arXiv:2611.31890v2 [math.FA] 25 Nov 2026

Needlepoints in Quasi-Normed Orlicz Spaces and a Question of Kalton and Peck

Dong Ji and Yunan Cui

Abstract. 我们证明，在概率区间上的每个拟赋范Orlicz函数空间中，可接近点与针尖点重合。它们的共同集合要么是 $\{0\}$ ，要么是 E_Φ。证明通过有限概率律给出了一个刻画，并且同样适用于具有模拓扑的Orlicz函数空间，而无需假设Δ_2。随后，我们构造了一个可分实拟Banach空间，使其可接近点构成一条直线，而其唯一的针尖点是零点。该空间的每个紧凸子集都是相对局部凸的。这一构造对一般拟巴拿赫空间中的 Kalton and Peck 问题给出了否定答案。

1 Introduction

Krein–Milman 定理断言，在局部凸Hausdorff空间中，每个非空紧凸集都是其极点的闭凸包 [13]。因此，很自然的问题是：一旦失去局部凸性，紧凸集会变成什么样？答案取决于小向量的几何性质。

在某些拟巴拿赫空间中，非零向量可以由有限向量族的算术平均逼近，其中这些向量的拟范数可以任意小。可逼近点与针尖点这两个概念，区分了这种现象发生的两种方式。对于可逼近性，需要用一个与逼近精度无关的界来控制每个有限向量族的绝对凸包。对于针尖点，则可以使整个凸包任意接近从零点到极限向量的线段。后一项要求蕴含前一项。Kalton and Peck 曾提出问题：对于拟巴拿赫空间中的一个点， [10, 定义 2.3 和 3.1, 第 5 节(2)，第 101] 页。我们证明，在概率区间上的所有拟赋范Orlicz函数空间中，逆命题成立；并构造了一个其中该逆命题不成立的拟巴拿赫空间。

Roberts 构造了一个包含不具有极点的紧凸集的 F-空间 [20]。在经典例子 $L^p(0,1)$ 中， $0<p<1$每一点都是针尖 [9, 命题 5。3]定理 1.1 确定了对于一般的 $L^p(0,1)$ 而言所替代的子空间 b-Orlicz 函数。

所有向量空间均为实向量空间，且函数按几乎处处相等视为相同。我们在 $(0,1)$ 上使用 Lebesgue测度，并记 $\mathcal{A}(X)$

2020 Mathematics Subject Classification. 主要分类号 46E30；次要分类号 46A16、46A55、60G50。*Key words and phrases.*

b-Orlicz 函数、Luxemburg拟范数、可逼近点、针尖、紧凸集。

Corresponding author: Yunan Cui。

以及 $\mathcal{N}(X)$ 分别表示整个空间X的可接近点和针点。Orlicz函数 Φ 和 φ、模 I_Φ、空间 L^Φ 和E_Φ以及 Luxemburg拟范数 $\|\cdot\|_\Phi$ 均在第 2 节中定义；定义 2.2 中的 b-条件保证 Luxemburg 泛函是一个完备拟范数 [4, 定理 1]。

定理 1.1. 设 Φ 满足定义 *2.2*，但膨胀不等式只要求在无穷远处成立，也就是说，存在 $b > 1$ 和 $u_0 > 0$,

$$\Phi(bu) \geq 2\Phi(u) \qquad (u \geq u_0). \tag{1.1}$$

令 $X = (L^\Phi$（0，1） $\|\cdot\|_\Phi)$。那么

$$\mathcal{A}(X) = \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(E_\Phi) = \mathcal{A}(E_\Phi) \in \big\{\{0\}, E_\Phi\big\},$$

其中 E_Φ 取相对拓扑。若公共集合为 $\{0\}$，则 X 的每个紧凸子集都与局部凸空间中的某个紧凸集仿射同胚。在另一种情况下， E_Φ 含有一个没有极点的非空紧凸集。

在概率区间上，当且仅当 $\Phi \in \Delta_2$ 在无穷远处[2, 时， $E_\Phi = L^\Phi$ 成立（定理 2.14]）；命题 3.5 给出了一个 b-Orlicz 函数，使得 E_Φ 为真子集。在零的情形下，紧集结论由 Kalton 嵌入定理 [7], 推出；在另一种情形下，见证位于完备子空间 E_Φ中，因而可应用 Roberts 定理 [11]。

证明给出了一个关于模拓扑本身的结论。这里我们采用 Kalton [6, 第 126–127] 页中较宽泛的约定：对于单调Orlicz函数 φ（定义 2.1），按照第 2 节中的相同尺度条件定义 L^φ 和 E_φ，并赋予 L^φ 如下拓扑：当 I_φ (cx_j) 时，若对每个 $c > 0$，都有 $x_j \to 0$ $\to 0$。

定理 1.2。 对于每个这样的 φ，定理 *1.1* 的结论对其模拓扑中的$X = L^\varphi$(0、1) 成立，并且以 E_φ 替代 E_Φ。

证明包含两个函数空间方面的要素。非零可逼近点会给出有限概率律以及一致矩估计，而这一估计使所有独立副本都落在同一个有界凸包中，从而得到针尖所需的线段逼近。即使在 $\varphi \notin \Delta_2$ 时，该论证在模拓扑本身中也成立。

定理 1.3。 存在一个可分实 $1/2$-*Banach* 空间 X 以及一个拟范数为 *1* 的向量 $u \in X$，使得

$$\mathcal{A}(X) = \mathbb{R}u, \qquad \mathcal{N}(X) = \{0\}.$$

X 的每个紧凸子集在其相对拓扑中都是局部凸的。特别是， X 的每个非空紧凸子集都是其极点的闭凸包。

这里的相对局部凸性是指，每个点在相对拓扑中都有一个由凸邻域构成的邻域基。在该构造中，一列有限维空间中的标准坐标向量变得任意小，而它们的均值在商空间中的像相同；一致估计排除了非零针点，并在紧集上给出由凸相对邻域构成的邻域基。因此，每个紧凸子集都是相对局部凸的，尽管 $\mathcal{A}(X)$ 是一条非零直线。

2 Preliminaries

令 μ 为 $(0,\ 1)$ 上的勒贝格概率测度。

定义 2.1。 若函数 $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个单调*Orlicz*函数，则它是有限的、非递减的、在零点连续、在零点取零值且不恒等于零的函数。本节始终假设 φ满足定理 1.2 的条件。

定义 2.2。 若函数 $\Phi\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ 是一个 *b-Orlicz* 函数，则它是有限、连续且偶函数，在零点取零值，在 $(0,\ \infty)$ 上为正且非递减，并且对某个 $b > 1$ 满足

$$\Phi(u/b) \le \tfrac{1}{2}\Phi(u) \qquad (u \ge 0).$$

对于任意单调Orlicz函数 Φ，记

$$I_\Phi(x) = \int_0^1 \Phi(|x(t)|)\,dt$$

并设

$$L^\Phi = \{x : I_\Phi(cx) < \infty \text{ for some } c > 0\},$$
$$E_\Phi = \{x : I_\Phi(cx) < \infty \text{ for every } c > 0\}.$$

定义 2.3。 函数 *Matuszewska–Orlicz* 无穷远指标 的 Φ 为

$$\alpha_\Phi = \sup\big\{r > 0 : \exists C > 0,\ \exists u_0 \text{ such that } \Phi(au) \ge Ca^r\Phi(u) \text{ for all } a \ge 1,\ u \ge u_0\big\},$$
$$\beta_\Phi = \inf\big\{r > 0 : \exists C > 0,\ \exists u_0 \text{ such that } \Phi(au) \le Ca^r\Phi(u) \text{ for all } a \ge 1,\ u \ge u_0\big\},$$

当集合为空时，下确界等于 ∞

对于 b-Orlicz 函数 Φ，L^Φ 上的 Luxemburg 泛函

$$\|x\|_\Phi = \inf\{a > 0 : I_\Phi(x/a) \le 1\}$$

是完备拟范数 [4, 定理 1]。在概率区间上，[12,定理 1.8] 给出了 $\alpha_\Phi > 0$ 趋于无穷的连续严格递增生成函数的判据。无穷远处的正下指标等价于 (1.1)：迭代该条件可得 $\Phi(au) \ge \frac{1}{2}a^{\ln 2/\ln b}\Phi(u)$，其中 $a \ge 1$ 且 u充分大；而较低的指数 $r > 0$ 在取 b且满足 $Cb^r \ge 2$时，可推出 (1.1)。定义 2.2 要求该不等式对所有 $u \ge 0$都成立。

引理 2.4。 存在一个连续单调奥尔利奇函数 Φ ，它在 $[0,1]$, 上等于 u , 在 $(0,\infty)$ 上为正，且满足 $\Phi(1)=1$；它定义的两个空间及其拓扑与 φ相同。

证明。 如果给定函数已经具备这些性质，我们就直接采用它。一般情况下，使用 Kalton [6, 引理 3.2],设置 $G(0)=0$ 和

$$G(u)=\int_1^2 \varphi(su)\,ds = u^{-1}\int_u^{2u}\varphi(v)\,dv \qquad (u>0).$$

后一个表达式说明了在零点之外的连续性。在零点处使用 $\varphi(u)\le G(u)\le\varphi(2u)$。这些不等式还表明， G 定义了与 φ相同的两个空间以及相同的收敛性。取 $b>0$ 使得 $G(b)>0$，令$H(u)=G(bu)/G(b)$，并令

$$\Phi(u)=\begin{cases} u, & 0\le u\le 1,\\ H(u), & u>1. \end{cases}$$

对自变量和值作固定的正向变换会保留这两个空间及其拓扑。从 H 到 Φ 的变换保留每个尺度积分的有限性，因为它们的差有界且 $\mu((0,1))=1$。对于 $J=H$ 或 $J=\Phi$，由 $\mu\{|x_j|\ge r\}\le I_J(x_j/r)$ 可知，对每个 $r>0$在每个尺度上的收敛都蕴含依测度收敛。对于固定的 $a>0$, 被积函数 $H(a|x_j|)$ 和 $\Phi(a|x_j|)$ 在 $\{a|x_j|>1\}$ 上一致。在其补集上，它们的差有界，并且依测度趋于零。因此其积分趋于零。这两个拓扑一致。特别地， Φ 在 $(0,\infty)$ 上连续且为正，并满足 $\Phi(1)=1$。

□

定义 2.5. 对于积分形式的单调Orlicz函数，定义 Mazur–Orlicz F-范数 [16], [18,p. 466],为

$$\|x\|_F=\inf\{\lambda>0: I_\Phi(x/\lambda)\le\lambda\}.$$

命题 2.6 (见 [2]). 泛函 $\|\cdot\|_F$ 是 X上的 F-范数：它是正定的、关于格序单调，并满足三角不等式。数乘是联合连续的，并且

$$\|x_j\|_F\to 0 \iff I_\Phi(ax_j)\to 0 \quad \textit{for every } a>0. \tag{2.1}$$

命题 2.7. 奥尔利奇空间 $(L^\Phi,\|\cdot\|_F)$ 是一个 F-空间。集合 $B\subset L^\Phi$拓扑有界，当且仅当 上确界$_{v\in B}\|tv\|_F\to 0$ 当 $t\to 0$。

证明。 一个 $\|\cdot\|_F$-柯西序列 (x_j) 在测度意义下是柯西的。取一个几乎处处收敛且极限为 x 的子序列。对于 $r>0$ 以及所有充分大的 j, k 有 $I_\Phi((x_j-x_k)/r)\le r$。沿该子序列应用 Fatou 引理，可得对于同一个 j, 有 $I_\Phi((x_j-x)/r)\le r$ 。因此 $x\in L^\Phi$ 且$x_j\to x$，从而证明完备性。对于 F-范数，所述拓扑有界性的刻画是标准的。

□

引理 2.8。设 $\varphi:\ \mathbb{R}\to[0,\infty)$ 是偶函数，在 $(0,\infty)$ 上连续且为正，并且在那里非递减，满足 $\varphi(0)=0$。其 *Luxemburg* 泛函

$$\|x\|_\varphi=\inf\{a>0: I_\varphi(x/a)\le 1\}$$

当且仅当 φ 满足（1.1）时，它是一个拟范数。在这种情况下，它是完备的，并且定义了与 $\|\cdot\|_F$相同的拓扑。

证明。假设（1.1）成立，并取 $R>0$ 充分大，使得 $\varphi(bu)\ge 2\varphi(u)$ 对 $u\ge R$成立，然后定义一个偶 Ψ，令 $\Psi(t)=t\varphi(R)/R$ 对 $0\le t\le R$成立，并令 $\Psi(t)=\varphi(t)$ 对 $t\ge R$成立。它满足带有 $B=2b$的定义 2.2。对于$t\ge R$，这由尾部不等式推出；对于 $Bt\le R$，则由线性性推出。在剩余的情形 $t<R<Bt$ 下，当$t\le R/2$ 时使用 $\Psi(Bt)\ge\varphi(R)$，当 $t>R/2$时使用 $\Psi(Bt)\ge\varphi(bR)\ge 2\varphi(R)$。因此，根据 [4, 定理 1]，$\|\cdot\|_\Psi$ 是一个完备拟范数。

选取 $M\ge b$ 足够大，使得 $\varphi(bR/M)\ \Psi(bR/M)\le 1/2$。对于 (φ,Ψ) 的任一排列 (J,K)，以及 $t<bR$，我们有 $J(t/M)\le 1/2$。对于 $t\ge bR$,

$$J(t/M)\le J(t/b)=\varphi(t/b)\le\tfrac12\varphi(t)=\tfrac12 K(t).$$

由于测度为 1，$I_K(x/a)\le 1$ 蕴含 $I_J(x/(Ma))\le 1$。沿两个方向分别取下确界，得到 $M^{-1}\|x\|_\Psi\le\|x\|_\varphi\le M\|x\|_\Psi$。这些泛函的定义域相同，因为两个被积函数在 $[0,R]$ 上相差有界，并且在 R 以上相等。因此，原泛函是一个完备拟范数。

对于 $\|x_j\|_\Psi\to 0$，取趋于零的 $a_j>\|x_j\|_\Psi$。固定 $c>0$ 和 $m\ge 1$，最终有 $ca_j\le B^{-m}$，因此 $I_\Psi(cx_j)\le 2^{-m}I_\Psi(x_j/a_j)\le 2^{-m}$。反过来，在每个尺度上收敛意味着，对每个 $r>0$，通过在 $1/r$ 处检验，最终有 $\|x_j\|_\Psi\le r$。根据引理 2.4 的论证，在 R 以下的有界变化会保留每个尺度上的模收敛：两种情况下，模拓扑都蕴含依测度收敛，因为两个函数在 R 处均为正。因此，该拓扑与 φ 的拓扑一致，进而由 (2.1) 可知，也与 $\|\cdot\|_F$ 的拓扑一致。

反之，设该泛函是拟范数，其拟三角不等式常数为 $K\ge 1$。函数 φ 必须无界，否则该泛函将在测度充分小的正测度集合的示性函数上为零。令 $v(s)=\max\{t\ge 0:\ \varphi(t)\le s\}$ for $s>0$。对于每个正测度集合 A，有 $\|\chi_A\|_\varphi=1/v(1/\mu(A))$。将拟三角不等式应用于两个测度为 $1/(2s)$、$s\ge 1$ 的不相交集合的示性函数，得到 $v(2s)\le 2Kv(s)$。若 $\varphi(t)>1$，取 $1\le s<\varphi(t)$。于是 $v(s)\le t$，因此 $v(2s)\le 2Kt$。对于 $b>2K$，我们得到 $\varphi(bt)>2s$。令 $s\uparrow\varphi(t)$，即可对所有充分大的 t得到 (1.1)。 □

对于实可度量拓扑向量空间 Y（尤其是 F 空间或拟赋范空间），记 $|y|$ 为 y 在某个定义该空间的平移不变度量下到零点的距离。我们回顾 [7, 第 2], [10, 节定义 2.3 和 3.1] 以及第 [11, 页 200–201] 页中的定义。

定义 2.9。 若存在一个拓扑有界集 $B \subset Y$，使得对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $y_1, \ldots, y_n$ 满足

$$\max_i |y_i| < \varepsilon, \qquad \left| y - \frac{1}{n}\sum_i y_i \right| < \varepsilon, \qquad \left\{ \sum_i a_i y_i : \sum_i |a_i| \le 1 \right\} \subset B.$$

定义 2.10. 若对每个 $\varepsilon > 0$，都存在这样一个有限族，使其各项及其均值误差均小于 ε，且满足 y 是一个针尖，当

$$\mathrm{co}\{y_1, \ldots, y_n\} \subset [0, y] + \{z : |z| < \varepsilon\}.$$

这里 $[0, y] = \{ty : \ 0 \le t \le 1\}$。

我们分别用$\mathcal{A}(Y)$和 $\mathcal{N}(Y)$表示可逼近点集和针点集。

命题 2.11. 连续线性映射保持可逼近性和针尖点性质。集合 $\mathcal{N}(Y)$ 是闭集，并且 $\mathcal{N}(Y) \subset \mathcal{A}(Y)$。

证明. 将该映射作用于各行；对于可逼近性，还要将其作用于共同的有界集。对于闭性，若 $y_k \to y$，则由标量乘法的连续性及$[0,1]$的紧致性可知，$t(y_k - y) \to 0$ 在 $0 \le t \le 1$ 上一致地连续。因此，y_k 的一个足够精确的有限族便满足 y的两个逼近条件和线段条件。此外，$\mathcal{N}(Y) \subset \mathcal{A}(Y)$。为此，选取容差趋于零的针尖有限族，并在每个有限族中取其成员与零的凸包 Q_m。Q_m 中的每个点到线段 $[0, y]$的距离都一致趋于零，即对于零点的任意邻域 U，最终都有 $Q_m \subset [0, y] + U$。这可由 $[0, 1]$上标量的一致连续性同样推出。每个 Q_m都是紧集，而由于线段是紧集，$\bigcup_m Q_m$ 是全有界的。因此，$Q = \bigcup_m Q_m$ 是拓扑有界的，$Q - Q$也如此。所选有限族的每个绝对凸包都包含于 $Q - Q$，这一点可通过将正系数与负系数分开看出。

□

3 A probabilistic characterization of approachable points

在概率空间上，我们还记 $I_\Phi(Z) = \mathbb{E}\Phi(|Z|)$ 和 $\|Z\|_F = \inf\{r > 0 : \mathbb{E}\Phi(|Z|/r) \le r\}$。这两个量都只取决于 Z 的分布。在本节中，Φ 表示引理 2.4 中选定的连续非减函数，而 $X = L^\Phi(0, 1)$ 具有模拓扑。

定理 3.1。 以下断言等价。

(1) $\chi_{(0,1)} \in \mathcal{A}(X)$.

(2) 存在常数 $0 < c \le 1$、$H > 0$ 以及一个由非负随机变量 Y_m 组成的序列，其中每个随机变量仅取有限个值，使得

$$\mathbb{E}Y_m = c, \quad \|Y_m\|_F \longrightarrow 0, \quad \mathbb{E}\Phi(aY_m) \le Ha \quad (m \ge 1,\ 0 < a \le 1). \tag{3.1}$$

(3) $\chi_{(0,1)} \in \mathcal{N}$（$E_\Phi$），并带有在 E_Φ 上诱导的拓扑。

为了使用定理 3.1 中的定律，我们需要一个包含其独立副本的所有凸组合的有界集。(3.1) 中的公共常数在每个充分小的尺度上都给出了模估计。

引理 3.2。设 Y_i 是概率空间上的独立非负随机变量，且 $\mathbb{E}Y_i \le 1$ 和 $\mathbb{E}\Phi(aY_i) \le Ha$ 对每个 $0 < a \le 1$ 以及每个 i 都成立。对于每个具有有限支集的族 $\lambda_i \ge 0$，满足 $\sum_i \lambda_i \le 1$ 且对于每个 $0 < d \le 1$,

$$\mathbb{E}\Phi\left(\frac{d}{8}\sum_i \lambda_i Y_i\right) \le \Phi(d) + 3Hd. \tag{3.2}$$

$\{0\} \cup \{Y_i\}$ 的闭凸包在 *Mazur–Orlicz* F-范数拓扑中是拓扑有界的。

证明。设 Ψ 连续且非递减，满足 $\Psi(0) = 0$ 且 $\Psi(t) > 0$ 对于 $t > 0$ 成立，并且首先仅假设

$$\mathbb{E}\big[\Psi(aY_i)\chi_{\{aY_i>1\}}\big] \le Ma \qquad (0 < a \le 1). \tag{3.3}$$

我们将证明

$$\mathbb{E}\Psi\left(\frac{1}{8}\sum_i \lambda_i Y_i\right) \le \Psi(1) + 3M. \tag{3.4}$$

固定凸系数，并仅保留正系数。记

$$V = \sum_i \lambda_i Y_i \chi_{\{\lambda_i Y_i > 1\}}, \qquad S = \sum_i \lambda_i Y_i \chi_{\{\lambda_i Y_i \le 1\}}.$$

我们首先估计 V。对于每个结果，令 $I = \{i : \lambda_i Y_i > 1\}$ 以及 $N = |I|$。当 $N > 0$ 时，令 $a_i = \min\{N\lambda_i, 1\}$ 对于 $i \in I$。含有 $N\lambda_i \le 1$ 的项对 $\sum_{i\in I} \lambda_i/a_i$ 的贡献至多为 1，而其余各项的贡献至多为 $\sum_i \lambda_i \le 1$。因此 $V \le 2\max_{i\in I} a_i Y_i$，所以

$$\Psi(V/2) \le \sum_i \Psi\big(\min\{N\lambda_i, 1\}Y_i\big)\chi_{\{\lambda_i Y_i>1\}}.$$

当 $N = 0$ 时，两边均为零。令 $N_i = \sum_{j\ne i} \chi_{\{\lambda_j Y_j>1\}}$。在事件 $\{\lambda_i Y_i > 1\}$ 上，我们有 $N = 1 + N_i$。对 N_i 进行条件化；它与 Y_i 独立，并令 $a = \min\{(1 + N_i)\lambda_i,\ 1\}$。由于 $a \ge \lambda_i$，(3.3) 将第 i 项的条件期望界定为 $Ma \le M\lambda_i(1+N_i)$。马尔可夫不等式给出 $\mathbb{E}N_i \le \sum_j \lambda_j \mathbb{E}Y_j \le 1$。取期望并求和可得

$$\mathbb{E}\Psi(V/2) \le 2M.$$

对于 S，取 $t \ge 2$，并在本证明中始终令 $F(t) = \Psi(t)/t$。结合 $x \ge t$，在 $a = t/x$ 处应用 (3.3)，得到

$$\mathbb{P}\{Y_i > x\} \le \frac{M}{xF(t)}.$$

设 $Z_i = \lambda_i Y_i \chi_{\{t<Y_i\le 1/\lambda_i\}}$ 和 $T=\sum_i Z_i$。则 $S \le t+T$、$0\le Z_i\le 1$ 和 $\mathbb{E}T\le 1$。对于 $B>t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[Y_i^2\chi_{\{t<Y_i\le B\}}\big] &\le t^2\mathbb{P}\{Y_i>t\}+2\int_t^B x\mathbb{P}\{Y_i>x\}\,dx\\ &\le \frac{M}{F(t)}\big(t+2(B-t)\big)\le \frac{2MB}{F(t)}.\end{aligned}$$

当 $1/\lambda_i > t$ 时取 $B=1/\lambda_i$，否则取 $Z_i=0$，由独立性可得

$$\mathrm{Var}(T)\le \sum_i \mathbb{E}Z_i^2 \le 2M/F(t). \tag{3.5}$$

在有限个指标上固定一个次序，并令 τ 为 Z_i 的部分和首次至少为二的指标。若不存在这样的指标，则令 $\tau=\infty$。于是，根据 (3.5)，$\mathbb{P}\{\tau<\infty\}=\mathbb{P}\{T\ge 2\}\le 2M/F(t)$。在 $\{\tau=j\}$ 上，该部分和小于三。剩余的和与 $\{\tau=j\}$ 独立。对 $[0,1]$ 应用界 $e^z\le 1+(e-1)z$ 可得

$$\mathbb{E}\exp\left(\sum_{i>j} Z_i\right)\le \exp\left((e-1)\sum_{i>j}\mathbb{E}Z_i\right)\le e^{e-1}.$$

对于 $s\ge 3$，事件 $T\ge s$ 要求 $\tau<\infty$。当 $\tau=j$ 时应用上一个估计，并对 j 求和可得

$$\mathbb{P}\{T\ge s\}\le \frac{2M}{F(t)}e^{e+2-s}.$$

将 $\{S\ge 6\}$ 划分为 $A_k=\{6k\le S<6(k+1)\}$，其中 $k\ge 1$。在 A_k 上使用 $t=k+1$，于是 $T\ge 5k-1$。对于 $k=1$，令 $\mathbb{E}T\le 1$，由 (3.5) 得到 $\Psi(2)\mathbb{P}(A_1)\le 4M/9$。对于 $k\ge 2$，指数界给出

$$\Psi(k+1)\mathbb{P}(A_k)\le 2Me^{e+3}(k+1)e^{-5k}.$$

记 $q=e^{-5}$，我们有 $\sum_{k\ge 2}(k+1)q^k = q^2(3-2q)/(1-q)^2$，因此 $2e^{e+3}\sum_{k\ge 2}(k+1)e^{-5k}<1/4$。含有 $S<6$ 的部分至多贡献 $\Psi(1)$。因此 $\mathbb{E}\Psi(S/6)\le \Psi(1)+M$。由于 $(S+V)/8\le \max\{S/6, V/2\}$，这两个估计证明了 (3.4)。

最后令 $\Psi(u)=\Phi(du)$。取 $M=Hd$ 时，假设 (3.3) 成立，因为 $da\le 1$。现在由不等式 (3.4) 得到 (3.2)。对于 $\varepsilon>0$，选择 d，使其右端至多为 ε。对于每个 $|b|\le d\varepsilon/8$，我们得到 $\|b\sum_i \lambda_i Y_i\|_F\le\varepsilon$。这对所有凸系数一致成立，并且根据连续性，该界在闭包上也成立。这就证明了所断言的拓扑有界性。 □

我们首先从（1）中的绝对凸包推导出（2）中的有限分布。

定理 *3.1* 的证明。选取有限多行 $x_{m,\,1}$，……，$x_{m,\,n_m}$，其容差为 $t_m\downarrow 0$，且它们的绝对凸包都包含在同一个有界集中。我们

首先将它们替换为均值为 $\chi_{(0,1)}$ 的有界简单函数行。固定一行并省略 m。对于 $A = \{\max_i |x_i| \le T\}$，选取足够大的 T，使得 $\|\chi_{A^c}\|_F < t_m$，由 (2.1) 可知。乘以 χ_A 后，平均误差小于 $2t_m$，因为

$$\chi_{(0,1)} - \chi_A \frac{1}{n}\sum_i x_i = \chi_{A^c} + \chi_A \left(\chi_{(0,1)} - \frac{1}{n}\sum_i x_i\right).$$

对于每个带符号的线性组合，其截断组合的绝对值都不超过原组合。因此，绝对凸包的有界并仍保持有界。将每个截断函数一致逼近为一个简单函数 s_i，误差至多为 e_m，其中 $e_m \downarrow 0$ 且$\|e_m\chi_{(0,1)}\|_F < t_m$。对于 $d_m = \chi_{(0,1)} - n^{-1}\sum_i s_i$，令 $h_i = s_i + d_m$。于是$\|d_m\|_F < 3t_m$、$n^{-1}\sum_i h_i = \chi_{(0,1)}$ 且 $\max_i \|h_i\|_F < 5t_m$。一致逼近误差的绝对凸组合的模不超过 e_1，而平移项则属于 $\{\alpha d_m : |\alpha| \le 1, \ m \ge 1\}$。这两组误差都是拓扑有界的。将所得绝对凸包的有界并记为 V。选取$B > 1$ 使得 $\sup_{v\in V}\|v/B\|_F < 1$。于是，对于 $v \in V$，有 $I_\Phi(v/B) \le 1$。

设 $g_i = nh_i^+ / \sum_j h_j^+$。由于 $\sum_j h_j = n$，分母至少为n。因此 $0 \le g_i \le |h_i|$和 $\sum_i g_i = n$。令 J在 $\{1,\dots,n\}$上均匀分布，且与区间 (0, 1) 中的点独立，并设 $Z = g_J$。这具有有限支集，$\mathbb{E}Z = 1$ 且 $\mathbb{E}\Phi(Z/(6t_m)) \le 6t_m$。我们断言

$$\mathbb{E}\big[\Phi(aZ/B)\chi_{\{aZ>1\}}\big] \le \frac{4a}{1-e^{-1}} \qquad (0 < a \le 1). \tag{3.6}$$

令 $k = \lfloor 1/a \rfloor$，并有放回地抽取 k 个相互独立的均匀指标 J_1、.....、J_k。选取独立的对称符号 ϵ_r，且它们也与这些指标及区间中的点独立。由于 $ka \le 1$，对于指标和符号的任意固定取值，每个 $a\sum_r \epsilon_r h_{J_r}$都属于 V。在区间的一个固定点处，以这些指标以及除一个对应于最大 $|h_{J_r}|$的符号之外的所有符号为条件。剩下的符号至少有一种取值，使带符号和的绝对值不小于 $a\max_r |h_{J_r}|$。因此

$$\mathbb{E}\Phi\left(B^{-1}\max_{r\le k} a g_{J_r}\right) \le 2.$$

此时令 $p = n^{-1}\#\{i : ag_i > 1\}$。恒等式$\sum_i g_i = n$ 给出 $p \le a$，因此 $kp \le 1$。对于 $p > 0$，至少存在一个指标满足 $ag_{J_r} > 1$ 的概率为$1 - (1-p)^k \ge (1-e^{-1})kp$。在此事件条件下，第一个这样的指标在这些指标的集合上服从均匀分布。最大值不小于第一个选定值。因此，它在尺度 $1/B$ 下的期望模函数值至少为

$$(1-e^{-1})\frac{k}{n}\sum_{i:ag_i>1}\Phi(ag_i/B).$$

当 $p = 0$ 时，该不等式同样成立。对其积分并利用 $1/k \le 2a$即可证明（3.6）。在 $\{aZ \le 1\}$ 上，被积函数 $\Phi(aZ/B)$ 等于 aZ/B。取

$Y_m = Z/B$、 $c = 1/B$ 和 $H = c + 4/(1 - e^{-1})$ 可得（3.1）。通过在长度符合要求的区间上取其值，每个分布都可以在 $(0,\ 1)$ 上实现。

我们给出从有限分布到 E_Φ 中一个针尖的过渡。

引理 3.3。 设 $Y_{m,j},\ m, j \geq 1$ 是 $(0,1)$ 上的非负有界随机变量。对每个 m，第 m 行中的变量相互独立，且与 Y_m 同分布。假设 $\mathbb{E}Y_m = c > 0,\ \|Y_m\|_F \to 0$，并且

$$K = \overline{\mathrm{co}}\big(\{0\} \cup \{Y_{m,j} : m, j \geq 1\}\big)$$

是拓扑有界的。那么常数 $c\chi_{(0,1)}$ 是 E_Φ 的一个针尖。

证明。 我们采用引理 [10,定理 3.5], 的证明中所选取的系数区间，并使用 F-范数 $\|\cdot\|_F$。固定 $\varepsilon > 0$，并选取满足 $\sum_{k\geq 1}\varepsilon_k < \varepsilon/12$ 的 $\varepsilon_k > 0$。从 $a_1 = 1/2$ 开始。给定 $a_k > 0$，选取 m_k，使得 $\|Y_{m_k}\|_F \leq a_k\varepsilon_k$。令 $L_k = \|Y_{m_k} - c\|_\infty$ 和 $v_k^2 = \mathbb{E}|Y_{m_k} - c|^2$。对于满足 $\sum_j d_j \leq 1$ 的非负有限支集 d_j，中心化和$U = \sum_j d_j(Y_{m_k,j} - c)$ 满足

$$|U| \leq L_k, \qquad \mathbb{E}U = 0, \qquad \mathbb{E}|U|^2 = v_k^2 \sum_j d_j^2 \leq v_k^2 \max_j d_j.$$

取 $z > 0$ 足够小，使得 $\Phi(z) < \varepsilon_k/2$。由切比雪夫不等式可得

$$I_\Phi(U/\varepsilon_k) \leq \Phi(z) + \Phi(L_k/\varepsilon_k)\frac{v_k^2 \max_j d_j}{z^2\varepsilon_k^2}.$$

因此，我们可以选择 $0 < a_{k+1} < a_k/2$，使得当 $\max_j d_j \leq a_{k+1}$ 时 $\|U\|_F \leq \varepsilon_k$。

选择 N，使得 $\sup_{x\in K}\|x/N\|_F < \varepsilon/4$。定义

$$w_j = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_{m_k,j}.$$

由压缩性和三角不等式可得 $\|w_j\|_F \leq \sum_{k=1}^N a_k\varepsilon_k < \varepsilon/12$。考虑任意非负、有限支集的 λ_j，满足 $\sum_j \lambda_j = 1$。在每个$k \leq N$ 处将其支集划分为

$$A_k = \{j : \lambda_j \geq a_k\}, \quad B_k = \{j : \lambda_j \leq a_{k+1}\}, \quad C_k = \{j : a_{k+1} < \lambda_j < a_k\}.$$

在 A_k 中至多有 $1/a_k$ 个指标，因此$\|\sum_{A_k}\lambda_j Y_{m_k,\ j}\|_F \leq \varepsilon_k$。$a_{k+1}$ 的选择给出 $\|\sum_{B_k}\lambda_j(Y_{m_k,\ j} - c)\|_F \leq \varepsilon_k$。定义 C_k 的系数区间互不相交，因为 k 在变化。因此 $\sum_{k\leq N}\sum_{j\in C_k}\lambda_j \leq 1$ 且$\sum_{k\leq N}\sum_{j\in C_k}\lambda_j Y_{m_k,\ j} \in K$。如果 $\theta = N^{-1}\sum_{k\leq N}\sum_{j\in B_k}\lambda_j$，那么 $0 \leq \theta \leq 1$ 且

$$\left\|\sum_j \lambda_j w_j - \theta c\chi_{(0,1)}\right\|_F \leq 2\sum_{k\leq N}\varepsilon_k + \sup_{v\in K}\|v/N\|_F < \varepsilon/2.$$

对于固定的 $k \le N$，$Y_{m_k,\ j}$ 的算术平均依方差估计依概率收敛到 c，并且一致有界于一个仅依赖于该行的常数。因此，根据 (2.1)，它们在 $\|\cdot\|_F$ 中收敛。w_j 的算术平均也收敛到 $c\chi_{(0,1)}$，因为 N 固定。对于某个 n，我们有 $\|c\chi_{(0,1)} - n^{-1}\sum_{j\le n} w_j\|_F < \varepsilon/4$。将此平均误差加到 w_1、.....、w_n 各项上。所得平移族的均值恰为 $c\chi_{(0,1)}$，其成员的 $\|\cdot\|_F$ 小于 ε，且其凸包位于距 $[0, c\chi_{(0,1)}]$ 不超过 ε 的范围内。所有涉及的函数都有界且属于 E_Φ。这就证明了在 E_Φ 的诱导拓扑下的引理。

□

对于 (2)⇒(3)，在 (0，1) 上构造一个相互独立的随机变量 $Y_{m,\ j}$ 数组，其各行的分布律由 (3.1) 给出。在勒贝格区间上存在具有这些指定分布律的可数个独立随机变量，这由 [5, 定理 3.19]推出。不等式 $c \le 1$ 使我们能够将引理 3.2 应用于整个数组的任意有限子族。所得的与零点合并的闭凸包是拓扑有界的。引理 3.3 给出 $c\chi_{(0,1)} \in \mathcal{N}(E_\Phi)$。连续线性映射 $x \mapsto x/c$ 在 E_Φ 上的性质现在表明 $\chi_{(0,1)} \in \mathcal{N}(E_\Phi)$。对于 (3)⇒(1)，包含关系 $E_\Phi \to X$ 保持针点，且 $\mathcal{N}(X) \subset \mathcal{A}(X)$。

□

为了从常数推广到所有 X，定义

$$\theta(x) = \inf\{a > 0 : I_\Phi(x/a) < \infty\}.$$

对于非递减的 Φ 和 $\alpha,\ \beta \ge 0$ 若 $\alpha + \beta = 1$，$\Phi(\alpha u + \beta v) \le \Phi$(最大值$\{u, v\}$) $\le \Phi(u) + \Phi(v)$；因此 $I_\Phi((x+y)/(a+b)) \le I_\Phi(x/a) + I_\Phi(y/b)$，并且 θ 是次可加的。它是绝对齐次的，且满足 $0 \le \theta \le \|\cdot\|_F$。因此，它是一个核为 E_Φ的连续半范数，并且 E_Φ 是闭集。将 θ 应用于可逼近点的两个逼近条件，可得对于每个 $\varepsilon > 0$,

$$\theta(x) \le \theta\left(x - \frac{1}{n}\sum_i x_i\right) + \frac{1}{n}\sum_i \theta(x_i) < 2\varepsilon.$$

我们得出，$\mathcal{A}(X) \subset E_\Phi$。

如果 $x \ne 0$ 是可接近的，取 $r > 0$，使其 $A = \{|x| \ge r\}$ 的测度为$p > 0$。将 χ_A/x视为在 A之外取零，则乘法运算是连续的，并将 x 映射到 χ_A。为将 χ_A 映射到$\chi_{(0,1)}$，取 A的一个博雷尔代表元，并令 τ为区间 (0，1) 上概率测度 $p^{-1}\chi_A\, d\mu$ 的分位数映射。通过 τ 进行拉回可将零类映射为零类。对于 $a > 0$,

$$I_\Phi(a\, y \circ \tau) = p^{-1}\int_A \Phi(a|y(t)|)\, d\mu(t) \le p^{-1} I_\Phi(ay).$$

由 (2.1) 可知，这个拉回是连续的。我们从 $x \in \mathcal{A}(X) \setminus \{0\}$ 得到了 $\chi_{(0,1)} \in \mathcal{A}(X)$。通过连续线性算子化归为常函数的方法，也用于 [7，对定理 3 的证明（第 43] 页）。

由定理 3.1 可得 $\chi_{(0,1)} \in \mathcal{N}(E_\Phi)$。乘以任意有界函数在 E_Φ 中都是连续的，并将 $\chi_{(0,1)}$ 映射为该函数。通过截断以及在每个尺度上的控制收敛定理，有界函数在 E_Φ 中稠密。对于连续的无界 Orlicz 函数，将 E_Φ 描述为有限区间上有界函数的闭包，这一说法已见于 [15, 第 4.2–4.4] 节。Kalton 在 [6, 第 126–127] 页给出了此处采用的一般形式。因此，根据针尖点集的闭性，$\mathcal{N}(E_\Phi) = E_\Phi$。鉴于 $\mathcal{N}(E_\Phi) \subset \mathcal{N}(X) \subset \mathcal{A}(X) \subset E_\Phi$，我们得到 $\mathcal{N}(X) = \mathcal{A}(X) = E_\Phi$。若改为 $\chi_{(0,1)} \notin \mathcal{A}(X)$，同样的水平集论证可得 $\mathcal{N}(X) = \mathcal{A}(X) = \{0\}$。由于该包含关系也保持可逼近性，$\mathcal{N}(E_\Phi) = \mathcal{A}(E_\Phi)$ 在每种情况下都等于同一个集合。

现在仍需确定这两种情形中的紧凸集。在第一种情形中，E_Φ 是一个非零的完备可分 F-空间，并且 E_Φ中的每一点相对于 E_Φ都是一个针尖。关于可分性，可通过截断并用有界简单函数进行逼近。它们的水平集可以在测度意义下用二进区间的有限并进行逼近。将有限个系数分别用有理数逼近，根据（2.1）即可在每个尺度上得到一个处处稠密的可数族。[11] 的定理 9.4 现在给出了 E_Φ 的一个非空紧凸子集，其中不含极点。事实上，Nguyen To Nhu 和 Le Hoang Tri 的定理 [17, 定理 2-1] 允许将这个紧集选取得与 Hilbert 立方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$同胚。它在 X中具有相同的拓扑和相同的极点。如果它在相对拓扑下是局部凸的，那么 [21, 第 453] 页的嵌入定理将给出一个仿射同胚，把它映到某个局部凸空间的紧凸子集上，这与 Krein–Milman 定理 [13]相矛盾。在另一种情形中，零是 X中唯一的可逼近点，因此 [7, 定理 1] 将 X 的每个紧凸子集仿射且同胚地嵌入到一个局部凸空间中。这同时给出了相对局部凸性和紧的 Krein–Milman 性质。由此证明了定理 1.2，而引理 2.8 中两种拓扑的相等性则给出了定理 1.1。

在无穷远处被线性函数从上方控制的 *Orlicz*函数。 在假设 $\varphi \in \Delta_2$ 下，Kalton and Peck 证明了：当 $\varphi(u)/u$ 在无穷远处的下极限为零且上极限有限时，$L^1(0,1)$ 的单位球在 $L^\varphi(0,1)$ 的拓扑下包含一个没有极点的紧凸集 [10, 第 4 节，例子 4.3]。对于在零点之外为正、满足 $\varphi(u)/u \to 0$ 的连续递增凹函数 φ，De Pascale、Trombetta 和 Weber 在 $L^\varphi(0,1)$ 中得到了强针尖点 [3,定义 1.1 及推论 1.8] 的证明。我们去掉假设 $\varphi \in \Delta_2$，并确定由针点组成的子空间。它可能是 $L^\varphi(0,1)$ 的真子空间。我们还准确刻画了定理 3.1 中的分布何时可能只有一个非零值。

命题 3.4。 假设 上极限$_{u\to\infty}\, \varphi(u)/u < \infty$。那么， $L^1(0,1)$ 到 E_φ 的包含映射是连续的，并且 $L^1(0,1)$ 在 $X = L^\varphi(0,1)$ 中的闭包是 E_φ。以下两种情况成立。

(1) If $\liminf_{u\to\infty} \varphi(u)/u = 0$, *then* $\mathcal{A}(X) = \mathcal{N}(X) = E_\varphi$, *and* E_φ *contains*

一个没有极点的非空紧凸集。

(2) 如果下极限$\liminf_{u\to\infty}\varphi(u)/u > 0$，那么 $X = E_\varphi = L^1(0,\ 1)$ 配备通常范数拓扑，且 $\mathcal{A}(X) = \mathcal{N}(X) = \{0\}$。

更确切地说，对于 Φ 作为第 *2* 节中的连续代表元，定理 *3.1* 中的规律能够全部支撑在零和一个正值上，当且仅当

$$\limsup_{u\to\infty}\Phi(u)/u < \infty \quad and \quad \liminf_{u\to\infty}\Phi(u)/u = 0.$$

最后这一断言不需要对 φ预先设定上界。

证明。 对于第 2 节中构造的代表元，不等式

$$\frac{\varphi(u)}{u} \le \frac{G(u)}{u} \le 2\frac{\varphi(2u)}{2u}$$

表明，上极限有限和下极限为零在两个方向上均分别保持不变。对自变量重新缩放并除以$G(b) > 0$ 会保持这些性质不变，而对 $[0,1]$ 的改变不会影响它们。令 $F(u) = \Phi(u)/u$。由于 $F = 1$ 在 $(0,1]$ 上，并且在$[1,\infty)$上连续，上极限有限给出 $M = \sup_{u>0} F(u) < \infty$。对于 $f \in L^1(0,\ 1)$ 和 $a > 0$，我们有 $I_\Phi(af) \le Ma\|f\|_1$。这证明了 $L^1(0,\ 1) \subset E_\varphi$ 以及由 (2.1) 得到的包含映射的连续性。闭包为 E_φ，因为 E_φ 是X 中的闭集，并且包含有界函数这一稠密子空间。

假设 $\liminf_{u\to\infty} F(u) = 0$。取 $s_m \ge m^2$，使得 $F(s_m) \le m^{-3}$，并令 $u_m = s_m/m$。取一个测度为 $1/u_m$ 的集合 A_m，并令 $Y_m = u_m\chi_{A_m}$。于是 $\mathbb{E}Y_m = 1$，且对于 $0 < a \le 1$,

$$\mathbb{E}\Phi(aY_m) = aF(au_m) \le Ma.$$

对于每个固定的 $b > 0$，当 $m \ge b$ 时，我们有 $bu_m \le s_m$，因此

$$I_\Phi(bY_m) = \frac{\Phi(bu_m)}{u_m} \le mF(s_m) \le m^{-2}.$$

由此，根据 (2.1)，$\|Y_m\|_F \to 0$。定理 3.1 及前述分类给出了 (1)。

反之，假设定理 3.1 中的分布除了零以外仅有一个正值u_m。它们的共同均值 $c > 0$ 迫使 u_m 处的质量为c/u_m，因此 $u_m \ge c$。由于 $Y_m \to 0$ 在测度意义下，$c/u_m \to 0$，从而$u_m \to \infty$。它们在尺度一处的模为 $cF(u_m) \to 0$。对于任意 $v > 0$，取一个 m，使得 $u_m \ge v$，并在 (3.1) 中取 $a = v/u_m$。所得不等式为$caF(v) \le Ha$，因此在整个正半轴上有 $F(v) \le H/c$。结合上述构造，即得关于这些支集的断言。

最后，如果下极限为正，那么根据正性、连续性以及在零附近的恒等式 $F = 1$，$\inf_{u>0} F(u) > 0$。因此，存在某个 $m_0 > 0$，使得对所有 $u \ge 0$，$m_0 u \le \Phi(u) \le Mu$。在任意尺度下积分，得到带有范数拓扑的 $X = E_\varphi = L^1(0,\ 1)$。在赋范空间中，一个

加数的算术平均不超过其最大范数，因此只有零是可逼近的。这就证明了 (2)。

□

例如，固定 $0 < p < 1$ 并令 $r_n = 2^{n(n+1)}$ 对于 $n \geq 0$。在 $[0,1]$，上定义 $\Phi(t) = t$，并在 $[1,\infty)$ 上定义 Φ，其定义如下：

$$\Phi(t) = \max\{r_n^{1-p} t^p,\, 2t - r_{n+1}\} \qquad (r_n \leq t \leq r_{n+1}),$$

并将 Φ 偶延拓至 $\mathbb{R}$。在每个 r_n 处，这两个公式给出 $\Phi(r_n) = r_n$，以及 $\Phi(t) \leq t$。比值 $\Phi(t)/t^p$ 是非递减的：在每个区间上，它是一个常数与 $2t^{1-p} - r_{n+1}t^{-p}$（一个递增函数）中的较大者。因此，$\Phi(2^{1/p}t) \geq 2\Phi(t)$，且 Φ 是 b-Orlicz。对于 $t_n = r_{n+1}/2$ 和 $q_n = t_n/r_n = 2^{2n+1}$，我们有 $\Phi(t_n)/t_n = q_n^{p-1} \to 0$。因此，命题 3.4 适用于二点分布。为说明 E_Φ 是真子集，取测度为 $1/r_{n+1}$ 的不相交集合 C_n；由于 $r_{n+1} \geq 4^{n+1}$，这样的集合是存在的。对于 $f = \sum_{n\geq 0} t_n \chi_{C_n}$，有

$$I_\Phi(f) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} q_n^{p-1} < \infty, \qquad I_\Phi(2f) = \sum_{n\geq 0} \Phi(r_{n+1})/r_{n+1} = \infty.$$

在下面的例子中，$\Phi(u)/u$ 在无穷远处向上无界。因此，命题 3.4 排除了仅含一个正值的两点分布。我们将明确构造所需的有限分布。

我们使用无穷远处的 Matuszewska–Orlicz 指数 α_Φ 和 β_Φ，它们在第 2 节（定义 2.3）中按照 [12,定义 1.7] 的含义定义。

命题 3.5。对于每个 $0 < p < 1$，存在一个 *b-Orlicz* 函数 Φ，满足$b = 2^{1/p}$，使得

$$\mathcal{A}(L^\Phi) = \mathcal{N}(L^\Phi) = \mathcal{A}(E_\Phi) = \mathcal{N}(E_\Phi) = E_\Phi \subsetneq L^\Phi, \qquad L^\Phi = L^\Phi(0,1).$$

子空间 E_Φ 包含一个没有极点的非空紧凸集。函数 Φ 可以选取为满足

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = 0, \qquad \limsup_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty,$$

$$\liminf_{B\to\infty} \frac{1}{\ln B} \int_1^B \frac{\Phi(u)}{u^2}\, du = \frac{1}{12}.$$

其在无穷远处的下膨胀指标和上膨胀指标分别为 p 和 ∞。均值为一的泊松随机变量不属于 L^Φ。

证明。令 $c = 1 - p$ 和 $u_1 = 1/c$。在 $(-\infty,\ 0]$ 上定义 $\sigma(s) = 0$，并在 $[0, u_1]$ 上定义 $\sigma(s) = -cs$。定义 σ 直到 u_n 后，令

$$J_n = \int_0^{u_n} (e^{\sigma(t)} - 1)_+\, dt, \qquad L_n = 12(1 + J_n) + 4n + 4,$$

$$v_n = u_n + L_n, \qquad w_n = v_n + 1, \qquad h_n = e^{2w_n},$$

$$u_{n+1} = w_n + (h_n + n + 1)/c.$$

通过令其为以下形式，将 σ 连续延拓

$$\sigma(s) = \begin{cases} -n, & u_n \le s \le v_n, \\ -n + (h_n + n)(s - v_n), & v_n \le s \le w_n, \\ h_n - c(s - w_n), & w_n \le s \le u_{n+1}. \end{cases}$$

最终值为 $-(n+1)$，这正是下一步所需的。令 $\Phi(0) = 0$ and$\Phi(u) = |u|e^{\sigma(\ln|u|)}$，其中 $u \neq 0$。此函数在 $[-1,1]$ 上等于 $|u|$。 $s + \sigma(s)$ 的所有斜率均至少为 p。因此，对 $a \ge 1, u > 0$，有 $\Phi(au) \ge a^p\Phi(u)$，这就得到了所断言的 b。在 $[w_n, u_{n+1}]$ 上，斜率等于 p，且长度趋于无穷。因此，对于 $r > p$，不可能对所有 $a \ge 1$ 以及所有充分大的 u 都有下膨胀界 $\Phi(au) \ge Ca^r\Phi(u)$。此外，

$$\frac{\Phi(2e^{v_n})}{\Phi(e^{v_n})} = 2^{1+h_n+n} \longrightarrow \infty,$$

因此不存在有限的上膨胀指标。由于 $\sigma(u_n) = -n$ and $\sigma(w_n) = h_n$， $\Phi(u)/u$ 的极限极值如所断言。

我们利用有限分布验证定理 3.1 的假设。令$k_n = \lfloor L_n/2 \rfloor$，并令 $z_j = u_n + L_n/4 + j$，其中 $0 \le j < k_n$。令 Y_n 以概率 e^{-z_j}/k_n 取值 e^{z_j}，并以剩余概率取值零。因此 $\mathbb{E}Y_n = 1$。对于 $0 < a \le 1$,

$$\frac{\mathbb{E}\Phi(aY_n)}{a} = \frac{1}{k_n} \sum_{j=0}^{k_n - 1} e^{\sigma(z_j + \ln a)}.$$

由于 $\sigma' \ge -c$ 几乎处处成立， $e^{\sigma(r)} \le e^c e^{\sigma(t)}$ 对 $r \le t \le r+1$成立。从 $z_j + \ln a$ 开始的单位区间内部互不相交，且位于 v_n以下。在 $(-\infty, v_n]$ 上，$(e^\sigma - 1)_+$ 的积分等于 J_n。因此，最后一个均值至多为 $e^c(1 + J_n/k_n) \le 2e$，且关于 a 和 n一致。对于固定的 $a > 0$，当 $L_n/4 > |\ln a|$时，所有 $z_j + \ln a$ 都属于 $[u_n, v_n]$。由此可知，对于所有充分大的 n， $I_\Phi(aY_n) = ae^{-n}$。根据（2.1），$\|Y_n\|_F \to 0$。定理 3.1 和定理 1.1 给出了所述等式以及 E_Φ中的紧凸集。

为证明 E_Φ 是适当的，令 $d_n = e^{v_n}$，并选取互不相交的可测集 $C_n \subset (0,1)$，使其测度为 $2^{-n}/\Phi(d_n)$；这是可能的，因为 $\Phi(d_n) > 1$。那么 $f = \sum_{n\ge1} d_n\chi_{C_n}$ 满足

$$I_\Phi(f) = \sum_{n\ge1} 2^{-n} = 1, \qquad I_\Phi(2f) = \sum_{n\ge1} 2^{-n}2^{1+h_n+n} = \infty.$$

对于任意 $a > 0$ 令 $m_n = \lceil ae^{w_n} \rceil$。由单调性可得

$$\ln \frac{\Phi(m_n/a)}{m_n!} \ge w_n + e^{2w_n} - m_n \ln m_n \longrightarrow \infty.$$

因此 $\sum_{m\ge1} \Phi(m/a)/m!$ 在每个尺度上均如此，正如对泊松分布所断言的那样。

最后写成 $H(s) = \int_0^s e^{\sigma(t)}\,dt$。在下降区间 $[w_n, u_{n+1}]$ 上，对 $\sigma \geq 0$ 进行积分得到 $J_{n+1} \geq (e^{h_n} - 1 - h_n)/c$。由于 $u_{n+1} = O(h_n)$ 且 $n = O(h_n)$，我们有 $u_n/J_n \to 0$、$n/J_n \to 0$ 和 $v_n/J_n,\ w_n/J_n \to 12$。不等式 $J_n \leq H(u_n) \leq J_n + u_n$ 以及恒等式 $H(v_n) = H(u_n) + e^{-n}L_n$ 给出 $H(v_n)/v_n \to 1/12$。对于 $u_n \leq s \leq w_n$，$H(s)/s \geq J_n/w_n$。对于 $w_n \leq s \leq u_{n+1}$，在前一个长度为一的区间上积分得到

$$\frac{H(s)}{s} \geq \frac{e^{h_n} - e^{-n}}{(h_n + n)u_{n+1}} \longrightarrow \infty.$$

这证明了 $\liminf_{s\to\infty} H(s)/s = 1/12$。代入 $u = e^t$ 即可得到所述的对数平均。 □

4 An approachable point which is not a needlepoint

我们转向定理 1.3 中的空间。在整个构造过程中，$p = 1/2$。在第 k 个加项中，我们将展示一个单位向量，它是范数不超过 2^{-k} 的向量的算术平均。

固定一个整数 $S \geq 2$，并令

$$K = 4096(S+1)^3, \qquad m = 16(K+1)S.$$

在 $E = \mathbb{R}^m$ 上，令 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_p$ 分别表示通常的 ℓ_1-范数和 p-范数。令

$$q(x) = \inf_{b+c=x} \left(\|b\|_1^p + S^{-p}\|c\|_p^p\right)^{1/p}, \qquad e = m^{-1}(1, \ldots, 1).$$

下确界可以达到，因为其次水平集是紧的。p-三角不等式可通过将分解相加得到。对于每个 $b \in E$，柯西–施瓦茨不等式给出 $\|b\|_p = (\sum_j |b_j|^{1/2})^2 \leq m\|b\|_1$。由于 $S \leq m$，$m^{-1}\|\cdot\|_p$ 的 p-三角不等式给出

$$m^{-1}\|x\|_p \leq q(x) \leq \min\{\|x\|_1, S^{-1}\|x\|_p\}.$$

因此，q 是一个 p-范数，在欧几里得拓扑下连续，并且 $q(e) = 1$。我们记 $\operatorname{dist}_q(x, \mathbb{R}e) = \inf_{a\in\mathbb{R}} q(x - ae)$。由于 $q(x-ae)^p \geq |a|^p - q(x)^p$，此下确界可以取到。

设 $q(x) \leq h$，并取一个极小分解 $x = b + c$。则 $\|b\|_1 \leq h$ 且 $\|c\|_p \leq Sh$。c 的第 j 大坐标绝对值至多为 $\|c\|_p j^{-2}$。保留其 S 个最大坐标的指标 I，并利用 $\sum_{j>S} j^{-2} \leq 1/S$，我们得到

$$\|x\|_1 \leq (S+1)h, \qquad |I| \leq S, \qquad \sum_{j\notin I} |x_j| \leq 2h. \tag{4.1}$$

引理 4.1。设 v_1、……、$v_n \in E$ 和 $w_i > 0$ 满足 $\sum_i w_i = 1$ 和 $\sum_i w_i v_i = \beta e$。置

$$t = \sum_i w_i q(v_i), \qquad s = \sup_{\sum_i |a_i| \le 1} \operatorname{dist}_q \left(\sum_i a_i v_i, \mathbb{R}e \right).$$

那么 $|\beta| \le 64$ 最大值$\{t, s\}$。

证明。我们首先考虑均值为 e 的有限支撑随机向量 W。令 $h = 1/32$。假设 W 的每个取值的 q-范数至多为 h，且其取值的每个凸组合与 $\mathbb{R}e$ 的距离不超过 q，其中距离为 h。令 Y 为 K 个 W 的独立副本的均值，并令 $\ell(x) = \sum_j x_j$。由 (4.1)，$\|W\|_2$ 和 $|\ell(W)|$ 均至多为 $S+1$。独立性给出

$$\mathbb{E}\|Y - e\|_2^2 \le (S+1)^2/K, \qquad \mathbb{E}|\ell(Y) - 1|^2 \le (S+1)^2/K.$$

选取一个实现，使得 $S\|Y-e\|_2^2 + |\ell(Y)-1|^2 \le (S+1)^3/K = 1/4096$。对于任意至多含有 S 个指标的集合 V，柯西–施瓦茨不等式给出

$$\ell(Y) \ge 1 - 1/64, \qquad \sum_{j \in V} |Y_j| \le S/m + \sqrt{S}\,\|Y - e\|_2 \le 5/64.$$

将 (4.1) 应用于 W 的每个抽样值，并令 U 为所得指标集的并集。于是 $|U| \le KS$ 和 $\sum_{j \notin U} |Y_j| \le 2h$。关于凸组合的假设给出 $a \in \mathbb{R}$，其中 $q(Y - ae) \le h$。再应用一次 (4.1)，可得 V，其中存在 $|V| \le S$ 使得 $\sum_{j \notin V} |Y_j - a/m| \le 2h$。由于 $(K+1)S/m = 1/16$，对 $U \cup V$ 的补集求和可得$15|a|/16 \le 4h$。另一方面，

$$1 - 6/64 \le \ell(Y) - \sum_{j \in V} |Y_j| \le \sum_{j \notin V} |Y_j| \le |a| + 2h.$$

这两个界与 $h = 1/32$ 矛盾。

现在假设 $|\beta| > 64 \max\{t, s\}$。那么 $t > 0$，否则对于所有 i 都有 $v_i = 0$。这些向量和权重

$$b_i = \frac{v_i}{1 + q(v_i)/t}, \qquad w_i' = \frac{1}{2} w_i \big(1 + q(v_i)/t\big)$$

满足 $\sum_i w_i' = 1$、$\sum_i w_i' b_i = \beta e/2$ 和 $q(b_i) \le t$。b_i 的每个带符号线性组合，若满足 $\sum_i |a_i| \le 1$，都是 v_i 的这样一个组合。因此，取值为 $2b_i/\beta$、概率分别为 w_i' 的随机向量，其均值为 e，其取值的 q-范数小于 $1/32$，且它们的凸组合与 $\mathbb{R}e$ 的 q-距离小于 $1/32$。这与证明的第一部分矛盾。

□

引理 4.2. 设(B_k) 为 p-赋范空间，其中 $p = 1/2$，并设 $T \colon \ell_1^n \to (\bigoplus_k B_k)_p$ 是一个有界线性算子，其坐标算子为 T_k。则$\sum_k \|T_k\| \le 2\|T\|$。

证明。 固定有限多个指标 k，使得 $s_k = \|T_k\| > 0$。由紧致性，选取单位球 ℓ_1^n 中的 v_k，使得 $\|T_k v_k\| = s_k$。对于和为一的正数 a_k 以及独立的随机符号 ε_k，向量 $v = \sum_k a_k \varepsilon_k v_k$ 属于单位球。 p-三角不等式给出 $2^p\|y\|^p \le \|x+y\|^p + \|x-y\|^p$。固定其他符号并对 ε_k 取平均，因此得到 $\mathbb{E}\|T_k v\|^p \ge 2^{p-1} a_k^p s_k^p$。对 k 求和，得到

$$\|T\|^p \ge 2^{p-1} \sum_k a_k^p s_k^p.$$

置 $a_k = s_k / \sum_j s_j$。由于 $2p = 1$，乘以 2^{p-1} 之前右侧的和等于 $(\sum_k s_k)^p$。对有限集取上确界即可证明该断言。

□

对于 $k \ge 1$，取 $S_k = 2^k$，并将上文构造的相应对象记为 E_k、q_k、m_k、e_k。我们还将 $D = (\bigoplus_k E_k)_p$ 中支集位于第 k 个坐标且取值为 e_k 的元素记为 e_k。令 N 为差 $e_k - e_1$（$k \ge 2$）的闭线性包。则

$$N = \left\{ (\alpha_k e_k) : (\alpha_k) \in \ell_p,\ \sum_k \alpha_k = 0 \right\}. \tag{4.2}$$

事实上，所有 $(\alpha_k e_k)_k$ 组成的子空间是闭集，并且与 ℓ_p等距；由于 $\sum_k |\alpha_k| \le \|(\alpha_k)\|_p$，其上的求和是连续的。反之，若$\sum_k \alpha_k = 0$，则从其第一坐标中减去每个有限截断的和。所得的零和截断在 ℓ_p 中收敛。

赋予 $X = D/N$ 商空间 p 范数和 $u = e_1 + N$。空间 D 由逐坐标完备性以及 p 次幂可求和而完备。它对闭子空间 N 取商后也完备。事实上，从商空间中的任意柯西序列中取一个子序列，使其相邻项之差的范数的 p 次幂可求和。将这些差提升为范数至多是其商范数两倍的向量。这些提升在 D 中构成的级数收敛，因此该子序列乃至原序列都在 X 中收敛。由 D 的可分性可知其可分。

所有 e_k 的像都相同，均为 u。 u 的每个提升都具有形式 $(\alpha_k e_k)_k$，其中 $\sum_k \alpha_k = 1$，因此其范数至少为一。由于 $q_1(e_1) = 1$，我们有 $\|u\| = 1$。 E_k 的 m_k 个坐标单位向量在 X 中的像，其范数至多为 $1/S_k$，算术平均为 u。这些像的任意带符号线性组合的范数至多为其系数的 ℓ_1 范数，因为 $q_k \le \|\cdot\|_1$。因此 u 及其所有数乘都可以逼近。

考虑压缩性

$$Q : X \longrightarrow \left(\bigoplus_k E_k/\mathbb{R}e_k \right)_p, \qquad Q(y+N) = (y_k + \mathbb{R}e_k)_k.$$

该公式可下降到商空间，对提升取下确界即可证明范数界。由 (4.2)，$\ker Q = \mathbb{R}u$。确实，若 $y_k = \alpha_k e_k$

对所有 k 都成立，则 $y+N=(\sum_k \alpha_k)u$。对于 $x\notin \mathbb{R}u$，在 Qx 的一个非零有限维坐标上取线性泛函，即可得到一个在 x 处非零的连续线性泛函 X。每个连续线性泛函在可逼近点或针尖处都取零，因为在其算术平均趋近该点的那些向量上，泛函一致趋于零。因此， X 的可逼近点恰为 $\mathbb{R}u$，且每个针尖都属于 $\mathbb{R}u$。

对于其余两个断言，我们将使用引理 4.1 的以下推论。设 $z_i\in X$ 的范数至多为 d，并假设 $\sum_i w_i z_i=\gamma u$，其中 $w_i>0$ 和 $\sum_i w_i=1$。选择提升 $y_i=(y_{ik})_k\in D$，使得 $\|y_i\|_D\le 2d$。由 (4.2) 得，

$$\sum_i w_i y_{ik}=\beta_k e_k,\qquad (\beta_k)\in \ell_p,\qquad \sum_k \beta_k=\gamma.$$

设 ℓ_1^n 上的算子为 T，其列为 Qz_i。令 $s_k=\|T_k\|$ 且 $t_k=\sum_i w_i q_k(y_{ik})$。$\ell_p$ 到 ℓ_1 中的压缩嵌入给出

$$\sum_k t_k=\sum_i w_i\sum_k q_k(y_{ik})\le \sum_i w_i\|y_i\|_D\le 2d.$$

范数 s_k 是 $\operatorname{dist}_{q_k}(\sum_i a_i y_{ik},\mathbb{R}e_k)$ 对 $\sum_i|a_i|\le 1$的上确界。因此，引理 4.1 对每个指标集合 J 给出

$$\sum_{k\in J}|\beta_k|\le 64\sum_{k\in J}(t_k+s_k),\qquad \sum_k t_k\le 2d. \tag{4.3}$$

排除非零针点。 由齐次性，只需排除u。设它具有一个容差为 $h>0$的针点族 $x_1,\dots,x_n$。令$c=u-n^{-1}\sum_i x_i$并令 $z_i=x_i+c$。z_i的算术平均为 u，且范数至多为 $2^{1/p}h=4h$。根据 x_i的线段条件， z_i的每个凸组合都在 $4h$ 以内接近 $\mathbb{R}u$。因此，列 Qz_i 的每个凸组合的范数至多为 $4h$。对于全变差至多为一的带符号线性组合，令其正质量和负质量分别为 α,δ。其范数至多为 $4h(\alpha^p+\delta^p)^{1/p}\le 8h$。于是 $\|T\|\le 8h$，由引理 4.2 得 $\sum_k s_k\le 16h$。在 $d=4h$、 $w_i=1/n$ 及所有指标下应用 (4.3)。由此可得

$$1=\left|\sum_k \beta_k\right|\le 64(8h+16h)=1536h.$$

取 $h<1/1536$ 即可证明该断言。 □

相对局部凸性。 设 C 是 X的一个非空紧绝对凸子集，令 B_X 表示 X 的闭单位球，并置 $H_h=\operatorname{co}(C\cap hB_X)$。我们首先证明 $\bigcap_{h>0}H_h=\{0\}$。每个连续线性泛函在该交集上都为零，因为它在 $C\cap hB_X$ 上的绝对值上确界趋于零。由此，上文所建立的有限维坐标分离将交集中的每个 x 置于 $\mathbb{R}u$ 上。记 $x=\gamma u$。

对于每个 $h>0$，选取 $x_i \in C \cap hB_X$ 以及和为一的正数 w_i，使得 $c = x - \sum_i w_i x_i$ 满足 $\|c\| \le h$。我们有 $c \in 2C$，因此 $z_i = x_i + c$属于 $3C$，范数至多为 $4h$，并满足 $\sum_i w_i z_i = \gamma u$。沿用上述记号，由于绝对凸性，$T$ 将 ℓ_1^n 的单位球映入固定的紧集$Q(3C)$。

令 $P_{>j}$ 为投影到指标大于 j 的坐标上的投影。则 $\eta_j = \sup_{v \in Q(3C)} \|P_{>j} v\|$ 趋于零。事实上，这些投影是逐点收敛于零的压缩性映射，因此对紧集取有限网，并利用 p-三角不等式，即可得到在该处的一致收敛。将引理 4.2 应用于 $P_{>j} T$，得到 $\sum_{k>j} s_k \le 2\eta_j$。由 (4.3) 以及 $d = 4h$，

$$\sum_{k>j} |\beta_k| \le 64(8h + 2\eta_j).$$

在前 j 个坐标中的每一个上，$q_k(y_{ik}) \le 8h$，因此由 (4.1) 得到 $|\beta_k| = \|\beta_k e_k\|_1 \le \sum_i w_i \|y_{ik}\|_1 \le 8h(S_k + 1)$。于是

$$|\gamma| \le 8h \sum_{k \le j} (S_k + 1) + 64(8h + 2\eta_j).$$

先固定 j 令 $h \downarrow 0$，再令 $j \to \infty$。这就证明了 $\gamma = 0$。

这些集合 H_h 是 C的嵌套紧凸子集，每个集合都包含零点的相对邻域 $C \cap \{v : \|v\| < h\}$。根据紧致性以及刚刚证明的交集结论，每个零点的相对邻域都包含某个 H_h。对于一般的紧凸集 A 和 $z \in A$，将此结论应用于$C = \mathrm{co}((A - z) \cup (z - A))$。这是一个绝对凸紧集，因为它是 $[0,1] \times (A - z) \times (z - A)$ 在 $(t, a, b) \mapsto ta + (1-t)b$ 下的像。将 C 中的凸邻域与 $A - z$ 相交，再平移 z。这就给出了 A中每一点处的凸相对邻域基。Lawson [14, 推论 4.2] 和 Roberts [21, 第 453] 页的嵌入结果适用于凸邻域基，包括上面构造的闭邻域。它们给出了一个从 A 到 Hausdorff 局部凸空间中的紧凸子集的仿射同胚。现在，经典的 Krein–Milman 定理适用于每个非空 A。定理 1.3 的证明至此完成。

□

Ribe 的构造给出了一个非局部凸空间，其中含有一个一维不可补子空间，且其商空间同构于 ℓ_1 [19,定理 1]。每个此类 Banach 空间的一维非分裂扩张的核中的向量都是针尖 [9, p。 1111]。在当前空间中，直线 $\mathbb{R}u$ 不包含任何非零针点，尽管连续对偶会湮灭它。记 J_X 为从 X 到其 Banach 包络$\sim X$的映射。当对偶能够分离点时，X 上的包络范数是单位球 [8, p 的凸包的闵可夫斯基泛函 65]。对于一般的 X，包络半范数 $x \mapsto \|J_X x\|$是被 $\|\cdot\|_X$控制的最大半范数，并且 $\sim J_X(X)$ 在 X [1, §1] 中稠密。

命题 4.3。 对于每个 k，在 $F_k = \mathbb{R}^{m_k}/\mathbb{R}e_k$ 上赋予范数

$$d_k(v + \mathbb{R}e_k) = S_k^{-1} \inf_{a\in\mathbb{R}} \|v - ae_k\|_1.$$

于是 X 与 $(\bigoplus_k F_k)_1$, 等距，其包络映射为 $J_X(y + N) = (y_k + \mathbb{R}e_k)_k$。特别地，$\ker J_X = \mathbb{R}u = \bigcap_{f\in X^*} \ker f$。

证明。 对于 $v = b + c$，我们有

$$S_k^{-1}\|v\|_1 \le \|b\|_1 + S_k^{-1}\|c\|_p \le \left(\|b\|_1^p + S_k^{-p}\|c\|_p^p\right)^{1/p}.$$

因此 $S_k^{-1}\|v\|_1 \le q_k(v)$。根据 (4.2)，陈述中的映射下降为 X，并且是压缩的，因为 $\sum_k q_k(y_k) \le \|y\|_D$。将此映射记为 J，将包络半范数记为 ν。我们有 $\|Jx\| \le \nu(x)$。

设 b_{kj} 为 E_k中第 j个坐标单位向量在 X 中的像。由于 $u = m_k^{-1}\sum_j b_{kj}$ 和 $\|b_{kj}\|_X \le S_k^{-1}$，对于每个 k，我们有 $\nu(u) \le S_k^{-1}$，因此 $\nu(u) = 0$。对于 $v \in E_k$，将其在 X中的像记为 $[v]$。减去 ae_k 会使$[v]$改变 au。因此，按坐标单位向量展开可得

$$\nu([v]) = \nu([v - ae_k]) \le S_k^{-1}\|v - ae_k\|_1 \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

在 a 中取下确界，并对有限个坐标求和，可得$\nu(x) \le \|Jx\|$，对于 x 及其具有有限支撑提升的情形成立。这类元素是稠密的，且两个半范数都是连续的。因此，$\nu(x) = \|Jx\|$ 在整个 X上成立。其像包含 $(\bigoplus_k F_k)_1$，中的每个有限支撑元素，这证明了完备化后的等距同构。根据 (4.2)，核为 $\mathbb{R}u$，最后一个等式由 Hahn–Banach 定理得到。 □

在紧线段 $[0, u]$ 上，仿射函数 $tu \mapsto t$ 是连续的。 X 上的每个连续仿射函数在该线段上都是常数。因此，即使在线段上，由相对局部凸性所得到的连续仿射函数也未必能延拓到 X。

资金支持：本研究得到中国黑龙江省自然科学基金（项目编号：PL2025 A002）的资助。

References

[1] F. Albiac、J. L. Ansorena 和 P. Wojtaszczyk，关于 Banach 包络的一个“哲学”问题，*Rev. Mat. Complut.***34**（2021），747–759。[2] Y. Cui、H. Hudzik、R. Kaczmarek 和 P. Kolwicz，F-范数 Orlicz 空间的几何性质，*Aequationes Math.***93**（2019），311–343。[3] E. De Pascale、G. Trombetta 和 H. Weber，凸全有界集与强全有界集：Idzik 问题的解答，*Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **20**（1993），341–355。

[4] D. Ji 和 Y. Cui，拟赋范 Orlicz 空间的单调性，Axioms 13（2024），文章编号 696。[5] O. Kallenberg，《现代概率论基础》，第 2 版，Springer，纽约，2002。[6] N. J. Kalton，Orlicz 空间上的紧算子与严格奇异算子，Israel J. Math. 26（1977），126–136。[7] N. J. Kalton，一个具有平凡对偶且 Krein–Milman 定理成立的 F-空间，Israel J. Math. 36（1980），41–49。[8] N. J. Kalton，非局部凸空间的 Banach 包络，Canad. J. Math. 38（1986），65–86。[9] N. J. Kalton，拟巴拿赫空间，载于：《巴拿赫空间几何手册》第 2 卷，W. B. Johnson 和 J. Lindenstrauss（编），North-Holland，阿姆斯特丹，2003，1099–1130。[10] N. J. Kalton 和 N. T. Peck，重新考察 Roberts 关于无极点紧凸集的例子，Math. Ann. 253（1980），89–101。[11] N. J. Kalton、N. T. Peck 和 J. W. Roberts，《F-空间入门》，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 89，剑桥大学出版社，剑桥，1984。[12] A. Kami´nska 和 M. Zyluk，拟赋范 Orlicz 空间中的局部几何性质，Banach Center Publ. 119（2019），197–221。[13] M. Krein 和 D. Milman，正则凸集的极点，Studia Math. 9（1940），133–138。[14] J. D. Lawson，紧凸集与局部紧锥的嵌入，Pacific J. Math. 66（1976），443–453。[15] W. Matuszewska，关于广义 Orlicz 空间，Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. Astronom. Phys. 8（1960），349–353。[16] S. Mazur 和 W. Orlicz，关于若干类线性空间，Studia Math. 17（1958），97–119。[17] Nguyen To Nhu 和 Le Hoang Tri，每个针点空间都包含一个没有极点的紧凸 AR 集，Proc. Amer. Math. Soc. 120（1994），1261–1265。[18] M. Nowak，非局部凸 Orlicz 空间上的序连续线性泛函，Comment. Math. Univ. Carolin. 33（1992），465–475。[19] M. Ribe，非局部凸三空间问题的例子，Proc. Amer. Math. Soc. 73（1979），351–355。

[20] J. W. Roberts, 《一个没有极点的紧凸集》, *StudiaMath.***60** (1977), 255–266.

[21] J. W. Roberts, 《局部凸空间中紧凸集的嵌入》, *Canad. J. Math.* **30** (1978), 449–454.

Department of Mathematics, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China,
and Department of Mathe-matics, Harbin University,
Harbin 150086, China电子邮箱: *jidong@hrbu.edu.cn*
Department of Mathematics, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China电子邮箱: *cuiya@hrbust.edu.cn*