arXiv:2611.31900v1 [math.ST] 24 Nov 2026

通过支持集限制识别联合潜在结果分布的一般框架

Benedikt Koch* Kosuke Imai†

2026年11月25日

摘要

许多因果估计目标取决于潜在结果的联合分布，而由于对每个个体而言只能观测到一个潜在结果，该联合分布通常不可识别。为实现识别，研究者通常施加单调性和排除限制等假设，以约束该联合分布的支撑集。对于处理和结果均仅取有限个值的情形，我们定义一个相似度矩阵，其元素分别计算每对潜在结果分层中产生相同结果的处理数量。随后我们证明，在无混杂性条件下，当且仅当该矩阵可逆时，识别成立，从而得到一个可直接根据支撑集验证的判据。此外，我们推导出这些支持集限制下联合分布的识别公式，并证明，当且仅当平均因果估计量的被积函数在受限支持集上具有加性表示时，该估计目标才是可识别的。最后，我们推导出支持集限制的尖锐可检验含义。我们的结果统一并推广了文献中广泛存在的一系列识别结果。

关键词： 平均因果效应、因果推断、排除限制、识别、单调性

*哈佛大学统计学系博士候选人。牛津街 33 号，马萨诸塞州剑桥市 02138。电子邮箱：benedikt koch@g.harvard.edu 网址：https://benediktjkoch.github.io

†哈佛大学伊迪丝和本杰明·盖辛格政府学与统计学教授。剑桥街 1737 号，定量社会科学研究所，马萨诸塞州剑桥市 02138，美国。电子邮箱：imai@harvard.edu 网址：https://imai.fas.harvard.edu

1 引言

许多我们所关注的因果量取决于潜在结果的联合分布，而非边际分布。其中包括因果概率 [Robins and Greenland, 1989, Balke and Pearl, 1994, Pearl, 1999, Tian and Pearl, 2000], 个体处理效应分布 [Heckman et al., 1997, Fan and Park, 2010], 获益和伤害概率 [Gadbury and Iyer, 2000, Kallus, 2022, Mueller and Pearl, 2023, Ben-Michael et al., 2024], 以及反事实效用 [Koch 和 Imai, 2025, Koch et al., 2026, Imai et al., 2026]。然而，由于我们只能观测每个个体的一个潜在结果，即使处理分配是无混杂的，且满足重叠假设，这些因果估计目标通常仍然不可识别。

解决这一识别问题的一种常见方法，是通过单调性和排除限制等假设，对联合潜在结果分布的支持集加以限制。对于二元处理和二元结果，众所周知，单调性可以识别联合潜在结果分布 [Pearl，1999年，TianandPearl， 2000]。对于二元结果，在单调处理反应的假设下，这一识别结果可推广至有序多值处理 [Manski， 1997]。 Heckman 和 Pinto [2018] 将单调性推广至无序选择。在工具变量模型中，单调性与排除限制共同识别平均服从者因果效应 [Imbens and Angrist，1994，AngristandImbens， 1995]。最近，针对序数结果，Zhang等人 [2025] 和Hashimoto等人 [2026] 研究了单调增量处理效应假设下的识别问题。

本文通过推导基于支撑集限制识别联合潜在结果分布的充要条件，推广了这些识别结果。具体而言，我们首先定义一个相似度矩阵，其元素计数的是一对潜在结果层在多少个处理取值下会产生相同结果。随后，我们证明，当且仅当该相似度矩阵可逆时，联合潜在结果分布才可识别，并给出识别公式。我们还表明，若某个平均因果量是联合潜在结果分布的线性泛函，则当且仅当其被积函数在受限支持集上具有关于潜在结果的加性表示时，该因果量可识别 [参见Koch 和 Imai，2025，相关结果]。最后，我们的识别条件还蕴含受限支持集基数的两个简单界。尽管无法直接依据观测数据验证这些支撑集限制，我们推导出了尖锐可检验含义，以刻画这些限制与观测分布的相容性。违反这些条件即可否定该支撑集限制。

我们的框架将现有的支撑集限制纳入为特例 [，例如 Angrist 等人，1996年；Manski，1997年；Pearl，1999年；Tian 和 Pearl，2000年；Blair 和 Imai，2012年；Heckman 和 Pinto，2018；Zhang等，2025；Hashimoto等人， 2026], 并推广了早期的识别条件，包括 Pearl 针对马尔可夫模型的充分可逆条件 [1999] ，以及 Heckman 和 Pinto 基于零—一矩阵识别联合处理概率的秩条件 [2018] 。与这些研究不同，我们通过相似度矩阵的可逆性，推导出识别联合潜在结果分布的充要条件；该矩阵可用主分层之间的汉明距离来解释。

我们还给出了识别公式的闭式表达式，并得到了尖锐的可检验含义，用以刻画支撑集限制与观测分布的相容性。

2 通过支持集限制进行识别

2.1 设置

令 $T \in \mathcal{T} := \{0, 1, \ldots, K-1\}$ 表示处理变量，令 $Y \in \mathcal{Y} := \{0, 1, \ldots, L-1\}$ 表示观测到的结果变量，其中 $K,\ L \geq 2$。处理变量和结果变量均取有限个值，这些值可以有序，也可以无序。我们还将所有处理取值下的潜在结果向量定义为 $\boldsymbol{Y}^* := (Y(0) \ldots, Y(K-1)) \in \mathcal{Y}^K$。完整数据向量 $(T, \boldsymbol{Y}^*)$ 服从未知的超总体分布 P^*。我们通过标准的一致性假设，将完整数据向量与观测数据向量联系起来。

Assumption 1 (Consistency) 观测到的结果变量满足 $Y = Y(T$).

在假设 1 下，观测数据向量（$T,\ Y$）服从分布 $P = P^* \circ \mathcal{C}^{-1}$，其中 $\mathcal{C}(t,\ \boldsymbol{y}) = (t,\ y_t)$ 是一个粗化映射。我们对 P^*[RosenbaumandRubin, 1983]施加以下标准识别假设。为简化记号，我们不以一组观测到的处理前协变量为条件。然而，我们的所有结果在给定这些协变量的条件下仍然成立。

Assumption 2 (Strong Ignorability)

(*a*) 无混杂性：$T \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{Y}^*$。

(*b*) 重叠性：$P(T = t) > 0$ 对每个 $t \in \mathcal{T}$ 均成立。

在假设1 和2 下，我们可以用观测数据分布来表示边际潜在结果概率，即

$$P^*(Y(t) = y) = P(Y = y \mid T = t),$$

对所有 $t \in \mathcal{T}$ 和 $y \in \mathcal{Y}$ 均成立。然而，我们的目标是推导出能够从 P 识别完整联合分布 P^* 的条件。为此，定义满足假设2的联合潜在结果分布集合，

$$\mathcal{P}^* := \{P^* : P^* \text{ satisfies Assumption } 2\}.$$

此外，我们采用以下关于可识别性的标准定义 [Pearl, 1999]。

Definition 1 (Identifiability) 设 $\mathcal{P}_0^* \subseteq \mathcal{P}^*$。定义在 $\mathcal{P}^*$ 上的估计目标 θ，若对于任意会诱导出相同观测分布 $P_1 = P_2$ 的 P_1^*、$P_2^* \in \mathcal{P}_0^*$，均有 θ 可识别于 $\mathcal{P}_0^*$，则称该估计目标可识别：$(P_1^*) = \theta(P_2^*)$。

因此，识别要求：两个生成相同观测分布的完整数据分布，在估计目标 θ 上一致。我们首先研究完整数据分布本身 $\theta(P^*) = P^*$ 的识别，然后考虑该分布下函数的期望。由于每个个体只能观察到一个潜在结果，假设 2通常不足以实现识别 [Holland， 1986]。

我们考虑一组识别假设，用以限制 $\boldsymbol{Y}^*$ 的支撑集。正如第 1 节所述，这是文献中最常见的识别方法之一。

Assumption 3 (Restricted Support) 潜在结果向量几乎必然满足 $\boldsymbol{Y}^* \in \mathcal{S}$，其中 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Y}^K$ 是一个非空集合。

假设3的一个典型例子是单调性 [，例如 Manski，1997年；Pearl，1999年；Zhang等，2025；Hashimoto等人， 2026]。例如，对于二元处理和二元结果，单调性要求 $Y(0) \leq Y(1)$，从而将 $\boldsymbol{Y}^* = (Y(0)\ Y(1))$ 的支撑集限制为 $\in \mathcal{S} = \{(0,0)、(0,1)、(1,1)\}$。在全文中，我们将定义 1 应用于满足给定支撑集限制$\mathcal{S}$的完整数据分布类，

$$\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}} := \{P^* \in \mathcal{P}^* : P^* \text{ satisfies Assumption 3 with } \mathcal{S}\}.$$

2.2 识别的充要条件

我们证明，简单的矩阵求逆即可完全刻画给定的支撑集限制何时能够识别完整数据分布 P^*。对于假设 $\mathcal{S}$ 3 中定义的受限支持集，我们构造一个$|\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|$ 取整数值的“相似度”矩阵 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$，其（$\boldsymbol{y}$， $\boldsymbol{y}'$）项统计两个潜在结果向量相同的处理取值个数：

$$(\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}})_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'} := \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbb{1}\{y_t = y'_t\} \ = \ K - d_H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'), \tag{1}$$

对于 $\boldsymbol{y}$， $\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}$其中 $d_H(\boldsymbol{y}$， $\boldsymbol{y}')$: $= \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbb{1}\{y_t \neq y'_t\}$ 表示汉明距离。

以下定理表明，该相似度矩阵可逆是联合潜在结果分布可识别的充要条件。求逆后的矩阵还提供了一个闭式识别公式，用于计算在 P^* 下任意函数的期望值。

Theorem 1 (Identification of the Joint Potential Outcome Distribution) 分布 P^*在 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$ 上可识别，当且仅当 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 可逆。在这种情况下，对于任意 $P^* \in \mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$ 和 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$,

$$P^*(\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}} (\boldsymbol{G}^{-1}_{\mathcal{S}})_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} P(Y = y'_t \mid T = t). \tag{2}$$

特别地，对于任意函数 h： $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}^K \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_{P^*}[h(T, \boldsymbol{Y}^*)] = \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}} (\boldsymbol{G}^{-1}_{\mathcal{S}})_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} h(t, \boldsymbol{y}) P(T = t) \sum_{k \in \mathcal{T}} P(Y = y'_k \mid T = k).$$

定理 1的证明见附录 B.1。

公式（2）通过求解以下方程的逆，确定主层比例，

$$\sum_{t\in\mathcal{T}} P(Y = y'_t \mid T = t) = \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} (\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}})_{\boldsymbol{y}',\boldsymbol{y}} P^*(\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}),$$

对于 $\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}$。换言之，每个可观测的边际概率之和都是各层比例的加权和，权重由汉明相似度给出。如果 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 不可逆，其列便线性相关。因此，在各层之间重新分配概率质量，仍可能使所有可观测的和保持不变，从而多个完整数据分布可以诱导出相同的观测分布。可逆可确保这种映射是唯一的。下文通过一个关于二元处理与结果的单调性的简单示例，说明该定理的应用 [Pearl, 1999]。

Example 1 (Monotonicity with binary treatment and outcome) 令 $\mathcal{T} = \mathcal{Y} = \{0,1\}$。单调性几乎必然意味着 $Y(0) \le Y(1)$。因此，$\boldsymbol{Y}^* = (Y(0)\ Y(1))$ 的支撑集为 $\mathcal{S} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$，不包括 $(1,0)$。相应的相似度矩阵 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 在方程 (1) 中可逆，其形式为

$$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

定理1 像 意味着 P^* 是可识别的。记 $q_t := P(Y = 1 \mid T = t)$。方程 (2) 给出

$$\begin{aligned}
P^*(\boldsymbol{Y}^* = (0,0)) &= \frac{1}{4}\left[3(2 - q_0 - q_1) - 2(1 - q_0 + q_1) + (q_0 + q_1)\right] = 1 - q_1 \\
&= P(Y = 0 \mid T = 1), \\
P^*(\boldsymbol{Y}^* = (0,1)) &= \frac{1}{4}\left[-2(2 - q_0 - q_1) + 4(1 - q_0 + q_1) - 2(q_0 + q_1)\right] = q_1 - q_0 \\
&= P(Y = 1 \mid T = 1) - P(Y = 1 \mid T = 0), \\
P^*(\boldsymbol{Y}^* = (1,1)) &= \frac{1}{4}\left[(2 - q_0 - q_1) - 2(1 - q_0 + q_1) + 3(q_0 + q_1)\right] = q_0 \\
&= P(Y = 1 \mid T = 0).
\end{aligned}$$

例 1 中的支撑集限制，在单调处理反应 [Manski, 1997]的条件下，可扩展到有限多个处理和结果。然而，正如下一个例子所示，只有当结果为二元时，这一限制才能识别联合分布。

Example 2 (Monotone treatment response) 单调处理反应要求 $Y(s) \le Y(t)$ 几乎处处成立，只要 $s \le t$。首先，令 $\mathcal{T} = \{0,1\}$ 和 $\mathcal{Y} = \{0,1,2\}$。然后

$$\mathcal{S} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$$

and

$$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

其列是线性相关的，因为

$$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}[:,(0,1)] + \boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}[:,(1,2)] = \boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}[:,(0,2)] + \boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}[:,(1,1)].$$

因此，根据定理 *1*， P^* 在 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$上不可识别。对于每个 $L = |\mathcal{Y}| \geq 3$，同样的结论也成立，因为支撑集必须包含 $\mathcal{S}$。

现在假设二元结果 $\mathcal{Y} = \{0,1\}$，但处理一般且满足 $K = |\mathcal{T}| \geq 2$。于是

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^K : y_0 \leq \cdots \leq y_{K-1}\} = \{(0,\ldots,0),\ (0,\ldots,0,1),\ \ldots,\ (0,1,\ldots,1),\ (1,\ldots,1)\}.$$

每个层 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$ 都由其包含的 $\boldsymbol{1}$ 的数量唯一确定，即 $i := \sum_{t\in\mathcal{T}} y_t$。由$i$ 和 j 索引的层在恰好 $|i-j|$ 种处理下存在差异，因此方程 (1) 给出

$$(\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}})_{i,j} = K - |i-j|,$$

对于 i、$j = 0$、.....、K。由于 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$的列线性无关，当且仅当对于任意 $K \geq 2$都有 $L = 2$ 时，在单调处理反应下识别成立。在这种情况下，层概率可以直接从支撑集中读取。令 $\boldsymbol{y}^{(i)}$ 表示恰好包含 i 个 $\boldsymbol{1}$ 的层。于是

$$P^*(\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}^{(i)}) = \begin{cases} P(Y=0 \mid T=K-1), & i=0, \\ P(Y=1 \mid T=K-i) - P(Y=1 \mid T=K-i-1), & 1 \leq i \leq K-1, \\ P(Y=1 \mid T=0), & i=K. \end{cases}$$

例 2 表明，对于非二元结果，仅有单调性并不能识别联合分布。下一个例子表明，如果我们进一步假设处理最多只能将每个个体的结果提高一个等级 [Zhang等人，2025，Hashimoto等人，2026]。

Example 3 (Monotonic incremental treatment effects) 单调增量处理效应要求：当 $s \leq t$ 时， $0 \leq Y(t) - Y(s) \leq 1$。也就是说，随着处理水平提高，每个个体的结果最多只能提高一次，且只提高一个等级。这给出了支撑集

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^K : y_0 \leq \cdots \leq y_{K-1},\ y_{K-1} - y_0 \leq 1\}.$$

与示例2相比，当 $K = 2$ 且 $L = 3$时，这将从 $\mathcal{S}$中排除层，（0，2）。对于一般的K， $L \geq 2$每个层 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$ 仍由其各项之和唯一确定，即 $i := \sum_{t\in\mathcal{T}} y_t$。

由 i 和 j 索引的层在 $|i-j|<K$时具有 $K-|i-j|$ 个匹配项，否则没有匹配项。相应的相似度矩阵为

$$(\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}})_{i,j}=\max\{K-|i-j|,0\},$$

对于 i，$j=0$、……、K（$L-1$）。由于其列线性无关，$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$是可逆的，且定理 *1*意味着 P^* 是可识别的。

层概率也可以直接从支撑集中读出。每个层 $\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}$ 要么保持在 $y_0\in\mathcal{Y}$，要么在唯一的某个处理下增加一。因此，

$$P^*(\boldsymbol{Y}^*=\boldsymbol{y})=\begin{cases}P(Y\geq y_0\mid T=0)-P(Y>y_0\mid T=K-1), & y_{K-1}=y_0,\\ P(Y>y_0\mid T=t)-P(Y>y_0\mid T=t-1), & y_t>y_{t-1}.\end{cases}\tag{3}$$

为适应结果类别是标签而非有序类别的情形，Heck- man 和 Pinto [2018] 提出了无序单调性。下一个例子表明，该条件通常不足以保证识别。

Example 4 (Unordered monotonicity) 无序单调性要求，对于每个 s、$t\in\mathcal{T}$、$a\in\mathcal{Y}$ 和 $\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}$，我们都有以下两种情况之一：

$$\mathbb{1}\{y_s=a\}\leq\mathbb{1}\{y_t=a\}\quad or\quad\mathbb{1}\{y_s=a\}\geq\mathbb{1}\{y_t=a\}.$$

该限制通常无法识别完整数据分布 P^*。例如，当 $K=2$ 和 $L=4$时，支撑集 $\mathcal{S}=\{$（0、0）、（1、1）、（2、2）、（3、3）、（0、2）、（0、3）、（1、2）、（1、3）$\}$满足无序单调性。其相似度矩阵为

$$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}2&0&0&0&1&1&0&0\\0&2&0&0&0&0&1&1\\0&0&2&0&1&0&1&0\\0&0&0&2&0&1&0&1\\1&0&1&0&2&1&1&0\\1&0&0&1&1&2&0&1\\0&1&1&0&1&0&2&1\\0&1&0&1&0&1&1&2\end{pmatrix}.$$

其列线性相关，因为

$$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}[:,(0,2)]+\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}[:,(1,3)]=\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}[:,(0,3)]+\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}[:,(1,2)].$$

因此，根据定理*1*，P^* 在 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$上不可识别。

尽管前述所有示例都施加了某种形式的单调性，但这并不是可用于识别的唯一一种支撑集限制，正如附录5 中的示例A所示。

2.3 支持集大小的简单界

尽管定理1 为识别提供了充要条件，但当受限支持集 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 较大时，相似度矩阵 $\mathcal{S}$ 可能具有很高的维度。下面给出的关于支持集大小的两个简单界，为识别提供了易于检验的必要条件。

Corollary 1 (Cardinality Constraints on the Support) 对于每个 $t \in \mathcal{T}$，令 $\mathcal{S}_t := \{y_t : \boldsymbol{y} \in \mathcal{S}\}$。$P^*$ 在 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$ 上的可识别性要求同时满足

(a) $|\mathcal{S}| \leq 1 + \sum_{t\in\mathcal{T}}(|\mathcal{S}_t| - 1)$,

(b) $|\mathcal{S}| \leq 1 + K(L-1)$.

这些条件是识别所必需的，但并不充分。

推论 1 的证明见附录 B.2。条件 (b) 由条件 (a)推出，但更易于验证，因为它仅取决于 $|\mathcal{S}|$、K 和 L，而不取决于每个潜在结果的单独支撑集。任一条件不成立都意味着 P^* 在 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$上不可识别。工具变量模型下与条件 (b) 相关的一个界见 Heckman 和 Pinto [2018,定理 T-7]。

我们通过重新考察例 2 和 4 来说明基数界的简洁性；在这些例子中，我们证明了不可识别性，同时避免构造相似度矩阵。

Example 2 (Monotone treatment response, continued) 单调处理反应将支撑集限制为 $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}^K : \ y_0 \leq \cdots \leq y_{K-1}\}$。对于任意 $K \geq 2$ 和 $L \geq 3$,

$$|\mathcal{S}| = \binom{K+L-1}{K} > 1 + K(L-1).$$

因此，推论 *(b)* 的条件 *1* 不成立，且 P^* 在 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$上不可识别。

Example 4 (Unordered monotonicity, continued) 回顾一下，对于 $K = 2$ 和 $L = 4$, 无序单调性允许支撑集为 $\mathcal{S} = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3)\}$。由于

$$|\mathcal{S}| = 8 > 7 = 1 + K(L-1).$$

推论 *(b)* 的条件 *1* 不满足，且 P^* 在 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$上不可识别。

2.4 期望的识别

定理 1给出了识别联合潜在结果分布的必要且充分条件。然而，许多因果估计目标是潜在结果函数的期望，而这些期望是联合潜在结果分布的线性泛函。即使联合潜在结果分布可能无法识别，其中一些估计目标仍然可识别。在 Koch 和 Imai [2025], 的结果基础上，以下定理给出了在受限支持集下识别期望的必要且充分条件，并提供了闭式识别公式。

THEOREM 2 (IDENTIFICATION OF EXPECTATIONS) 设 $h: \mathcal{T} \times \mathcal{Y}^K \to \mathbb{R}$。那么，$\mathbb{E}_{P^*}[h(T, \boldsymbol{Y}^*)]$ 在 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$ 上可识别，当且仅当存在函数 $h_k: \mathcal{T} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathcal{T}$，使得

$$h(t, \boldsymbol{y}) = \sum_{k \in \mathcal{T}} h_k(t, y_k),$$

对于每个 $t \in \mathcal{T}$和 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$。在这种情况下，对于每个 $P^* \in \mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$,

$$\mathbb{E}_{P^*}[h(T, \boldsymbol{Y}^*)] = \sum_{t \in \mathcal{T}} P(T = t) \sum_{k \in \mathcal{T}} \sum_{a \in \mathcal{Y}} h_k(t, a) P(Y = a \mid T = k).$$

定理 2 的证明源于 Koch 和 Imai [2025, 推论 1] 在受限支持集 $\mathcal{S}$上的应用。仅在 $\mathcal{S}$上才要求具有可加性。因此，在 $\mathcal{Y}^K$ 上不具有可加性的函数，在支撑集限制下仍可能具有可识别的期望，即使 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 不可逆。当$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 可逆时，每个函数都能在 $\mathcal{S}$上获得加性表示，而定理 1则可识别所有此类期望。作为示例，我们将定理 2 应用于无序单调性 [Heckman 和 Pinto, 2018]。

EXAMPLE 4 (UNORDERED MONOTONICITY, CONTINUED) 正如我们在例 4中所看到的，无序单调性通常无法识别 P^*。然而，人们可能会关注特定层的概率，包括“总是接受者”的比例，其表示为 $P^*(\boldsymbol{Y}^* = (a, \ldots, a))$，其中 $a \in \mathcal{Y}$[Heckman 和 Pinto, 2018]。定义

$$h(t, \boldsymbol{y}) := \mathbb{1}\{\boldsymbol{y} = (a, \ldots, a)\}.$$

在无序单调性下，存在 $t_a \in \mathcal{T}$，使得对于每个 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$,

$$h(t, \boldsymbol{y}) = \mathbb{1}\{y_{t_a} = a\} = \sum_{k \in \mathcal{T}} \mathbb{1}\{k = t_a\} \mathbb{1}\{y_k = a\} = \sum_{k \in \mathcal{T}} h_k(t, y_k), \tag{4}$$

其中 $h_k(t, b)$: 对于 $= \mathbb{1}\{k = t_a\}\mathbb{1}\{b = a\}$ t, $k \in \mathcal{T}$以及 $b \in \mathcal{Y}$。为说明这一点，回顾一下，对于 $K = 2$和$L = 4$，示例 4 中的支撑集为

$$\mathcal{S} = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3)\}.$$

此处，$t_a = 1$对于 $a \in \{0, 1\}$和 $t_a = 0$对于 $a \in \{2, 3\}$。根据方程(4)，h在 $\mathcal{S}$ 上具有加性表示，而定理2 给出

$$\begin{aligned}
P^*(\boldsymbol{Y}^* = (a, \ldots, a)) &= \mathbb{E}_{P^*}[h(T, \boldsymbol{Y}^*)] \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} P(T = t) \sum_{k \in \mathcal{T}} \sum_{b \in \mathcal{Y}} h_k(t, b) P(Y = b \mid T = k) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} P(T = t) \sum_{k \in \mathcal{T}} \sum_{b \in \mathcal{Y}} \mathbb{1}\{k = t_a\}\mathbb{1}\{b = a\} P(Y = b \mid T = k) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} P(T = t) P(Y = a \mid T = t_a) \\
&= P(Y = a \mid T = t_a)
\end{aligned}$$

$$= \min_{t \in \mathcal{T}} P(Y = a \mid T = t),$$

其中，最后一个等式由 $\mathbb{1}\{y_{t_a} = a\} \leq \mathbb{1}\{y_t = a\}$ 对每个 $t \in \mathcal{T}$ 以及 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$ 在无序单调性下得出。这恢复了*Heckman 和 Pinto [2018,* 推论 *C-2]*中确立的结果。

3 尖锐可检验含义

假设3 中的支撑集限制是我们方法的核心，但我们无法直接根据观测数据验证它。本节将推导其尖锐可检验含义，研究人员可在实践中利用这些含义检验该假设。这些条件之所以是尖锐的，是因为：(1) 如果这些条件不成立，则不存在任何支撑在 $\mathcal{S}$ 上的联合潜在结果分布能够与观测数据分布相容；(2) 如果这些条件成立，则至少存在一个这样的分布。

假设 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 可逆。然后，定义一个候选分布

$$\pi_{\boldsymbol{y}}(P) := \sum_{\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}} (\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1})_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} P(Y = y'_t \mid T = t), \tag{5}$$

对于 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$。根据假设1–3，定理1 意味着这样的分布给出了真实的层概率，$\pi_{\boldsymbol{y}}(P) = P^*(\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y})$，其中 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$。然而，当假设3 不成立时，情况未必如此。下一个定理将推导尖锐可检验含义。

Theorem 3 (Sharp Testable Implications) 假设 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 可逆。

(*a*) 可检验含义：假设 P^* 满足假设 *1* 和 *2*。若假设 *3* 对 P^*也成立，则其观测分布 $P = P^* \circ \mathcal{C}^{-1}$ 满足：

$$\pi_{\boldsymbol{y}}(P) \geq 0, \qquad \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} \pi_{\boldsymbol{y}}(P) = P(Y = a \mid T = t), \tag{6}$$

对于每个 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$、$t \in \mathcal{T}$和 $a \in \mathcal{Y}$，其中 $\pi_{\boldsymbol{y}}(P)$ 定义于方程 (5) 中。若不满足方程 (6)，则意味着违反了假设 *3*。

(*b*) 尖锐性：令 P 为满足重叠性（假设 *2(b)*）的观测分布。若方程 (6) 对 P成立，则存在 $P^* \in \mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$使得 $P = P^* \circ \mathcal{C}^{-1}$。

定理 3 的证明见附录B.3。定理 3 中的条件要求层候选概率为非负数，且其和等于观测边际分布。如果这两个条件都满足，则这些概率之和为一。作为示例，我们将该定理应用于单调增量处理效应 [Zhang等人、2025、Hashimoto等人， 2026]。

Example 3 (Monotonic incremental treatment effects, continued) 当 $K = 2$ 和 $L = 3$时，单调增量处理效应下的支撑集为

$$\mathcal{S} = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2)\}.$$

为验证假设 3关于支撑集的可检验含义，我们根据公式 (5) 推导出公式 (3)中的候选分层概率

$$\begin{aligned}
&\pi_{(0,0)}(P) = P(Y \geq 0 \mid T = 0) - P(Y > 0 \mid T = 1) = P(Y = 0 \mid T = 1),\\
&\pi_{(0,1)}(P) = P(Y > 0 \mid T = 1) - P(Y > 0 \mid T = 0) = P(Y = 0 \mid T = 0) - P(Y = 0 \mid T = 1),\\
&\pi_{(1,1)}(P) = P(Y \geq 1 \mid T = 0) - P(Y > 1 \mid T = 1) = 1 - P(Y = 0 \mid T = 0) - P(Y = 2 \mid T = 1),\\
&\pi_{(1,2)}(P) = P(Y > 1 \mid T = 1) - P(Y > 1 \mid T = 0) = P(Y = 2 \mid T = 1) - P(Y = 2 \mid T = 0),\\
&\pi_{(2,2)}(P) = P(Y \geq 2 \mid T = 0) - P(Y > 2 \mid T = 1) = P(Y = 2 \mid T = 0).
\end{aligned}$$

这些候选分布与方程 (6)中的观测边际分布一致。因此，定理 3 的可检验含义归结为非负性，

$$\begin{gathered}
P(Y = 0 \mid T = 0) \geq P(Y = 0 \mid T = 1), \quad P(Y = 2 \mid T = 1) \geq P(Y = 2 \mid T = 0),\\
P(Y = 0 \mid T = 0) + P(Y = 2 \mid T = 1) \leq 1.
\end{gathered}$$

4 结论

对潜在结果联合分布的支撑集施加限制，是因果推断中常见的识别策略。在一致性、无混杂性和重叠性成立的条件下，我们证明：当且仅当一个仅由受限支持集决定的矩阵可逆时，该分布才是可识别的。该矩阵利用汉明距离衡量潜在结果分层对之间的相似性。当矩阵可逆时，联合分布及其线性泛函均可表示为观测概率的闭式表达式。该判据使研究人员能够确定由领域知识所激发的支持集限制是否足以实现识别。

此外，研究人员通常关注潜在结果函数的期望，而非完整的联合分布。我们证明：当且仅当其被积函数在受限支持集上具有加性表示时，该期望才是可识别的。即使联合分布不可识别，这一条件仍可能成立。

最后，我们推导出支撑集限制的尖锐可检验含义。当通过求逆相似度矩阵得到的候选概率为负，或与观测结果分布不一致时，观测数据便排除了该支撑集限制。

参考文献

Joshua D. Angrist 和 Guido W. Imbens。在可变处理强度模型中对平均因果效应进行两阶段最小二乘估计。《美国统计学会会刊》，90 (430):431–442，1995。数字对象唯一标识符：10.1080/01621459.1995.10476535。网址https://doi.org/10.1080/01621459.1995.10476535。

Joshua D. Angrist、Guido W. Imbens 和 Donald B. Rubin。使用工具变量进行因果效应识别。《美国统计学会会刊》，91(434)：444–455，1996 年。数字对象唯一标识符：10.1080/01621459.1996.10476902。

Alexander Balke 和 Judea Pearl。反事实概率：计算方法、界与应用。载于 Ramon Lopez de Mantaras 和 David Poole 编，人工智能中的不确定性：第十届会议论文集，第 46–54 页。Morgan Kaufmann，1994 年。数字对象唯一标识符：10.1016/B978-1-55860-332-5.50011-0。网址https://doi.org/10.1016/B978-1-55860-332-5.50011-0。

Eli Ben-Michael、Kosuke Imai 和 Zhichao Jiang。采用非对称反事实效用的政策学习。《美国统计学会会刊》，119(548)：3045–3058，2024 年。数字对象唯一标识符：10.1080/01621459.2023.2300507。

Graeme Blair 和 Kosuke Imai。列表实验的统计分析。《政治分析》，20(1): 47–77，2012。数字对象唯一标识符: 10.1093/pan/mpr048。

Yanqin Fan 和 Sang Soo Park。处理效应分布的精确界及其统计推断。计量经济学理论，26(3):931–951，2010。数字对象唯一标识符: 10.1017/S0266466609990168。网址https://doi.org/10.1017/S0266466609990168。

Gary L. Gadbury 和 Hari K. Iyer。单位–处理交互作用及其实际影响。*Biometrics*，56(3):882–885，2000。数字对象唯一标识符: https://doi.org/10.1111/j.0006-341X.2000.00882.x。网址https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.0006-341X.2000.00882.x。

Naoya Hashimoto、Yuta Kawakami 和 Jin Tian。在单调性假设下潜在结果与观测变量联合概率的界与识别。载于 Emtiyaz Khan、Yingzhen Li、Arno Solin 和 Aaditya Ramdas（编），人工智能与统计国际会议第 *29* 届会议论文集，机器学习研究论文集第 300 卷，第 2827–2835 页。PMLR，2026年。网址：https://proceedings.mlr.press/v300/hashimoto26a.html。

James J. Heckman 和 Rodrigo Pinto。无序单调性。《计量经济学》，86(1)：1–35，2018。数字对象唯一标识符：10.3982/ECTA13777。网址：https://doi.org/10.3982/ECTA13777。

James J. Heckman、Jeffrey Smith 和 Nancy Clements。充分利用项目评估和社会实验：考虑项目影响的异质性。《评论》

经济学研究，64(4)：487–535，1997年。数字对象唯一标识符：10.2307/2971729。网址 https://academic.oup.com/restud/article/64/4/487/1603734。

Paul W. Holland。统计学与因果推断。《美国统计学会会刊》，81(396):945–960，1986年。数字对象唯一标识符：10.1080/01621459.1986.10478354。网址 https://doi.org/10.1080/01621459.1986.10478354。

Kosuke Imai、Sooahn Shin、D. James Greiner 和 Ryan Halen。分诊评分：一种反事实风险评估工具。arXiv 预印本 arXiv:2606.21050，2026年。网址https://arxiv.org/abs/2606.21050。

Guido W. Imbens 和 Joshua D. Angrist。局部平均处理效应的识别与估计。《计量经济学》，62(2):467–475，1994年。数字对象唯一标识符：10.2307/2951620。网址 https://doi.org/10.2307/2951620。

Nathan Kallus。《有何危害？受处理负面影响比例的精确界》。载于第*36*届神经信息处理系统国际会议论文集，NIPS '22，美国纽约州雷德胡克，2022年。Curran Associates Inc. ISBN 9781713871088。

Benedikt Koch 和 Kosuke Imai。基于反事实损失的统计决策理论。arXiv 预印本 arXiv:2505.08908，2025年。网址https://arxiv.org/abs/2505.08908。

Benedikt Koch、Kosuke Imai 和 Tomasz Strzalecki。反事实效用决策的公理化基础。arXiv 预印本 arXiv:2605.05521，2026年。网址 https://arxiv.org/abs/2605.05521。

Peter D. Lax。《线性代数及其应用》。Wiley-Interscience，霍博肯（新泽西州），第2版，2007年。ISBN 978-0-471-75156-4。

Charles F. Manski。单调处理反应。《计量经济学》，65(6)：1311–1334，1997年。数字对象唯一标识符：10.2307/2171738。网址https://doi.org/10.2307/2171738。

Scott Mueller 和 Judea Pearl。个性化决策——概念性介绍。因果推断期刊，11(1)：20220050，2023年。网址 https://doi.org/10.1515/jci-2022-0050。

Judea Pearl。因果概率：三种反事实解释及其识别。*Synthese*，121(1–2)：93–149，1999年。数字对象唯一标识符：10.1023/A:1005233831499。网址 https://doi.org/10.1023/A:1005233831499。

James Robins 和 Sander Greenland。在个体风险随机模型下的因果概率。*Biometrics*，45(4)：1125–1138，1989年。数字对象唯一标识符：10.2307/2531765。网址 https://doi.org/10.2307/2531765。

Paul R Rosenbaum 和 Donald B Rubin。观察性研究中倾向得分在因果效应研究中的核心作用。*Biometrika*，70(1):41–55，1983。

Jin Tian 和 Judea Pearl。因果概率：界与识别。数学与人工智能年鉴，28(1–4):287–313，2000。数字对象唯一标识符：10.1023/A:1018912507879。网址 https://doi.org/10.1023/A:1018912507879。

Chao Zhang、Zhi Geng、Wei Li 和 Peng Ding。针对具有序数结果的结果的原因，识别并界定必要性概率。 *Biometrika*，112(3):asaf049，2025。数字对象唯一标识符：10.1093/biomet/asaf049。网址https://doi.org/10.1093/biomet/asaf049。

补充附录

支持集限制的更多示例

Example 5 (Noisy-OR mechanism; Pearl, 1999) 令 $\mathcal{T}=\{(0,0)、(1、0)、(0、1)、(1、1)\}$ 以及 $\mathcal{Y}=\{0,1\}$。对于二元辅助变量 U_0、U_1、U_2，考虑如下机制

$$Y(t)=U_0\vee(t_1\wedge U_1)\vee(t_2\wedge U_2),$$

对于 $t=(t_1,t_2)\in\mathcal{T}$，其中 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别表示逻辑“或”和“与”。记作 $\boldsymbol{Y}^*=(Y(0,0)\ Y(1,0)\ Y(0,1)\ Y(1,1))$，这将潜在结果限制为

$$\mathcal{S}=\{(0,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}.$$

相似度矩阵及其逆矩阵为

$$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}4&2&2&1&0\\2&4&2&3&2\\2&2&4&3&2\\1&3&3&4&3\\0&2&2&3&4\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}5&-4&-4&4&1\\-4&8&4&-8&0\\-4&4&8&-8&0\\4&-8&-8&16&-4\\1&0&0&-4&5\end{pmatrix}.$$

因此，定理 1 意味着 P^* 是可识别的，无需假设 U_0、U_1、U_2之间相互独立。为恢复层概率，回顾公式 (2)，

$$P^*(\boldsymbol{Y}^*=\boldsymbol{y})=\sum_{\boldsymbol{y}'\in\mathcal{S}}(\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1})_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'}\sum_{t\in\mathcal{T}}P(Y=y'_t\mid T=t).$$

对于 $q_{ij}:=P(Y=1\mid T=(i,j))$，令 $i,j\in\{0,1\}$，并将内层求和记为

$$r_{\boldsymbol{y}'}:=\sum_{t\in\mathcal{T}}P(Y=y'_t\mid T=t),$$

对于 $\boldsymbol{y}'\in\mathcal{S}$。五个内部求和式为

$$\begin{aligned}
r_{(0,0,0,0)}&=(1-q_{00})+(1-q_{10})+(1-q_{01})+(1-q_{11})\\
&=4-q_{00}-q_{10}-q_{01}-q_{11},\\
r_{(0,0,1,1)}&=(1-q_{00})+(1-q_{10})+q_{01}+q_{11}\\
&=2-q_{00}-q_{10}+q_{01}+q_{11},\\
r_{(0,1,0,1)}&=(1-q_{00})+q_{10}+(1-q_{01})+q_{11}\\
&=2-q_{00}+q_{10}-q_{01}+q_{11},\\
r_{(0,1,1,1)}&=(1-q_{00})+q_{10}+q_{01}+q_{11}\\
&=1-q_{00}+q_{10}+q_{01}+q_{11},\\
r_{(1,1,1,1)}&=q_{00}+q_{10}+q_{01}+q_{11}.
\end{aligned}$$

所得的层概率是通过使用 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1}$ 的各行对边缘分布加权得到的

$$
\begin{aligned}
P^*(\boldsymbol{Y}^* = (0,0,0,0)) &= \frac{1}{8}\left[5r_{(0,0,0,0)} - 4r_{(0,0,1,1)} - 4r_{(0,1,0,1)} + 4r_{(0,1,1,1)} + r_{(1,1,1,1)}\right] \\
&= 1 - q_{11}, \\
P^*(\boldsymbol{Y}^* = (0,0,1,1)) &= \frac{1}{8}\left[-4r_{(0,0,0,0)} + 8r_{(0,0,1,1)} + 4r_{(0,1,0,1)} - 8r_{(0,1,1,1)}\right] \\
&= q_{11} - q_{10}, \\
P^*(\boldsymbol{Y}^* = (0,1,0,1)) &= \frac{1}{8}\left[-4r_{(0,0,0,0)} + 4r_{(0,0,1,1)} + 8r_{(0,1,0,1)} - 8r_{(0,1,1,1)}\right] \\
&= q_{11} - q_{01}, \\
P^*(\boldsymbol{Y}^* = (0,1,1,1)) &= \frac{1}{8}\left[4r_{(0,0,0,0)} - 8r_{(0,0,1,1)} - 8r_{(0,1,0,1)} + 16r_{(0,1,1,1)} - 4r_{(1,1,1,1)}\right] \\
&= q_{10} + q_{01} - q_{11} - q_{00} \\
P^*(\boldsymbol{Y}^* = (1,1,1,1)) &= \frac{1}{8}\left[r_{(0,0,0,0)} - 4r_{(0,1,1,1)} + 5r_{(1,1,1,1)}\right] \\
&= q_{00}.
\end{aligned}
$$

B 证明

B.1 定理1的证明

令 $\Delta(\mathcal{S}) = \{\boldsymbol{p} \in [0,1]^{\mathcal{S}} : \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} p_{\boldsymbol{y}} = 1\}$ 为支撑集为 $\mathcal{S}$ 的 $\boldsymbol{Y}^*$ 概率单纯形。

首先，假设联合分布 P^* 在 $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}^*$上可识别。考虑引理中定义的边缘化矩阵$\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$ 1。令 $\boldsymbol{p}, \widetilde{\boldsymbol{p}} \in \Delta(\mathcal{S})$ 满足

$$
\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}\widetilde{\boldsymbol{p}}. \tag{B.1}
$$

我们将证明 $\boldsymbol{p} = \widetilde{\boldsymbol{p}}$。定义两个完整数据分布如下

$$
\begin{aligned}
P^*(T = t, \boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}) &= \frac{1}{K} p_{\boldsymbol{y}}, \\
\widetilde{P}^*(T = t, \boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}) &= \frac{1}{K} \widetilde{p}_{\boldsymbol{y}},
\end{aligned}
$$

对于 $t \in \mathcal{T}$和 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$。在这两种分布下， T 均匀分布且与 $\boldsymbol{Y}^*$独立，因此~假设 2 成立。显然，$P^*(\boldsymbol{Y}^* \in \mathcal{S}) = P^*(\boldsymbol{Y}^* \in \mathcal{S}) = 1$，因此假设 3 也成立。~因此， P^*， $P^* \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}^*$。

令 $P = P^* \circ \mathcal{C}^{-1}$和 $\widetilde{P} = \widetilde{P}^* \circ \mathcal{C}^{-1}$表示诱导出的观测分布。对于任意 $t \in \mathcal{T}$和$a \in \mathcal{S}_t$，根据一致性和方程（B.1）

$$
\begin{aligned}
P(T = t, Y = a) &= P^*(T = t, Y(t) = a) \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}:y_t=a} P^*(T = t, \boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}:y_t=a} \frac{1}{K} p_{\boldsymbol{y}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{K} \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} p_{\boldsymbol{y}} \\
&= \frac{1}{K} (\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{p})_{t,a} \\
&= \frac{1}{K} (\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}} \widetilde{\boldsymbol{p}})_{t,a} \\
&= \frac{1}{K} \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} \widetilde{p}_{\boldsymbol{y}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} \frac{1}{K} \widetilde{p}_{\boldsymbol{y}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} \widetilde{P}^*(T = t, \boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}) \\
&= \widetilde{P}^*(T = t, Y(t) = a) \\
&= \widetilde{P}(T = t, Y = a).
\end{aligned}
$$

~因此 $P = P$ 在 $\boldsymbol{Y}^*$的支撑集上成立。由于它们在支撑集之外均为零，根据定义 ~中的可识别性 1 可知 $P^* = P^*$，特别是 $\boldsymbol{p} = \widetilde{\boldsymbol{p}}$。

因此，对于任意 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$，$\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}^\top \widetilde{\boldsymbol{p}}$。由于 $\boldsymbol{p}$，$\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \Delta(\mathcal{S})$ 是任意的，引理 1(c) 给出$\boldsymbol{w} \in$像$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^\top)$。此外，由于 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$是任意的，像$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^\top) = \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$。因此 $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$具有满列秩，根据引理 1(a)，$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^\top \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$ 是可逆的。

No现在假设 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 是可逆的。固定 $P^* \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}^*$ 并定义概率向量

$$
\boldsymbol{p} = (P^*(\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}))_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}}.
$$

根据引理 $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$ 中边缘化矩阵的定义1 以及假设 1、2和 3，

$$
\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}) := \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{p} = (P^*(Y(t) = a))_{t \in \mathcal{T},\, a \in \mathcal{S}_t} = (P(Y = a \mid T = t))_{t \in \mathcal{T},\, a \in \mathcal{S}_t}.
$$

由于 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 是可逆的，

$$
\boldsymbol{p} = \boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1} \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^\top \boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}).
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
P^*(\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{p})_{\boldsymbol{y}} \\
&= \left(\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1} \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^\top \boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}) \right)_{\boldsymbol{y}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}} (\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1})_{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'} \left(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^\top \boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}) \right)_{\boldsymbol{y}'} \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}} (\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1})_{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{a \in \mathcal{S}_t} (\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})_{(t,a), \boldsymbol{y}'} \, (\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}))_{t,a} \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}} (\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1})_{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{a \in \mathcal{S}_t} \mathbb{1}\{y'_t = a\} P(Y = a \mid T = t) \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}} (\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1})_{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} P(Y = y'_t \mid T = t). \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}
$$

由于右侧仅是观测分布 P的函数，因此联合分布 $P^*(\boldsymbol{Y}^*)$ 是可识别的。这也证明了所述的概率分解。根据假设 2，对于每个$t \in \mathcal{T}$和 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$,

$$P^*(T = t, \boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}) = P(T = t)P^*(\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}).$$

由于 $P(T = t)$ 已观测到，全数据分布 $P^*(T, \boldsymbol{Y}^*)$ 也是可识别的。这就证明了另一个方向，从而证明了所声称的等价性。最后，对于任意函数 h： $\mathcal{T} \times \mathcal{Y}^K \to \mathbb{R}$，公式（B.2）给出

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P^*}[h(T, \boldsymbol{Y}^*)] &= \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h(t, \boldsymbol{y}) P^*(T = t, \boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h(t, \boldsymbol{y}) P(T = t) P^*(\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h(t, \boldsymbol{y}) P(T = t) \sum_{\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}} (\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1})_{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'} \sum_{k \in \mathcal{T}} P(Y = y'_k \mid T = k) \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}} (\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}^{-1})_{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} h(t, \boldsymbol{y}) P(T = t) \sum_{k \in \mathcal{T}} P(Y = y'_k \mid T = k).
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

B.2 推论 1 的证明

考虑引理 $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$ 中定义的边缘化矩阵 1。根据引理1(b)，其核为

$$\ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}} : \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} v_{\boldsymbol{y}} = 0 \text{ for all } t \in \mathcal{T}, a \in \mathcal{S}_t \right\}. \tag{B.3}$$

对于每个 $t \in \mathcal{T}$，任意选择一个 $b_t \in \mathcal{S}_t$。我们首先证明 $\ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{V}_{\mathcal{S}}$，其中

$$\mathcal{V}_{\mathcal{S}} := \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}} : \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}} v_{\boldsymbol{y}} = 0, \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} v_{\boldsymbol{y}} = 0 \text{ for all } t \in \mathcal{T},\ a \in \mathcal{S}_t \setminus \{b_t\} \right\}. \tag{B.4}$$

由此，利用 P^* 关于 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$ 的可识别性，我们得到所声称的界。

假设 $\boldsymbol{v} \in$ 核$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})$ 满足方程（B.3）。对于任意 $t \in \mathcal{T}$,

$$\sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}} v_{\boldsymbol{y}} = \sum_{a \in \mathcal{S}_t} \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} v_{\boldsymbol{y}} = 0.$$

这验证了方程（ $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ B.4）中的第一个条件。第二个条件 $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ 显然满足，因此 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}$。

反过来，令 $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}$。对于每个 $t \in \mathcal{T}$和 $a \in \mathcal{S}_t \setminus \{b_t\}$，方程（B.3）中的条件成立。对于剩余的 $a = b_t$，我们得到

$$\sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = b_t} v_{\boldsymbol{y}} = \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}} v_{\boldsymbol{y}} - \sum_{a \in \mathcal{S}_t \setminus \{b_t\}} \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} v_{\boldsymbol{y}} = 0,$$

因为根据假设，两个求和都为零。因此 $\boldsymbol{v} \in \ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})$ 也如此。这证明了 $\ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{V}_{\mathcal{S}}$。

空间 $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ 由 $|\mathcal{S}|$ 个未知数和 $1+\sum_{t\in\mathcal{T}}(|\mathcal{S}_t|-1)$ 个线性方程定义。由于根据假设 P^* 在 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$ 上可识别，定理 1 和引理 1(a) 意味着 $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}=\ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})=\{\mathbf{0}\}$。根据 [Lax，2007，第 3 章，推论 A']，因此必有

$$|\mathcal{S}|\le 1+\sum_{t\in\mathcal{T}}(|\mathcal{S}_t|-1),$$

从而证明了条件（a）。由于 $\mathcal{S}_t\subseteq\mathcal{Y}$ 且 $|\mathcal{Y}|=L$，

$$|\mathcal{S}|\le 1+\sum_{t\in\mathcal{T}}(|\mathcal{S}_t|-1)\le 1+K(L-1),$$

从而证明了条件（b）。

最后，我们证明条件（a）（因此条件（b））不足以实现可识别性。令 $K=3$，$L=2$，以及

$$\mathcal{S}=\{(0,0,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}.$$

于是，对于每个 $t\in\mathcal{T}$，$\mathcal{S}_t=\{0,1\}$

$$|\mathcal{S}|=4=1+\sum_{t\in\mathcal{T}}(|\mathcal{S}_t|-1)=1+K(L-1).$$

然而，$\boldsymbol{v}=(\mathbf{1},\ -1,\ -1,\ \mathbf{1})^\top$ 满足

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}:y_t=0}v_{\boldsymbol{y}}=1-1=0,\qquad\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}:y_t=1}v_{\boldsymbol{y}}=-1+1=0,$$

对于每个 $t\in\mathcal{T}$。因此，根据公式（B.3），$\boldsymbol{v}\in$ 核（$\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$）。然而 $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$，因此核（$\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$）$\neq\{\mathbf{0}\}$，所以 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 根据引理1(a)，是奇异的。根据定理1，P^* 在 $\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$ 上不可识别。□

B.3 定理 3的证明

在假设 3下，定理1 表明

$$\pi_{\boldsymbol{y}}(P)=P^*(\boldsymbol{Y}^*=\boldsymbol{y}),$$

对于 $\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}$。因此 $\pi_{\boldsymbol{y}}(P)\ge 0$。根据假设 1 和 2，

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}:y_t=a}\pi_{\boldsymbol{y}}(P)=\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}:y_t=a}P^*(\boldsymbol{Y}^*=\boldsymbol{y})=P^*(Y(t)=a)=P(Y=a\mid T=t),$$

对于每个 $t\in\mathcal{T}$和 $a\in\mathcal{Y}$。因此，方程（6）得到满足。因此，在一致性和强可忽略性条件下，方程（6）不成立将否定假设 3。

为证明尖锐性，令 P 满足方程（6）和重叠性，$P(T=t)>0$ 对所有 $t\in\mathcal{T}$ 均成立。我们将证明存在一个 $P^*\in\mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$ 使得 $P=P^*\circ\mathcal{C}^{-1}$。

首先，根据方程（6），对任意固定的 $t\in\mathcal{T}$ 求边际概率之和

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}}\pi_{\boldsymbol{y}}(P)=\sum_{a\in\mathcal{S}_t}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}:y_t=a}\pi_{\boldsymbol{y}}(P)=\sum_{a\in\mathcal{S}_t}P(Y=a\mid T=t)=1.$$

由于对所有 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$，$\pi_{\boldsymbol{y}}(P) \geq 0$，我们定义完整数据分布

$$P^*(T = t, \boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{y}) = P(T = t)\pi_{\boldsymbol{y}}(P),$$

对所有 $t \in \mathcal{T}$，$\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$，其外部概率质量为零。在 P^* 下，T 与 $\boldsymbol{Y}^*$ 相互独立。根据假设，重叠性成立；$\boldsymbol{Y}^* \in \mathcal{S}$ 则由构造可知。因此，$P^* \in \mathcal{P}^*_{\mathcal{S}}$。此外，

$$P^*(T = t, Y(t) = a) = P(T = t) \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} \pi_{\boldsymbol{y}}(P) = P(T = t, Y = a),$$

对每个 $t \in \mathcal{T}$ 和 $a \in \mathcal{Y}$ 均成立。因此 $P^* \circ \mathcal{C}^{-1} = P$。证明完毕。

B.4 技术引理

以下引理引入了一个零一矩阵，该矩阵将联合概率映射为边缘分布，并将此矩阵的性质与我们的识别结果联系起来。在 Heckman 和 Pinto [2018] 的工具变量模型中，也采用了类似的构造来描述处理选择。这里，我们使用 Gram表示 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^\top \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$，基于主分层之间的汉明距离，得到一个易于解释的识别条件，并推导出闭式识别公式。

LEMMA 1 令 $\varnothing \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{Y}^K$ 为有限集，并记 $\mathcal{S}_t = \{y_t : \boldsymbol{y} \in \mathcal{S}\}$。令 $\Delta(\mathcal{S}) = \{\boldsymbol{p} \in [0,1]^{\mathcal{S}} : \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}} p_{\boldsymbol{y}} = 1\}$ 为支撑集位于 $\mathcal{S}$ 上的 $\boldsymbol{Y}^*$ 的概率单纯形。定义零一边际化矩阵 $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}} \in \{0,1\}^{(\sum_{t \in \mathcal{T}} |\mathcal{S}_t|) \times |\mathcal{S}|}$ 如下

$$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})_{(t,a),\boldsymbol{y}} := \mathbb{1}\{y_t = a\},$$

对于 $t \in \mathcal{T}$、$a \in \mathcal{S}_t$ 和 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$。矩阵 $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$ 将联合分布 $\boldsymbol{p} \in \Delta(\mathcal{S})$ 映射为其边际分布 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p})$ 组成的向量，即

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{p} = \left(\sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} p_{\boldsymbol{y}} \right)_{t \in \mathcal{T}, a \in \mathcal{S}_t}.$$

则以下陈述成立：

(a) $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^\top \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$。特别地，当且仅当 $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$具有满列秩$\operatorname{rank}(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}) = |\mathcal{S}|$时，$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$可逆，或者等价地，$\ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}) = \{\boldsymbol{0}\}$。

(b) $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$ 的核为

$$\ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}} : \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}: y_t = a} v_{\boldsymbol{y}} = 0 \ \textit{for all}\ t \in \mathcal{T}, a \in \mathcal{S}_t \right\}.$$

因此，对于所有 $\boldsymbol{v} \in \ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})$，$\boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{v} = 0$。

(c) 证明 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$。如果对于所有 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{p}' \in \Delta(\mathcal{S})$，满足 $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{p}'$，我们都有 $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{p}'$，那么$\boldsymbol{w} \in$ 像$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^\top)$。

证明：我们首先证明（a）。我们证明 $\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^{\top}\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$。事实上，对于任意 $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}' \in \mathcal{S}$，

$$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^{\top}\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'} = \sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{a\in\mathcal{S}_t} \mathbb{1}\{y_t = a\}\mathbb{1}\{y'_t = a\} = \sum_{t\in\mathcal{T}} \mathbb{1}\{y_t = y'_t\} = (\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}})_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'}.$$

接下来，我们证明：$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$ 可逆，当且仅当 $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$ 具有满列秩。对于每个 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$，

$$\boldsymbol{v}^{\top}\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\top}\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^{\top}\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}\boldsymbol{v}\|_2^2.$$

因此，$\boldsymbol{v}$ ∈属于$\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}$的核，当且仅当 $\boldsymbol{v}$ ∈属于$\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$的核。于是，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}} \text{ is invertible} &\iff \ker(\boldsymbol{G}_{\mathcal{S}}) = \{\boldsymbol{0}\} \\
&\iff \ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}) = \{\boldsymbol{0}\} \\
&\iff \operatorname{rank}(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}) = |\mathcal{S}|,
\end{aligned}$$

其中，最后一个等价关系由定理 [Lax，2007，第 3 章，定理 2]推出。

接下来，我们证明（b）。令 $\boldsymbol{v} = (v_{\boldsymbol{y}})_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$，则

$$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}\boldsymbol{v})_{t,a} = \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} \mathbb{1}\{y_t = a\}v_{\boldsymbol{y}} = \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}:y_t=a} v_{\boldsymbol{y}}.$$

因此

$$\boldsymbol{v} \in \ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}) \iff \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}\boldsymbol{v} = 0 \iff \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}:y_t=a} v_{\boldsymbol{y}} = 0,$$

对于所有 $t \in \mathcal{T}$，$a \in \mathcal{S}_t$均成立，这就证明了核的刻画。于是，如果 $\boldsymbol{v}$ ∈属于$\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$的核，那么，对于任意 $t \in \mathcal{T}$，

$$\boldsymbol{1}^{\top}\boldsymbol{v} = \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} v_{\boldsymbol{y}} = \sum_{a\in\mathcal{S}_t}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}:y_t=a} v_{\boldsymbol{y}} = 0.$$

最后，我们证明 (c)。固定 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$，并假设 $\boldsymbol{w} \notin$ 属于像$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^{\top})$。根据标准线性代数结果[Lax，2007，第 3 章，定理 5′]，像$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^{\top})$ =核$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})^{\perp}$。也就是说，$\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^{\top}$的像是 $\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}$的核的正交补。这意味着存在 $\boldsymbol{v}$ =$(v_{\boldsymbol{y}})_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}}$ ∈核$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})$ $\setminus\{\boldsymbol{0}\}$：$\boldsymbol{w}^{\top}\boldsymbol{v} \neq 0$。令 $\boldsymbol{p}$ =$(p_{\boldsymbol{y}})_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}}$ ∈ Δ$(\mathcal{S})$的各项均严格为正，例如对每个 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{S}$均有 $p_{\boldsymbol{y}} = 1/|\mathcal{S}|$。定义

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \alpha\boldsymbol{v}, \quad \text{with } 0 < \alpha < \frac{\min_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} p_{\boldsymbol{y}}}{\max_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} |v_{\boldsymbol{y}}|}.$$

注意，这样的 α 存在。事实上，根据假设，对于所有条目，$0 < p_{\boldsymbol{y}}$，且 $\boldsymbol{v}$ 至少有一个非零条目，因为 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$。注意，

$$\min_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} p'_{\boldsymbol{y}} \geq \min_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} p_{\boldsymbol{y}} - \alpha \max_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} |v_{\boldsymbol{y}}| > 0,$$

and,

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} p'_{\boldsymbol{y}} = \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} p_{\boldsymbol{y}} + \alpha \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} v_{\boldsymbol{y}} = \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}} p_{\boldsymbol{y}} = 1,$$

其中，第二个等式根据 $\boldsymbol{v} \in \ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})$ 和 (b) 部分由 $\mathbf{1}^\top \boldsymbol{v} = 0$ 得出。因此，$\boldsymbol{p}' \in \Delta(\mathcal{S})$。由于 $\boldsymbol{v} \in \ker(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})$,

$$\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{p} + \alpha \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{M}_{\mathcal{S}} \boldsymbol{p}.$$

由 (c) 可知，$\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{p} = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{p}'$。因此,

$$0 = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{v} \neq 0,$$

根据构造，$\alpha \neq 0$；根据 $\boldsymbol{v}$ 的选取，$\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{v} \neq 0$，因为 $\boldsymbol{w} \notin$ 像$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}}^\top)$ $=$核$(\boldsymbol{M}_{\mathcal{S}})^\perp$。这就产生了矛盾，从而证明了 (c)。

□