1)\cdots V(z_k) :, \\ K_k(Z;q) &= \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{1 - z_j/z_i}{1 - q z_j/z_i}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

的每个因子 K_k 都按 z_j/z_i 的非负次幂展开。Hall–Littlewood 函数 [Jin91，命题 3.9，第 243]，页，经 $f[X] \mapsto f[-X]$ 共轭后，得到

$$V_{\lambda_1}\cdots V_{\lambda_{\ell(\lambda)}} 1 = Q_\lambda[-X;q], \qquad \mathcal{R}_\lambda = \left(\prod_{a \geq 1}^{\mathrm{decr}} E_{a,m_a(\lambda)}\right) 1. \tag{7.4}$$

此处及下文，decr 表示因子按所示指标从左到右递减排列；重数为零的因子均为恒等算子。(7.4) 中的第二个等式用到了 $b_\lambda(q) = (-1)^{\ell(\lambda)} \prod_{a \geq 1} B_{m_a(\lambda)}(q)$。

为了从 (7.3) 中的乘积提取系数，我们使用有限 Hall–Littlewood 内积。对于 f，g 中关于 k 个变量 Z的对称 Laurent 多项式，令

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle'_{q,k} &= \frac{1}{k!}\,\mathrm{CT}_Z\, f(Z) g(Z^{-1}) \Delta_k(Z;q), \\ \Delta_k(Z;q) &= \prod_{i \neq j} \frac{1 - z_i/z_j}{1 - q z_i/z_j}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

这里，CT_Z表示常数项。我们将每个因子 $(1 - q z_i/z_j)^{-1}$ 按 q 的非负次幂展开，并逐系数取 Z 中的常数项。对于整数 $d \geq 0$，记作

$$[d]_q! = \prod_{i=1}^{d} \frac{q^i - 1}{q - 1}.$$

对于长度至多为 k 的分拆 λ，补零至长度 k，令 $m_0(\lambda) = k - \ell(\lambda)$，并定义

$$v_\lambda^{(k)}(q) = \prod_{j \geq 0} [m_j(\lambda)]_q!.$$

特别地，零部件也会对该乘积作出贡献。有限霍尔–李特尔伍德正交关系为

$$\langle P_\lambda, P_\mu\rangle'_{q,k} = \frac{\delta_{\lambda\mu}}{v_\lambda^{(k)}(q)}. \tag{7.6}$$

方程（7.6）是 [Mac95第 VI 章（9.3）、（9.5）–（9.7）、第 372 页的注释以及§9，例 1(c)–(d)]中的 Hall–Littlewood 特化：将其中的两个参数分别设为 0 和 q。

对于一个补零至长度为 k 的分拆 β，记作 $Z^\beta = z_1^{\beta_1}\cdots z_k^{\beta_k}$。对于一个对称 Laurent 多项式 $F(Z)$，将其乘以 K_k 后所得的系数为

$$\mathcal{L}_\beta(F) := \mathrm{Coef}_{Z^\beta}\big[K_k(Z;q)F(Z)\big] = v_\beta^{(k)}(q)\langle F, P_\beta\rangle'_{q,k}. \tag{7.7}$$

为说明第二个等式，将该系数写成 $\mathrm{CT}_Z\, Z^{-\beta}K_k(Z;q)F(Z)$。对 $Z^{-\beta}K_k$ 中的变量进行置换不会改变这个常数项，因为 F 是对称的。因此，我们可以对全部 $k!$ 个置换取平均。对于每个 $i<j$，(7.5) 中 Δ_k 的乘积同时包含 z_j/z_i 和 z_i/z_j中的因子。根据 (7.3)，z_j/z_i 中的因子给出 K_k，因此将 Δ_k除以 z_i/z_j 因子的乘积即可恢复 K_k。由于 Δ_k 在置换下保持不变，我们可以将其移到求和号外，得到

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_k}\pi\big(Z^{-\beta}K_k(Z;q)\big) = \Delta_k(Z;q)\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_k}\pi\left(Z^{-\beta}\prod_{i<j}\frac{1-qz_i/z_j}{1-z_i/z_j}\right).$$

根据 P_β 在 Z^{-1} [Mac95第三章（2.1）中取值后的定义公式]，右边的和等于 $v_\beta^{(k)}(q)P_\beta(Z^{-1};q)$。将两边乘以 $F/k!$并取常数项，由（7.7）和（7.5）可得（7.7）。对于空分拆，$P_\varnothing = 1$ 且 $v_\varnothing^{(k)}(q) = [k]_q!$，因此特别有

$$\mathrm{CT}_Z\, K_k(Z;q)F(Z) = [k]_q!\,\langle F, 1\rangle'_{q,k}. \tag{7.8}$$

当 X 也出现时，我们在 X的每个齐次次数上取 Z 中的常数项和内积。

设 ρ 是一个长度至多为 k的分拆，并在前面补零至长度 k。对于整数$a\geq 0$，将 a加到每个部件上，会使证明（7.7）中所用对称化公式的每一项乘以$(z_1\cdots z_k)^a$。因此

$$(z_1\cdots z_k)^a P_\rho(Z;q) = P_{\rho+(a^k)}(Z;q). \tag{7.9}$$

为允许出现负部件，令 $\beta=(\beta_1,\ldots\ldots,\beta_k)$为一个弱递减整数序列。取满足 $\beta_k+N\geq 0$ 的整数 $N\geq 0$，并定义

$$P_\beta(Z;q) = (z_1\cdots z_k)^{-N}P_{\beta+(N^k)}(Z;q).$$

方程（7.9）使此表达式与 N无关。将 N 统一移位至非负指标不会改变相等部件的重数，并且因子$(z_1\cdots z_k)^N$和$(z_1\cdots z_k)^{-N}$在（7.5）中相消。因此，对于这些 Laurent 多项式，（7.6）同样成立。

在 P_ρ 的定义求和中，代入 Z^{-1} 会颠倒乘积中关于 $i<j$ 的每个因子的两个指标的顺序。将 z_i 重新标记为 z_{k+1-i}，即可恢复原来的顺序，并且

得到指标 $(-\rho_k,\dots,-\rho_1)$。对于任意整数 a，乘以 $(z_1\cdots z_k)^a$ 会给每个部分加上 a，从而得到

$$(z_1\cdots z_k)^a P_\rho(Z^{-1};q)=P_{(a-\rho_k,\dots,a-\rho_1)}(Z;q). \tag{7.10}$$

我们通过将以下两个内积中的各项都展开为霍尔–李特尔伍德基来计算它们。对于第一项中的指数函数，Cauchy 恒等式给出

$$\operatorname{Exp}[(q-1)XZ]=\sum_{\ell(\lambda)\le k} Q_\lambda[-X;q]P_\lambda(Z;q). \tag{7.11}$$

对于第二项中的幂和，对每个非空分拆定义 ρ

$$n(\rho)=\sum_{i\ge1}(i-1)\rho_i,\qquad c_\rho(q)=q^{n(\rho)-\binom{\ell(\rho)}{2}}B_{\ell(\rho)-1}(q).$$

对于每个 $m\ge1$，[Mac95，第三章，§7，例 2，第 248] 给出幂和展开式

$$p_m=\sum_{\rho\vdash m} c_\rho(q)P_\rho(X;q),\qquad c_\rho(q)\in\mathbb{N}[q-1]. \tag{7.12}$$

式（7.12）中的非负性由 $c_\rho(q)=q^{n(\rho)-\binom{\ell(\rho)}{2}}B_{\ell(\rho)-1}(q)$ 以及 $n(\rho)\ge\binom{\ell(\rho)}{2}$得出。

7.2. **归一化 Hall–Littlewood 模的正性。** 我们证明，对于所有 $E_{a,\,k}$ 保持 $\mathbb{Q}_{\ge0}[q-1][p_1,p_2,\dots]$ 对所有 $a,\ k\ge1$（定理 7.3）。为此，我们首先建立引理7.1 和7.2。

对于整数 $a,k\ge1$ 和 $\rho\subseteq(a^k)$，在 ρ 后补上零，使其具有 k 个部件，并定义其矩形补分拆为

$$\rho^c=(a-\rho_k,\dots,a-\rho_1),$$

省略零部件。因此 $\ell(\rho^c)=k-m_a(\rho)$。

引理 7.1. 对于每个 $a,k,m\ge1$,

$$m\partial_{p_m}\mathcal{R}_{(a^k)}=\sum_{\substack{\rho\vdash m\\ \rho\subseteq(a^k)}}\frac{(q^m-1)c_\rho(q)}{B_{m_a(\rho)}(q)}\mathcal{R}_{\rho^c}. \tag{7.13}$$

右侧的每个系数都属于 $\mathbb{N}[q-1]$。

证明。 我们首先将 Cauchy 恒等式（7.11）与 $P_\lambda(Z;q)$ 配对，其中分拆 λ 的长度至多为 k。由正交性（7.6），只有以 λ 为指标的项保留下来。将 $s=k-\ell(\lambda)$ 记作补零后零部件的数量，我们得到

$$\frac{\langle\operatorname{Exp}[(q-1)XZ],P_\lambda(Z;q)\rangle'_{q,k}}{(q-1)^k}=\frac{Q_\lambda[-X;q]}{(q-1)^k v_\lambda^{(k)}(q)}=\frac{\mathcal{R}_\lambda}{B_s(q)}. \tag{7.14}$$

对于最后一个等式，7.4给出 $Q_\lambda[-X;\,q]=\mathcal{R}_\lambda\prod_{j\ge1}B_{m_j(\lambda)}(q)$。利用 $B_i(q)=(q-1)^i[i]_q!$，正部件对应的因子与 $(q-1)^k v_\lambda^{(k)}(q)$ 中的因子相消，分母中剩下 $(q-1)^s[s]_q!=B_s(q)$。

在（7.14）中取 $\lambda=(a^k)$。由（7.9），则有 $B_0(q)=1$ and $P_{(a^k)}(Z;\ q)=(z_1\cdots z_k)^a$。在柯西核的通常指数形式中，指数里涉及 $p_m(X)$ 的唯一项是 $(q^m-1)p_m(X)p_m(Z)/m$。因此

$$m\frac{\partial}{\partial p_m(X)}\operatorname{Exp}[(q-1)XZ]=(q^m-1)p_m(Z)\ \operatorname{Exp}[(q-1)XZ].$$

根据（7.5），将 p_m（Z）移到第二个条目后，可将其替换为 p_m（Z^{-1}），因此

$$m\partial_{p_m}\mathcal{R}_{(a^k)}=\frac{q^m-1}{(q-1)^k}\big\langle\operatorname{Exp}[(q-1)XZ],(z_1\cdots z_k)^a p_m(Z^{-1})\big\rangle'_{q,k}. \tag{7.15}$$

利用（ p_m）按（7.12）展开。含有 ℓ（ρ）的项在 $>k$ 变量中消失。将剩余部分 ρ 补零后，由（7.10）得到

$$(z_1\cdots z_k)^a p_m(Z^{-1})=\sum_{\substack{\rho\vdash m\\ \ell(\rho)\le k}} c_\rho(q)P_{(a-\rho_k,\dots,a-\rho_1)}(Z;q).$$

若 $\rho_1>a$，则最后一部分 $a-\rho_1$ 为负，因此由（7.6）对 Laurent 多项式而言，该项与（ P_ν 中的7.11）中的每一项配对均为零。因此只有 $\rho\subseteq$（a^k）对（7.15）有贡献，并且当 $m>ak$时该和为空。对于每个这样的 ρ，其指标为 ρ^c。其补零形式中， ρ 的每个等于 a的部分对应一个零，因此对于 $\lambda=\rho^c$，（7.14）中的分母为 $B_{m_a(\rho)}$（q）。这就得到（7.13）。

为证明正性，令 $\ell=\ell(\rho)$。式 (7.12) 中的系数为 $c_\rho(q)=q^{n(\rho)-\binom{\ell}{2}}B_{\ell-1}(q)$，其指数非负。若 $m_a(\rho)<\ell$，则商 $B_{\ell-1}(q)/B_{m_a(\rho)}(q)$ 是若干因子的乘积q^j-1，每个因子都属于 $\mathbb{N}[q-1]$，q^m-1 也如此。若 $m_a(\rho)=\ell$，则 $\rho=(a^\ell)$ 且 $m=a\ell$。约去$B_{\ell-1}(q)$ 后，除去 q 的幂，剩下几何和

$$\frac{q^{a\ell}-1}{q^\ell-1}=1+q^\ell+\cdots+q^{(a-1)\ell}.$$

在这两种情况下，系数都属于 $\mathbb{N}[q-1]$。 □

接下来，我们将 $E_{a,k}$ 越过乘以一个幂和 $p_m=p_m(X$ 的运算进行交换。所得乘积中的因子按模态指标递减排列，如 (7.4) 所示。

引理 7.2。对于每个 $a,k,m\ge 1$,

$$[E_{a,k},p_m]=\sum_{\substack{\rho\vdash m\\ \ell(\rho)\le k}} c_\rho(q)\left(\prod_{j\ge1}^{\text{decr}}E_{a+j,m_j(\rho)}\right)E_{a,k-\ell(\rho)}. \tag{7.16}$$

证明。写作 $F=:V(z_1)\cdots V(z_k):$。由 (7.3)，$K_k(Z;\ q)F=V(z_1)\cdots V(z_k)$。取 $z_1^a\cdots z_k^a$ 的系数，可从每个因子 $V(z_i)$ 中选出 V_a，得到 V_a^k。由于 $p_m(X)$ 独立于 Z，我们可以在提取该系数之前先与 p_m 取交换子。此外，$[K_k(Z;q)F,p_m]=K_k(Z;q)[F,p_m]$，因为 $K_k(Z;\ q)$ 是标量。按 (7.2) 除以 $B_k(q)$，得到

$$[E_{a,k},p_m]=\frac{[V_a^k,p_m]}{B_k(q)}=\frac{1}{B_k(q)}\operatorname{Coef}_{z_1^a\cdots z_k^a}\big[K_k(Z;q)[F,p_m]\big]. \tag{7.17}$$

由 (7.1)，正规序乘积为

$$:V(z_1)\cdots V(z_k):=\operatorname{Exp}[(q-1)XZ]\,\exp\left(\sum_{j\geq 1}p_j(Z^{-1})\partial_{p_j}\right). \tag{7.18}$$

第二个指数算子将 $p_m(X)$ 替换为 $p_m(X)+p_m(Z^{-1})$，而第一个指数算子与乘以 $p_m(X)$ 的运算可交换。因此

$$[F,p_m]=p_m(Z^{-1})F. \tag{7.19}$$

将 (7.19) 代入 (7.17) 可得 $z_1^a\cdots z_k^a$ 在 $K_k(Z;q)p_m(Z^{-1})F$ 中的系数，再除以 $B_k(q)$。对于固定的输入和输出次数，(7.18) 中微分和乘法的次数都有界，因此 F 的每个矩阵元素都是关于 Z 的对称 Laurent 多项式。因此，我们可以逐项应用 (7.7) 得到

$$[E_{a,k},p_m]=\frac{v^{(k)}_{(a^k)}(q)}{B_k(q)}\big\langle p_m(Z^{-1})F,P_{(a^k)}\big\rangle'_{q,k}=\frac{1}{(q-1)^k}\big\langle F,(z_1\cdots z_k)^a p_m(Z)\big\rangle'_{q,k}.$$

这里，根据 (7.9)，$P_{(a^k)}(Z;q)=(z_1\cdots z_k)^a$，且 $v^{(k)}(a^k)(q)/B_k(q)=[k]_q!/B_k(q)=(q-1)^{-k}$。第二个条目含有 $p_m(Z)$，因为 (7.5) 在 Z^{-1} 处计算该条目。

E将 p_m（Z）按（7.12）展开，并将（7.9）应用于每一项。在 k 变量中，这给出

$$(z_1\cdots z_k)^a p_m(Z)=\sum_{\substack{\rho\vdash m\\ \ell(\rho)\leq k}}c_\rho(q)P_{\rho+(a^k)}(Z;q).$$

对于每个 ρ，补零至长度 k，并令 $\beta=\rho+$（a^k）。根据（7.7）和（7.3），

$$\frac{\langle F,P_\beta\rangle'_{q,k}}{(q-1)^k}=\frac{\operatorname{Coef}_{Z^\beta}\left[K_k(Z;q)F\right]}{(q-1)^k v^{(k)}_\beta(q)}=\frac{V_{\beta_1}\cdots V_{\beta_k}}{(q-1)^k v^{(k)}_\beta(q)}.$$

ρ 中等于 $j>0$ 的部件给出 $m_j(\rho)$个 $a+j$ 在 β中的副本，而补上的零给出$k-\ell(\rho)$个 a的副本。因此，$B_i(q)=(q-1)^i[i]_q!$ 给出

$$(q-1)^k v^{(k)}_\beta(q)=B_{k-\ell(\rho)}(q)\prod_{j\geq 1}B_{m_j(\rho)}(q).$$

这些模态已经按降序排列。将相邻且相等的模态与各自的分母分组，根据（7.16）和（7.2）得到。□

（7.16）中的系数根据（7.12）属于 $\mathbb{N}[q-1]$。现在我们使用这个交换子，将$E_{a,k}$ 在1上的值转换为其在任意幂和单项式上的值。令$\mathbb{Q}_{\geq 0}[q-1][p_1,p_2,\ldots]$ 表示幂和多项式构成的锥，其中其系数是 $q-1$ 中的多项式，并且具有非负有理系数。

定理 7.3 (算子系数的正性)。对于每个 a、$k\geq 1$，算子 $E_{a,k}$保持 $\mathbb{Q}_{\geq 0}[q-1][p_1,p_2,\ldots]$。

证明。 由线性性，只需证明 $E_{a,\ k}p_\mu$ 对每个分拆 μ都属于该锥。我们对输出次数 $D = ak + |\mu|$归纳。在每个 D下，我们先处理所有满足 a， k 且 $ak = D$的配对所对应的常数输入。对于非恒定输入，将一个幂和交换过去，由（7.16）会产生一些项，其最后一个模态的输出次数为 D，且指标大于 a。因此，我们按 a递减的顺序处理这些输入。

对于 $ak = D$，方程（7.4）给出 $E_{a,\ k}1 = \mathcal{R}_{(a^k)}$。对于每个 $1 \le m \le D$，引理7.1将 $m\partial_{p_m}\mathcal{R}_{(a^k)}$ 表示为 $\mathbb{N}[q-1]$-线性组合，其中函数 $\mathcal{R}_{\rho^c}$ 的次数为 $D - m$。空补集给出 $\mathcal{R}_{\varnothing} = 1$。对于其他每个补集，（7.4）通过连续的升次数模从 1 构造出 $\mathcal{R}_{\rho^c}$。每个中间输出的次数至多为$D - m < D$，因此由归纳法，每个 $\mathcal{R}_{\rho^c}$以及相应的每个导数都属于该锥中。由于 deg $p_m = m$，加权欧拉恒等式给出

$$D\mathcal{R}_{(a^k)} = \sum_{m=1}^{D} m p_m \partial_{p_m}\mathcal{R}_{(a^k)}. \tag{7.20}$$

乘以 p_m 并除以 $D > 0$ 都保持该锥不变。这证明了常数输入的情形，并在 $D = 1$ 处开始归纳，此时唯一的补集为空集。

If $\mu \neq \varnothing$，移除一个部分 m 得到 τ。利用（$E_{a,\ k}$）将其移过 p_m，得到7.16）给出

$$E_{a,k}p_\mu = p_m E_{a,k}p_\tau + \sum_{\substack{\rho \vdash m \\ \ell(\rho) \le k}} c_\rho(q) \left(\prod_{j \ge 1}^{\text{decr}} E_{a+j, m_j(\rho)} \right) E_{a,k-\ell(\rho)}p_\tau. \tag{7.21}$$

在第一项中，$E_{a,\ k}p_\tau$ 的输出次数为 $D - m$，因此根据归纳法它属于该锥；它与 p_m的乘积也同样如此。在按 ρ索引的求和项中，将 ρ 补齐至长度 k。模态指标 $a + \rho_1$、……、 $a + \rho_k$之和为 $ak + m$，因此在 p_τ上的最终输出次数为 D。从右向左读取该乘积，并省略恒等映射因子。除最后一步外，每一步的输出次数都小于 D，因此根据归纳法，逐项应用于幂和基时均保持正性。最后一个模态为$E_{a+\rho_1,\ m_{\rho_1}(\rho)}$。其输出次数为 D，而指标为 $a + \rho_1 > a$ 的情形已在此次数下证明。由于根据（7.12），$c_\rho(q) \in \mathbb{N}[q-1]$，所以（7.21）中的每个求和项都属于该锥。□

7.3. **正规序系数。** 我们使用正规序乘积（7.18）来读出$E_{a,k}$的每个微分算子的系数。推论7.4 给出了第8节所需的幂和正性与整性。

固定整数 a， $k \ge 1$。对于 k 个变量 Z 中的对称多项式 f，定义 $\mathbb{Q}(q)$，

$$\mathcal{S}_{a,k}(f) = \frac{1}{B_k(q)} \operatorname{Coef}_{z_1^a \cdots z_k^a} \left[K_k(Z;q) \operatorname{Exp}[(q-1)XZ] f(Z^{-1}) \right]. \tag{7.22}$$

当 f 是一个对称函数时，我们将其特化为 Z。对于 $f = p_\sigma$，数值$\mathcal{S}_{a,\ k}(p_\sigma)$ 是$p_\sigma^\perp / z_\sigma$前的乘法因子，其中$p_\sigma^\perp$是乘以 $p_\sigma(X)$ 的普通 Hall 伴随算子。事实上，将（7.18）中的微分指数展开并

使用 $p_j^{\perp} = j\partial_{p_j}$ 得到

$$\exp\left(\sum_{j\geq 1} p_j(Z^{-1})\partial_{p_j}\right) = \sum_{\sigma\in\mathscr{P}} p_\sigma(Z^{-1})\frac{p_\sigma^{\perp}}{z_\sigma}.$$

取 $m_j(\sigma)$ 个 ∂_{p_j} 会贡献分母 $m_j(\sigma)!$，从而解释了 z_σ中的阶乘。乘以 $K_k(Z;\ q)\,\mathrm{Exp}[(q-1)XZ]$，并提取式（7.22）中的系数，得到

$$E_{a,k} = \sum_{\sigma\in\mathscr{P}} \mathcal{S}_{a,k}(p_\sigma)\frac{p_\sigma^{\perp}}{z_\sigma}. \tag{7.23}$$

在次数为 d 的输入上，只有含有 $|\sigma|\leq d$ 的项会产生贡献。

为了用于第8节，我们现在考虑 $\mathcal{S}_{a,\ k}(p_\sigma h_b)$。

推论 7.4。 对于任意 a、$k\geq 1$、任意分拆 σ 以及任意整数 $b\geq 0$,

$$\mathcal{S}_{a,k}(p_\sigma h_b) \in \Lambda[q]\cap\mathbb{Q}_{\geq 0}[q-1][p_1,p_2,\ldots]. \tag{7.24}$$

证明。 我们首先从式（$\mathcal{S}_{a,\ k}(p_\sigma)$ 中提取 7.23。对于 $m\geq 1$，记 $\delta_m(A) = [A,p_m]$，其中p_m 通过乘法作用。乘法系数与 p_m可交换。对于由 τ 索引的微分因子，我们使用

$$\frac{p_\tau^{\perp}}{z_\tau} = \prod_{j\geq 1}\frac{\partial_{p_j}^{m_j(\tau)}}{m_j(\tau)!}, \qquad \left[\frac{\partial_{p_m}^{u}}{u!}, p_m\right] = \frac{\partial_{p_m}^{u-1}}{(u-1)!} \quad (u\geq 1).$$

因此， δ_m 在 m 是 τ 的一部分时，会移除 ∂_{p_m} 的一次出现；否则结果为零。对于 σ 的每个部分各取一个交换子，并将结果作用于 1。缺少一个导数会使交换子为零，而任何剩余的导数都会消去 1，因此只有 $\tau=\sigma$ 保留下来。对于$\tau=\sigma$，微分因子变为恒等映射，得到

$$\mathcal{S}_{a,k}(p_\sigma) = \delta_{\sigma_1}\cdots\delta_{\sigma_{\ell(\sigma)}}(E_{a,k})1. \tag{7.25}$$

对于 $\sigma=\varnothing$，右侧为 $E_{a,\ k}1$。

根据 (7.16)， $\delta_m(E_{a,k})$ 是归一化模的乘积之和，其系数属于 $\mathbb{N}[q-1]$。由于 $\delta_m(I)=0$，且 $\delta_m(AB) = A\delta_m(B)+\delta_m(A)B$，每个进一步的交换子都会给出同类的和。定理 7.3 表明，每个这样的乘积作用于 1 后都会落入幂和锥。因此，(7.25) 证明了 p_σ的正性。对于一般的 b，展开 $h_b = \sum_{\tau\vdash b} p_\tau/z_\tau$并利用线性性。在此展开中，每个 $p_\sigma p_\tau$ 仍然是一个幂和单项式，其权为正的 $1/z_\tau$。

为证明整性，我们在霍尔–李特尔伍德基上计算 $\mathcal{S}_{a,\ k}$。将指标（7.7）取为（a^k），应用于（7.22），得到

$$\mathcal{S}_{a,k}(f) = \frac{1}{(q-1)^k}\left\langle \mathrm{Exp}[(q-1)XZ], (z_1\cdots z_k)^a f(Z)\right\rangle'_{q,k}. \tag{7.26}$$

这里 $P_{(a^k)} = (z_1\cdots z_k)^a$, $v^{(k)}(a^k)(q)/B_k(q) = (q-1)^{-k}$，而 (7.5) 在 Z^{-1} 处计算第二项。取 $f=P_\rho$ with $\ell(\rho)\leq k$，并将 ρ 补齐至长度 k。根据 (7.9)，第二项

变为 $P_{\rho+(a^k)}$。所有 k 部件 $\rho+(a^k)$ 均为正，因此证明引理 7.14 中的 (7.17) 适用于 $s=0$ 并给出

$$\mathcal{S}_{a,k}(P_\rho)=\mathcal{R}_{\rho+(a^k)}. \tag{7.27}$$

右侧属于 $\Lambda[q]$，因为 $-X$ 的 plethystic 替换在次数 d上通过 $(-1)^d\omega$作用。现在，$p_\sigma h_b\in\Lambda$ 在 $\mathbb{Z}[q]$ 中具有 Hall–Littlewood 基的系数，见子节7.1。含有 $\ell(\rho)>k$ 的项在 k 个变量中消失，因此由线性性和（7.27）可得$\mathcal{S}_{a,k}(p_\sigma h_b)\in\Lambda[q]$。□

我们在第4节的商坐标中应用推论 7.4 的情形 $b=0$。固定一个整数 $r\geq 2$ 和一个 r-核 δ，并将 $\mathcal{F}_\delta$ 以及（4.16）中的同构 Ψ_δ 扩展到 $\mathbb{Q}(q)$。在 $\mathcal{F}_\delta$上，通过将（7.1）中的乘法替换为 p_m、将微分替换为 ∂_{p_m}，分别改为乘以 p_{rm} 和算子 $p_{rm}^\perp/(rm)$，定义顶点算子 $\mathcal{V}(r)(z;q)$。对于整数 a、$k\geq 1$，其归一化重复模为

$$\mathscr{E}_{a,k}^{(r)}=\frac{\left(\mathrm{Coef}_{z^a}[\mathcal{V}^{(r)}(z;q)]\right)^k}{B_k(q)}.$$

将 $p_m^{(i)}=p_m(X^{(i)})$ 记作第 i 个商字母表中的幂和，考虑锥

$$\Psi_\delta^{-1}\left(\mathbb{Q}_{\geq 0}[q-1][p_m^{(i)}:m\geq 1,\ 0\leq i<r]\right). \tag{7.28}$$

推论 7.5。 对于 a，$k\geq 1$，算子 $\mathscr{E}_{(r)\,a,\,k}$ 保持锥 (7.28)。

证明。由（4.20）和（4.21），Ψ_δ 将 p_{rm} 变为乘以 $P_m=\sum_{i=0}^{r-1}p_m^{(i)}$，并将$p_{rm}^\perp/(rm)$变为平均值 $d_m=r^{-1}\sum_{i=0}^{r-1}\partial/\partial p_m^{(i)}$。每个 r 偏导数都将 P_n映为 δ_{mn}，因此 $d_m(P_n)=\delta_{mn}$。根据乘积法则，将 d_m 移过乘以 P_n 的乘法，产生的修正项与将 ∂_{p_m} 移过 p_n 时相同。由于 P_m 彼此可交换，d_m也彼此可交换，正规序便给出（7.23），其中 $\Psi_\delta\mathscr{E}_{(r)\,a,\,k}\Psi_\delta^{-1}$ 将 p_m 替换为 P_m，并将 ∂_{p_m} 替换为d_m。

对于按 σ索引的项，推论 7.4 结合 $b=0$ 给出 $\mathcal{S}_{a,\,k}(p_\sigma)\in\mathbb{Q}_{\geq 0}[q-1][p_1,p_2,\ldots]$。因此，对每个 $P_m=\sum_i p_m^{(i)}$ 代入 p_m，便得到一个关于商幂和以及 $q-1$具有非负系数的乘法因子。微分因子为$\prod_{j\geq 1}d^{m_j}{}_{(\sigma)\,j}/m_j(\sigma)!$ 每个偏导数都会将一个幂和单项式变为零，或变为另一个单项式的正整数倍，因此取平均并除以相应的阶乘仍能保持非负性。对于总商次数为 w的输入，只有含 $|\sigma|\leq w$的项会产生贡献。对这些项求和即可证明 $\mathscr{E}_{a\,k}^{(r)}$ 保持锥（7.28）。□

z^a 的系数使总商次数增加 a，因此 $\mathscr{E}_{a\,k}^{(r)}$ 使 r-权增加ak，并使通常次数增加 rak。

在第 8 节中，Macdonald 模式公式（8.7）取 $z_1\cdots z_k$ 的系数，因此定理 8.2 的证明使用了推论 7.4，其中 $a=1$。

8. Macdonald creation operators and character positivity

在第 8.1 小节中，我们将 Macdonald 生成模表示为 Hall–Littlewood 核 $K_k(Z;q)$（见（7.3））。在第 8.2 小节中将此公式应用于幂和单项式，得到第 7.3 小节研究的系数。它们的正性和整性证明了定理 D，由此我们推导出关于 Macdonald 特征的正性结果。

8.1. **麦克唐纳生成算子的模态。** 命题8.1 将每个麦克唐纳生成模表示为正规序乘积之和。我们在 $\mathbb{Q}(q,t)$ 上工作，其中 q,t 代数独立。记 $J_\lambda^{(q,t)} = J_\lambda(X;\ q,t)$ 为引言中使用的整Macdonald对称函数。令 c 为对角算子 $\mathbf{\Delta}_c$的辅助形式参数。对于一个节点 (i,j)，令

$$\chi(i,j) = q^{j-1}t^{-(i-1)}, \qquad \mathbf{\Delta}_c J_\lambda^{(q,t)} = \prod_{\square\in\lambda}(1-c\chi(\square))J_\lambda^{(q,t)}.$$

对于形式字母表 A，回顾 plethystic指数 $\mathrm{Exp}[A] = \exp\big(\sum_{m\geq 1} p_m[A]/m\big)$，其中 exp 表示通常的形式指数。令 $\mathcal{P}_A$ 表示乘以 $\mathrm{Exp}[AX]$。我们引入算子

$$\mathbf{\Gamma}(u,v) = \mathbf{\Delta}_{1/v}\mathcal{P}_{uv(1-t)/(1-q)}\mathbf{\Delta}_{1/v}^{-1}. \tag{8.1}$$

固定一个分拆 λ 和一个整数 $n\geq 0$。为考察 u^n 系数在 $v=0$处的特化，我们先在 $u^n[\mathbf{\Gamma}(u,v)J_\lambda^{(q,t)}]$ 上计算 $\mathrm{Coef}\ \mathbb{Q}(q,t,v)$。只有（8.1）中的中间因子依赖于 u。它的作用是乘以

$$\mathrm{Exp}[uvX(1-t)/(1-q)] = \sum_{j\geq 0} u^j v^j h_j[X(1-t)/(1-q)],$$

因此，取 th e u^n 系数将此因子替换为乘以 $v^n h_n[X(1-t)/(1-q)]$。从右向左应用（8.1）中的三个因子。首先，$\mathbf{\Delta}_{1/v}^{-1}$ 将 $J_\lambda^{(q,t)}$ 除以 $\prod_{\square\in\lambda}(1-\chi(\square)/v)$。接着，将 $h_n[X(1-t)/(1-q)]J_\lambda^{(q,t)}$ 在麦克唐纳基中展开，并将每个系数乘以 v^n。对于 $n\geq 1$，Pieri 规则给出一个求和，求和范围为通过向 λ 添加由 n 个方格组成的水平条带而得到的分拆 ξ。对于 $n=0$，我们有 $h_0=1$ 和 $\xi=\lambda$。最后，$\mathbf{\Delta}_{1/v}$ 将每个这样的 $J_\xi^{(q,t)}$ 乘以 $\prod_{\square\in\xi}(1-\chi(\square)/v)$。因此，Pieri 展开中 $J_{(q,t)\xi}$ 的系数会乘上因子

$$v^n\frac{\prod_{\square\in\xi}(1-\chi(\square)/v)}{\prod_{\square\in\lambda}(1-\chi(\square)/v)} = v^n\prod_{\square\in\xi\setminus\lambda}(1-\chi(\square)/v) = \prod_{\square\in\xi\setminus\lambda}(v-\chi(\square)). \tag{8.2}$$

λ 的方格因子相互抵消，而每个 n 新方格吸收v的一个因子。因此，u^n 系数使次数提高 n，并且其矩阵元是关于 v的多项式，所以可以在 $v=0$处求值。

令 R为由 $Rp_m = (1-t^m)(1-q^m)^{-1}p_m$给出的代数自同构，并置 $\widehat{\Delta}_c = R^{-1}\mathbf{\Delta}_c R$ 和 $\widehat{\Gamma}(u,v) = R^{-1}\mathbf{\Gamma}(u,v)R$。令 $H(s)$ 表示乘以 $\sum_{j\geq 0} h_j[X]s^j$。

Then

$$\widehat{\Gamma}(u,v)=\widehat{\Delta}_{1/v}H(uv)\widehat{\Delta}_{1/v}^{-1}. \tag{8.3}$$

定义

$$\begin{aligned} G_n(v)&=(-1)^n\operatorname{Coef}_{u^n}\left[\widehat{\Gamma}(u,v)\right],\\ G(u,v)&=\sum_{n\geq 0}G_n(v)u^n=\widehat{\Gamma}(-u,v)=\widehat{\Delta}_{1/v}H(-uv)\widehat{\Delta}_{1/v}^{-1}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

特别地，$G_0(v)=I$。由于 R 和 R^{-1} 在正交的幂和基下均为对角算子，因此它们关于普通霍尔内积都是自伴的。因此，对于 $n\geq 0$ 和 $|\nu|=|\mu|+n$，

$$\begin{aligned} (-1)^n t^{|\mu|}\left\langle \operatorname{Coef}_{u^n}\left[\mathbf{\Gamma}(u,v)Rp_\mu\right],R^{-1}p_\nu\right\rangle &=(-1)^n t^{|\mu|}\left\langle \operatorname{Coef}_{u^n}\left[R^{-1}\mathbf{\Gamma}(u,v)Rp_\mu\right],p_\nu\right\rangle\\ &=t^{|\mu|}z_\nu\operatorname{Coef}_{p_\nu}\left[G_n(v)p_\mu\right]. \end{aligned} \tag{8.5}$$

最后一个等号用到了 (8.4) 和 $\langle F,\ p_\nu\rangle=z_\nu$系数$_{p_\nu}[F]$。(8.5) 左边是 [BD26第4节中的猜想 1 所给出的表达式。5]。对于 $n<0$，该系数为零，因为$\mathbf{\Gamma}(u,\ v)$ 仅含有 u 的非负次幂。

引入顶点算子

$$\eta(z)=\exp\left(\sum_{m\geq 1}\frac{q^m-1}{mt^m}p_m z^m\right)\exp\left(\sum_{m\geq 1}(t^m-1)\partial_{p_m}z^{-m}\right). \tag{8.6}$$

对于 $Z=z_1+\cdots+z_k$，记 $Z^{-1}=z_1^{-1}+\cdots+z_k^{-1}$，并使用核 $K_k(Z;\ q)$，它由 (7.3) 展开为关于 z_j/z_i 的非负次幂（对于 $i<j$）。令

$$c_k(q)=\frac{q^{\binom{k}{2}}}{B_k(q)},\qquad c_0(q)=1.$$

算子 $\mathsf{Coef}_{z_1\cdots z_k}$ 提取每个变量的一次幂，而 CT_Z 表示提取它们的常数项。命题 8.1 用核 $G_n(v)$以及算子 $K_k(Z;q)$与完全对称函数的正规序乘积来表示 $\eta(z_i)$。冒号将所有乘法因子置于导数左侧，因此导数只作用于输入的对称函数。

命题 8.1。对于每个 $n\geq 0$,

$$G_n(v)=\sum_{k=0}^{n}(-v)^{n-k}t^n c_k(q)\operatorname{Coef}_{z_1\cdots z_k}\left[K_k(Z;q)\ :\eta(z_1)\cdots\eta(z_k)h_{n-k}[X/t+Z^{-1}]:\right]. \tag{8.7}$$

证明。我们首先将 $G(u,v)$ 表示为 $G(u,0)$。为计算 $G_n(0)$，我们从一个已知的常数项公式出发，并提取 $z_1\cdots z_n$ 的系数。然后利用完全对称函数的生成函数，恢复 $G(u,v)$ 中 u^n 的系数。

化简为 $v=0$ 时，使用参数为 q,t^{-1} 的修正 Macdonald 基中的五项关系。令 U 为代数自同构，由 $Up_m=(1-q^m)p_m$ 给出。由于

$\widetilde{H}^{(q,t^{-1})}{}_{\lambda}$ $= t^{-n(\lambda)} J_\lambda^{(q,t)}[X/(1-t)]$, , 其中 $n(\lambda) = \sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i$, 我们有

$$U\widetilde{H}_\lambda^{(q,t^{-1})} = t^{-n(\lambda)} R^{-1} J_\lambda^{(q,t)}. \tag{8.8}$$

根据（8.8）， U 将修正的 Δ_c 映射到 Δ_{c° nabla 算子在修正的麦克唐纳基上作用为

$$\nabla_{q,t^{-1}} \widetilde{H}_\lambda^{(q,t^{-1})} = (-1)^{|\lambda|} \Big(\prod_{\square \in \lambda} \chi(\square) \Big) \widetilde{H}_\lambda^{(q,t^{-1})}.$$

令 $\widehat{N}$ 以特征值 $\prod_{\square\in\lambda}\chi(\square)$ 作用于 $R^{-1}J_\lambda^{(q,t)}$，并令 σ 在次数 d上以 $(-1)^d$ 作用。由（8.8），$U\nabla_q$、$_{t^{-1}}U^{-1}$和 $\sigma\widehat{N}$在每个 $R^{-1}J_\lambda^{(q,t)}$上具有相同的特征值，因此$U\nabla_q$、$_{t^{-1}}U^{-1}$ $=\sigma\widehat{N}$。记 $P(s)$为乘以 Exp$[sX/(1-t^{-1})]$的算子，并令 $F(s) = \widehat{N}P(s)\,\widehat{N}^{-1}$。经 U 共轭，将乘以 Exp$[sX/((1-q)(1-t^{-1}))]$ 的算子变为 $P(s)$。我们使用 Garsia–Mellit 五项关系 [GM19，定理 1.1] 中 [BD26 的方程（ 11 ）所给出的形式，并取其中的 $u = cs$ 和 $v = 1/c$。经 U 共轭，并使用 $\sigma P(cs)\sigma^{-1} = P(-cs)$，同时对参数作通常的取负，得到

$$\widehat{\Delta}_c P(s) \widehat{\Delta}_c^{-1} = F(-cs)P(s). \tag{8.9}$$

令 $s = -uv$。乘积 $P(s/t)^{-1}P(s)$ 是 $H(s)$，因为其对数是乘以$\sum_{m\geq 1} p_m s^m/m$。在（8.4）中，使用（8.9）分别对这两个因子取共轭，其中 $c = 1/v$。由于 $-cs = u$，它们的乘积为

$$G(u,v) = (F(u/t)P(s/t))^{-1}F(u)P(s) = P(s/t)^{-1}F(u/t)^{-1}F(u)P(s).$$

根据（8.2）， $G(u,v)$ 的每个系数都是关于 v 的多项式，因此这里可以令 $v = 0$。此时两个外部因子都等于 I。为了恢复它们，写成 $C(a) = \mathcal{P}_{a/(1-t)} = P(a/t)^{-1}$。由于$P(s/t)^{-1} = H(s)C(ts)$以及 $P(s) = C(ts)^{-1}$，我们得到

$$\begin{aligned} G(u,0) &= F(u/t)^{-1}F(u), \\ G(u,v) &= H(s)C(ts)G(u,0)C(ts)^{-1}, \qquad s = -uv. \end{aligned} \tag{8.10}$$

为计算 $G_n(0)$，我们引入算子 D_k。对于 $k \geq 1$和一个对称函数 f，将 $\eta(z_1)\ldots,\eta(z_k)$（见8.6）的正规序乘积应用于 f，乘以$c_k(q)K_k(Z;\ q)$，并取 $z_1,\ldots,z_k$ 中的常数项。因此

$$D_k f = c_k(q)\,\mathrm{CT}_Z\big[K_k(Z;q)\ :\eta(z_1)\cdots\eta(z_k):\ f\big], \qquad D_0 = I. \tag{8.11}$$

对于 $k \geq 1$， D_k 是 [中的第 k 个常数项算子（FHHSY09，定义 3.10，式 (3.9)）]经 $R^{-1}(\cdot)R$共轭所得。事实上，此共轭将 p_m 乘以 $(1-q^m)/(1-t^m)$，并将 ∂_{p_m}乘以其倒数，从而将他们式 (1.7) 中的顶点算子变为 η（z）。他们命题 3.25 证明中第一个正规排序公式的前因子（第 095215-28 页）为 $(-1)^k q^{\binom{k}{2}}/\prod_{j=1}^k(1-q^j) = c_k(q)$。他们命题 3.17 中的麦克唐纳特征向量可从 P_λ（$X;\ q,t$）重新缩放为 $J_\lambda^{(q,t)}$，因此 D_k在共轭后的基 $R^{-1}J$（$_{q,t}$）$_\lambda$上是对角的。

令 $d_\lambda(u)$ 为 $D(u) = \sum_{k\geq 0} D_k u^k$ 在 $R^{-1}J_\lambda^{(q,t)}$ 上的特征值。对于 $s_i^\lambda = q^{\lambda_i}t^{-i}$，特征值公式 [FHHSY09，式 (3.18) 和命题 3.17]给出

$$d_\lambda(u) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{1-t^m}{1-q^m} p_m(s^\lambda)\frac{u^m}{m}\right). \tag{8.12}$$

将其与空分拆处的特征值进行比较。对每一行中的方格求和，得到有限差分

$$p_m(s^\lambda) - p_m(s^\varnothing) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} (q^{m\lambda_i}-1)t^{-im} = (q^m-1)t^{-m}\sum_{\square\in\lambda}\chi(\square)^m.$$

代入（8.12）并进行指数化，可将特征值之比确定为 $\widehat{\Delta}_{u/t}\widehat{\Delta}_u^{-1}$在同一基向量上的特征值。因此

$$\frac{d_\lambda(u)}{d_\varnothing(u)} = \prod_{\square\in\lambda}\frac{1-u\chi(\square)/t}{1-u\chi(\square)}, \qquad D(u) = d_\varnothing(u)\widehat{\Delta}_{u/t}\widehat{\Delta}_u^{-1}. \tag{8.13}$$

要从常数项公式（8.11）中提取 $z_1\cdots z_n$ 的系数，我们用 $C(a)$ 对 $D(u)$ 进行共轭。在（8.9）中令 $s = a/t$，并使用 $C(a) = P(a/t)^{-1}$，得到 $C(a)^{-1}\widehat{\Delta}_c C(a) = F(-ca/t)^{-1}\widehat{\Delta}_c$。对（8.13）中的第一个对角因子，使用这一恒等式并令 $c = u/t$。对于第二个对角因子，取 $c = u$ 处恒等式的逆，这会将 $F(-au/t)$ 置于 $\widehat{\Delta}_u^{-1}$ 的右侧。由于 $d_\varnothing(u)$ 是标量，我们得到

$$\begin{aligned} C(a)^{-1}D(u)C(a) &= F(-au/t^2)^{-1}\big(d_\varnothing(u)\widehat{\Delta}_{u/t}\widehat{\Delta}_u^{-1}\big)F(-au/t) \\ &= F(-au/t^2)^{-1}D(u)F(-au/t). \end{aligned} \tag{8.14}$$

我们比较 $a^n u^n$ 在（8.14）中的系数。左侧，u^n 的系数为C（a）$^{-1}D_nC$（a）。为求其 a^n的系数，回想（8.6）可知，η（z）的微分部分将 p_m 平移t^m-1（z^{-m}）。将此平移作用于乘法因子C（a）$=\mathcal{P}_{a/(1-t)}$ 得到

$$C(a)^{-1}\eta(z)C(a) = \exp\left(-\sum_{m\geq 1}\frac{(a/z)^m}{m}\right)\eta(z) = (1-a/z)\eta(z). \tag{8.15}$$

因此，（n 8.11）中的顶点算子贡献因子 $\prod_{i=1}^n(1-a/z_i)$。要得到 a^n，我们必须从每个因子中选取 $-a/z_i$。这给出（$z_1\cdots z_n$）$^{-1}$，它将 $z_1\cdots z_n$项移位为常数项。计入符号后，左侧 a^nu^n 的系数为

$$(-1)^n c_n(q)\,\mathrm{CT}_Z(z_1\cdots z_n)^{-1}K_n(Z;q):\eta(z_1)\cdots\eta(z_n):. \tag{8.16}$$

(8.14) 右侧的两个 F 因子只依赖于 au。如果它们合起来贡献 $(au)^r$，那么从 $D(u)$ 中选取 D_ju^j 会得到 a^ru^{r+j}。为了得到 a^nu^n，必须有 $r=n$ 和 $j=0$，因此只有 $D_0 = I$ 有贡献。根据 (8.10) 中的第一恒等式，剩余乘积为 $F(-au/t^2)^{-1}F(-au/t) = G(-au/t,0)$。其关于 au 的 n 次项为 $G_n(0)(-au/t)^n$，因此

右侧的系数为 $(-1)^n t^{-n} G_n(0)$。将其与 (8.16) 相等并约去 $(-1)^n$，得到

$$G_n(0) = t^n c_n(q)\,\mathrm{Coef}_{z_1\cdots z_n}\big[K_n(Z;q) : \eta(z_1)\cdots\eta(z_n) :\big]. \tag{8.17}$$

现在我们回到 $G(u,v)$。将 (8.15) 中的共轭逆转，会使 $\eta(z)$ 乘以 $(1-a/z)^{-1}$。因此，在 (8.10) 中，其中 $a = ts = -uvt$，代入 (8.17) 得到

$$\begin{aligned} G(u,v) = H(-uv)\sum_{k\ge 0}(ut)^k c_k(q)\,\mathrm{CT}_Z(z_1\cdots z_k)^{-1} K_k(Z;q)\ &: \eta(z_1)\cdots\eta(z_k) : \\ &\cdot \prod_{i=1}^{k}(1+uvt/z_i)^{-1}. \end{aligned} \tag{8.18}$$

为提取 $G_n(v)$，取 (8.18) 中 u^n 的系数。因子 $(ut)^k$ 将求和限制在$k \le n$。在 $\prod_i(1+uvt/z_i)^{-1}$ 的几何级数中，一个 z_i 的每个负幂都会贡献一个 u 的幂，因此总共至多出现 $n-k$ 个这样的幂。在次数为d的输入上，(8.6) 中的导数至多提供 d 个额外的负幂。由于 $(z_1\cdots z_k)^{-1}$ 的次数为 $-k$，且 $K_k(Z;q)$ 的总 Z-次数为零，常数项至多使用顶点算子乘法部分的 $d+n$个正幂。这些项一旦确定，从 K_k 中所需的指数也随之确定。赋予 z_i 权 i 后，(7.3) 中的每个比值 z_j/z_i都有正权 $j-i$，因此核中只有有限项能够提供这些指数。

现在我们将提供 u剩余幂次的两个因子合并起来。根据齐次性，$h_j[X] = t^j h_j[X/t]$，而对 i 的乘积是 $h_b[Z^{-1}]$的生成函数。因此

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j\ge 0}(-uv)^j h_j[X]\right)\prod_{i=1}^{k}(1+uvt/z_i)^{-1} &= \left(\sum_{j\ge 0}(-uvt)^j h_j[X/t]\right)\left(\sum_{b\ge 0}(-uvt)^b h_b[Z^{-1}]\right) \\ &= \sum_{r\ge 0}(-uvt)^r h_r[X/t+Z^{-1}], \end{aligned}$$

其中最后一个等式使用了 $\sum_{j+b=r} h_j[X/t]h_b[Z^{-1}] = h_r[X/t+Z^{-1}]$。依赖于 X的因子来自 $H(-uv)$，它作用于所有导数的左侧。因此，$h_r[X/t+Z^{-1}]$作为乘法因子进入正规序乘积。

在第 k 项中，u 的幂次为 $k+r$，因此取 $r = n-k$。标量因子于是为 $(ut)^k(-uvt)^{n-k} = u^n(-v)^{n-k}t^n$。最后，前因子 $(z_1\cdots z_k)^{-1}$ 将常数项转化为剩余乘积中 $z_1\cdots z_k$ 的系数。对 $0 \le k \le n$求和得到 (8.7)。□

我们注意到，当 $k=0$ 在 (8.7) 中时，乘积为空，系数提取就是恒等映射。该求和项等于乘以 $(-v)^n t^n h_n[X/t] = (-v)^n h_n[X]$。

8.2. **定理 D 的证明。** 将命题 8.1 应用于幂和单项式 p_μ，我们将 $h_{n-k}[X/t+Z^{-1}]$ 按两个字母表展开。所得因子 $h_b[Z^{-1}]$ 与$p_\sigma[Z^{-1}]$相结合，其中 σ 记录了由导数选出的 μ 的部件。对于 $k \ge 1$，收集 t 的幂后，系数提取便归结为 $\mathcal{S}_{1,\,k}(p_\sigma h_b)$，由此可应用推论 7.4。

对于分拆 σ, μ，本小节中的记号 $\sigma \subseteq \mu$ 表示其部件多重集的包含关系，而 $\mu \setminus \sigma$ 表示其补多重集。我们记

$$\binom{\mu}{\sigma} = \prod_{j\geq 1} \binom{m_j(\mu)}{m_j(\sigma)}.$$

我们使用（8.5）中的普通霍尔内积。

定理 8.2（麦克唐纳系数正性）。对于任意 $n \geq 0$ 和分拆 μ, ν 满足$|\nu| = |\mu| + n$,

$$t^{|\mu|} z_\nu \operatorname{Coef}_{p_\nu}\left[G_n(v) p_\mu\right] \in \mathbb{N}[q-1, t-1, -v].$$

由（8.5），这证明了 [BD26] 中的猜想 *1*。

证明。我们在模展开中追踪 t 的幂次，然后证明幂和基中的非负性，并通过 Hall 配对证明整性。令 $m = |\mu|$。在（8.7）中的正规乘积里，湮灭部分通过代入 p_μ $p_j \mapsto p_j + (t^j - 1)\, p_j[Z^{-1}]$ 作用于 p_μ。展开这一代入得到

$$\sum_{\sigma\subseteq\mu} \binom{\mu}{\sigma} \prod_{s\in\sigma} (t^s - 1) p_{\mu\setminus\sigma}[X] p_\sigma[Z^{-1}].$$

此外,

$$h_{n-k}[X/t + Z^{-1}] = \sum_{b=0}^{n-k} t^{-(n-k-b)} h_{n-k-b}[X] h_b[Z^{-1}].$$

对于由 σ 和 b索引的项，因子 $p_\sigma[Z^{-1}] h_b[Z^{-1}]$ 的总 Z次数为 $-|\sigma| - b$，而 $K_k(Z;\, q)$ 的总 Z次数为零。因此，提取总次数为 k的 $z_1 \cdots z_k$，会从产生因子 $\mathbf{Exp}[(q-1)XZ/t]$ 中选取次数为 $k + b + |\sigma|$ 的部分。该次数对应的分量等于 $t^{-(k+b+|\sigma|)}$ 乘以 $\mathbf{Exp}[(q-1)$ $XZ]$中相应的分量。将其与前置因子 t^{m+n} 及因子 $t^{-(n-k-b)}$ 结合，得到

$$t^{m+n} t^{-(k+b+|\sigma|)} t^{-(n-k-b)} = t^{m-|\sigma|}.$$

对于 $k \geq 1$，剩余的系数提取（包括因子 $B_k(q)^{-1}$ 来自 $c_k(q)$）为$\mathcal{S}_{1,\, k}(p_\sigma h_b)$由（7.22）。将 $k = 0$ 项单独写出，得到有限恒等式

$$\begin{aligned} t^m G_n(v) p_\mu = (-v)^n t^m h_n p_\mu \\ + \sum_{k=1}^{n} (-v)^{n-k} q^{\binom{k}{2}} \sum_{\sigma\subseteq\mu} \binom{\mu}{\sigma} t^{m-|\sigma|} \prod_{s\in\sigma} (t^s - 1) p_{\mu\setminus\sigma} \\ \cdot \sum_{b=0}^{n-k} h_{n-k-b}[X]\, \mathcal{S}_{1,k}(p_\sigma h_b). \end{aligned} \tag{8.19}$$

由于 σ 的部件取自 μ的部件，剩余指数 $m - |\sigma|$ 非负。因此，因子 t^m 消去了（t 中的所有负次幂8.19）。

根据推论 7.4，对于 $a = 1$, $\mathcal{S}_{1,k}(p_\sigma h_b)$ 在 $q-1$ 中具有非负有理数幂和系数。每个 $h_j = \sum_{\tau\vdash j} p_\tau / z_\tau$ 也具有非负有理数幂和系数，而

$q^{\binom{k}{2}}$, $t^{m-|\sigma|}$ 和 t^s-1 在 $q-1$ 或 $t-1$中具有非负整数系数，具体取决于情况。(8.19) 中的每一项因此在$q-1$、$t-1$、$-v$中都具有非负有理数幂和系数。因此

$$t^m z_\nu \operatorname{Coef}_{p_\nu}\left[G_n(v)p_\mu\right] \in \mathbb{Q}_{\geq 0}[q-1, t-1, -v]. \tag{8.20}$$

关于整性，推论 7.4 还给出了$\mathcal{S}_{1,\ k}(p_\sigma h_b) \in \Lambda[q]$。由于$p_{\mu\setminus\sigma}$ 以及每个 h_j 也属于 Λ, (8.19) 属于 $\Lambda[q,t,v]$。$(v)p_\mu$ 和 p_ν 在$\mathbb{Z}[q,t,v]$中都有 Schur 系数，因此 Schur 基的标准正交性使得它们的 Hall 配对是整数。幂和正交性给出

$$t^m z_\nu \operatorname{Coef}_{p_\nu}\left[G_n(v)p_\mu\right] = \langle t^m G_n(v)p_\mu, p_\nu\rangle \in \mathbb{Z}[q,t,v] = \mathbb{Z}[q-1,t-1,-v]. \tag{8.21}$$

结合(8.20)和(8.21)即可证明其属于 $\mathbb{N}[q-1,t-1,-v]$。 □

现在我们将定理 8.2 应用于麦克唐纳特征，其定义使用麦克唐纳内积

$$\langle p_\rho, p_\tau\rangle_{q,t} = \delta_{\rho\tau} z_\rho \prod_i \frac{1-q^{\rho_i}}{1-t^{\rho_i}}.$$

对于一个分拆 μ 和 $\ell \geq 1$，我们使用 [BD26定义 1 中的特征4], ，并采用t^{1-j} 其中命题 4.7 的证明中所用的移位：

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_\mu^{(q,t)}(v_1,\dots,v_\ell) = \left\langle p_\mu, \operatorname{Coef}_{u^{|\mu|}}\left[\boldsymbol{\Gamma}(u,v_1)\boldsymbol{\Gamma}(t^{-1}u,v_2)\cdots\boldsymbol{\Gamma}(t^{-(\ell-1)}u,v_\ell)1\right]\right\rangle_{q,t}. \tag{8.22}$$

式（8.22）中的系数提取选取齐次次数 $|\mu|$，与p_μ进行配对也同样如此。

推论 8.3。 对于每个分拆 μ 以及每个 $\ell \geq 1$,

$$(-1)^{|\mu|}t^{2(\ell-1)|\mu|}\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_\mu^{(q,t)}(v_1,\dots,v_\ell) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}[q-1,t-1,-v_1,\dots,-v_\ell].$$

证明。 将（8.22）在基 $\{Rp_\lambda\}$中展开。对于 $1 \leq j \leq \ell$，使用 $\widehat{\Gamma} = R^{-1}\boldsymbol{\Gamma}R$ 并将$-t^{1-j}u$ 代入（8.4）中的 u ，得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}(t^{1-j}u, v_j)Rp_\lambda &= R\widehat{\Gamma}(t^{1-j}u, v_j)p_\lambda \\
&= \sum_{r\geq 0}(-t^{1-j}u)^r\, RG_r(v_j)p_\lambda \\
&= \sum_{r\geq 0}(-u)^r t^{-(j-1)r}\, RG_r(v_j)p_\lambda.
\end{aligned}$$

Macdonald 内积给出 $\langle p_\mu, Rp_\lambda\rangle_{q,t} = \delta_{\mu\lambda}z_\mu$。对分拆序列$\rho = (\rho(0)\dots,\rho(\ell))$ 求和，其中 $\rho(\ell) = \varnothing$, $\rho(0) = \mu$，且 $n_j = |\rho(j-1)| - |\rho(j)| \geq 0$，对于 $1 \leq j \leq \ell$。将 (8.22) 中的算子从右向左作用，我们取 $Rp_{\rho(j-1)}$ 在$\boldsymbol{\Gamma}(t^{1-j}u, v_j)Rp_{\rho(j)}$ 中的系数，其中 $j = \ell,\dots,1$。然后 $\sum_j n_j = |\mu|$ 且 $|\rho(j)| = \sum_{i>j} n_i$，所以

$$2(\ell-1)|\mu| - \sum_j (j-1)n_j - \sum_j |\rho(j)| = 2\sum_j (\ell-j)n_j \geq 0.$$

取 $u^{|\mu|}$ 的系数，并将 t 的幂归组，得到

$$(-1)^{|\mu|}t^{2(\ell-1)|\mu|}\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{\mu}^{(q,t)}(v_1,\dots,v_\ell)$$
$$= z_\mu \sum_{\rho} t^{2\sum_j(\ell-j)n_j} \prod_{j=1}^{\ell} \left(t^{|\rho(j)|} \operatorname{Coef}_{p_{\rho(j-1)}} \left[G_{n_j}(v_j) p_{\rho(j)} \right] \right).$$

对于每个 $1 \le j \le \ell$，定理 8.2 以输入分拆 $\rho(j)$ 和输出分拆 $\rho(j-1$给出

$$t^{|\rho(j)|} z_{\rho(j-1)} \operatorname{Coef}_{p_{\rho(j-1)}} \left[G_{n_j}(v_j) p_{\rho(j)} \right] \in \mathbb{N}[q-1, t-1, -v_j].$$

由于 $z_{\rho(j-1)} > 0$ 和 $t = 1 + (t-1)$，每个加项在所述变量中都具有非负有理系数。□

Appendix A. Background and proof of Lemma 3.3

我们回顾第 3.2 节中关于向量丛的背景知识，以及引理 3.3的证明。

A.1. 向量丛与上同调的背景知识。 在本小节中，固定一个域 K 和一个整数 $n \ge 1$，并令 $X = \mathbb{P}_K^n$。其齐次坐标为 $[c_0 : \cdots : c_n]$；一个 K-有理点是 K^{n+1} 中的非零向量，视非零数乘为等价。标准仿射图为 $U_i = \{c_i \neq 0\}$，其中 $0 \le i \le n$。在这样的图上，正则函数局部是坐标 c_j/c_i 的多项式之商，且分母在所讨论的邻域上非零。结构层 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$将每个开集映射为其正则函数环。

层 $\mathcal{F}$是 $\mathcal{O}$-模，它将开集 W映射为一个 $\mathcal{O}(W)$-模 $\mathcal{F}(W)$的截面，并带有到较小开集的限制映射。限制映射按预期复合；在开覆盖上彼此于交集处相符的截面，可以粘合为唯一的截面。秩为b 的向量丛可由其截面层来识别；该层局部同构于 $\mathcal{O}^b$；这样的层称为有限局部自由层，而与 $\mathcal{O}^b$ 的局部识别称为局部平凡化。它在一点处的纤维，是通过在该点取局部截面值而得到的 b维向量空间，其底域为该点的剩余域：正则函数在该点取值的域（在 K 上的一个 K-有理点处）。开集上的截面为每个纤维指定一个向量，并在局部平凡化中具有正则坐标。因此，纤维记录单点处的值，而层记录截面及其限制映射。线丛的秩为一。关于这些定义，参见 [Har77，第二章，§§1 和 5]。

tautological 线丛 $\mathcal{O}(-1)$ 在由 $\vec{c} \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ 表示的点处的纤维为 $K\vec{c}$。将向量丛 $\mathcal{F}$ 在局部平凡化中取对偶向量空间，得到其对偶，记为 $\mathcal{F}^\vee$。记 $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^\vee$；对于整数 d，记 $\mathcal{O}(d)$ 为 $\mathcal{O}(1)$ 的 d 次张量幂，其中 $d < 0$ 使用对偶幂，且 $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}$。记 $\mathcal{F}(d) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(d)$ 表示其扭曲。记号 $\mathcal{O}(d, \mathcal{F})^b$ 表示 b 个副本的直和。记 $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ 表示整体截面。对于 $\mathcal{O}(d)$，我们有

$$H^0(X, \mathcal{O}(d)) = \Gamma(X, \mathcal{O}(d)) \cong K[c_0, \dots, c_n]_d \qquad (d \ge 0), \tag{A.1}$$

其中下标表示次数为 d 的齐次分量。特别地，线性形式定义映射 $\mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}$，而次数为 d 的齐次多项式定义映射 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(d)$。

在局部平凡化下，丛映射由正则函数构成的矩阵表示。在 X 上，常纤维秩映射可以在局部写成带有一个恒等块和一个零块的矩阵形式：选取一个可逆子式，并进行行运算和列运算。因此，其核、像和余核都是向量丛。正合序列意味着每个像作为层都等于下一个核；这可以在局部进行验证。向量丛的短正合列在局部是分裂的，因此秩相加，行列式相乘。对于秩为 b 的向量丛 $\mathcal{F}$，其行列式是线丛 $\det \mathcal{F} = \bigwedge^b \mathcal{F}$。局部分裂未必能给出整体分裂，而丛的满射映射在整体截面上也未必是满射。

层上同调将整体截面扩展为群 $H^q(X, \mathcal{F})$，其中 $q \geq 0$ 为整数。在我们的情形中，它有一个具体描述。对于向量丛以及其截面层的核与商，使用覆盖 $\mathfrak{U} = (U_0, \ldots\ldots, U_n)$ 所对应的有序 ˇCech 复形。用 $\check{C}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ 表示其次数为 $q \geq 0$ 的项，并用 δ^q 表示其微分，即通过省略一个指标所得到的限制映射的交错和。其各项及其上同调如下：

$$\begin{aligned} \check{C}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &= \bigoplus_{0 \leq i_0 < \cdots < i_q \leq n} \Gamma(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}, \mathcal{F}), \\ H^q(X, \mathcal{F}) &\cong \ker \delta^q / \operatorname{im} \delta^{q-1}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

这里，当 $q = 0$ 时，前一项为零，因此 $\operatorname{im} \delta^{-1} = 0$。例如，$\delta^0$ 将一族截面 (s_i) 映射为它们在 $s_j - s_i$ 上的差 $U_i \cap U_j$。因此，其核由在交叠处相互一致的局部截面构成，也就是由整体截面构成。对于每个 q，(A.2) 的第二行都是通常的核模像。这里考察的层都是拟凝聚的，也就是说，它们在局部上来自仿射图上的模，而限制由局部化给出。由于这些 U_i 的交集都是仿射的，(A.2) 计算了层上同调[Stacks，标签01XD]。

例如，短正合列 $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$给出一个以.....开头的正合序列

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}'). \tag{A.3}$$

一个 $\mathcal{F}''$ 的截面能够提升为 $\mathcal{F}$ 的截面，当且仅当它在 $H^1(X, \mathcal{F}')$ 中的像为零 [Har77，第三章，定理1.1A(c)和命题2。6]。这说明层上同调如何揭示整体截面上的满射性失效。我们将使用 [Har77，第三章，定理51]中线丛上同调计算所得的以下推论：

$$\begin{aligned} H^q(X, \mathcal{O}(-j)) &= 0 \quad (q \geq 0,\ 1 \leq j \leq n), \\ H^q(X, \mathcal{O}(d)) &= 0 \quad (q > 0,\ d \geq 0). \end{aligned} \tag{A.4}$$

有界复形 A 的层只有有限多个非零项 A^i 和微分d_A^i： $A^i \to A^{i+1}$，其中 $d_A^{i+1} d_A^i = 0$。其上同调层为

$$\mathcal{H}^i(A) = \ker d_A^i / \operatorname{im} d_A^{i-1}. \tag{A.5}$$

对于向量空间复形， H^i 表示相同的“核模像”构造。对于整数 j，移位 $A[j]$ 将次数 $i+j$ 移至次数 i。如果 A 的项是向量丛，则其对偶复形通过对偶化各项并反转次数得到。我们的微分约定为

$$\begin{aligned}(A[j])^i = A^{i+j}, \qquad d^i_{A[j]} = (-1)^j d^{i+j}_A,\\ (A^\vee)^i = (A^{-i})^\vee, \quad d^i_{A^\vee} = (-1)^{i+1}(d^{-i-1}_A)^\vee.\end{aligned} \tag{A.6}$$

与线丛作张量积以及复形的扭曲都是逐项进行的。链映射是与微分相容的一族映射。如果它在所有上同调层上诱导出同构，则称其为拟同构。导出范畴形式上将这些映射变为可逆映射；对于复形， $A \simeq B$ 表示此范畴中的一个同构。参见[Stacks，标签 05RR]。

对于链映射 $f\colon A \to B$，映射锥的项为 $\mathrm{Cone}(f)^i = B^i \oplus A^{i+1}$，其在局部截面上的微分为 $(b,\ a) \mapsto (d_B b + f(a)\ -d_A a)$。它给出一个正合三角

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \mathrm{Cone}(f) \longrightarrow A[1]. \tag{A.7}$$

正合三角是指在导出范畴中同构于此形式的三角。它给出一个上同调层的长正合列，接续为 $\mathcal{H}^i(A) \to \mathcal{H}^i(B) \to \mathcal{H}^i(\mathrm{Cone}(f)) \to \mathcal{H}^{i+1}(A)$；参见 [Stacks，标签 014E 和 05RR]。对于有界的向量丛复形，对锥构造作对偶化表明，对偶化会反转正合三角；与线丛作张量积则保持正合三角。

标准截断 $\tau_{\leq -1}A$ 保留次数 -1以下的项，将 A^{-1} 替换为 $\ker d_A^{-1}$，并将所有非负次数的项设为零。它恰好保留负次数上同调层。若 A 集中在非正次数，则有一个正合三角

$$\tau_{\leq -1}A \longrightarrow A \longrightarrow \mathcal{H}^0(A) \longrightarrow (\tau_{\leq -1}A)[1], \tag{A.8}$$

其中 $\mathcal{H}^0(A)$置于次数 0；参见 [Stacks，标签 08J5，注释 13.12。4]。反过来，一个正合三角 $B \to A \to \mathcal{F} \to B[1]$ 中，若 B 仅有负次数上同调，且$\mathcal{F}$ 在次数 0 是一个层，则可确定 $B \simeq \tau_{\leq -1}A$。截断具有函子性，并且与按线丛张量化相容。对其他次数进行同样的构造可知，若 A 只有一个非零上同调层 $\mathcal{F}$ 位于次数 i，则 $A \simeq \mathcal{F}[-i]$。

对于上述层构成的有界复形 A，其超上同调 $\mathbb{H}^k(X, A)$结合了 A 的微分与局部粘合计算。具体而言，对各项构造切赫复形，并取其全复形；其次数 k 的项为$\bigoplus_{p+q=k} \check{C}^q(\mathfrak{U}, A^p)$，微分为 $d_A + (-1)^p\delta$，作用于 $\check{C}^q(\mathfrak{U}, A^p)$。这个全复形的上同调就是 $\mathbb{H}^k(X, A)$；参见 [Stacks，标签 01XD 和 01FP]。对于集中在次数 0 的单个层，这就得到通常的层上同调。因此， $\mathcal{H}^i(A)$ 是由微分计算出的一个层，而 $H^q(X, \mathcal{F})$ 和 $\mathbb{H}^k(X, A)$ 则是利用局部截面和限制映射计算出的向量空间。对于有界复形 A、B，拟同构不变性给出

$$A \simeq B \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{H}^k(X, A) \cong \mathbb{H}^k(X, B) \qquad (k \in \mathbb{Z}). \tag{A.9}$$

下面只需要用到两条计算规则。记 $\Gamma(X,\ A)$ 为对每一项取整体截面并赋予诱导微分后得到的向量空间复形。如果

对于每个 p 和每个 $q>0$，$H^q(X,\ A^p)=0$，那么

$$\mathbb{H}^k(X,A)\cong H^k(\Gamma(X,A)) \qquad (k\in\mathbb{Z}). \tag{A.10}$$

这一标准计算见于 [Stacks，标签 05TA]。在 ˇCech 描述中，每一列的上同调都仅存在于次数零，此时它等于 $\Gamma(X,\ A^p)$。特别地，如果 $H^q(X,\ A^p)=0$ 对每个 p 以及每个 $q\geq 0$都成立，则剩余的向量空间复形为零。因此

$$\mathbb{H}^k(X,A)=0 \qquad (k\in\mathbb{Z}). \tag{A.11}$$

A.2. **引理3.3的证明。** 我们保留（3.16）和（3.17）中的设定，并假设（3.16）是正合的。特别地，$n\geq 2$，$a\geq 1$，并且 K 具有特征零。我们采用附录A.1中的约定和计算。

证明。 选取 V的一组基。断言是，取相应次数为 n 的a 形式的乘积，并以基元素的多重集为指标，它们构成次数 na中的一组基。我们遵循 [RSWY26，第4节中的超上同调论证。1]。

步骤 *1*：将 α_n 的核与余核表示为超上同调。令 $\mathcal{U}=U\otimes\mathcal{O}(-1)$，$\mathcal{V}=V\otimes\mathcal{O}$，并令 $C=[\mathcal{U}\xrightarrow{\varphi}\mathcal{V}]$ 位于次数 -1，0。根据（3.16），$\mathcal{H}^{-1}(C)=E$ 和 $\mathcal{H}^0(C)=L$。对于 $s\geq 0$，对称幂复形 $S_s=\operatorname{Sym}^s C$ 的各项为

$$S_s^{-i}=\bigwedge^i\mathcal{U}\otimes\operatorname{Sym}^{s-i}\mathcal{V} \qquad (0\leq i\leq s). \tag{A.12}$$

对于 $1\leq i\leq s$，其微分如下所示。这里，u_1，……，u_i 是 $\mathcal{U}$ 的局部截面，f 是 $\operatorname{Sym}^{s-i}\mathcal{V}$ 的局部截面，而帽号表示省略一个因子：

$$d_S(u_1\wedge\cdots\wedge u_i\otimes f)=\sum_{h=1}^{i}(-1)^{h-1}u_1\wedge\cdots\widehat{u_h}\cdots\wedge u_i\otimes\varphi(u_h)f.$$

局部地，（3.16）分解为 C，其中 E 位于次数 -1，L 位于次数 0，另有一个带恒等映射微分的二项复形。后一个直和项的正对称幂是正合的（它们是以独立变量构成的 Koszul 复形的正次数部分）。只有 E 中的外因子和 L 中的对称因子对上同调有贡献，从而得到

$$\mathcal{H}^{-i}(S_s)=\bigwedge^i E\otimes L^{s-i} \qquad (0\leq i\leq s). \tag{A.13}$$

此识别与局部分裂无关。要恢复右侧乘积的上同调类，取其 E 因子的楔积 e，并将其 L 因子提升到 $\mathcal{V}$。若将一个提升改为 $\varphi(u)$，则代表元会改变 $e\otimes\varphi(u)f=d_S(u\wedge e\otimes f)$，其中 f 是其他提升的乘积。所得上同调类在交叠处相同。

在次数 1 中添加 L^s 至 S_s，使用由 $^s\mathcal{V}\to L^s$ 诱导的商 $\operatorname{Sym}\varepsilon$。所得的$\widehat{}$复形 S_s 恰好保留（A.13）中的负次数上同调层。对于 $s=n$，其负次数项为

$$\bigwedge^i U\otimes\operatorname{Sym}^{n-i}V\otimes\mathcal{O}(-i), \qquad 1\leq i\leq n,$$

根据（A.4），其上同调在每个次数中都消失。其余项 $\mathrm{Sym}^n V \otimes \mathcal{O}$和 $L^n = \mathcal{O}(na)$，根据同一公式，没有高阶上同调。因此，我们可以像（A.10）中那样，通过取整体截面来计算超上同调。在次数 0 和 1 中，这就得到

$$\mathrm{Sym}^n V \xrightarrow{\alpha_n} H^0(\mathbb{P}^n_K, L^n).$$

商将 $v_1 \cdots v_n$映射为截面的乘积 $\varepsilon(v_j \otimes 1)$，因此其在整体截面上的映射为 α_n，见（3.17）。于是

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^0(\mathbb{P}^n_K, \widehat{S}_n) &\cong \ker \alpha_n, \\ \mathbb{H}^1(\mathbb{P}^n_K, \widehat{S}_n) &\cong \operatorname{coker} \alpha_n. \end{aligned} \tag{A.14}$$

^现在只需找出一个表示 S_n 的复形，使其各项在每个次数上都具有消失的上同调。对于 $n = 2$，我们已经可以看出这样的复形。对（3.16）取秩和行列式，得到秩 $E = 1$ 以及 $E \simeq \mathcal{O}(-a-1)$。增广后，（A.13）只留下唯一的^上同调层 $E \otimes L \simeq \mathcal{O}(-1)$ 位于次数 -1。因此 $S_2 \simeq \mathcal{O}(-1)[1],$，而所需的消失性由（A.4）推出。

步骤 2。比较连续的对称幂。对于一般的 n，我们首先将对称幂从 n 降至 $n-1$。再次进行比较将分离出 E的最高外幂。对于这些比较，我们调整 [RSWY26命题 3 的证明中的映射。6]对于一个整数 $k \geq 1$ 以及 $v_1, \ldots, v_k$的局部截面 $\mathcal{V}$，定义

$$\delta_\varepsilon(v_1 \cdots v_k) = \sum_{j=1}^{k} v_1 \cdots \widehat{v_j} \cdots v_k \otimes \varepsilon(v_j).$$

令 $\delta_\varepsilon(1)$ 为 $= 0$。映射 δ_ε 是取值于 $\mathrm{Sym}^{k-1} \mathcal{V} \otimes L$ 的 $\mathcal{O}$-线性映射。对于 $\mathcal{U}$ 的局部截面 u 和 $\mathrm{Sym}^{k-1} \mathcal{V}$的局部截面 f，恒等映射 $\varepsilon\varphi = 0$ 给出

$$\delta_\varepsilon(\varphi(u) f) = \varphi(u) \delta_\varepsilon(f). \tag{A.15}$$

对于 $s \geq 1$，在每个次数都采用相同的归一化 $1/s$，并令

$$D_s^{-i} = \frac{1}{s} \mathrm{id}_{\wedge^i \mathcal{U}} \otimes \delta_\varepsilon \qquad (0 \leq i \leq s). \tag{A.16}$$

方程 (A.15)表明这些映射与微分可交换，并定义了链映射 $D_s\colon \ S_s \to S_{s-1} \otimes L$。它还验证了 $i = s$处的链条件，此处目标项为零。对于 $0 \leq i < s$，源空间和目标上同调层均为 $\bigwedge^i E \otimes L^{s-i}$，由 (A.13)可知。对于表示此类的乘积，$\delta_\varepsilon$ 从 L中选取一个因子 $s - i$。每种选择在 L^{s-i}中都给出相同的乘积，因此

$$\mathcal{H}^{-i}(D_s) = \frac{s-i}{s} \mathrm{id}_{\wedge^i E \otimes L^{s-i}} \qquad (0 \leq i < s). \tag{A.17}$$

对（3.16）取秩，得到秩 $E = n-1$。记 $\det E = \bigwedge^{n-1} E$为其行列式线丛，我们还得到

$$\det E \simeq \mathcal{O}(-(n-1)(a+1)), \qquad \det E \otimes L^{n-1} \simeq \mathcal{O}(-(n-1)). \tag{A.18}$$

事实上，$\det(\ker\varepsilon) \simeq L^{-1}$ 且 $\det E \simeq \det \mathcal{U} \otimes L$。我们首先将（A.17）用于 $s = n$。由于 $\bigwedge^i E = 0$ 对于 $i \geq n$，每个非零上同调层都有 $i \leq n-1$，且标量 $(n-i)/n$ 在 K 中非零。因此 D_n 是一个拟同构，从而得到

$$S_n \simeq S_{n-1} \otimes L. \tag{A.19}$$

回想一下，增广会去掉 $\mathcal{H}^0(S_s) = L^s$。用（A.8）中的记号，这可以写成

$$\widehat{S}_s \simeq \mathrm{Cone}(S_s \to L^s)[-1] \simeq \tau_{\leq -1} S_s. \tag{A.20}$$

将 D_n 扩展到增广复形时，在次数 0 的 L^n 上取恒等映射。事实上，对 $v_1 \cdots v_n$ 应用 D_n^0，再在 L^n 中相乘，得到 n 份 $\varepsilon(v_1) \cdots \varepsilon(v_n)$，每份的系数都是 $1/n$。这恰好就是原来的增广。扩展后的映射在负上同调次数上诱导出与 D_n 相同的同构，而两个增广复形在其他次数上的上同调层均为零。因此

$$\widehat{S}_n \simeq \widehat{S}_{n-1} \otimes L. \tag{A.21}$$

现在令 $m = n-1$，并用 $s = m$ 作同样的比较。由（A.17），D_m 在次数 $-m+1, \ldots, 0$ 上的每个上同调层上都是同构。源空间中唯一剩余的上同调是 $\mathcal{H}^{-m}(S_m) = \det E$，而目标在次数 $-m$ 没有项。因此，映射锥的上同调层长正合列表明 $\mathrm{Cone}(D_m)[-1]$ 只有一个非零上同调层，即次数 $-m$ 上的 $\det E$ $E[m]$。因此它同构于 $\det E$，映射锥三角遂成为

$$\det E[m] \longrightarrow S_m \xrightarrow{D_m} S_{m-1} \otimes L \longrightarrow \det E[m+1]. \tag{A.22}$$

第 3 步。利用自对偶性证明消失。 现在我们要为以下对象 S_m 中由增广保留的负次数部分寻找一个模型。对偶会反转（A.22）中的箭头。我们选择适当的扭曲和移位，使最左端的项 $\det E[m]$ 变为右侧的 L^m，并将中间项识别为 S_m。事实上，C 的微分具有常秩，其核 E 的秩为 m，其余核 L 是一个线丛。由于在特征零时除幂与对称幂相同，[RSWY26，定理 3。2] 给出

$$S_m \simeq S_m^\vee \otimes \det E \otimes L^m[m]. \tag{A.23}$$

对（A.22）取对偶并张量以 $\det E \otimes L^m[m]$。利用（A.23）处理中间项，我们得到一个以

$$S_{m-1}^\vee \otimes \det E \otimes L^{m-1}[m] \longrightarrow S_m \longrightarrow L^m. \tag{A.24}$$

这里最右边的项是 L^m，因为 $(\det E[m])^\vee \otimes \det E \otimes L^m[m] = L^m$。由 (A.12可知，对偶化 S_{m-1} 会将其次数移至 0，...，$m-1$，而移位 $[m]$ 会将它们移至$-m$，...，-1。因此，(A.24) 的第一项集中在负次数上，而 L^m 集中在次数 0 上。现在，长正合列表明，左箭头涵盖了 S_m的所有负次数上同调层，而右箭头在 $\mathcal{H}^0$上诱导出一个同构。根据 (A.8) 之后的刻画，左边的项表示 $\tau_{\leq -1} S_m$，根据 (⁀S_m，它等于 A.20)。因此

$$\widehat{S}_m \simeq S_{m-1}^\vee \otimes \det E \otimes L^{m-1}[m]. \tag{A.25}$$

结合 (A.21)、(A.25) 和 (A.18) 可得

$$\begin{aligned}\widehat{S}_n &\simeq S_{n-2}^{\vee} \otimes \det E \otimes L^{n-1}[n-1] \\ &\simeq S_{n-2}^{\vee}(-(n-1))[n-1].\end{aligned} \tag{A.26}$$

现在可以证明所需的消失性。由（A.12），S_{n-2} 在次数 $-i$ 的项是 $\mathcal{O}(-i)$ 的直和，其中 $0 \le i \le n-2$。对偶化并施加 $\mathcal{O}(-(n-1))$ 的扭曲后，这些项变为 $\mathcal{O}(i-(n-1))$ 的直和。扭曲的范围从 $-(n-1)$ 到 -1，因此根据（A.4），它们的层上同调均消失。对这个复形应用（A.11）。于是，由（A.26）以及（A.9）中的不变性可得

$$\mathbb{H}^q(\mathbb{P}_K^n, \widehat{S}_n) = 0 \qquad (q \in \mathbb{Z}). \tag{A.27}$$

结合（A.27）和（A.14）可知，α_n 是单射且满射，从而证明了该引理。□

Acknowledgments

N.J. 得到西蒙斯基金会（编号：MP-TSM-00002518）和中国国家自然科学基金（编号：12171303）的部分资助。N.L. 得到北京市自然科学基金（编号：1264053）和中央高校基本科研业务费（编号：JZ2026HGTS0237）的资助。

References

[BD26] H. Ben Dali 和 M. D'Adderio，《从 Macdonald 多项式的新公式得到 Macdonald 特征》，Selecta Math. (N.S.) 32 (2026)，第 5 期，第 95 篇文章，35 页。3, 5, 58, 59, 62, 63[BD23] H. Ben Dali 和 M. Dołęga，《Jack 多项式与 Jack 特征的正公式及 Lassalle 猜想的证明》，预印本，arXiv:2305.07966 (2023)。3[CCEFY23] Y.-J. Cheng、M.-C. Chou、S.-P. Eu、T.-S. Fu 和 J.-C. Yao，《关于围绕 Petrie 对称函数的 Schur 展开的带符号重数》，Proc. Amer. Math. Soc. 151 (2023)，第 5 期，1839–1854。2[CR08] J. Chuang 和 R. Rouquier，《对称群的导出等价与 $\mathfrak{sl}_2$-范畴化》，Ann. of Math. (2) 167 (2008)，第 1 期，245–298。37, 38[DLT94] J. D´esarm´enien、B. Leclerc 和 J.-Y. Thibon，《表示论中的 Hall–Littlewood 函数与 Kostka–Foulkes 多项式》，S´em. Lothar. Combin. 32 (1994)，第 B32c 篇文章，38 页。21[DG15] S. Donkin 和 H. Geranios，《截断对称幂张量积的合成因子》，Adv. Math. 285 (2015)，394–433。2[DW92] S. Doty 和 G. Walker，《模对称函数与一般线性群的不可约模表示》，J. Pure Appl. Algebra 82 (1992)，第 1 期，1–26。2[DW96] S. Doty 和 G. Walker，《截断对称幂与 GL_n的模表示》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 119 (1996)，第 2 期，231–242。2[Fay04] M. Fayers，《可约 Specht 模》，J. Algebra 280 (2004)，第 2 期，500–504。47[Fay05] M. Fayers，《A 型 Hecke 代数的不可约 Specht 模》，Adv. Math. 193 (2005)，第 2 期，438–452。17, 40, 43, 44, 45, 46, 47[FHHSY09] B. Feigin、K. Hashizume、A. Hoshino、J. Shiraishi 和 S. Yanagida，《退化多项式与 Macdonald 多项式上的交换代数》，J. Math. Phys. 50 (2009)，第 9 期，第 095215 篇文章，42 页。59, 60[FS97] E. M. Friedlander 和 A. Suslin，《域上的有限群概形的上同调》，Invent. Math. 127 (1997)，第 2 期，209–270。35

[FM22] H. Fu 和 Z. Mei，《截断齐次对称函数》，Linear Multilinear Algebra 70 (2022)，第 3 期，438–448。2, 7[GM19] A. Garsia 和 A. Mellit，《五项关系与 Macdonald 多项式》，J. Combin. Theory Ser. A 163 (2019)，182–194。59[Gre07] J. A. Green，《 GL_n的多项式表示》，第 2 修订增补版，附 K. Erdmann、J. A. Green 和 M. Schocker 的附录，Lecture Notes in Mathematics，第 830 卷，Springer，柏林，2007。35[Gri22] D. Grinberg，《Petrie 对称函数》，Algebr. Comb. 5 (2022)，第 5 期，947–1013。2, 7[Ham95] A. M. Hamel，《模 Schur 对称函数的行列式恒等式》，研究报告第 129 号，坎特伯雷大学数学与统计系，基督城，1995。8[Har77] R. Hartshorne，《代数几何》，Graduate Texts in Mathematics，第 52 卷，Springer-Verlag，纽约，1977。13, 64, 65[HTY14] J. Hong、A. Touz´e 和 O. Yacobi，《多项式函子与 Fock 空间范畴化》，载于《对称性：表示论及其应用》（R. Howe、M. Hunziker 和 J. F. Wil- lenbring 编），Progress in Mathematics，第 257 卷，Birkh¨auser，纽约，2014，第 327–352 页。33, 35, 36, 37[HY13] J. Hong 和 O. Yacobi，《多项式函子与 Fock 空间范畴化 II》，Adv. Math. 237 (2013)，360–403。34[Jam78a] G. D. James，《关于 Carter 的不可约 Specht 模猜想》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 83 (1978)，第 1 期，11–17。2[Jam78b] G. D. James，《对称群表示论》，Lecture Notes in Mathematics，第 682 卷，Springer，柏林，1978。38[JM79] G. D. James 和 G. E. Murphy，《Specht 模的 Gram 矩阵行列式》，J. Algebra 59 (1979)，第 1 期，222–235。2[Jin91] N. Jing，《顶点算子与 Hall–Littlewood 对称函数》，Adv. Math. 87 (1991)，第 2 期，226–248。3, 21, 49[JL26] N. Jing 和 N. Liu，《Hopf 对偶对的斜 Murnaghan–Nakayama 规则》，预印本，arXiv:2606.15138v2 (2026)。2, 34[Lam05] T. Lam，《带状图表与 Heisenberg 代数》，Math. Z. 250 (2005)，第 3 期，685–710。19[Las08] M. Lassalle，《Jack 多项式的正性猜想》，Math. Res. Lett. 15 (2008)，第 4 期，661–681。3[Mac95] I. G. Macdonald，《对称函数与 Hall 多项式》，第 2 版，牛津大学出版社，牛津，1995。4, 6, 9, 17, 30, 48, 50, 51[RSWY26] C. Raicu、S. V. Sam、J. Weyman 和 F. Yang，《二元形式的幂与导出 Hermite 互反律》，Int. Math. Res. Not. IMRN 2026 (2026)，第 21 期，第 rnag266 篇文章。编号沿用 arXiv:2602.15175v2。67, 68, 69[Rom23] M. Romero，《Hall–Littlewood 展开中的正性及相关叠加算子》，Rev. Un. Mat. Argentina 64 (2023)，第 2 期，309–331。48[Stacks] Stacks 项目作者，《Stacks 项目》，在线参考资料，访问于 2026 年 11 月 22 日。65, 66, 67[Wal94] G. Walker，《模 Schur 函数》，Trans. Amer. Math. Soc. 346 (1994)，第 2 期，569–604。2, 4, 15, 18, 20, 28, 29, 32, 33, 34, 39, 48

Department of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh, NC 27695, USA
电子邮件地址：jing@ncsu.edu

School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China电子邮件地址：mathliu123@outlook.com